UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

Robótica Móvel

Locomoção – Modelos cinemáticos

Prof. Douglas G. Macharet
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

VERLab
Visão e Robótica

Introdução
Cinemática

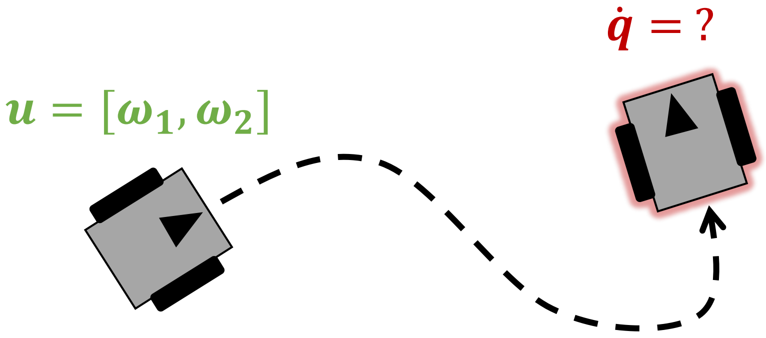
- Descreve como diferentes elementos se movimentam
  - Pontos e corpos (objetos) → Sistemas mecânicos
  - Considera **posição**, **velocidade**, **aceleração**
  - Não considera as forças e torques atuantes

- É importante e utilizada para
  - Projetar e modelar robôs móveis e manipuladores
  - Implementar algoritmos de controle corretos

https://en.wikipedia.org/wiki/Kinematics

Introdução
Cinemática

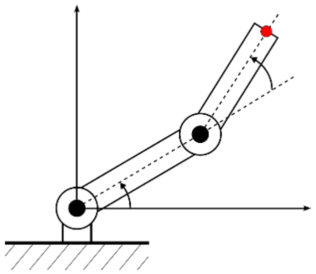
- **Cinemática direta**
  - Uso de equações cinemáticas para estimar a velocidade do robô com base nos valores das variáveis de controle informados (vel. rodas)

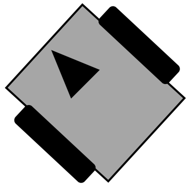


- **Cinemática inversa**
  - Dada a velocidade final desejada, faz uso de equações cinemáticas para determinar as entradas de controle válidas para alcançá-la

Introdução
Cinemática

- Similar à cinemática de manipuladores
  - Corpo, Rodas → Elos, Juntas
  - Cinemática direta ←→ Cinemática inversa



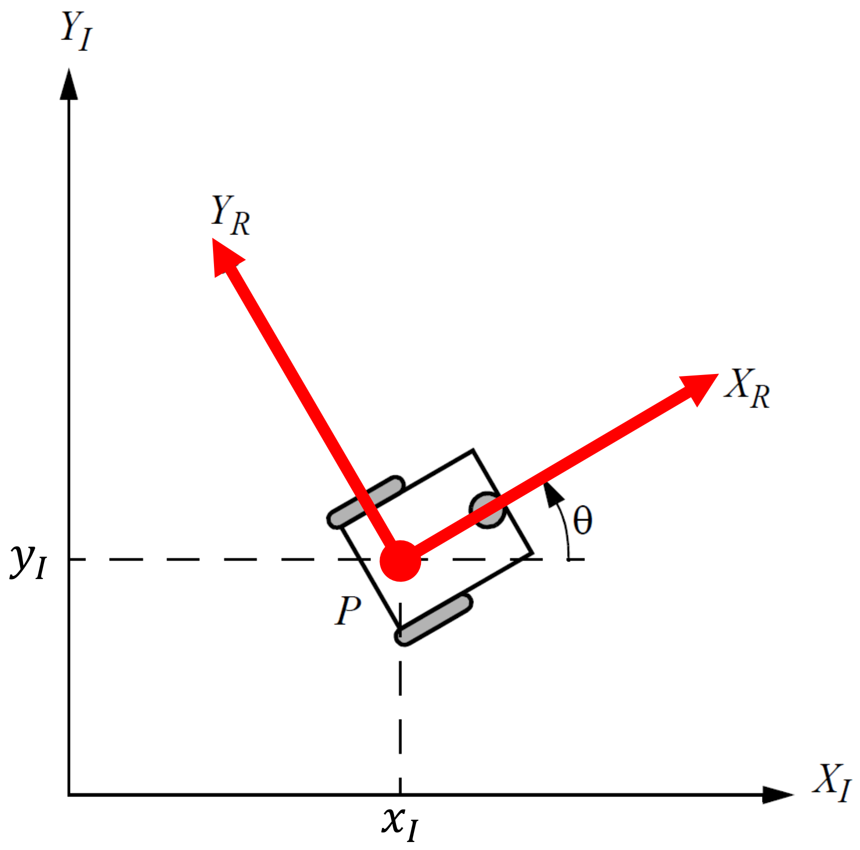


- Principais diferenças (e problemas)
  - Não é possível medir de maneira direta (instantânea) a posição
    - Localização: um dos principais problemas em robótica móvel!
  - É necessário fazer integração no tempo → incerteza
    - Imprecisão na estimativa da posição/movimento

Representação

- O robô é modelado como um corpo rígido
  - 3 variáveis (plano) / 6 variáveis (espaço)
- Diferentes referenciais envolvidos
  - Referencial global/inercial: $\{W\}$ ou $\{I\}$
  - O próprio robô: $\{R\}$
  - Informações sensoriais: Encoders (velocidades), laser, câmera, ...
- Utilizar de transformações para estabelecer uma relação entre os referenciais locais e o referencial mais geral

Representação



Posição:

$$\mathbf{x} = [x\ y]^T$$

Configuração (Pose):

$$\mathbf{q} = [x\ y\ \theta]^T$$

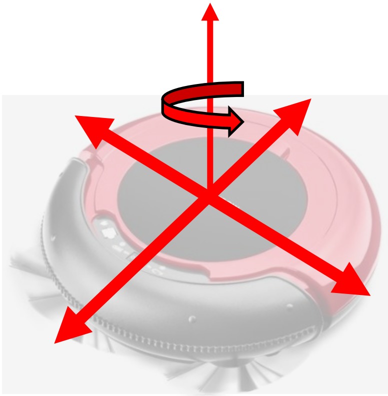
$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{\theta}]^T$$

Derivada no tempo, $\frac{d\mathrm{q}}{dt}$

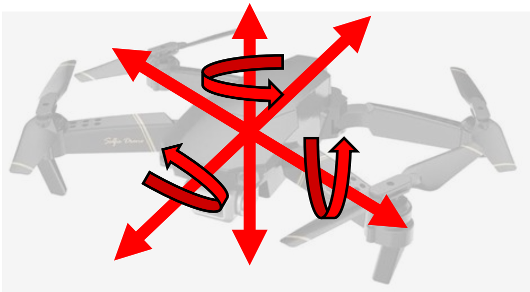
Graus de Liberdade

- Número mínimo de variáveis independentes que representam completamente a configuração (posição+orientação) do robô
  - Direções em que o movimento pode ser feito
- Quantidade de DoF é igual à dimensão do $\mathcal{C}$-space

1 DoF



3 DoF



6 DoF

Graus de Liberdade
Controláveis vs. Não-Controláveis

Velocidades atuáveis < DoF	Velocidades atuáveis = DoF	Velocidades atuáveis > DoF
Não-holonômico	**Holonômico**	**Redundante**

Modelo cinemático

- Determinar as equações usadas para calcular as velocidades do robô em função das velocidades de seus atuadores
  - Centro de massa ou geométrico
  - Centro do eixo das rodas motrizes

Exemplos de onde alocar a origem do sistema de coordenadas afixado ao corpo do robô.

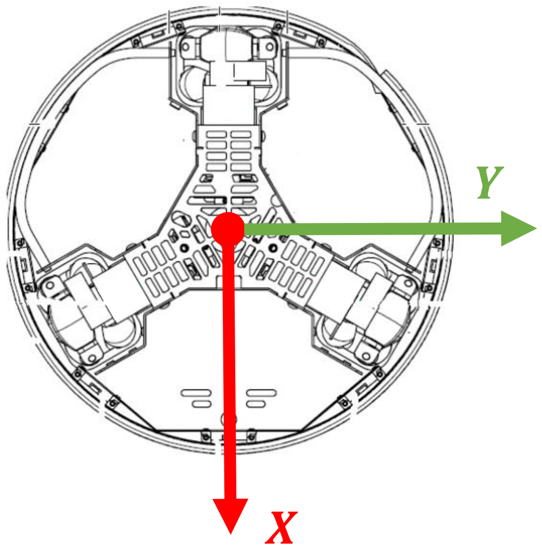
- Cinemática direta → Geometria
- Cinemática inversa → Controle

$\omega_1, \omega_2, \ldots$

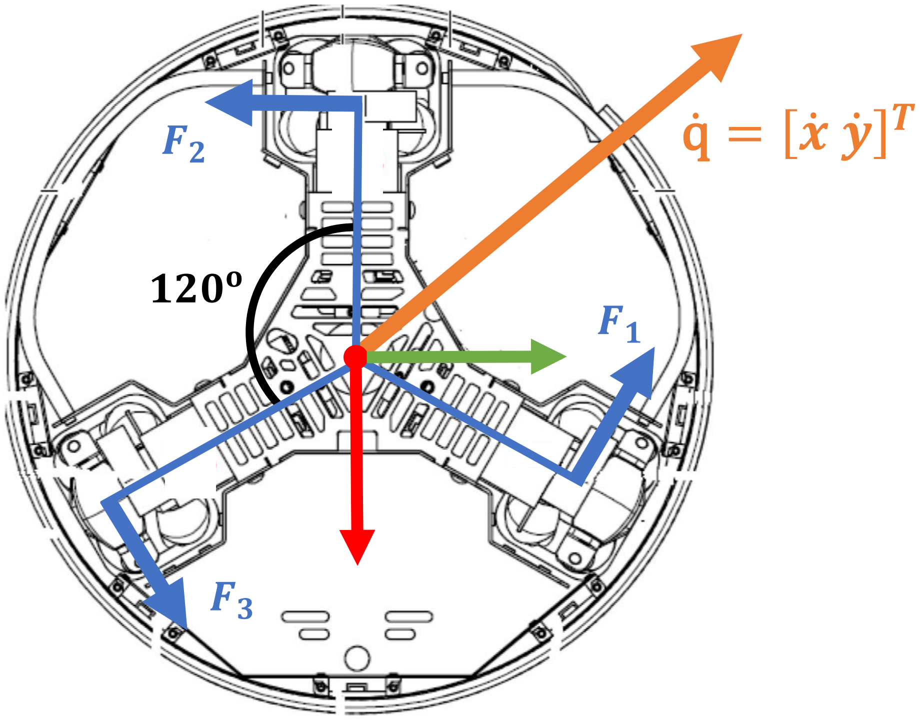
$\dot{\mathrm{q}} = \left[\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{\theta}\right]^T$

Modelo cinemático
Omnidirecional

- Representar como a referência se comporta dadas as velocidades das rodas (vetor/entradas de controle)
  - $u = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$
- Como fazer?
  - Decomposição vetorial



Modelo cinemático
Omnidirecional



- Vamos considerar que o robô move de acordo com o vetor velocidade $\dot{q}$
- Cinemática inversa
  - Projetar $\dot{q}$ sobre os vetores unitários perpendiculares ao eixo de cada roda para se obter as velocidades específicas
  - $v_i = \dot{q} \cdot F_i$

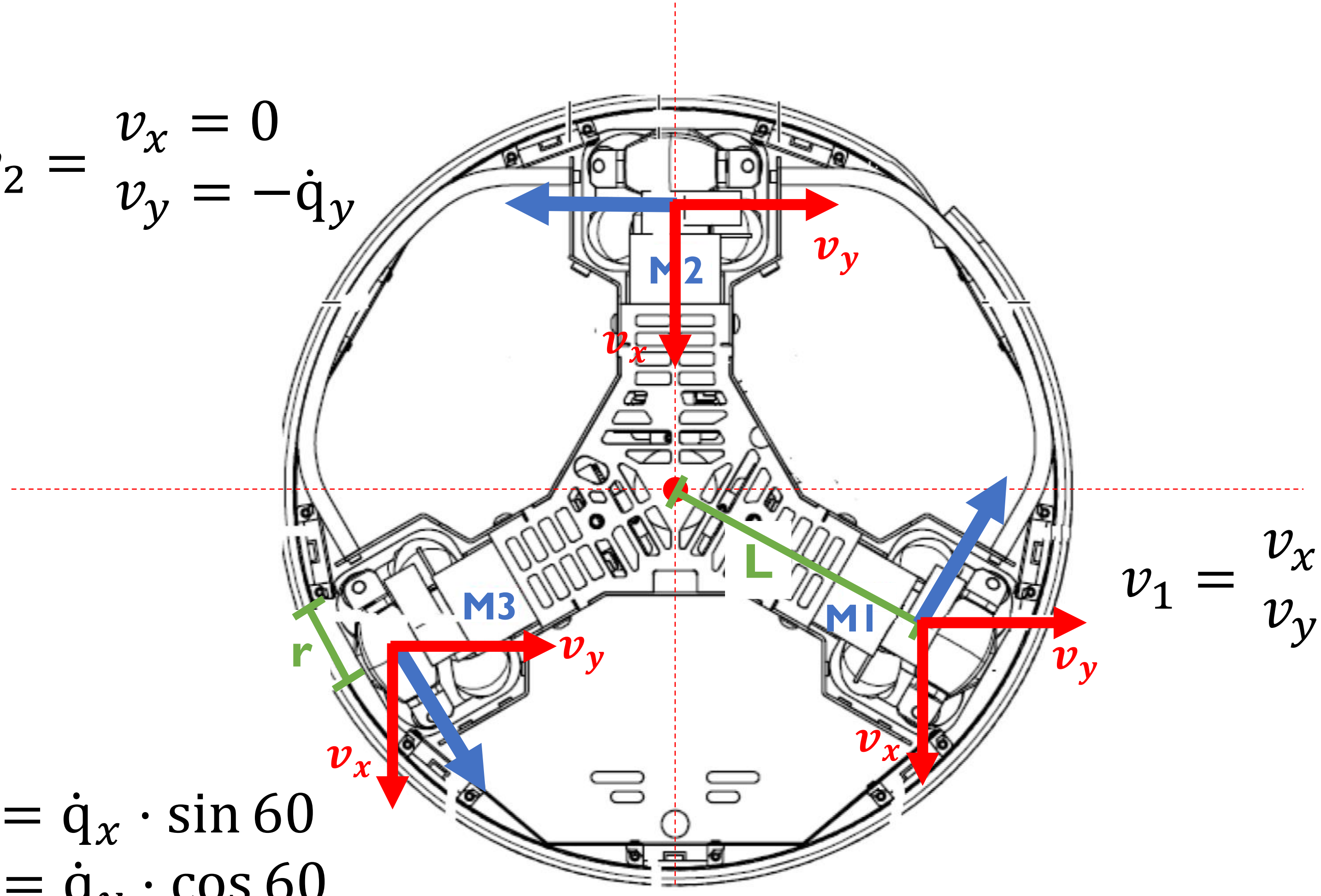
Modelo cinemático

Omnidirecional

$$v_2 = \begin{matrix} v_x = 0 \\ v_y = -\dot{q}_y \end{matrix}$$

$$\sin 60 = \sqrt{3}/2$$
$$\cos 60 = 1/2$$

Em relação ao Frame $\{R\}$



$$v_1 = \begin{matrix} v_x = -\dot{q}_x \cdot \sin 60 \\ v_y = \dot{q}_y \cdot \cos 60 \end{matrix}$$

$$v_3 = \begin{matrix} v_x = \dot{q}_x \cdot \sin 60 \\ v_y = \dot{q}_y \cdot \cos 60 \end{matrix}$$

Modelo cinemático
Omnidirecional

- A cinemática inversa é dada por

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 & L \\ 0 & -1 & L \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix}$$

Velocidade linear para angular

- onde ω_1, ω_2 e ω_3 são as velocidades angulares das rodas
- Dada a velocidade angular do robô $\dot{\theta}_R$, temos $v = \dot{\theta}_R \cdot L$

$\omega = v/r$

Modelo cinemático
Omnidirecional

- Cinemática direta
  - E se eu quisesse calcular a velocidade do robô (posição) de acordo com as velocidades informadas para cada roda?
- Nesse caso, podemos apenas calcular a inversa da matriz

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r/\sqrt{3} & 0 & r/\sqrt{3} \\ r/3 & -2r/3 & r/3 \\ r/3L & r/3L & r/3L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

https://pt.symbolab.com/solver/matrix-inverse-calculator

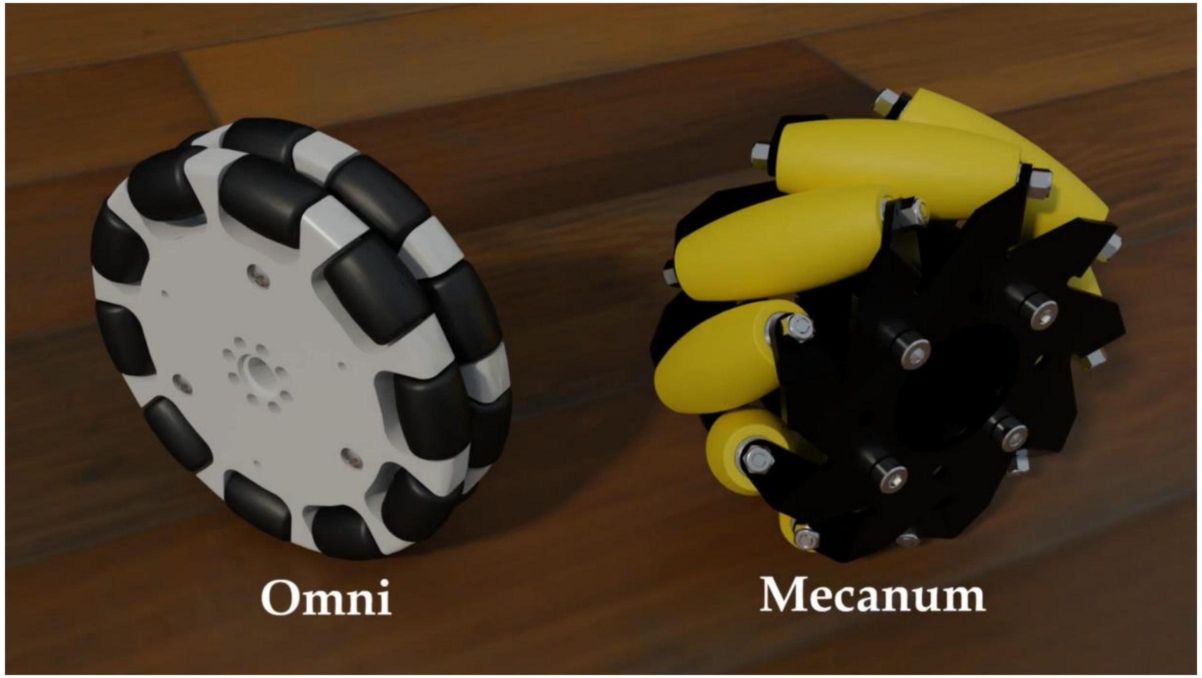
Modelo cinemático
Omnidirecional

- E como representar as velocidades em $\{W\}$?

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_W \\ \dot{y}_W \\ \dot{\theta}_W \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{{}^W_R R_Z} \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix}$$

Modelo cinemático
Omnidirecional

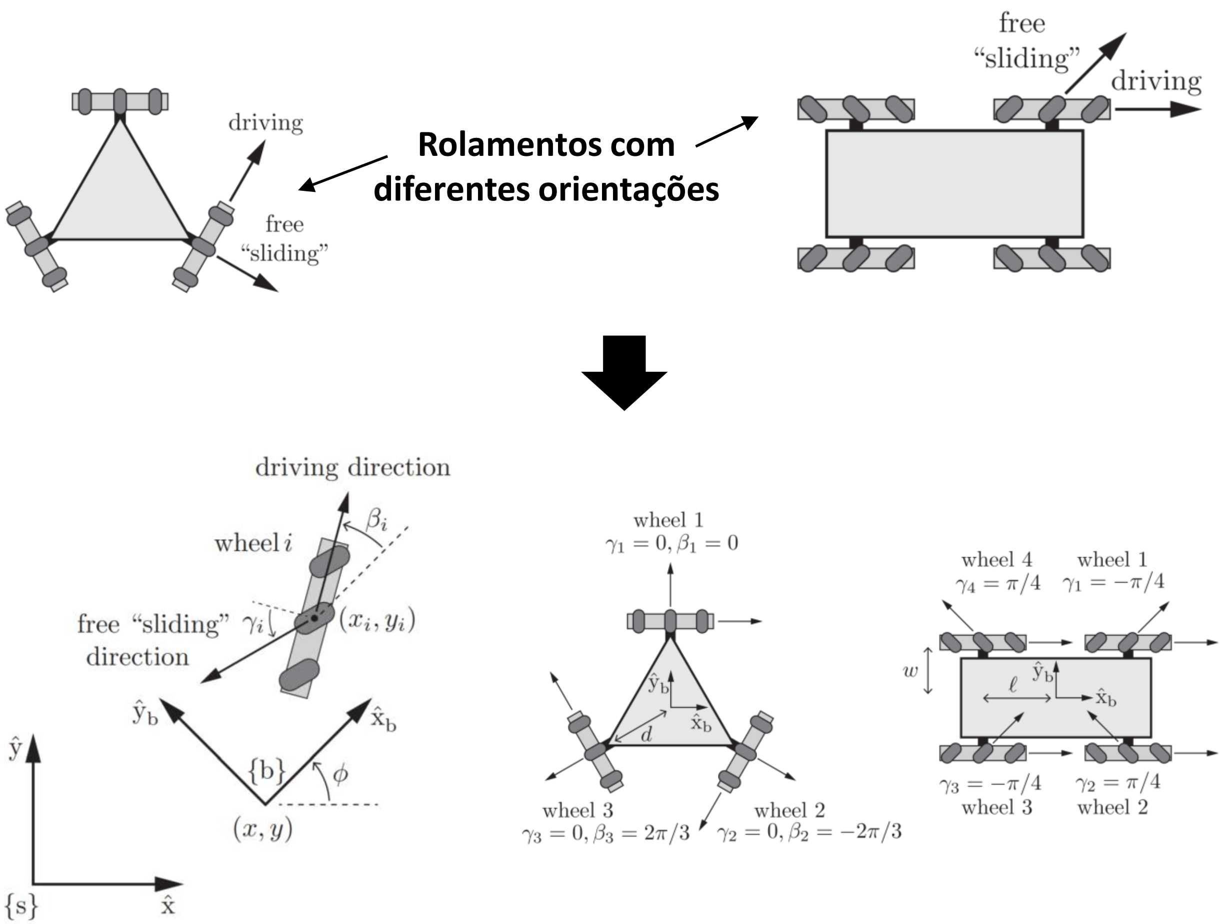
Existem diferentes tipos de rodas, isso faz diferença?



https://www.youtube.com/watch?v=qDcNxbTl-Lk

Modelo cinemático

Omnidirecional



Velocidade linear do centro da roda:

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = v_{\text{drive}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_{\text{slide}} \begin{bmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

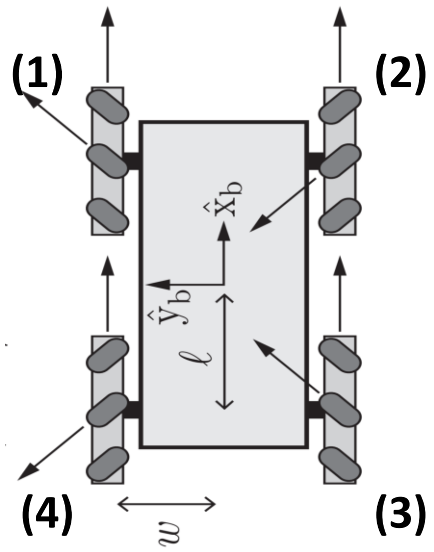
$$v_{\text{drive}} = v_x + v_y \tan\gamma$$
$$v_{\text{slide}} = v_y / \cos\gamma$$

$$u = \frac{v_{\text{drive}}}{r} = \frac{1}{r}(v_x + v_y \tan\gamma)$$

Velocidade angular da roda

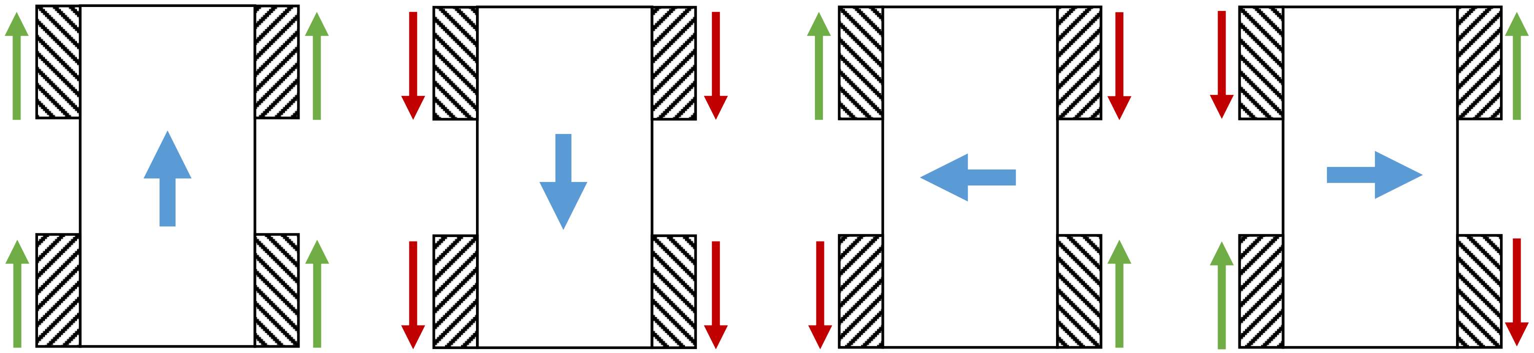
Fonte: *Modern Robotics Mechanics, Planning, And Control*
https://youtu.be/NcOT9hOsceE

Modelo cinemático
Omnidirecional



- Cinemática Direta

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{r}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{l+w} & \frac{1}{l+w} & \frac{1}{l+w} & -\frac{1}{l+w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix}$$



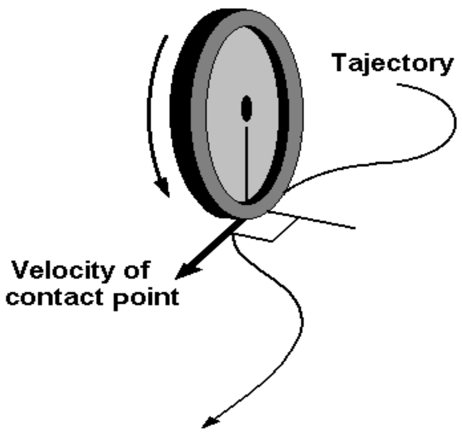
Modelo cinemático
Omnidirecional

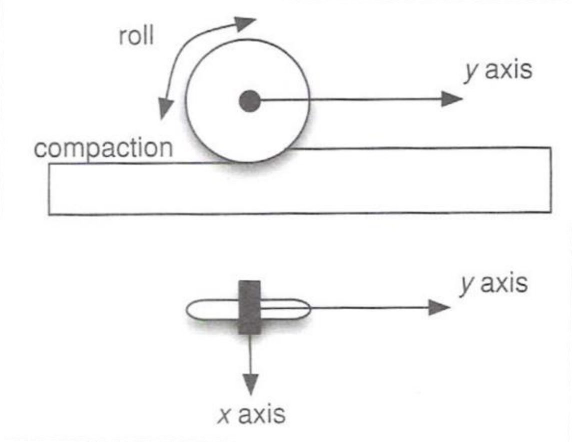
- Cinemática Inversa

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\\ \omega_4\end{bmatrix} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix}1 & -1 & -(l+w)\\ 1 & 1 & (l+w)\\ 1 & -1 & (l+w)\\ 1 & 1 & -(l+w)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$$

Modelo cinemático
Considerações

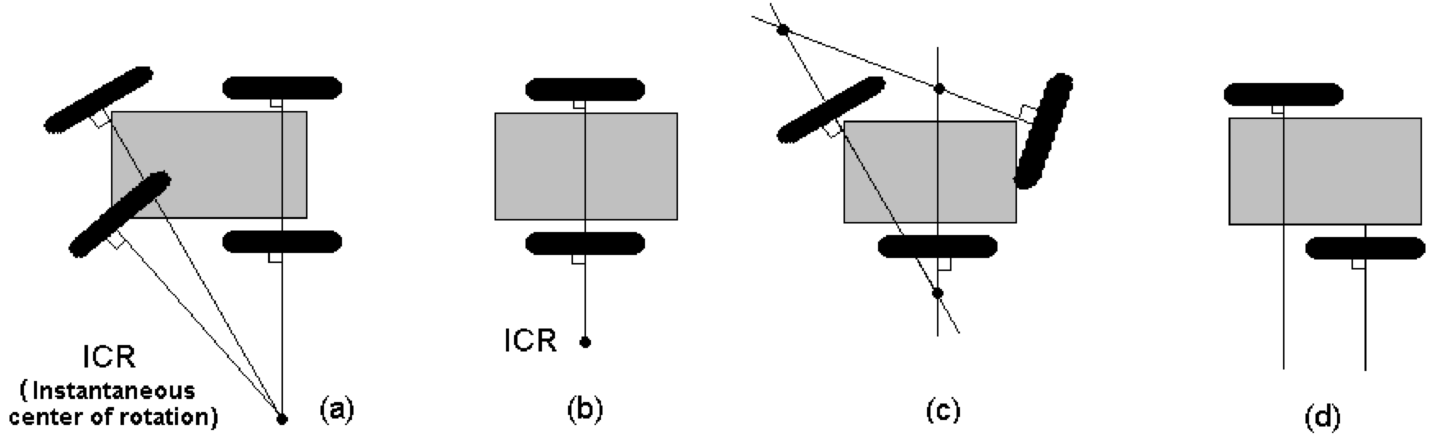
- Não ocorrem deslizamentos (derrapagem)
  - Direção ortogonal de rolamento
  - Translacional entre a roda e a superfície





Modelo cinemático
Arranjo das rodas

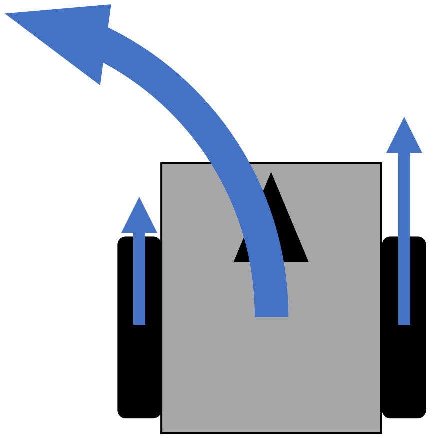
- Ponto de cruzamento entre todos os eixos
  - *Instantaneous center of rotation* (ICR), ou
  - *Instantaneous center of curvature* (ICC)



- ICR é o ponto em torno do qual cada roda do robô faz um movimento circular.
- Se não houver esse ponto único o veículo não consegue girar ou transladar.

Modelo cinemático
Robô Diferencial

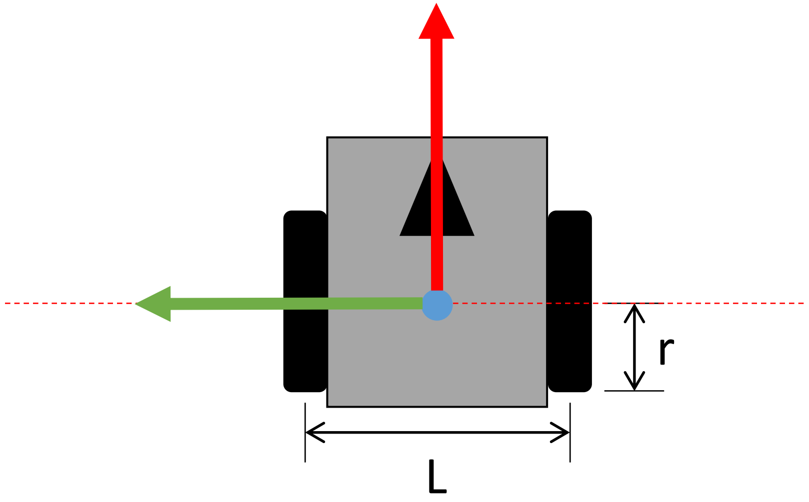
- Mecanismo mais simples de movimentação
- Duas rodas motrizes paralelas e alinhadas
  - Mais uma *roda boba* ou *roller-ball* para o equilíbrio
- Resultado das velocidades relativas das rodas
  - $\dot{q} = \left[\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{\theta}\right]^T = f(\omega_L, \omega_R)$
  - Pequenos erros geram diferentes caminhos, não apenas diferentes velocidades de movimentação



Modelo cinemático

Robô Diferencial

- Velocidades angulares das rodas: ω_L (esquerda) e ω_R (direita)
- Velocidades lineares $\mathrm{v}_L = \omega_L \cdot r$ e $\mathrm{v}_R = \omega_R \cdot r$

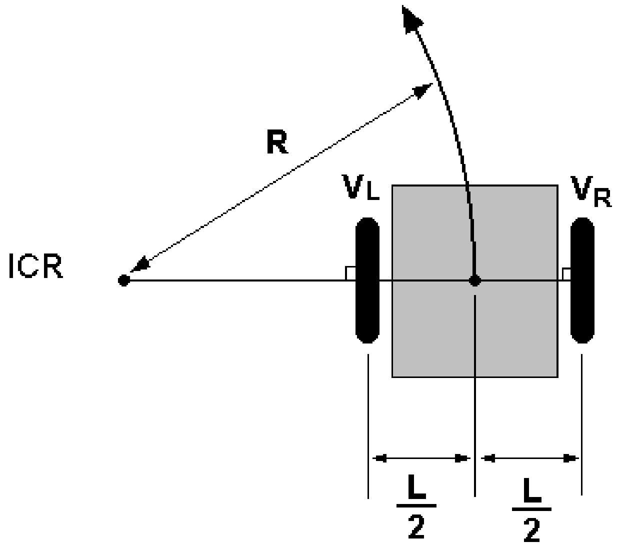


Modelo cinemático
Robô Diferencial

- Como as rodas estão sobre o mesmo eixo, as trajetórias em torno do ICR possuem a mesma velocidade angular ($\omega = v/R$)

$$\mathrm{v}_L = \omega\left(R - \frac{L}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{\mathrm{v}_L}{R-L/2} = \frac{r\omega_L}{R-L/2}$$

$$\mathrm{v}_R = \omega\left(R + \frac{L}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{\mathrm{v}_R}{R+L/2} = \frac{r\omega_R}{R+L/2}$$



Modelo cinemático
Robô Diferencial

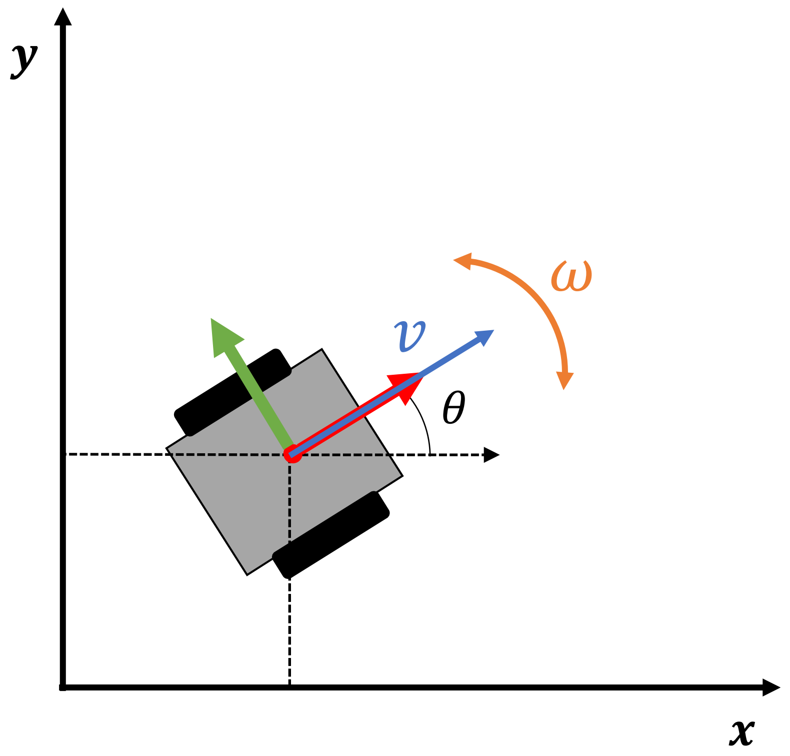
- Substituindo e resolvendo para ω

$$\boxed{\omega = \frac{\mathrm{v}_R - \mathrm{v}_L}{L}} = \frac{r(\omega_R - \omega_L)}{L}$$

- Como $v = \omega \cdot R$, temos

$$R = \frac{L}{2}\frac{(\omega_L + \omega_R)}{(\omega_R - \omega_L)} \qquad \boxed{v = \frac{\mathrm{v}_R + \mathrm{v}_L}{2}} = \frac{r(\omega_R + \omega_L)}{2}$$

Modelo cinemático
Robô Diferencial



$$\dot{x} = v\cos\theta$$
$$\dot{y} = v\sin\theta$$
$$\dot{\theta} = \omega$$

Modelo cinemático
Robô Diferencial

- O modelo cinemático completo é dado por

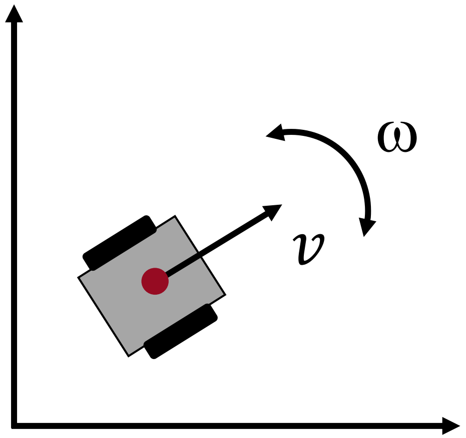
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta\,/2 & r\cos\theta\,/2 \\ r\sin\theta/2 & r\sin\theta/2 \\ r/L & -r/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_R \\ \omega_L \end{bmatrix}$$

- Geralmente, controladores de mais baixo nível determinam ω_R e ω_L, assim podemos trabalhar diretamente com v e ω

Modelo cinemático
Robô Diferencial

- Unicycle Model
  - Modelo cinemático simplificado (abrange vários veículos)
  - Robô que se move no plano com alguma velocidade linear para a frente (eixo x), mas com zero movimento lateral instantâneo

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$



Modelo cinemático
Robô Diferencial

- Cinemática Inversa

$$v = \frac{\mathrm{v}_R + \mathrm{v}_L}{2}$$

$$\omega = \frac{\mathrm{v}_R - \mathrm{v}_L}{L}$$

$$\Rightarrow$$

$$\omega_R = \frac{2v + \omega L}{2r}$$

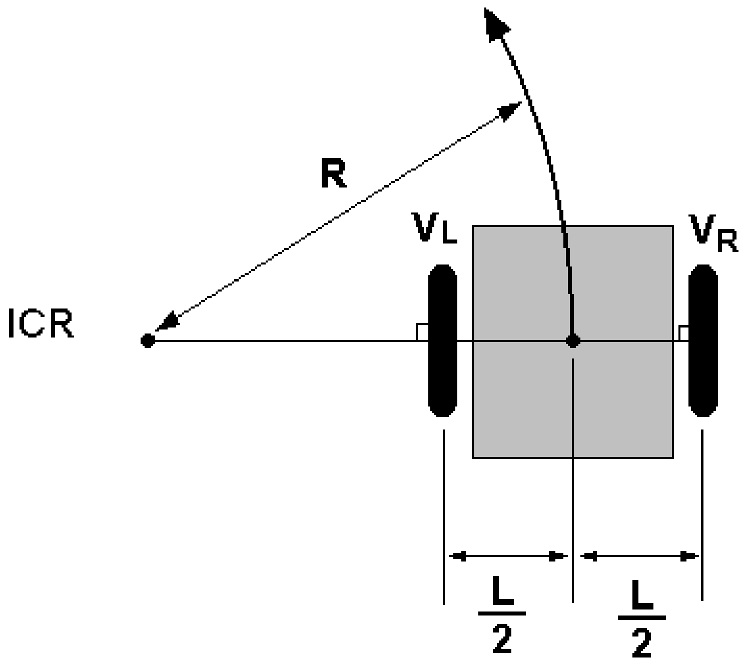
$$\omega_L = \frac{2v - \omega L}{2r}$$

http://faculty.salina.k-state.edu/tim/robotics_sg/Control/kinematics/unicycle.html

Modelo cinemático

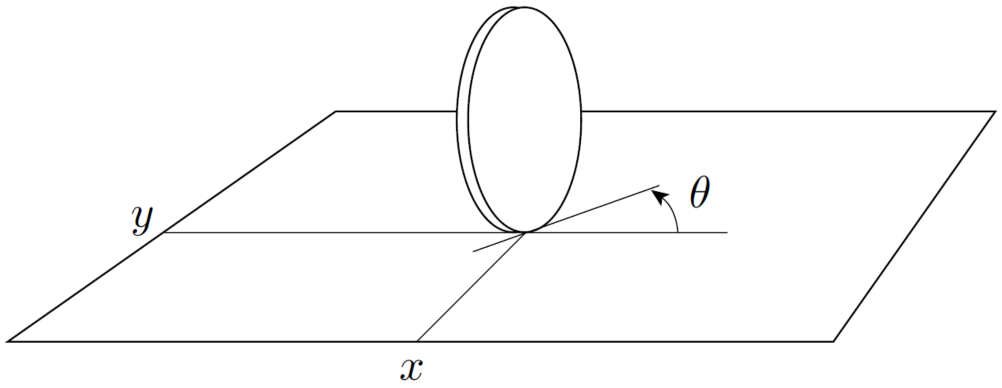
Robô Diferencial

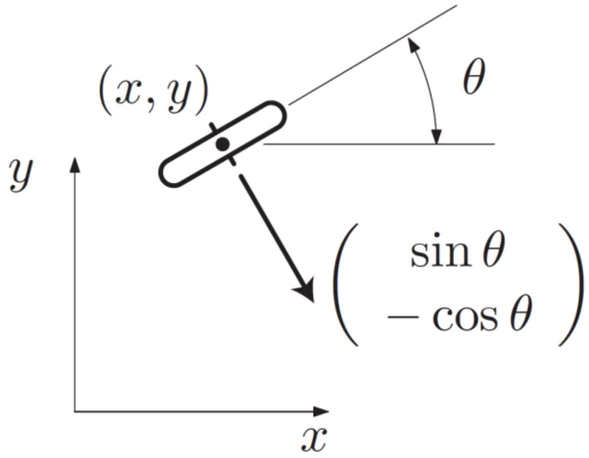
- Movimento em linha reta
  - $v_R = v_L, R = \infty$
- Giro sobre o eixo
  - $v_R = -v_L, R = 0$
- Curva abritrária
  - $v_R <> v_L$



Modelo cinemático
Robô Diferencial

- Restrição não-holonômica
  - Considere H um vetor unitário ortogonal ao plano das rodas





$$H \cdot \dot{p} = [\sin\theta \quad -\cos\theta] \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0$$

Modelo cinemático
Robô Diferencial

- Restrição não-holonômica
  - Robô move-se apenas na direção normal ao eixo das rodas motrizes

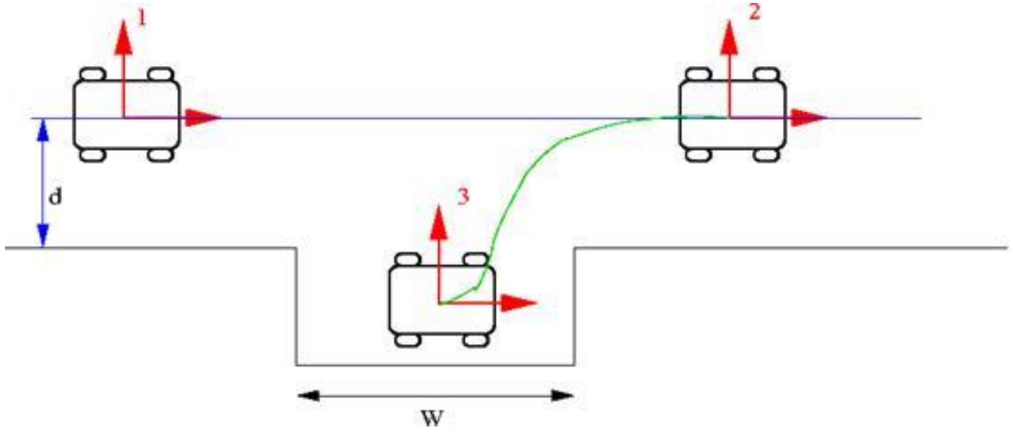
$$\dot{x} \sin\theta - \dot{y} \cos\theta = 0$$

- Qual o significado físico?
  - As próprias rodas já inserem as restrições!
  - Definem as direções inválidas de movimento
    - $\theta = 90 \Rightarrow v_x = 0$, $\theta = 0 \Rightarrow v_y = 0$

Modelo cinemático

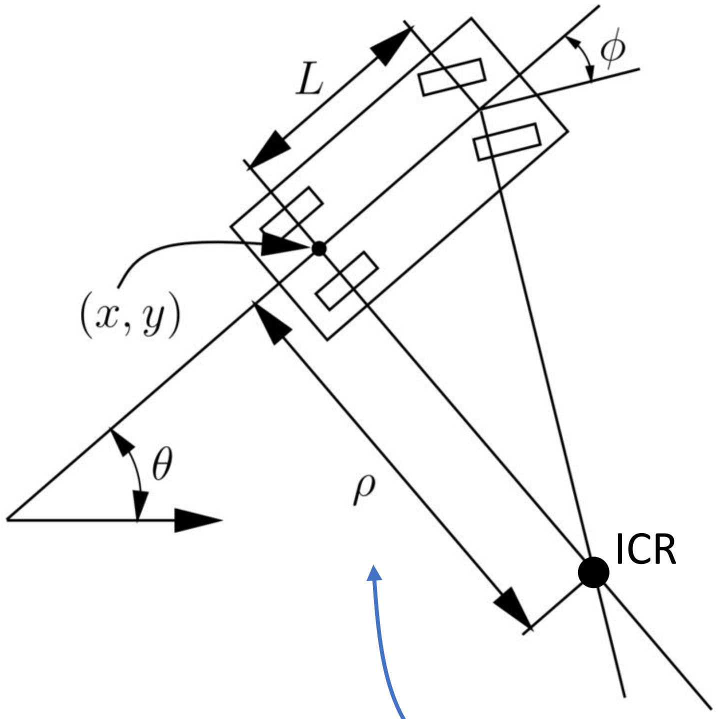
Robô Diferencial

- A restrição não-holonômica não restringe as possíveis configurações que o sistema pode atingir, mas impede a velocidade instantânea ou aceleração em certas direções
- Como resolver? ➔ Controle



Modelo cinemático

Ackerman (car-like)



$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & \dfrac{\tan\phi}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \phi \end{bmatrix}$$

Velocidade linear

Ângulo da roda direcional

O ângulo de esterçamento deve ser limitado, ou seja:

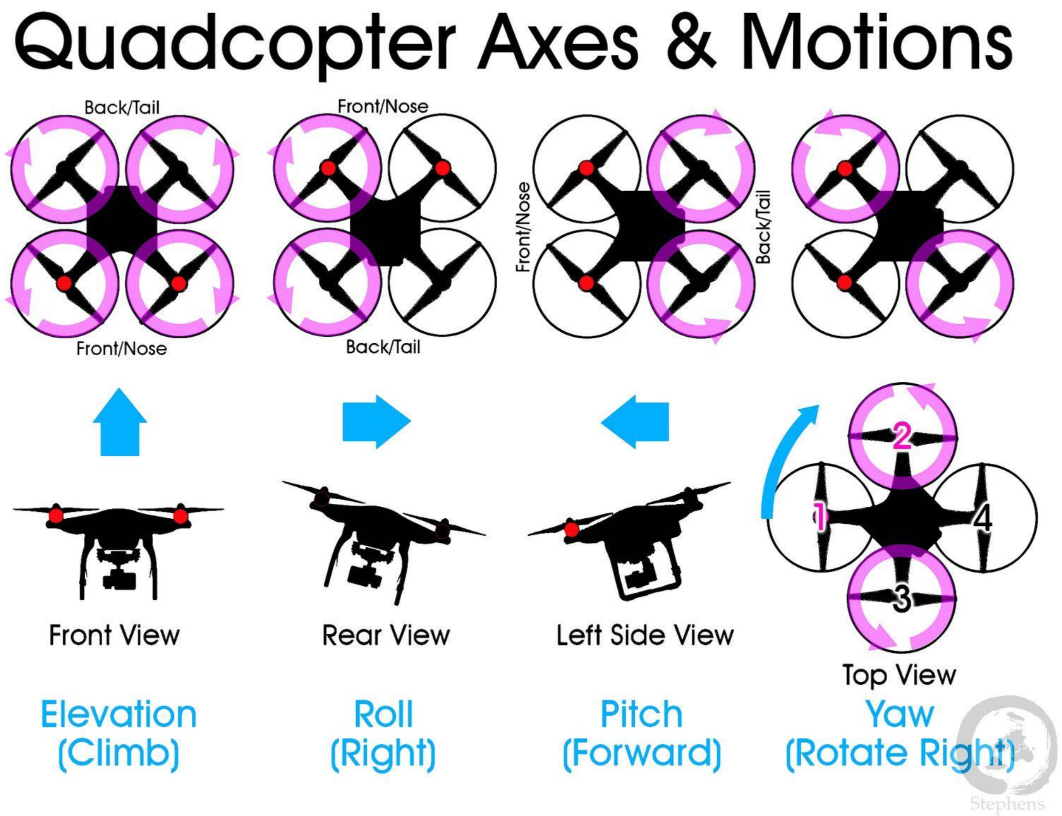
$|\phi| < \phi_{\max}$, onde $\phi_{\max} < \pi/2$

Dado um valor fixo para ϕ, o carro se moverá em um movimento circular, no qual o raio do círculo é ρ, conhecido como *minimum turning radius*.

http://planning.cs.uiuc.edu/node658.html

Modelo cinemático
Drones

- O controle de baixo nível está muito mais associado às questões dinâmicas (forças e torques) do que cinemáticas
- O controle cinemático (posição) de alto nível considera que as velocidades dos motores serão ajustadas corretamente



https://www.mathworks.com/videos/drone-simulation-and-control-part-1-setting-up-the-control-problem-1539323440930.html?s_tid=srchtitle

Considerações finais

- Cinemática
  - Descreve os movimentos de um corpo abstraindo das forças
  - Cinemática Direta ←→ Cinemática Inversa
  - Modelos cinemáticos: de acordo com o mecanismo (robô)

- Dinâmica
  - Considera as forças que produzem ou modificam movimentos
  - Modelo cinemático + Parâmetros inerciais