

# Análise Amortizada

(Cap. 17 CLRS)

Prof. Jussara Almeida

# Análise Amortizada

- Útil quando se tem uma sequência de operações sobre alguma estrutura de dados, sendo algumas “caras” e outras “baratas”
- Em uma análise de complexidade simples, a operação cara pode elevar erroneamente o custo do pior caso
- Com a análise amortizada é possível mostrar que o **custo amortizado da operação é menor, quando consideradas todas as operações**

# Análise Amortizada

- A análise amortizada não é a análise do caso médio que, como vimos, envolve a análise de probabilidades sobre diferentes entradas
- A análise amortizada é a **análise do pior caso**, mas considerando que em uma sequência de operações os **custos diferentes se compensam**

# Análise Amortizada

- Atribuir custos às operações mantendo o custo total (logo, limite superior).
- Para qualquer sequência de operações:  
$$\sum \text{custo amortizado} \geq \sum \text{custo real}$$
- Objetivo: simplificar a apresentação da soma dos custos
- Três métodos principais:
  - Análise Agregada
  - Método Contábil (*accounting*)
  - Método do Potencial

# Análise Agregada

- Na análise agregada mostra-se que uma sequência de  $n$  operações tem o custo  $T(n)$
- No pior caso, o custo médio (ou amortizado) de cada operação é  $T(n)/n$
- Nessa análise o custo amortizado de todas as operações é igual, mesmo sendo o custo real diferente

# Exemplo: operações sobre uma pilha

- Operações comuns, custo  $O(1)$ :
  - $\text{Push}(S,x)$ : empilha o item  $x$  na pilha  $S$
  - $\text{Pop}(S)$ : desempilha o top da pilha  $S$
- Nova operação
  - **$\text{Multipop}(S,k)$** : desempilha  $k$  itens da pilha
  - Custo:  $\min(n,k)$ , para  $n$  itens na pilha  $O(n)$

```
Multipop(S,k)  
  while not Vazia(S) and K>0  
    pop(S)  
    k=k-1
```

# Exemplo: operações sobre uma pilha

- No pior caso, qual o custo de uma sequência de  $n$  operações PUSH, POP e MULTIPOP sobre uma pilha inicialmente vazia ?
  - Cada push ou pop é  $O(1)$ , logo:  $O(n)$
  - Cada multipop é  $O(n)$ , logo:  $n.O(n) = O(n^2)$ .  
Correto?
- Correto, mas esse pior caso não é firme!
- Usando a análise agregada, pode-se obter um **limite mais firme**, considerando que as outras operações “compensam” essa.

# Exemplo: operações sobre uma pilha

- Apesar de uma operação multipop ser  $O(n)$ , uma sequência qualquer de  $n$  operações push, pop e multipop em uma pilha vazia é  $O(n)$ 
  - Só podemos desempilhar um item que foi empilhado.
  - Portanto para  $n$  operações, temos no máximo  $n$  itens:  $O(n)$ .
- Fazendo-se a análise agregada, o **custo amortizado** de cada operação é  $O(n)/n = O(1)$



# Exemplo: Contador Binário


$A$						
5	4	3	2	1	0	
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1

$k-1$		3	2	1	0

INCREMENT ( $A, k$ )


1  $i \leftarrow 0$

2 enquanto  $i < k$  e  $A[i] = 1$

3     faça  $A[i] \leftarrow 0$  

4              $i \leftarrow i + 1$

5 se  $i < k$

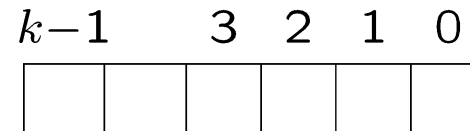
6     então  $A[i] \leftarrow 1$  

**Custo:**

**número de bits invertidos =  $O(k)$**

# Exemplo: Contador Binário

$A$							Custo Total
5	4	3	2	1	0		
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	3
0	0	0	0	1	1	1	4
0	0	0	1	0	0	0	7
0	0	0	1	0	1	1	8
0	0	0	1	1	1	0	10
0	0	0	1	1	1	1	11
0	0	1	0	0	0	0	15
0	0	1	0	0	1	1	16



INCREMENT ( $A, k$ )

1  $i \leftarrow 0$

2 enquanto  $i < k$  e  $A[i] = 1$

3     faça  $A[i] \leftarrow 0$

4              $i \leftarrow i + 1$

5 se  $i < k$

6     então  $A[i] \leftarrow 1$

**Custo de uma chamada de INCREMENT:  
número de bits invertidos =  $O(k)$**

# Exemplo: Contador Binário

- n chamadas do procedimento increment
  - $n \cdot O(k) = O(n \cdot k)$ .
- Mas quando se analisa a sequência de operações, observa-se que o custo total é menor:
  - A[0] é invertido n vezes
  - A[1] é invertido  $n/2$  vezes
  - A[2] é invertido  $n/4$  vezes ...

$$\sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor < n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2n = O(n)$$

**Custo amortizado  
por operação é  
 $O(n) / n = O(1)$**

# Método Contábil

- No método contábil atribui-se um custo fictício (amortizado) a cada operação, que pode ser maior ou menor que o custo real
  - $\hat{c}_i$ : custo amortizado da operação  $i$
  - $c_i$ : real da operação  $i$
- Em uma sequência de  $n$  operações a seguinte condição deve ser satisfeita:  $\sum_{i=1}^n \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^n c_i$
- A estrutura de dados armazena o “saldo” das operações, que ajuda a “pagar” operações mais caras

# Método Contábil

- Analogia:
  - **Banco** : para armazenar tempo
  - Cada operação: deposita ou armazena tempo

Custo amortizado = custo real + depósito - saque

$$\begin{aligned}\sum \text{custo amortizado} &= \sum \text{custo real} + (\sum \text{depósitos} - \sum \text{saques}) \\ &= \sum \text{custo real} + \text{saldo do banco} \geq \sum \text{custo real}\end{aligned}$$

desde que saldo do banco  $\geq 0$

# Exemplo: pilha

	<u>Custo Real</u>	<u>Custo Amortizado</u>
Push	1	2
Pop	1	0
Multipop	$\min(n, k)$	0

- Cada operação push deixa um “crédito” de 1 que será usado pela operação pop ou multipop.
- Começando com uma pilha vazia, a condição

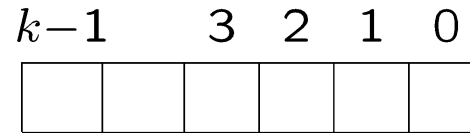
$$\sum_{i=1}^n \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^n c_i \quad \text{é satisfeita}$$

# Exemplo: pilha

- Para qualquer sequência de  $n$  operações Push, Pop e Multipop o **custo amortizado total** é  **$2n = O(n)$** 
  - Assumindo pop/multipop após push
- Como o **custo amortizado** é um **limite superior do custo real**, considerando-se  $n$  operações, temos que o **custo real das operações também é  $O(n)$**

# Exemplo: Contador Binário

$A$							Custo Total
5	4	3	2	1	0		
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	3
0	0	0	0	1	1	1	4
0	0	0	1	0	0	0	7
0	0	0	1	0	1	1	8
0	0	0	1	1	1	0	10
0	0	0	1	1	1	1	11
0	0	1	0	0	0	0	15
0	0	1	0	0	0	1	16



INCREMENT ( $A, k$ )

```

1   $i \leftarrow 0$ 
2  enquanto  $i < k$  e  $A[i] = 1$ 
3      faça  $A[i] \leftarrow 0$ 
4       $i \leftarrow i + 1$ 
5  se  $i < k$ 
6      então  $A[i] \leftarrow 1$ 
    
```

	Custo real:	Custo amortizado
0->1	1	2
1->0	1	0

Quanto é o custo de  $n$  operações?



# Método Potencial

- Define-se uma função que representa a “Energia Potencial” acumulada na estrutura
  - Paralelo com método contábil  
(crédito associado a elemento na estrutura)
- Seja  $c_i$  uma operação e  $D_i$  o estado da estrutura após a aplicação de  $c_i$  em  $D_{i-1}$
- A função  $\Phi$  representa o potencial, que pode ser liberado para operações futuras
- Definimos o custo amortizado de uma operação como o custo real acrescido da mudança de potencial
$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

# Método Potencial

- Para uma sequência de  $n$  operações:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \hat{c}_i &= \sum_{i=1}^n (c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i + \Phi(D_n) - \Phi(D_0) .\end{aligned}$$

- Definindo um potencial  $\Phi$  tal que  $\Phi(D_n) \geq \Phi(D_0)$ , temos que o custo amortizado vai ser um limite superior para o custo real

# Exemplo: Pilha

- Vamos definir uma função potencial tal que  $\Phi$  seja o número de itens na pilha. Logo
  - $\Phi(D_0) = 0$
  - $\Phi(D_i) \geq 0$ , para todo  $i$  pois o número de elementos da pilha nunca é negativo
- Portanto o custo amortizado é um limite superior para o custo real

# Exemplo: Pilha

Analizando o custo amortizado de cada operação:

- Push: a diferença de potencial causada pela operação em uma pilha com  $s$  elementos é  $\Phi$

$$\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = (s + 1) - s = 1$$

O custo da operação é portanto:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 + 1 = 2$$

- Pop: fazendo um raciocínio similar

$$\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = (s - 1) - s = -1$$

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 - 1 = 0$$

# Exemplo: Pilha

- Multipop: a operação multipop em uma pilha com  $s$  items remove  $k' = \min(s, k)$  items da pilha.

Logo a diferença de potencial é

$$\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = -k'$$

O custo da operação é portanto:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = k' - k' = 0$$

- Logo, o custo amortizado das 3 operações é  $O(1)$

# Exemplo Pilha

- Em uma sequência de  $n$  operações quaisquer sobre a pilha, temos que o custo total amortizado é  $n \cdot O(1) = O(n)$
- Como o custo amortizado é um limite superior para o custo real, temos que o custo real também é  $O(n)$ .