

# Oscilador não-linear

## Método de Runge-Kutta de 4ª ordem e ode45

— Trabalho 1 — Física Computacional — Ema Fadiga (92944) —

6 de maio de 2020

### Sumário:

Neste trabalho pretende-se estudar um oscilador não-linear que sofre a ação de uma força externa e uma força restauradora. A partir de métodos matemáticos como o de Runge-Kutta de 4ª ordem e ode45, vamos obter os gráficos da oscilação do movimento e do espaço de fases para os dados  $\omega_0$  e  $F_0$ .

Verificaram-se a ação das forças externas ao oscilador nos gráficos obtidos de  $y(t)$  e espaços de fase devido à variação da energia.

Nos gráficos de variação da amplitude e período em função de  $\mu$  obtive o que esperava na amplitude e uma variação mais invulgar no período mas que poderá ser explicado com os valores dos termos que fazem a aceleração.

Na comparação dos métodos poderá verificar-se que a ode45 será o que daria valores mais precisos, de seguida seria o RK4 e por último o de Euler-Cromer.

### Métodos utilizados:

— **Ode45** é um método que apenas resolve equações diferenciais ordinárias (EDO) de 1ª ordem, daí a necessidade de escrever a EDO de 2ª ordem dada em duas de 1ª ordem.

É um método adaptativo, ou seja, o algoritmo adapta-se à trajetória da solução que muda o passo ( $h$  ou  $dt$ ) e alterna entre RK4 e RK5. Nos pontos onde a função muda mais/menos função tem intervalos menores/maiores, respetivamente, ou seja, se os resultados estiverem muito:

*Próximos* - aumenta o passo.

*Diferentes* – diminui o passo.

Requer os comandos:

```
options = odeset('Reltol', 3e-14, 'Abstol', [1e-13 1e-13])
```

```
[t solution] = ode45(@function, [0 t_f], [y(1) v(1)], options, c)
```

'**Reltol**' (tolerância relativa, no Matlab o mínimo é  $3e-14$ ) e '**Abstol**' (tolerância absoluta) determinam o passo em cada iteração. O erro estimado deve ser menor do que o maior dos valores calculados com base nas tolerâncias dadas.

— **Runge-Kutta 4**, analogamente ao da ode 45 também só consegue resolver EDO's de 1ª ordem que sejam da forma:

Com:

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = f(x, y)$$

$$y(0) = y_0$$

Este método tira a desvantagem da série de Taylor de resolução de EDO's:

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx y'(t) + \frac{\Delta t}{2} y''(t) + \dots + \frac{\Delta t^{r-1}}{r!} y^{(r)}(t)$$



Que é a necessidade de ter as derivadas explícitas da função, fazendo:

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	2/6	2/6	1/6

Do qual resulta:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

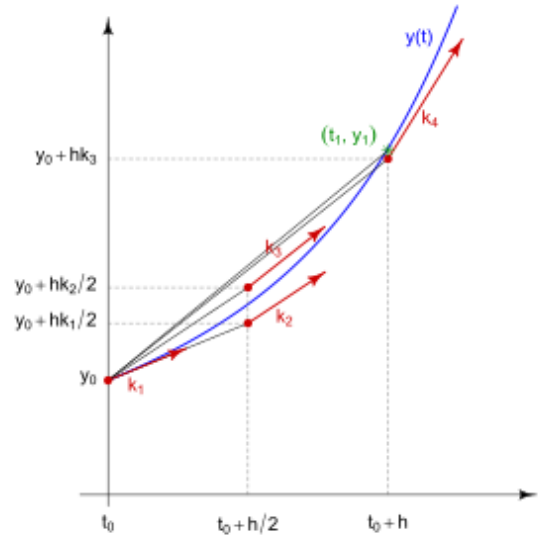
Com:

$$k_1 = f(t_k, y_k)$$

$$k_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + k_1 \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + k_2 \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = f(t_k + h, y_k + k_3 h)$$



### —Código e Resultados

#### Alínea a)

Foi-nos dada a equação de movimento:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + K(y + \alpha y^3) = \mu \left( \cos\left(\frac{dy}{dt}\right) \right) \frac{dy}{dt} + F_0 \cos(\omega_0 t)$$

Mas os métodos apenas conseguem resolver EDO's de 2ª ordem por isso tem de se escrever num sistema de duas equações de 1ª, fazendo:

$$\begin{cases} v = \frac{dy}{dt} \\ f(t, y, v) = \frac{\sum F(t, y, v)}{m} \end{cases}$$

Com  $f(t, y, v) = \frac{dv}{dt}$  obtemos a equação:

$$f(t, y, v) = \frac{1}{m}(-Ky(1 + \alpha y^2) + \mu(\cos(v))v + F_0 \cos(\omega_0 t))$$

O termo  $-\frac{K}{m}y(1 + \alpha y^2)$  origina uma aceleração oposta ao movimento, normal de um oscilador harmónico.

O termo  $\frac{\mu}{m}(\cos(v))v$  vai originar uma aceleração cujo sentido vai depender do valor de  $\cos(v) * v$  se  $v \in [0; \frac{\pi}{2}]$  irá obter-se uma aceleração positiva, se  $v \in [-\frac{\pi}{2}; 0] \cup [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$  irá obter-se uma aceleração negativa e se  $v = 0$  a aceleração será nula.

O termo  $\frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t)$  gera uma aceleração com base numa força independente do movimento da partícula.

### Alínea b)

Com as constantes definidas:

```
5 - m=1;
6 - K=1;
7 - alpha=0.2;
8 - mu=0.8;
9 - y(1)=1.5;
10 - v(1)=0;
11 - tf=150;
```

Aplicação da ode45:

```
17 - options=odeset('RelTol', 1e-13, 'AbsTol', [1e-13 1e-13]);
18 - [t, solution]=ode45(@ODE,[0 tf], [y(1) v(1)], options,m,K,alpha,mu,w0,F0);
19
20 - y=solution(:,1);
21 - v=solution(:,2);
```

O vetor **solution** é a matriz que dá os valores de **y** e **v** em cada iteração em  $t \in [0; 150]$ s

A ode irá invocar a função (ODE) que foi adaptada ao problema com as equações encontradas na alínea a), e coloca as constantes a serem utilizadas no fim ( $m, K, \alpha, \mu, w_0, F_0$ ), passando assim esse valor das constantes à função.

O **y** será dado pela primeira coluna da matriz **solution** (linha 20) e **v** será dado pela segunda coluna da matriz **solution** (linha 21).

Passando à função que foi adaptada ao problema:

```
2 - function derivadas = ODE(t,solution,m,K,alpha,mu,w0,F0)
3
4 -     derivadas = zeros(2,1);
5 -     y=solution(1);
6 -     v=solution(2);
7
8 -     derivadas(1)= v;
9 -     derivadas(2)=(-K*y*(1+alpha*y^2) +mu*cos(v)*v + F0*cos(w0*t))/m;
10 - end
```

Esta função invoca as constantes impostas para o cálculo. Cria-se uma matriz 2x1 sendo **y** a primeira linha e **v** a segunda linha e definem-se as EDO's encontradas na alínea a).

Encontraram-se *os gráficos de movimento*: Graf.1, Graf.3, Graf.5, Graf.7(no ficheiro Anexo), que são semelhantes ao do oscilador harmónico. Os gráficos 1 e 2 (e 3 e 4) são iguais já quando  $F_0 = 0$  também  $F_0 \cos(\omega_0 t)$  será 0.

*Os gráficos do espaço de fase*: Graf.2, Graf.4, Graf.6 e Graf.8 (no ficheiro Anexo). Podemos ver que gráficos 6 e 8 são diferentes devidos à frequência (que é diferente para cada um). Em todas as figuras vemos que os espaços de fase tendem a fechar o caminho, o que se dificulta quando o movimento é forçado

**Alínea c)** Com o método da ode45 pretende-se calcular a amplitude e o período em função de  $\mu$  tendo  $F_0 = 0$ .

Escolhido um incremento  $dt$  definiu-se o vetor/intervalo  $t \in [0; 150]$ s assim como o seu comprimento  $Nt$  com o vetor  $\mu \in [0; 0.8]$  e o seu comprimento  $Nu$ .

Definiram-se também os vetores  $A$  e  $P$ , ambos com o comprimento  $\mu$ , que irão armazenar os valores da amplitude e período.

```
57 - dt=0.1;
58 - t=0:dt:tf;
59 - Nt=numel(t);
60
61 - muu=0:0.1:0.8;
62 - Nu=numel(muu);
63
64 - A=zeros(Nu,1);
65 - P=zeros(Nu,1);
```

Cálculo das variações:

```
29 - for k=1:Nu
30 -     mu=muu(k);
31 -     options=odeset('RelTol', 1e-13, 'AbsTol', [1e-13 1e-13]);
32 -     [t, solution]=ode45(@ODE, t, [y(1) v(1)], options,m,K,alpha,mu,w0,F0);
33
34 -     y=solution(:,1);
35 -     v=solution(:,2);
36 -     Periodos=0;
37 -     imax=0;
38 -     for i =2:Nt-1
39 -         if and (y(i-1)<y(i),y(i)>y(i+1))
40 -             imax=imax+1;
41 -             aux=lagr(t(i-1:i+1),y(i-1:i+1));
42 -             tmax(imax)=aux(1);
43 -             ymax(imax)=aux(2);
44 -         end
45 -     end
46 -     ym=mean(ymax);
47 -     A(k)= ym;
48 -     for j=2:numel(tmax)
49 -         Periodos(j-1)= tmax(j)-tmax(j-1);
50 -     end
51 -     P(k)= mean(Periodos);
52 -     clear ymax
53 -     clear tmax
54 - end
```

Com o primeiro ciclo *for* percorreram-se os valores de  $\mu$ . O segundo ciclo *for* percorre os vetores das posições de modo a encontrar os máximos e os mínimos, usando a função **lagr**, uma interpolação em que se obtém valores com o menor erro associado possível. Armazenando assim os valores no vetor  $A$  e  $P$  (amplitudes e períodos, respetivamente).

Obtiveram-se os gráficos 9 e 10. Pode observar-se que para  $\mu = 0$ , a amplitude tem um valor considerável e depois disso ocorre um crescimento brusco e por fim um comportamento quase linear. É calculada com a função **mean** que faz a média dos máximos obtidos002E

O período é calculado a partir da média da diferença de dois máximos consecutivos. inicia com um valor elevado, tem um decrescimento brusco e volta a

crescer de uma forma quase linear.

Como a velocidade inicial é zero, aceleração que este termo origina é nula. Ou seja, apenas o termo  $\frac{1}{m}(-Ky(1 + \alpha y^2))$  contribui para a aceleração e depois vai para o intervalo em que o termo  $\frac{\mu}{m}(\cos(v))v$  logo com  $\mu$  a crescer também a amplitude irá crescer. Temos a amplitude a diminuir bruscamente e aumentar quase linearmente em função de  $\mu$ , o que resulta da junção das forças externas até estabilizar.

Com o uso da função **clear** ymax e tmax, remove-se ymax e tmax do workspace, mas deixa-os acessíveis.

**Alínea d)**

```
18 - dt=0.001;
19 - tf=150;
20 - t=0:dt:tf;
21 - N=numel(t);
22
23 - fy=@(t,y,v) v;
24 - fv=@(t,y,v) (-K*y*(1+alpha*y^2) +mu*cos(v)*v + F0*cos(w0*t))/m;
25
26 - for i=1:N-1
27 -     r1v=fv(t(i),y(i),v(i));
28 -     r1y=fy(t(i),y(i),v(i));
29
30 -     r2v=fv(t(i)+dt/2, y(i)+r1y*dt/2, v(i)+r1v*dt/2);
31 -     r2y=fy(t(i)+dt/2, y(i)+r1y*dt/2, v(i)+r1v*dt/2);
32
33 -     r3v=fv(t(i)+dt/2, y(i)+r2y*dt/2, v(i)+r2v*dt/2);
34 -     r3y=fy(t(i)+dt/2, y(i)+r2y*dt/2, v(i)+r2v*dt/2);
35
36 -     r4v=fv(t(i)+dt, y(i)+r3y*dt, v(i)+r3v*dt);
37 -     r4y=fy(t(i)+dt, y(i)+r3y*dt, v(i)+r3v*dt);
38
39 -     y(i+1)=y(i)+dt*(r1y+2*r2y+2*r3y+r4y)/6;
40 -     v(i+1)=v(i)+dt*(r1v+2*r2v+2*r3v+r4v)/6;
41 - end
```

Pretende-se agora repetir a alínea b) com  $F_0 = 0$  mas com o método de Runge-Kutta 4:Definiu-se incremento particularmente pequeno (linha 18) fazendo com que o vetor  $t$  tenha muitos elementos.

As EDO's encontradas na alínea a) são agora as funções  $f_y$  e  $f_v$  (linhas 23 e 24). **@** apenas recebe as variáveis que lhe seguem, fazendo as EDO's dependentes apenas nas mesmas.

Com o ciclo *for* implementou-se o método de RK4, definindo os vetores  $r_j y$  e  $r_j v$ , podendo assim calcular o  $y$  e  $v$  em cada instante e o espaço de fases (Gráficos 11 e 12 do Anexo, respetivamente).

### Alínea e)

O método mais preciso é o da **ode45** já que ao alternar entre os métodos de RK4 e RK5. Poderá obter-se uma melhor solução analítica quanto menor for a tolerância relativa e a tolerância absoluta. Porém tem uma discrepância maior quando se alterna entre funções cúbicas e quádricas porque o método de 4ª ordem não consegue integrar funções de ordem superior. Para ter maior precisão para polinómios acima de ordem 4 tem de ser reduzir as tolerâncias absoluta e relativa. Neste caso temos ordem de 3 logo não vão ocorrer estes problemas.

O método de **RK4** recebe as primeiras 4 derivadas corretamente enquanto o de **Euler-Cromer** apenas recebe a primeira derivada numericamente. Da série de Taylor o método de RK4 tem o primeiro erro no quinto termo na derivada  $(x - x_0)^5 = h^5$ , ou seja o erro é de quarta ordem quanto o de E-C tem erro de primeira ordem já que apresenta erro na segunda derivada  $(x - x_0)^2 = h^2$ .

### **—Discussão e Conclusão**

Como se trata de EDO's não lineares, como vão estar mais sujeitas a caos são muito sensíveis às condições iniciais. Se as trajetórias (linhas dos espaços de fase) são cíclicas e não exatamente iguais então ocupam uma região limitada no espaço de fases. Também tornam a integração numérica difícil se as equações já têm erro numérico o que pode levar a solução numérica a convergir para outra.

Como seria de espera o método da ode45 é mais preciso, tendo que o da tem um erro da ordem  $h^5$  e um erro acumulado de ordem  $h^4$ . De seguida o seria o método de Runge-Kutta 4 e por fim o de Euler-Cromer.

Nos gráficos de espaços de fase a energia diminui um pouco já que vemos o tem pequenos 'patamares', variando muito pouco depois. Isto acontece porque há uma energia dissipada pelo trabalho da força oposta ao movimento (neste caso é o termo  $-\frac{K}{m}y(1 + \alpha y^2)$ ) e  $\frac{\mu}{m}(\cos(v))v$  quando negativo. Como inicialmente  $v = 0$ , o trabalho é nulo, onde a força de atrito é nula inicialmente, mas ao aumentar irá apresentar alguma dissipação que vai ser resposta pela força restauradora, que se trata dos termos  $\frac{F_0}{m}\cos(w_0 t)$  e  $\frac{\mu}{m}(\cos(v))v$  quando positivo.

Os gráficos do espaço de fases para a ode 45 e RK4 (Graf.2 e Graf12, respetivamente) para  $F_0 = 0$  o termo  $\frac{F_0}{m}\cos(w_0 t)$  não influencia o movimento. Quando  $F_0 = 0.18$  já vamos ter uma maior variação de energia comparativamente ao caso anterior.

O objetivo foi cumprido devido à elevada precisão fornecida pelo método da ode45 (e o método RK4 reproduzir o mesmo resultado) podemos concluir que o resultado é bastante preciso.