

Teste 2- Física Computacional

Oscilador não-linear

Ana Margarida Gonçalves, 89338, amsg99@ua.pt, PL2

27 de maio de 2020

Resumo

Neste trabalho, foi estudado um oscilador não-linear através de métodos numéricos distintos, nomeadamente, o método de Shooting e a Transformada de Fourier.

Teve como objetivos estudar um método, o método de Shooting, para a resolução de problemas de fronteira e, a partir da transformada de Fourier, estudar o espetro de densidade do movimento do oscilador não-linear em estudo a partir do valor inicial obtido a partir do método de Shooting.

Para além disso, foi realizado um estudo comparativo entre a ode45 e a Transformada de Fourier da derivada, na obtenção do vetor aceleração.

Foram atingidos todos os objetivos pretendidos, através dos códigos desenvolvidos.

1 Introdução ao método de Shooting

O método de Shooting é utilizado para resolver problemas onde não são conhecidas todas as condições iniciais necessárias para saber como um certo sistema vai evoluir, mas que se possua informações sobre o que acontece ou o que se pretende que aconteça nesse sistema, num instante posterior. Designamos este tipo de problemas como problemas de valores de fronteira.

Em geral, o método de Shooting consiste em arbitrar duas condições ou parâmetros iniciais desconhecidos e, de seguida, a partir, por exemplo, da ode45 (método adequado para problemas de valor inicial), é integrada numericamente a equação do problema em estudo. No final dessa integração, é verificado se o resultado obtido se afasta ou se aproxima das condições fronteira desejadas. Após essa verificação, as condições iniciais são ajustadas de modo a que o resultado se aproxime da solução pretendida. Este processo de ajuste é realizado, neste trabalho, através do método da secante, onde é repetido n vezes até que se obtenha a solução pretendida.

2 Introdução à metodologia e resultados experimentais

Neste trabalho estudou-se um oscilador não-linear com um movimento descrito pela equação seguinte:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + K(y + \alpha y^2) = \mu \left[\sin\left(\frac{dy}{dt}\right) \right] \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

Alínea a

Esta equação do movimento pode ser reescrita através de uma equação diferencial de 2ª ordem, como um sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = vy \\ \frac{dvy}{dt} = (\mu[\sin(vy)]vy - K(y + \alpha y^2))\frac{1}{m} \end{cases}, \quad (2)$$

onde α é uma constante igual a -0.1, o K igual a 1 N/m, m igual a 1 kg e μ uma constante indefinida.

Alínea b

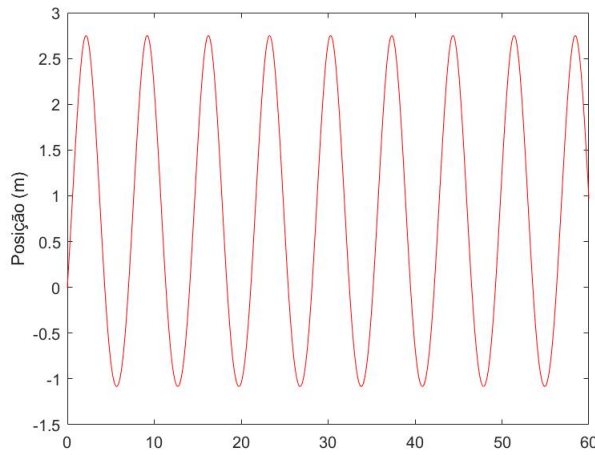
Nesta alínea pretendemos obter o valor de μ , por isso, inicialmente, foram definidos 2 valores iniciais de μ próximos de 0.65. De seguida, através da ode45 foram obtidos os valores da posição, da velocidade e do tempo de tal forma que, pelo código de Lagrange, foi possível obter os valores dos máximos da posição para cada valor estimado de μ . Por fim, foi usado o método de Shooting onde foi obtido um valor de μ igual a 0.4996.

Alínea c

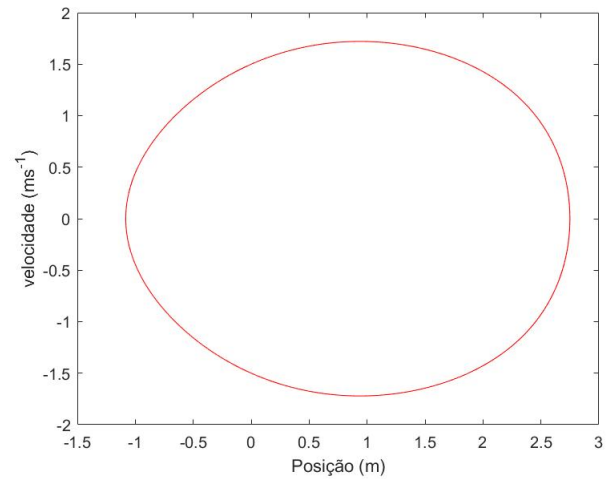
A partir do código da alínea anterior e, através do Lagrange, fomos buscar os valores do tempo correspondentes às posições máximas.

Assim, no final do ciclo de Lagrange, foram obtidos os valores dos máximos da posição e o período, para cada índice i, utilizando a função polyfit de grau 1 para obter o declive da função[polyfit(1:Nmax,tmax)] que representa o valor do período T(i), onde Nmax representa o comprimento dos vetores dos máximos do tempo.

Assim, o valor de período T obtido para o μ igual a 0.4996 foi de 7.0350 s.



(a)



(b)

A partir do gráfico da posição em função do tempo, podemos observar que este possui periodicidade. Além disso, o gráfico da trajetória no espaço de fases para o regime estacionário permite-nos observar o movimento do oscilador harmónico não linear. O movimento possui uma forma quase aproximada a uma elipse, o que nos permite afirmar que este oscilador possui, para os valores iniciais definidos, aproximadamente, uma oscilação harmónica sem amortecimento.

Alínea d

Numa forma geral, neste método foram arbitrados dois valores iniciais de um parâmetro desconhecido, o μ : $\mu(1)=0.63$ e $\mu(2)=0.65$ e, de seguida, através da ode45 (método adequado a problemas de valor inicial), foi integrada numericamente a equação fornecida, de forma a obtermos os valores da posição, da velocidade e do tempo, correspondentes ao valor de μ inicialmente estimado. No final da integração, a partir do Lagrange, foi obtido o valor máximo da posição.

De seguida, é verificado o quanto esse resultado se afasta ou aproxima das condições fronteiriças desejadas ($y_{max}=2.75$) e, desse modo, os valores do parâmetro foram ajustados. Por fim, o processo foi repetido até que fosse atingido esse valor. Estes últimos passos foram realizados a partir do método da secante, que nos permite ajustar o parâmetro desconhecido:

$$dif = (resultado(i) - resultado(i - 1)) / (\mu(i) - \mu(i - 1)) \quad (3)$$

$$\mu(i + 1) = \mu(i) + (B - resultado(i)) / dif \quad (4)$$

onde dif é o declive da secante, o $\mu(i)$ é a estimativa sucessiva do valor do parâmetro, que não se conhece e que se pretende determinar, o $resultado(i)$ é a posição máxima que se obtém usando $\mu(i)$ como condição inicial e o B corresponde ao resultado pretendido da amplitude positiva, igual a 2.75.

Assim, quando B assume um valor igual a $resultado(i)$, temos que $\mu(i+1)=\mu(i)$, ou seja, o μ atualmente estimado assume igual valor ao anterior e, assim, obtemos o valor μ para o resultado pretendido, ou seja, o método de Shooting convergiu.

Alínea e

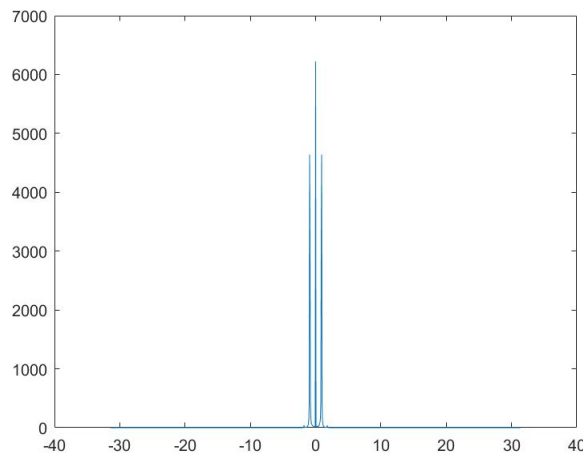


Figura 2

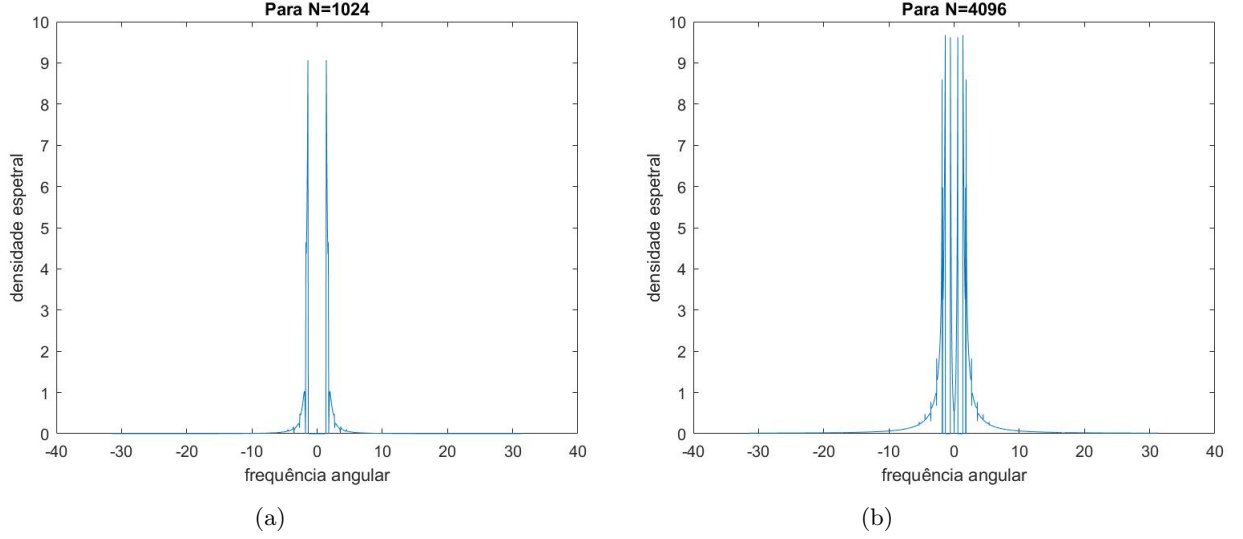
Podemos observar um pico centrado em $w=0$, que se deve ao facto de a oscilação não estar centrada.

Além disso, observamos 2 picos bem definidos com uma frequência angular de igual valor em módulo.

Visto que não existe ruído com valores da mesma ordem de grandeza que os picos observados, o ruído é desprezável e, assim, o sistema possui uma única frequência.

Desse modo, podemos classificar o movimento como harmónico simples.

Alínea f



Para uma densidade espectral inferior a 10, para $N=1024$ pontos, podemos observar que ao redor dos picos principais começa a existir ruído com um número elevado de picos com baixas frequências. Quando aumentamos a resolução quatro vezes, aumentando o número de pontos para $N=4096$, notamos que de facto existe ruído e, por isso, não podemos considerar este movimento como harmónico simples.

Alínea g

Inicialmente, para ambos os códigos, foi necessário criar uma matriz para os valores da frequência angular. Sabemos que o valor máximo que a frequência angular pode tomar é de $(N/2 - 1) \times h\omega$ e valor mínimo de $-N/2 \times h\omega$, onde $h\omega$ é o passo de ω igual a $2\pi/(N \times h)$, onde N é o número de pontos desejados e igual a 1024 (ou 4096 no caso da ampliação da alínea f) e h o passo do tempo igual a 0.1.

De seguida, a partir da ode45, chamou-se os valores da amplitude e pela linha de código, com as funções intrínsecas `fft` e `ifft`:

$F = \text{fftshift}(\text{fft}(\text{sol}(:,1)))$, obteve-se a transformada de Fourier discreta, $F(k)$. Assim, sabendo que a densidade espectral é dada por $|F(k)|^2$, colocou-se a linha de código:

$$\text{despetral} = (h * \text{abs}(F)).^2.$$

Sabendo que as matrizes *despetral* e ω tinham que possuir a mesma dimensão, o tempo é dado por: $t = 0:h:N \times h - h$.

Na alínea e realizou-se o plot de toda a densidade espectral em função da frequência angular enquanto que, na alínea f, da densidade espectral com valor inferior a 10 em função da frequência angular.

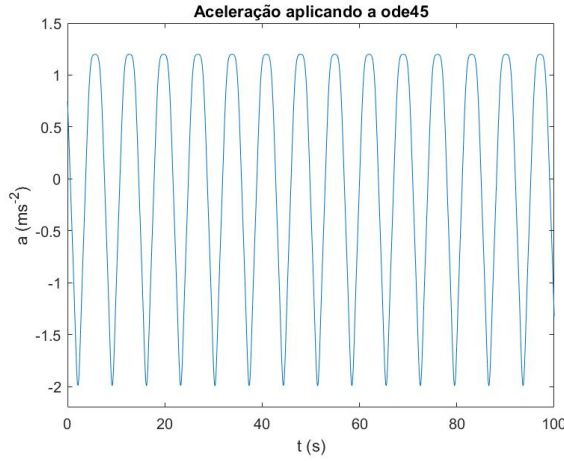
Desse modo, foi acrescentado um ciclo `for` de $i = 1$ até ao `length(despetral)`, onde os valores do índice `despetral(i)` inferiores a 10 seriam guardados enquanto que os valores iguais ou superiores seriam considerados nulos.

Realizaram-se 2 plots, um para $N=1024$ pontos e um outro com resolução 4 vezes maior, ou seja, para $N=4096$.

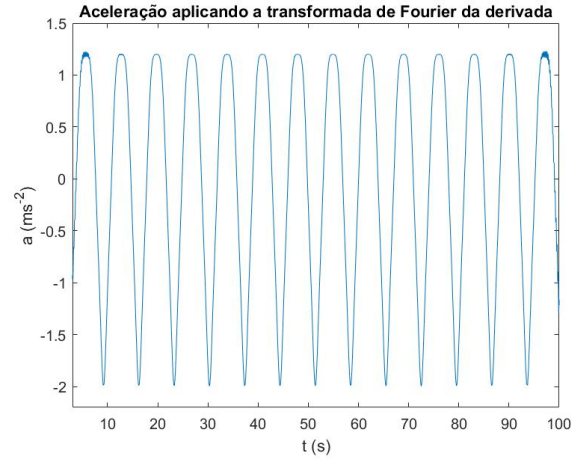
Alínea h

Podemos observar que pela aplicação da transformada de Fourier da derivada, a aceleração só toma forma periódica entre o intervalo de tempo compreendido entre, aproximadamente, os 10 e 90 segundos, enquanto que pela ode45 toma logo uma forma periódica.

Ou seja, a ode 45 apresenta estabilidade nos pontos iniciais e finais, enquanto que a transformada de Fourier permanece instável, para um mesmo vetor t e passo h .



(a)



(b)

3 Conclusão

Neste trabalho foi possível estudar e interpretar os métodos numéricos propostos.

Foi possível determinar o valor do parâmetro inicial desconhecido, o μ , através do método de Shooting e, a partir dos gráficos de $y(t)$ e de $v_y(y)$, para as condições iniciais $v_{y0}=1.5$, $y_0=0$ e $\mu=0.4996$, o oscilador não-linear, apresenta um movimento harmónico não amortecido.

Além disso, a partir da transformada de Fourier aplicada no movimento do oscilador não-linear, foi observado que, apesar de termos um oscilador não-linear cujo movimento pode ser aproximado ao harmónico simples, pode-se observar que existe ruído com uma densidade espectral muito menor que a do movimento principal o que faz com que o oscilador não possua, na realidade, uma oscilação harmónica sem amortecimento.

Por fim, foi possível observar que, na obtenção do vetor aceleração, a ode45 possui maior estabilidade que a transformada de Fourier da derivada, para o mesmo vetor t e passo h .