CALCULO NUMÉRICO

INTEROLAÇÃO E APROXIMAÇÃO POLINIMIAL

RAFAEL MARTINS CHIMENES

1 POLINÔMIOS INTERPOLADORES DE LAGRANGE E METODO DE NEWVILLE

1.1 Lagrange

Para aproximar $f(8{,}4)$ utilizando os polinômios interpoladores de Lagrange de grau 1, 2 e 3 conhecendo os pontos:

$f(8{,}1) = 16{,}94410$
$f(8{,}3) = 17{,}56492$
$f(8{,}6) = 18{,}50515$
$f(8{,}7) = 18{,}82091$

Para uma aproximação de grau 1, $P(x)$ é um polinômio de primeiro grau que passa pelos pontos $x_0 = 8{,}3$ e $x_1 = 8{,}6$.

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$$

Definimos:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 8{,}6}{8{,}3 - 8{,}6} = \frac{x - 8{,}6}{-0{,}3} = \frac{x}{-0{,}3} + 28.66666$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 8{,}3}{8{,}6 - 8{,}3} = \frac{x - 8{,}3}{0{,}3} = \frac{x}{0{,}3} - 27{,}66666$$

Seja $f(x_0) = f(8{,}3) = 17{,}56492$ e $f(x_1) = f(8{,}6) = 18{,}50515$:

$$\begin{aligned} P(x) &= 17{,}56492\left(\frac{x}{-0{,}3} + 28{,}66666\right) + 18{,}50515\left(\frac{x}{0{,}3} - 27{,}66666\right) \\ &= \frac{17{,}56492x}{-0{,}3} + 503{,}52758 + \frac{18{,}50515x}{0{,}3} - 511{,}97569 \\ &= -58{,}54973x + 61{,}68383x - 8{,}44811 = 3{,}1341x - 8{,}44811 \end{aligned}$$

De fato, se aplicarmos o polinômio $P(x)$ em x_0:

$P(8{,}3) = 3{,}1341(8{,}3) - 8{,}44811 = 17{,}56492 = f(x_0) = f(8{,}3)$, da mesma forma p$ara$ x_0.

Para uma aproximação de grau 2, $P(x)$ é um polinômio de segundo grau que passa pelos pontos $x_0 = 8{,}1$, $x_1 = 8{,}3$ e $x_2 = 8{,}6$.

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

Definimos:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 8{,}3)(x - 8{,}6)}{(8{,}1 - 8{,}3)(8{,}1 - 8{,}6)} = \frac{x^2 - 16{,}9x + 71{,}38}{0{,}1}$$
$$= \frac{x^2}{0{,}1} - 169x + 713{,}8$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 8{,}1)(x - 8{,}6)}{(8{,}3 - 8{,}1)(8{,}3 - 8{,}6)} = \frac{x^2 - 16{,}7x + 69{,}66}{-0{,}06}$$
$$= \frac{x^2}{-0{,}06} + 278{,}33333x - 1161$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 8{,}1)(x - 8{,}3)}{(8{,}6 - 8{,}1)(8{,}6 - 8{,}3)} = \frac{x^2 - 16{,}4x + 67{,}23}{0{,}15}$$
$$= \frac{x^2}{0{,}15} - 109{,}33333x + 448{,}2$$

Seja $f(x_0) = f(8{,}1) = 16{,}94410$, $f(x_1) = f(8{,}3) = 17{,}56492$ e $f(x_2) = f(8{,}6) = 18{,}50515$:

$$\begin{aligned} P(x) = {} & 16{,}94410\left(\frac{x^2}{0{,}1} - 169x + 713{,}8\right) \\ & + 17{,}56492\left(\frac{x^2}{-0{,}06} + 278{,}33333x - 1161\right) \\ & + 18{,}50515\left(\frac{x^2}{0{,}15} - 109{,}33333x + 448{,}2\right) \\ & = 0{,}06x^2 + 2{,}1201x - 4{,}16531 \end{aligned}$$

De fato, se aplicarmos o polinômio $P(x)$ em x_0:

$P(8{,}1) = 0{,}06(8{,}1^2) + 2{,}1201(8{,}1) - 4{,}16531 = 16{,}9441 = f(x_0) = f(8{,}1)$, da mesma forma para x_0.

Para uma aproximação de grau 3, $P(x)$ é um polinômio de terceiro grau que passa pelos pontos $x_0 = 8{,}1$, $x_1 = 8{,}3$, $x_2 = 8{,}6$ e $x_3 = 8{,}7$.

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

Definimos:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-\ x_1)(x_0-\ x_2)(x_0-\ x_3)} = \frac{(x-8{,}3)(x-8{,}6)(x-8{,}7)}{(8{,}1-8{,}3)(8{,}1-8{,}6)(8{,}1-8{,}7)}$$
$$= \frac{x^3-25{,}6x^2+218{,}41x-621{,}006}{-0{,}06}$$
$$= \frac{x^3}{-0{,}06} - \frac{25{,}6x^2}{-0{,}06} + \frac{218{,}41x}{-0{,}06} - \frac{621{,}006}{-0{,}06}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-\ x_0)(x_1-\ x_2)(x_1-\ x_3)} = \frac{(x-8{,}1)(x-8{,}6)(x-8{,}7)}{(8{,}3-8{,}1)(8{,}3-8{,}6)(8{,}3-8{,}7)}$$
$$= \frac{x^3-25{,}4x^2+214{,}95x-606{,}042}{0{,}024}$$
$$= \frac{x^3}{0{,}024} - \frac{25{,}4x^2}{0{,}024} + \frac{214{,}95x}{0{,}024} - \frac{606{,}042}{0{,}024}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-\ x_0)(x_2-\ x_1)(x_2-\ x_3)} = \frac{(x-8{,}1)(x-8{,}3)(x-8{,}7)}{(8{,}6-8{,}1)(8{,}6-8{,}3)(8{,}6-8{,}7)}$$
$$= \frac{x^3-25{,}1x^2+209{,}91x-584{,}901}{-0{,}015}$$
$$= \frac{x^3}{-0{,}015} - \frac{25{,}1x^2}{-0{,}015} + \frac{209{,}91x}{-0{,}015} - \frac{584{,}901}{-0{,}015}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-\ x_0)(x_3-\ x_1)(x_3-\ x_2)} = \frac{(x-8{,}1)(x-8{,}3)(x-8{,}6)}{(8{,}7-8{,}1)(8{,}7-8{,}3)(8{,}7-8{,}6)}$$
$$= \frac{x^3-25x^2+208{,}27x-578{,}178}{0{,}024}$$
$$= \frac{x^3}{0{,}024} - \frac{25x^2}{0{,}024} + \frac{208{,}27x}{0{,}024} - \frac{578{,}178}{0{,}024}$$

Seja $f(x_0) = f(8{,}1) = 16{,}94410$, $f(x_1) = f(8{,}3) = 17{,}56492$, $f(x_2) = f(8{,}6) = 18{,}50515$ e $f(x_3) = f(8{,}7) = 18{,}82091$:

$$\begin{aligned}
P(x) = 16{,}94410 &\left(\frac{x^3}{-0{,}06} - \frac{25{,}6x^2}{-0{,}06} + \frac{218{,}41x}{-0{,}06} - \frac{621{,}006}{-0{,}06}\right) \\
&+ 17{,}56492\left(\frac{x^3}{0{,}024} - \frac{25{,}4x^2}{0{,}024} + \frac{214{,}95x}{0{,}024} - \frac{606{,}042}{0{,}024}\right) \\
&+ 18{,}50515\left(\frac{x^3}{-0{,}015} - \frac{25{,}1x^2}{-0{,}015} + \frac{209{,}91x}{-0{,}015} - \frac{584{,}901}{-0{,}015}\right) \\
&+ 18{,}82091\left(\frac{x^3}{0{,}024} - \frac{25x^2}{0{,}024} + \frac{208{,}27x}{0{,}024} - \frac{578{,}178}{0{,}024}\right) \\
&= -0{,}00208333x^3 + 0{,}11208333x^2 + 1{,}68620416x - 2{,}96077249
\end{aligned}$$

A tabela a seguir compara a aproximação para o ponto $f(8{,}4)$ usando os polinômios de Lagrange de graus 1,2 e 3 que foram encontrados:

$grau$	$f(8{,}4)$
1	17.87833
2	17.87713
3	17.87714

Sabendo que a função do problema é $f(x) = x \ln x$ podemos calcular o valor exato de $f(8{,}4)$ que é 17,87714. Vemos que o polinômio de grau 3 é o que mais se aproxima do valor real por ser incluir uma maior quantidade de dados sobre a função.

1.2 Neville

A tabela abaixo mostra os resultados gerados pelo algoritmo do Método de Neville para encontrar a aproximação $f(8{,}4)$ considerando os mesmos pontos da subseção anterior:

x_i	Q_{i0}	Q_{i1}	Q_{i2}	Q_{i3}
8,1	16,94410			
8,3	17,56492	17.87533		
8,6	18,50515	17.87833	17.87713	
8,7	18,82091	17.87363	17.8771550	17.8771425

1.3 limitante para o Erro

Usando a fórmula do erro de Lagrange temos um limitante para o erra nos casos $n = 1$ e $n = 2$

Considerando $f(x) = x \ln x$, $f'(x) = \log x + 1$, $f''(x) = \frac{1}{x}$ e $f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$,

Para $n = 1$:

$$|f(8{,}4) - P_1(8{,}4)| = \left|\frac{f''(\varepsilon(8{,}4))}{2!}(x - x_0)(x - x_1)\right|$$
$$= \left|\frac{1}{2(\varepsilon(8{,}4))}(8{,}4 - 8{,}1)(8{,}4 - 8{,}3)\right| = \left|\frac{1}{2(\varepsilon(8{,}4))}(0{,}3)(0{,}1)\right| \leq \frac{0{,}03}{2(8)}$$
$$= 1{,}875 \times 10^{-3}$$

O erro absoluto real nesse caso é:

- **Lagrange:** $|f(8{,}4) - P_1(8{,}4)| = |17{,}8771463 - 17{,}8783300| = 10^{-3}$
- **Neville:** $|f(8{,}4) - P_1(8{,}4)| = |17{,}8771463 - 17.8753300| = 10^{-3}$

E para $n = 2$:

$$|f(8{,}4) - P_2(8{,}4)| = \left|\frac{f'''(\varepsilon(8{,}4))}{2!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\right|$$
$$= \left|-\frac{1}{(\varepsilon(8{,}4))^2}(8{,}4 - 8{,}1)(8{,}4 - 8{,}3)(8{,}4 - 8{,}6)\right|$$
$$= \left|-\frac{1}{(\varepsilon(8{,}4))^2}(0{,}3)(0{,}1)(-0{,}2)\right| \leq \frac{0{,}006}{8^2} = 9{,}375 \times 10^{-5}$$

O erro absoluto real nesse caso é:

- **Lagrange:** $|f(8{,}4) - P_2(8{,}4)| = |17{,}8771463 - 17.8771300| = 10^{-5}$
- **Neville:** $|f(8{,}4) - P_2(8{,}4)| = |17{,}8771463 - 17.8771300| = 10^{-5}$

2 DIFERENÇAS DIVIDIDAS DE NEWTON E SPLINE CÚBICO

Para aproximar $f(0{,}25)$ considerando os dados a seguir:

x	$f(x)$
0,1	-0.62049958
0,2	-0.28398668
0,3	0.00660095
0,4	0.24842440

2.1 Diferenças divididas de Newton

As diferenças divididas de Newton calculadas pelo algoritmo são:

x_i		Primeira diferença dividida	Segunda diferença dividida	Terceira diferença dividida
0,1	-0.62049958			
		3.36512900		
0,2	-0.28398668		-2.29626350	
		2.90587630		-0.47315167
0,3	0.00660095		-2.43820900	
		2.41823450		
0,4	0.24842440			

O polinômio de Newton nesse caso é $P_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_2)$

$$\begin{aligned} P_3(0{,}25) = {} & -0{,}62049958 + 3{,}36512900(0{,}25 - 0{,}1) \\ & - 2{,}29626350(0{,}25 - 0{,}1)(0{,}25 - 0{,}2) \\ & - 0{,}47315167(0{,}25 - 0{,}1)(0{,}25 - 0{,}2)(0{,}25 - 0{,}3) \\ & = -0{,}13277477437 \end{aligned}$$

Para calcular a diferenças regressivas de Newton e aproximar $f(0{,}25)$, como a aproximação está mais próxima aos primeiros pontos dados, consideramos os valores da diagonal da tabela gerada pelo algoritmo, com isso temos $h = (x_{i+1} - x_i) = 0{,}1$ e $s = \frac{(x - x_0)}{h} = \frac{0{,}15}{0{,}1} = \frac{3}{2}$.

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n) =$$

$$\begin{aligned} P_3(0{,}25) = {} & P_3\left(0{,}1 + \frac{3}{2}(0{,}1)\right) \\ & = -0{,}62049958 + \frac{3}{2}(0{,}1)(3{,}365129) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(0{,}1)^2(-2{,}29626350) \\ & + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(0{,}1)^3(-0{,}47315167) = -0{,}13277477437 \end{aligned}$$

2.2 Spline Cúbico

Para aproximar o ponto $f(0{,}25)$ definimos o Spline Cubico:

$S(x) = S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j\left(x - x_j\right)^2 + d_j\left(x - x_j\right)^3$, para $x_j \leq x \leq x_j$.

A tabela a seguir mostra os valores gerados pelo algoritmo:

j	x_j	a_j	b_j	c_j	d_j
0	0,1	−0.62049958	3.45508693	0.0	−8.99579333
1	0,2	−0.28398668	3.18521313	−2.69873800	−0.94630333
2	0,3	0.00660095	2.61707643	−2.98262900	9.94209667
3	0,4	0.24842440			

$$S(x) = \begin{cases} -0.62049958 + 3.45508693(x - 0{,}1) - 8.99579333(x - 0{,}1)^3, se\ 0{,}1 \leq x < 0{,}2 \\ -0.28398668 + 3.18521313\ (x - 0{,}2) - 2.69873800\ (x - 0{,}2)^2 - 0.94630333\ (x - 0{,}2)^3, se\ 0{,}2 \leq x < 0{,}3 \\ 0.00660095 + 2.61707643(x - 0{,}3) - 2.98262900(x - 0{,}3)^2 + 9.94209667(x - 0{,}3)^3, se\ 0{,}3 \leq x < 0{,}4 \end{cases}$$

Como $x = 0{,}25$ e está em $0{,}2 \leq x < 0{,}3$ consideramos o segundo polinômio:

$$S(0{,}25) = -0{,}28398668 + 3{,}18521313\ (0{,}25 - 0{,}2) - 2{,}69873800\ (0{,}25 - 0{,}2)^2 - 0{,}94630333\ (0{,}25 - 0{,}2)^3 = -0{,}13159115641$$

2.3 Comparação entre os métodos

Conhecendo a função do problema, $f(x) = x\cos x - 2x^2 + 3x - 1$, podemos saber a aproximação exata, $f(0{,}25) = -0{,}13277189458$ e assim calcular o erro absoluto para os métodos usados:

- **Newton:** $|f(0{,}25) - P_3(0{,}25)| = |-0{,}13277477 - 0{,}13277189| = 10^{-6}$
- **Spline:** $|f(0{,}25) - S(0{,}25)| = |-0{,}13277477 - 0{,}13159115| = 10^{-3}$

Vemos que a aproximação resultante das diferenças progressivas e regressivas de Newton foi mais próxima a solução real.