Robótica Móvel

Controle – Cinemático

Prof. Douglas G. Macharet
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

VERLab
Visão e Robótica

Introdução

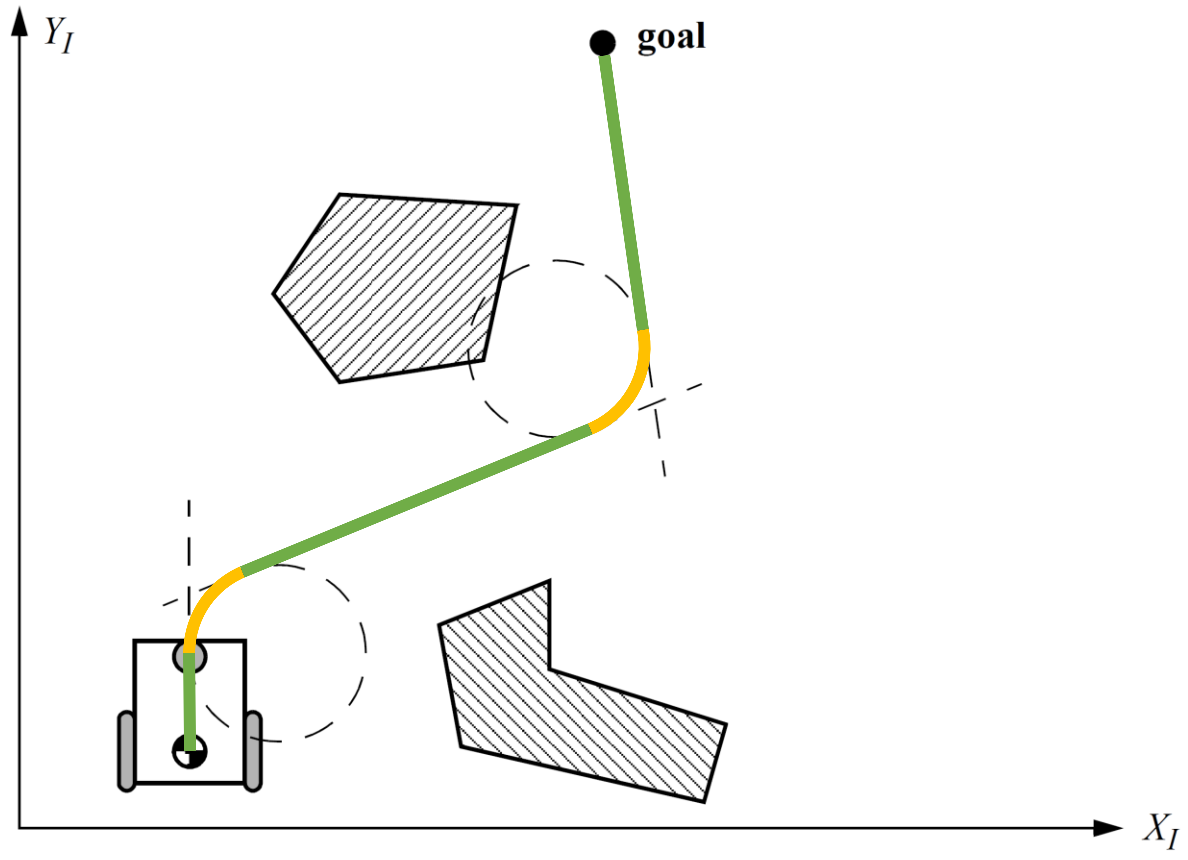
- Modelo cinemático
  - Cinemática direta → Geometria
  - Cinemática inversa → Controle

- Controle cinemático
  - Considerando um certo robô e seu modelo cinemático, o objetivo é determinar um conjunto de entradas (velocidades) apropriadas para levar ele de uma posição/configuração inicial até uma final

Controle cinemático
Malha aberta

- Como resolver esse problema em malha aberta?
- Especificar um caminho e dividir em segmentos
  - Formas/trechos bem definidos
  - Segmentos de reta e arcos de circunferência
- Problema de controle
  - Retas: aplicar uma velocidade de 0,25 m/s durante 4s
  - E as velocidades nos arcos?
    - Direção, comprimento

Controle cinemático
Malha aberta



Fonte: *Introduction to Autonomous Mobile Robots*

Controle cinemático
Malha aberta

- Problemas
  - Não é fácil pré-calcular uma trajetória viável
  - Trajetória não é suave (troca entre estados)
    - Ocorre uma descontinuidade no perfil de aceleração (curvatura)
  - Limitações e restrições dos robôs
    - Considerar as velocidades/acelerações que podem ser usadas
  - A trajetória calculada é estática
    - Não considera possível mudanças e incertezas

Controle cinemático
Malha fechada – Holonômico

- Controle bem simples no caso holonômico

$$\dot{\mathrm{q}}(t) = \mathrm{G}(\mathrm{q})u(t)$$

- Se G for quadrada e invertível, é possível obter-se uma relação direta entre a entrada de controle u e o erro e
- Lembrando
  - $\dot{\mathrm{q}}(t)$: Derivada da configuração do robô
  - $\mathrm{G}(\mathrm{q})$: Matriz de transformação
  - $u(t)$: Vetor de controle

Controle cinemático
Malha fechada – Holonômico

- Por exemplo, considerando-se uma matriz G identidade e o uso de um controle proporcional, temos:

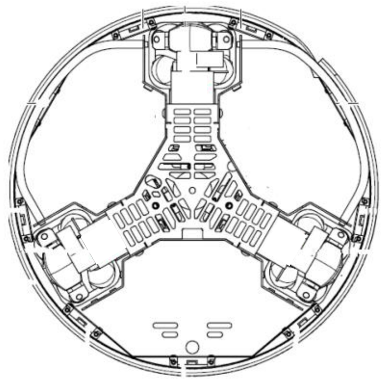
$$\dot{\mathrm{q}} = u, \quad \text{onde} \quad u = K_P \cdot e$$

- Logo

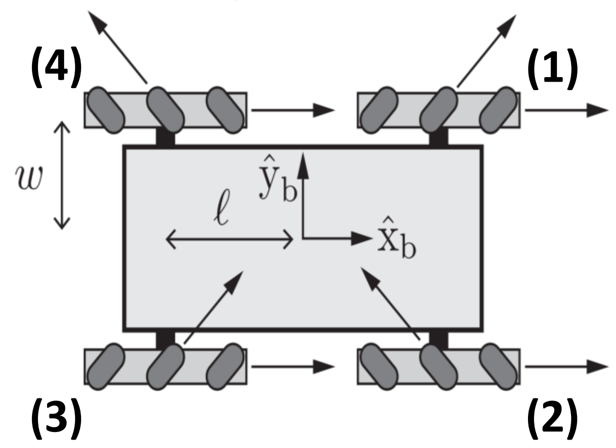
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{P_x} & 0 & 0 \\ 0 & K_{P_y} & 0 \\ 0 & 0 & K_{P_\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_g - x) \\ (y_g - y) \\ (\theta_g - \theta) \end{bmatrix}$$

Com esses valores podemos determinar as velocidades das rodas.

Controle cinemático
Malha fechada – Holonômico



$$\begin{bmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{bmatrix} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}/2 & 1/2 & L\\ 0 & -1 & L\\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_R\\\dot{y}_R\\\dot{\theta}_R\end{bmatrix}$$



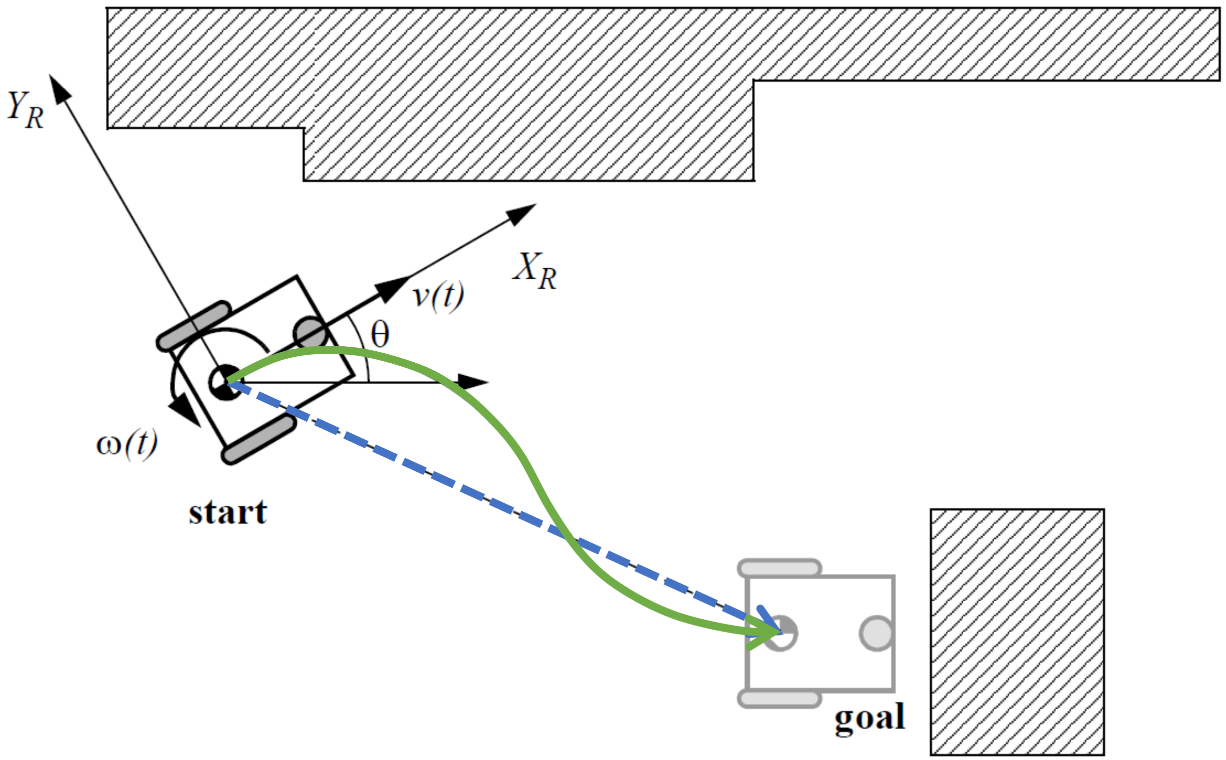
$$\begin{bmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\\\omega_4\end{bmatrix} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix}1 & -1 & -(l+w)\\ 1 & 1 & (l+w)\\ 1 & -1 & (l+w)\\ 1 & 1 & -(l+w)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{\theta}\end{bmatrix}$$

Controle cinemático

- Maioria dos robôs são não-holonômicos
  - Não é possível atuar em todos os DoF
  - O controle não é tão simples e direto
  - A matriz G não é quadrada
- Diversos controladores na literatura
  - Vamos ver alguns, mas o projeto não é nosso foco

Controle cinemático

Malha fechada – Não-holonômico (Configuração)



Fonte: *Introduction to Autonomous Mobile Robots*

Controle cinemático

Malha fechada – Não-holonômico (Configuração)

- Encontrar uma matriz K

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}, \text{onde } k_{ij} = k(t, e)$$

- tal que o controle de v(t) e $\omega(t)$

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = K \cdot e = K \cdot \boxed{{}^{R}[x \quad y \quad \theta]^T}$$

Erro no referencial do robô, que representa a coordenada alvo

- leve o erro e para zero:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0$$

Controle cinemático

Malha fechada – Não-holonômico (Configuração)

- Assumindo que o objetivo (goal) está na origem do referencial inercial, a cinemática do robô descrita em $\{X_I, Y_I, \theta\}$ é dada por

$$
{}^{I}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}
$$

- onde $\dot{x}$ e $\dot{y}$ são as velocidades lineares nas direções X_I e Y_I

Controle cinemático
Malha fechada – Não-holonômico (Configuração)

- Transformação: Coordenadas Cartesianas → Polares
  - Descrição mais fácil para esse problema específico

- Quais informações do alvo o controlador precisa?
  - Posição (dist.) → para decidir a velocidade do veículo
  - Direção → para alinhar o veículo com a posição alvo
  - Orientação → para ajustar ao ângulo final desejado

Controle cinemático

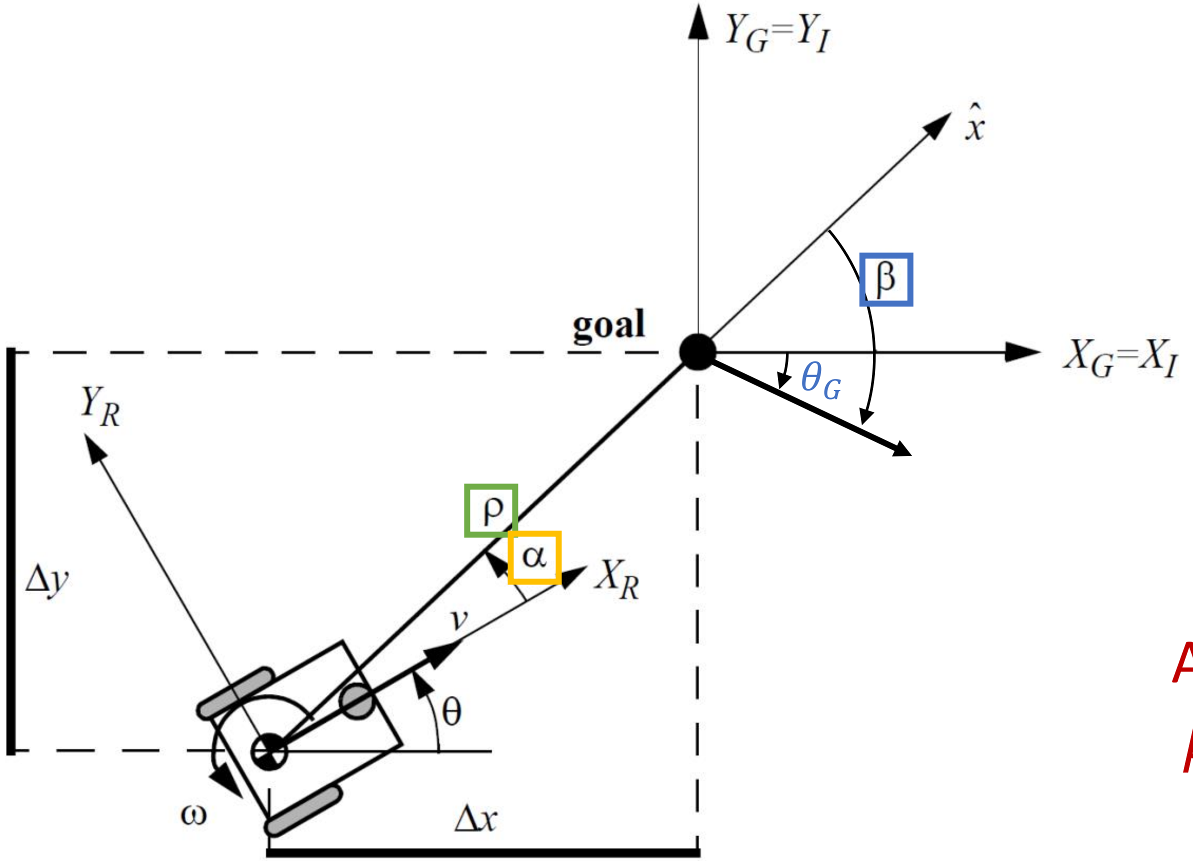
Malha fechada – Não-holonômico (Configuração)

- Seja α o ângulo entre o eixo X_R e o vetor $\hat{x}$ que liga a origem do referencial do robô (centro do eixo) até a posição alvo

- Se $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, o erro em coordenadas polares é
  - $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$
  - $\alpha = -\theta + \text{atan2}(\Delta y, \Delta x)$
  - $\beta = -\theta - \alpha$ ➡ $\boxed{\theta_G - \text{atan2}(\Delta y, \Delta x)}$

Controle cinemático

Malha fechada – Não-holonômico (Configuração)



Atenção, os ângulos α e β devem ser expressos no domínio $[-\pi, \pi)$!

Fonte: *Introduction to Autonomous Mobile Robots*

Controle cinemático

Malha fechada – Não-holonômico (Configuração)

Coordenadas Cartesianas

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

Coordenadas Polares

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & 0 \\ \dfrac{\sin\alpha}{\rho} & -1 \\ -\dfrac{\sin\alpha}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

Controle cinemático
Malha fechada – Não-holonômico (Configuração)

- Se o alvo está atrás do robô, "redefinimos a frente" → $v = -v$

$$\begin{bmatrix}\dot\rho\\ \dot\alpha\\ \dot\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\cos\alpha & 0\\ \dfrac{\sin\alpha}{\rho} & -1\\ -\dfrac{\sin\alpha}{\rho} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix}$$

$\alpha \in I_1$, onde $I_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Robô de frente para o goal.

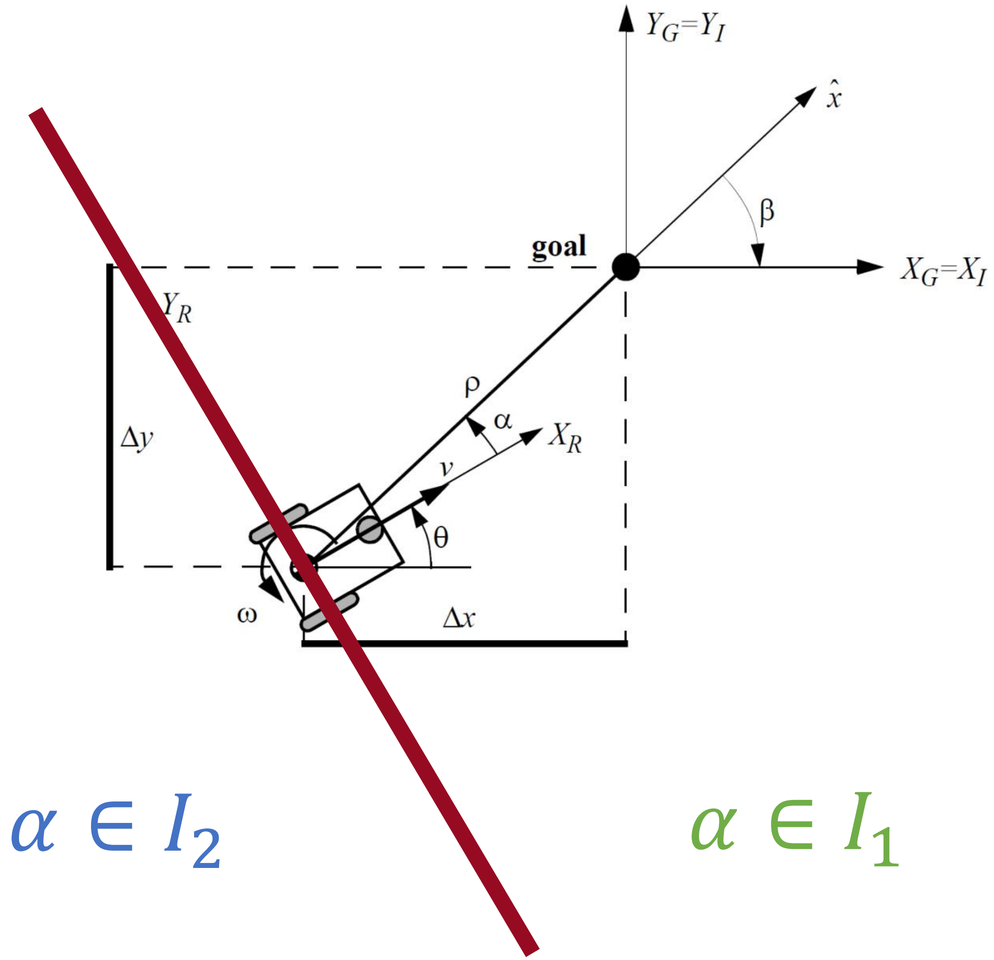
$$\begin{bmatrix}\dot\rho\\ \dot\alpha\\ \dot\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & 0\\ -\dfrac{\sin\alpha}{\rho} & 1\\ \dfrac{\sin\alpha}{\rho} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix}$$

$\alpha \in I_2$, onde $I_2 = \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Robô de costas para o goal.

Controle cinemático

Malha fechada – Não-holonômico (Configuração)



Controle cinemático

Malha fechada – Não-holonômico (Configuração)

- Considerando a lei de controle linear

$$\boxed{v = k_\rho \rho \quad \text{e} \quad \omega = k_\alpha \alpha + k_\beta \beta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_R &= \frac{v}{r} + \frac{\omega L}{2r} \\ \omega_L &= \frac{v}{r} - \frac{\omega L}{2r} \end{aligned}}$$

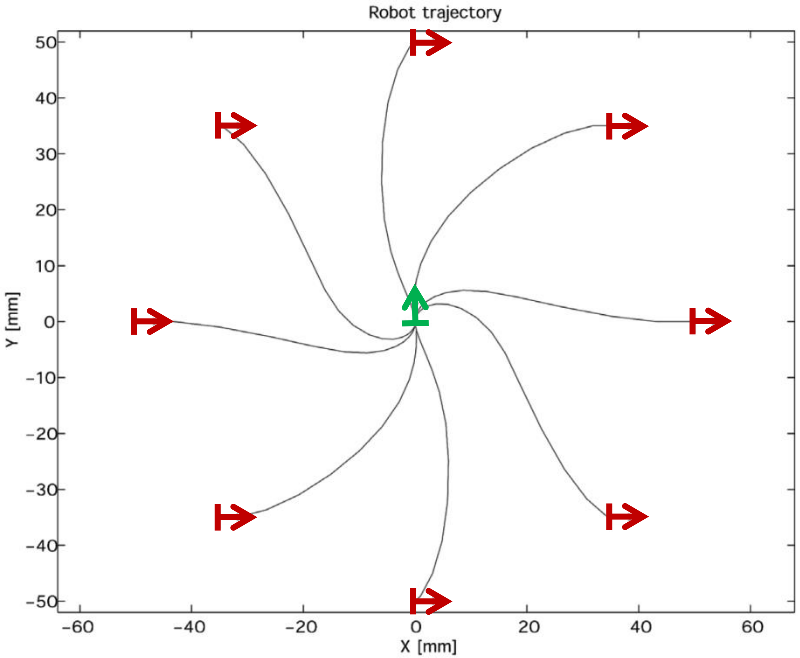
- o seguinte controlador

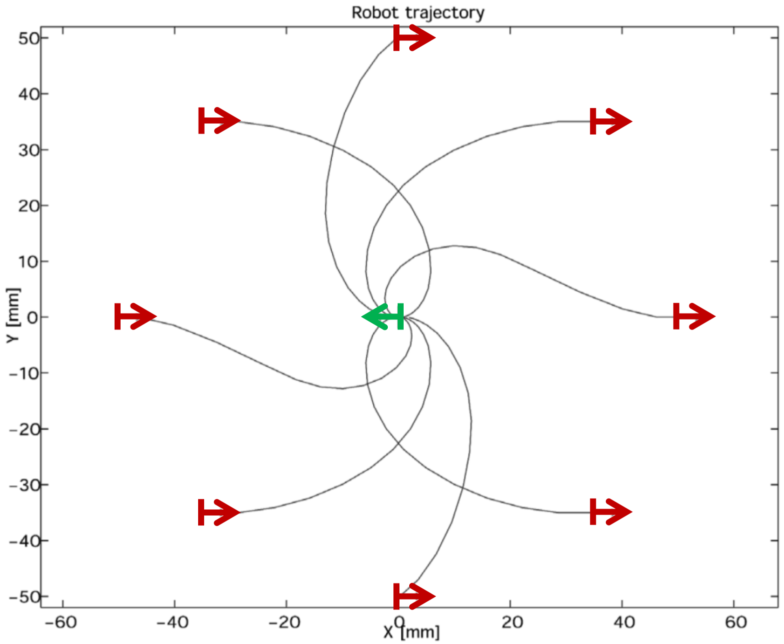
$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\rho \rho \cos\alpha \\ k_\rho \sin\alpha - k_\alpha \alpha - k_\beta \beta \\ k_\rho \sin\alpha \end{bmatrix}$$

- leva o robô até $(\rho, \alpha, \beta) = (0,0,0)$

Controle cinemático

Malha fechada – Não-holonômico (Configuração)





$$k = (k_\rho, k_\alpha, k_\beta) = (3, 8, -1.5)$$

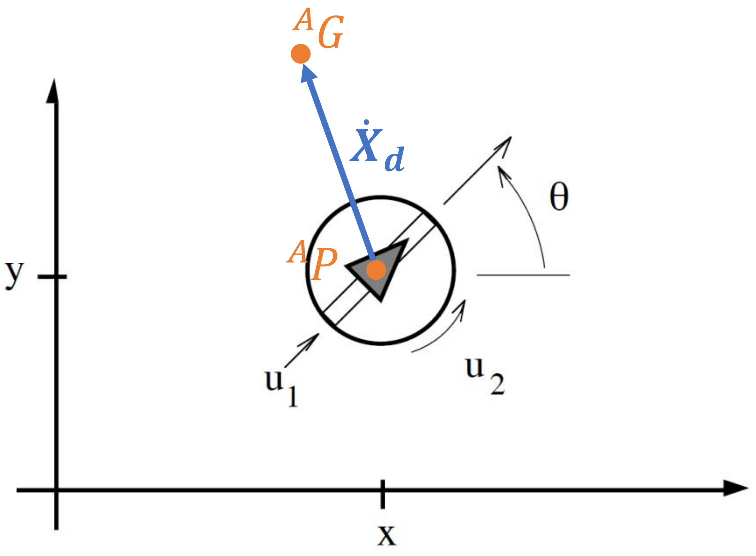
Controle cinemático

Malha fechada – Não-holonômico (Configuração)

- O sinal de controle v possui valor constante
  - A direção se mantém positiva ou negativa
  - Movimento é feito de maneira suave
- Estabilidade
  - Garante que o robô não irá mudar de direção
  - $k_\rho > 0; \quad k_\beta < 0; \quad k_\alpha - k_\beta > 0$

Controle cinemático
Malha fechada – Não-holonômico (Posição)

- [De Luca e Oriolo, 1994]



$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & 0\\ \sin\theta & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

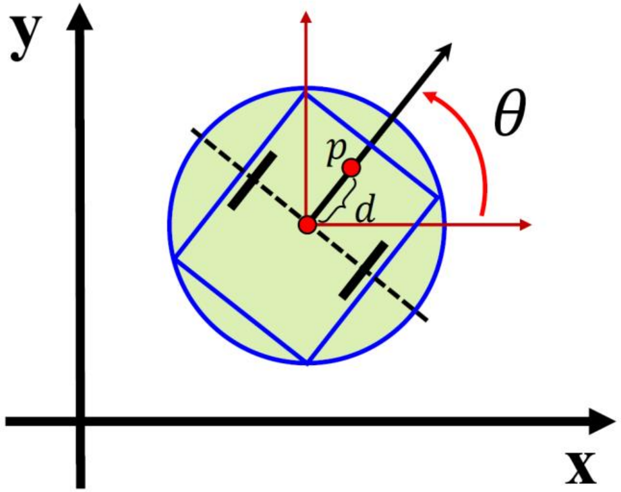
$$u_1 = k_\rho(\dot{x}_d\cos\theta + \dot{y}_d\sin\theta)$$
$$u_2 = k_\theta(\mathrm{atan2}\{\dot{y}_d, \dot{x}_d\} - \theta)$$

A. De Luca, G. Oriolo, “Local incremental planning for nonholonomic mobile robots”, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 1994.

Controle cinemático

Malha fechada – Não-holonômico (Posição)

- [Desai et al., 1998]



$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \dfrac{-\sin\theta}{d} & \dfrac{\cos\theta}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

J. P. Desai, J. Ostrowski, V. Kumar, "Controlling formations of multiple mobile robots", Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 1998.

Considerações finais

- Esse controle não é suficiente para tarefas mais complexas
  - Planejamento de alto nível → Navegação