UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

Robótica Móvel

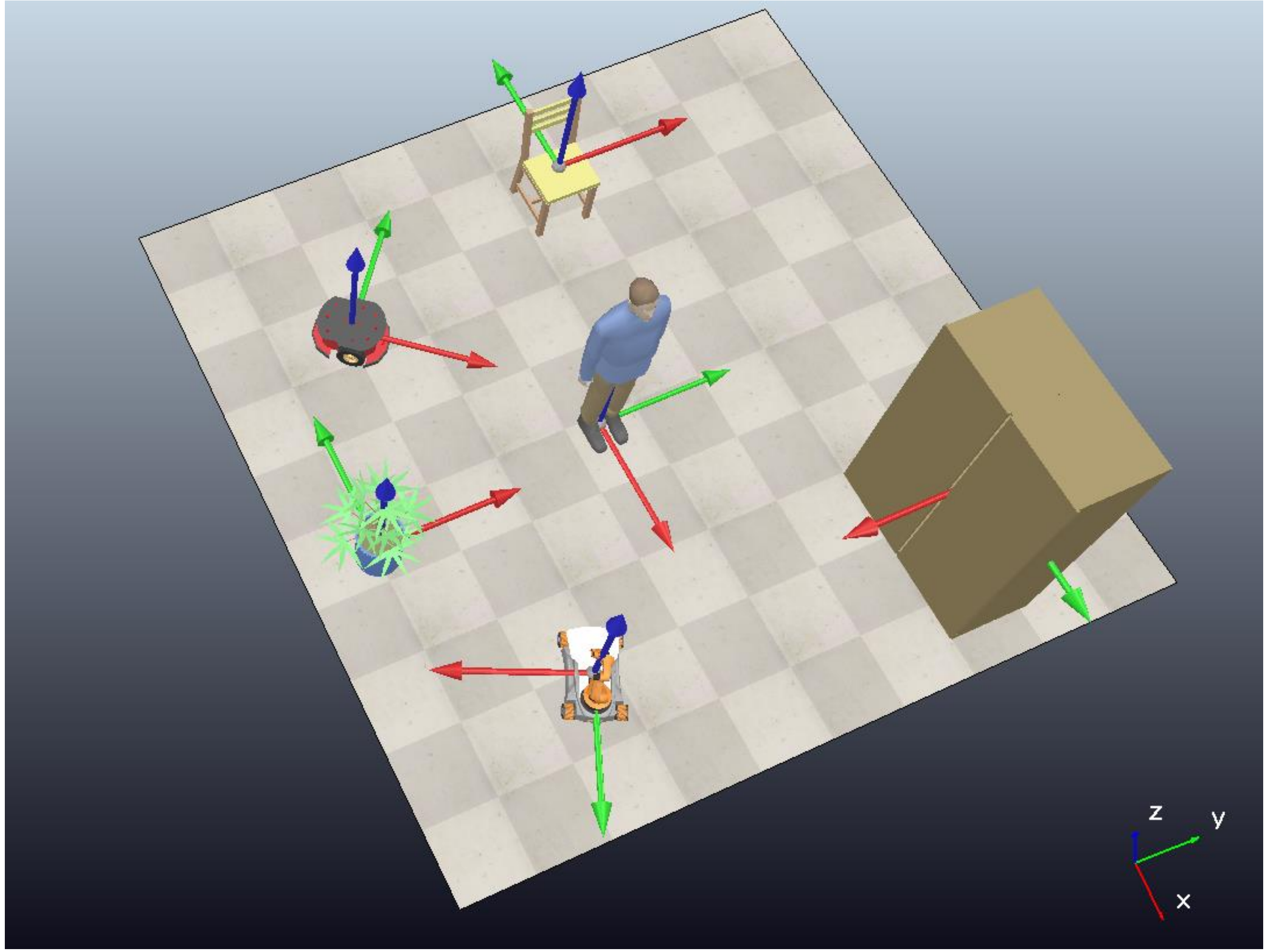
Transformações homogêneas e Espaço de configurações

Prof. Douglas G. Macharet
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

VERLab
Visão e Robótica

Introdução



Coordenadas homogêneas

- Tratar as transformações de maneira uniforme
  - Translação é não linear (não pode ser combinada)
- Coordenadas homogêneas
  - Também chamadas de coordenadas projetivas
  - Transformações rígidas → Transformações lineares

$$ {}^{A}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \boxed{w} \end{bmatrix} $$

Adicionar um novo elemento no vetor, conhecido como fator de escala.

Coordenadas homogêneas

- Representação matricial de transformações afins e projetivas
  - Inversões e combinações de transformações lineares simplificadas para inversão ou multiplicação das matrizes correspondentes

- Matrizes de Transformações Homogêneas
  - Forma mais elegante de compor transformações
  - Rotações, Translações e Escala
  - Também servem para descrever *frames*

$$T = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformação homogênea

$$\left[\begin{array}{c} {}^{A}P \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} {}^{B}P \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} \quad \Rightarrow \quad {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P$$

Transformação homogênea

$$\begin{array}{rcl} \text{Rotação} & \left[\begin{array}{ccc:c} r_1 & r_2 & r_3 & p_x \\ r_4 & r_5 & r_6 & p_y \\ r_7 & r_8 & r_9 & p_z \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \text{Translação} \\ \text{Perspectiva} & & \text{Escala} \end{array}$$

$$\boldsymbol{T}$$

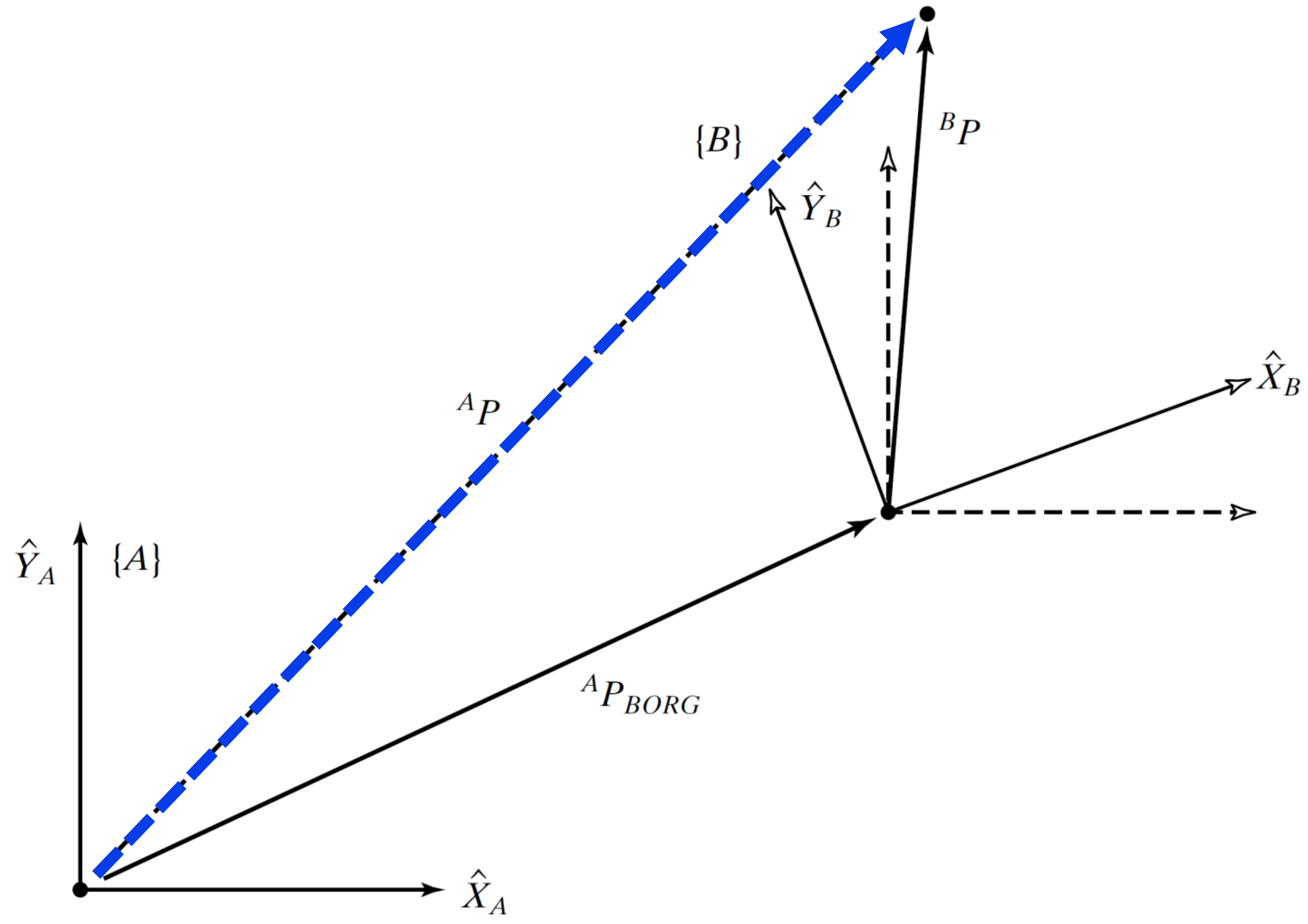
Transformação homogênea
Exemplo

- Seja $\{B\}$ um referencial rotacionado $\theta = 30°$em torno de $\hat{Z}_A$ e transladado 10 unidades em $\hat{X}_A$ e 5 unidades em $\hat{Y}_A$. Dado o ponto ${}^{B}P$, defina ${}^{A}_{B}T$ e ${}^{A}P$.

$$
{}^{B}P = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 & 0{,}000 & 10{,}0 \\ 0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 & 5{,}0 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P = \begin{bmatrix} 9{,}098 \\ 12{,}562 \\ 0{,}000 \end{bmatrix}
$$

Transformação homogênea
Exemplo



Transformações compostas

- Se o referencial $\{C\}$ é conhecido em relação a $\{B\}$, e $\{B\}$ é conhecido em relação a $\{A\}$. Como obter ${}^{A}P$ dado ${}^{C}P$?
  - 1) ${}^{B}P = {}^{B}_{C}T\,{}^{C}P$
  - 2) ${}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P$

$$\Rightarrow \quad {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}P$$

- Pode-se então, definir:

$${}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T$$

Transformações compostas

$$
{}^{A}_{C}T = \left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R & & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{CORG} + {}^{A}P_{BORG} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

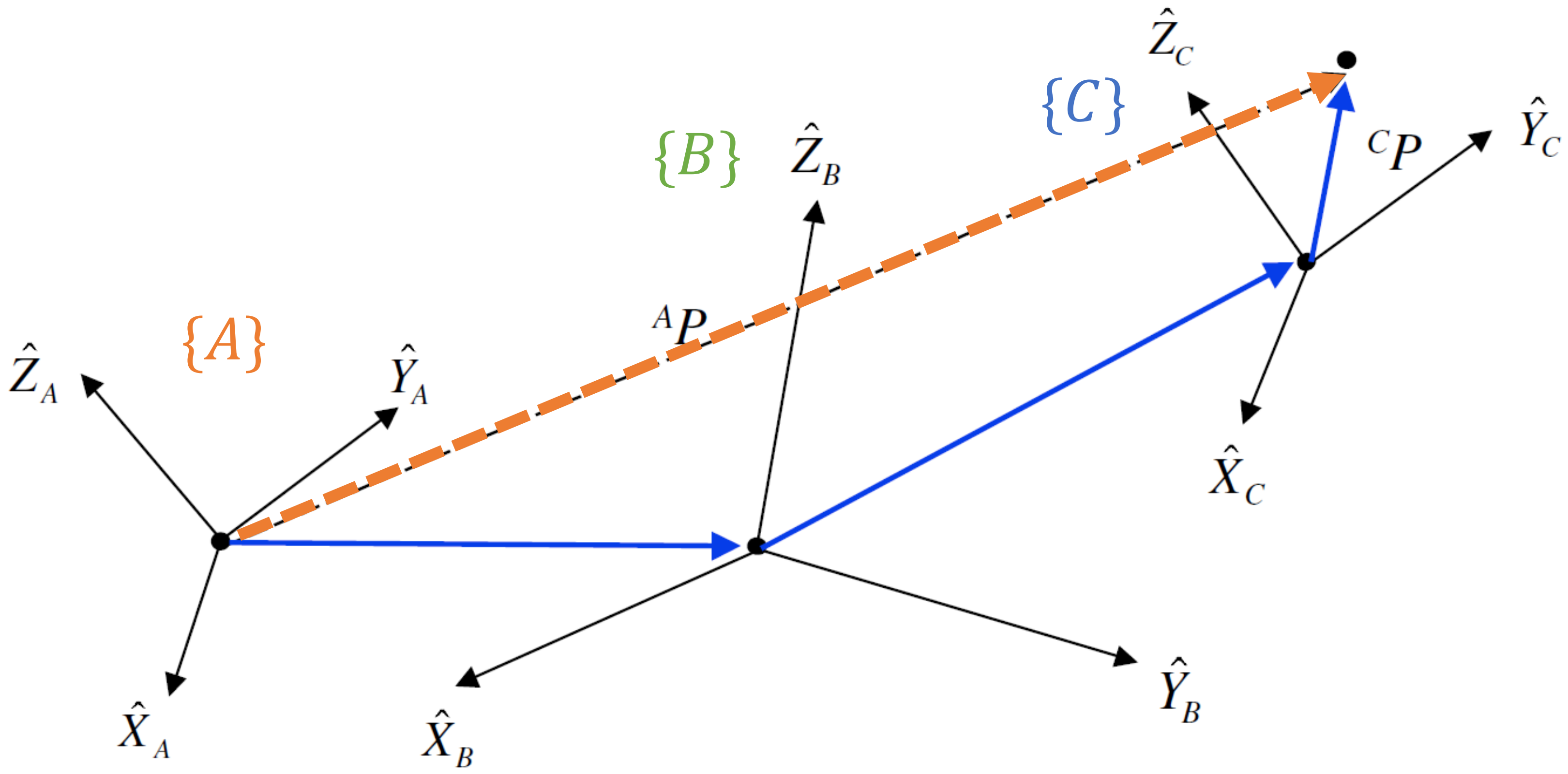
Transformações compostas
Exemplo

- Seja $\{C\}$ um referencial rotacionado $\theta = -45°$em torno de $\hat{Z}_B$ e transladado -6 unidades em $\hat{Y}_B$. Seja $\{B\}$ um referencial rotacionado $\theta = 45°$em torno de $\hat{Z}_A$ e transladado 5 unidades em $\hat{X}_A$ e 10 unidades em $\hat{Y}_A$. Dado ${}^{C}P$, defina ${}^{A}_{C}T$ e ${}^{A}P$.

$$
{}^{C}P = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^{B}_{C}T = \begin{bmatrix} 0{,}707 & -0{,}707 & 0{,}000 & 0 \\ 0{,}707 & 0{,}707 & 0{,}000 & -6{,}0 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0{,}707 & 0{,}707 & 0{,}000 & 5{,}0 \\ -0{,}707 & 0{,}707 & 0{,}000 & 10{,}0 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

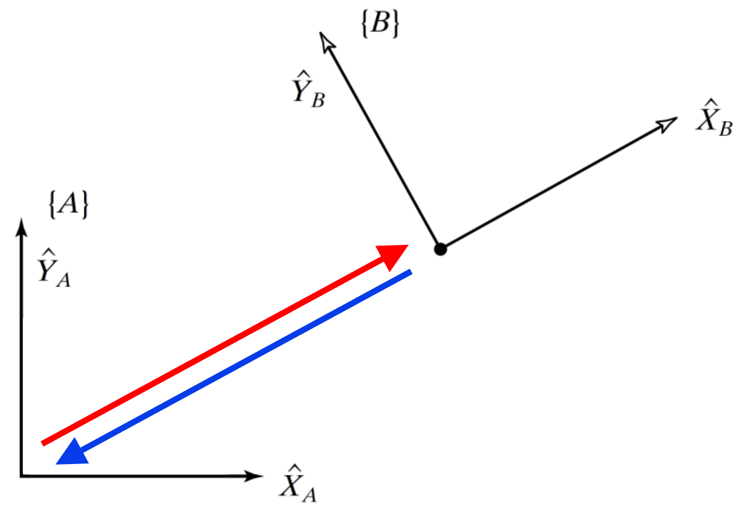
$$
{}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T \qquad {}^{A}P = {}^{A}_{C}T\,{}^{C}P = \begin{bmatrix} 11{,}242 \\ 7{,}757 \\ 0{,}000 \end{bmatrix}
$$

Transformações compostas
Exemplo



Inversão de transformações

- Considere um referencial $\{B\}$ conhecido em relação a $\{A\}$
- Como fazer se quisermos o contrário?
  - Descrição de $\{A\}$ em relação a $\{B\}$
  - Ou seja, temos ${}^{A}_{B}T$ e deseja-se obter ${}^{B}_{A}T$



- Pode-se calcular a inversa da matriz 4×4
  - Não é o mais eficiente computacionalmente

Inversão de transformações

- Como ser mais eficiente?
  - Estrutura inerente à transformação
- Vamos calcular ${}^{B}_{A}R$ e ${}^{B}P_{AORG}$ a partir de ${}^{A}P_{BORG}$ e ${}^{A}_{B}R$
- Utilizando propriedades vistas anteriormente
  - A inversa é igual a sua transposta: ${}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{T}$
  - Alterar a descrição de ${}^{A}P_{BORG}$ para $\{B\}$ usando

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}$$

Inversão de transformações

- A descrição de ${}^{A}P_{BORG}$ em $\{B\}$ é dada por

$$ {}^{B}({}^{A}P_{BORG}) = {}^{B}_{A}R\, {}^{A}P_{BORG} + {}^{B}P_{AORG} $$

- A origem do sistema $\{B\}$ descrita em $\{B\}$ é zero. Logo, o lado esquerdo da equação acima deve ser zero, assim temos

$$ {}^{B}P_{AORG} = -{}^{B}_{A}R\, {}^{A}P_{BORG} = -{}^{A}_{B}R^{T}\, {}^{A}P_{BORG} $$

Inversão de transformações

$$ {}^{B}_{A}T = \left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}_{B}R^{T} & & -{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{BORG} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

Notação: ${}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1}$

Inversão de transformações

Exemplo

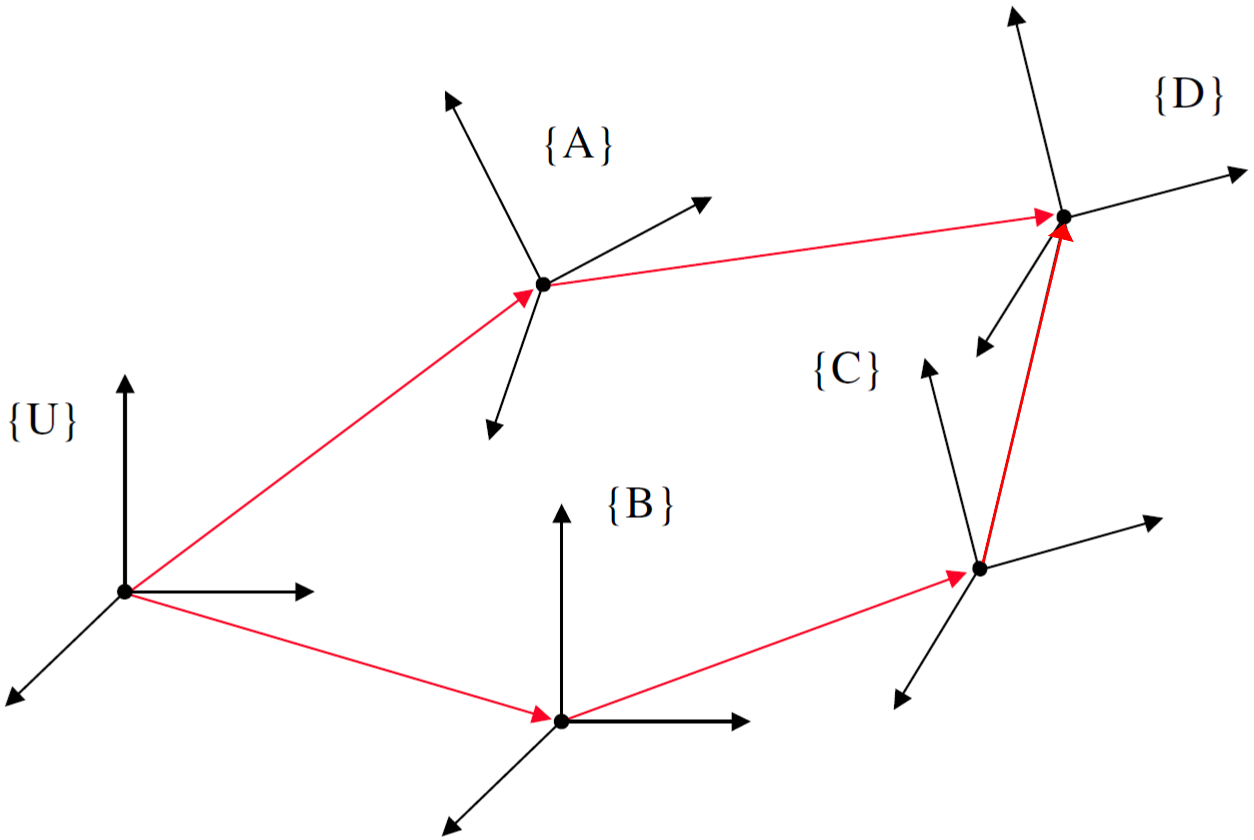
- Seja $\{B\}$ um referencial rotacionado $\theta = 30°$ em torno de $\hat{Z}_A$, e transladado 4 unidades ao longo de $\hat{X}_A$ e 3 unidades ao longo de $\hat{Y}_A$. Dado ${}^A_BT$ defina ${}^B_AT$.

$$
{}^A_BT = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 & 0{,}000 & 4{,}0 \\ 0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 & 3{,}0 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^B_AT = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \qquad {}^A_BR^T \qquad & \qquad -{}^A_BR^T\,{}^AP_{BORG} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}500 & 0{,}000 & -4{,}964 \\ -0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 & -0{,}598 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Equações de transformações

De quantas formas diferentes o referencial $\{D\}$ pode ser descrito em relação a $\{U\}$?



Equações de transformações

- O referencial $\{D\}$ pode ser obtido como

$$ {}^{U}_{D}T = {}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T \quad \text{ou} \quad {}^{U}_{D}T = {}^{U}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}_{D}T $$

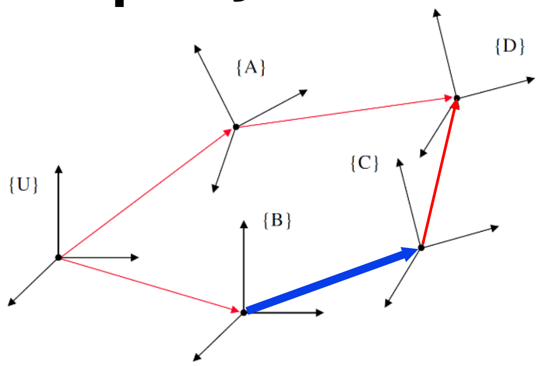
- Equação de transformações

$$ {}^{U}_{A}T\,{}^{A}_{D}T = {}^{U}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}_{D}T $$

Equações de transformações

- Podem ser resolvidas para se encontrar transformações no caso de n transformações desconhecidas e n equações
- No caso anterior, se ${}^{B}_{C}T$ fosse desconhecido

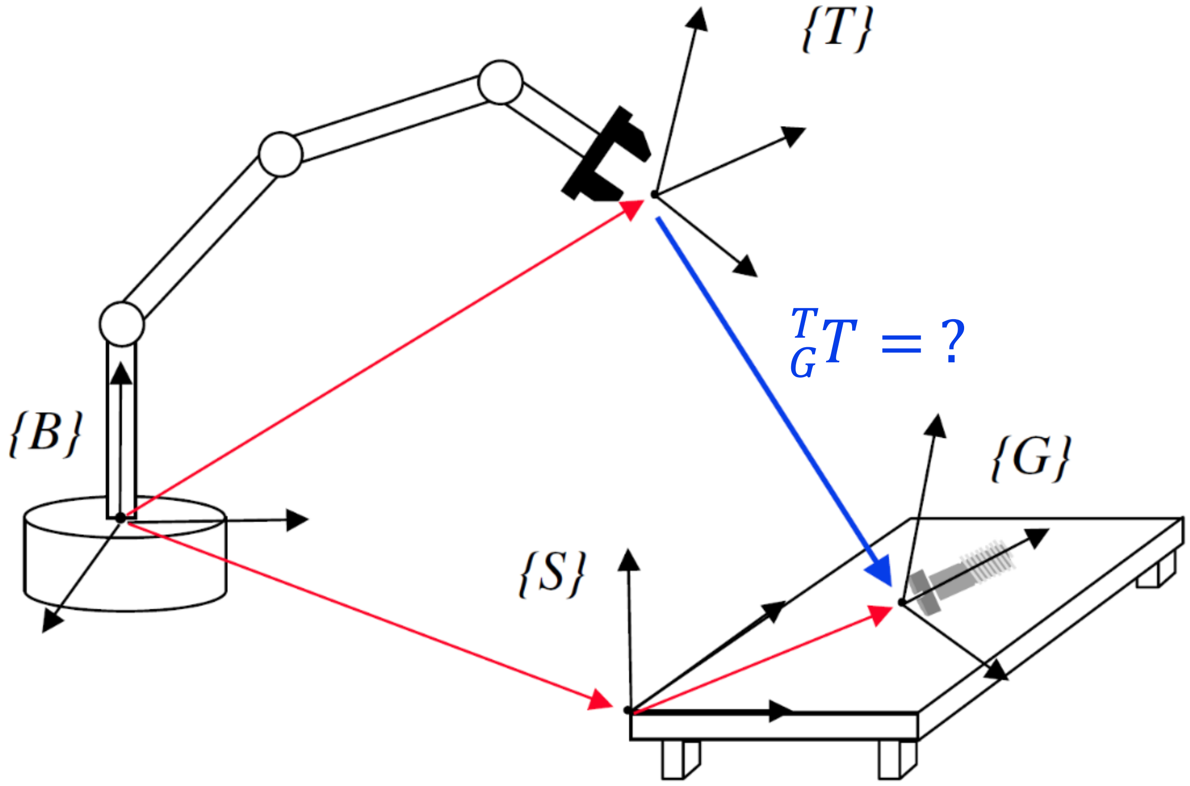
$$ {}^{B}_{C}T = {}^{U}_{B}T^{-1}\, {}^{U}_{A}T\, {}^{A}_{D}T\, {}^{C}_{D}T^{-1} $$



Para compor frames, quando os *vetores* se alinham, simplesmente calculamos o produto das transformações. Se um *vetor* apontar para o lado oposto em uma cadeia de transformações, simplesmente calculamos o seu inverso primeiro.

Equações de transformações

Exemplo



$${}^{B}_{G}T = {}^{B}_{T}T\,{}^{T}_{G}T$$
$${}^{B}_{G}T = {}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T$$

$${}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T = {}^{B}_{T}T\,{}^{T}_{G}T$$

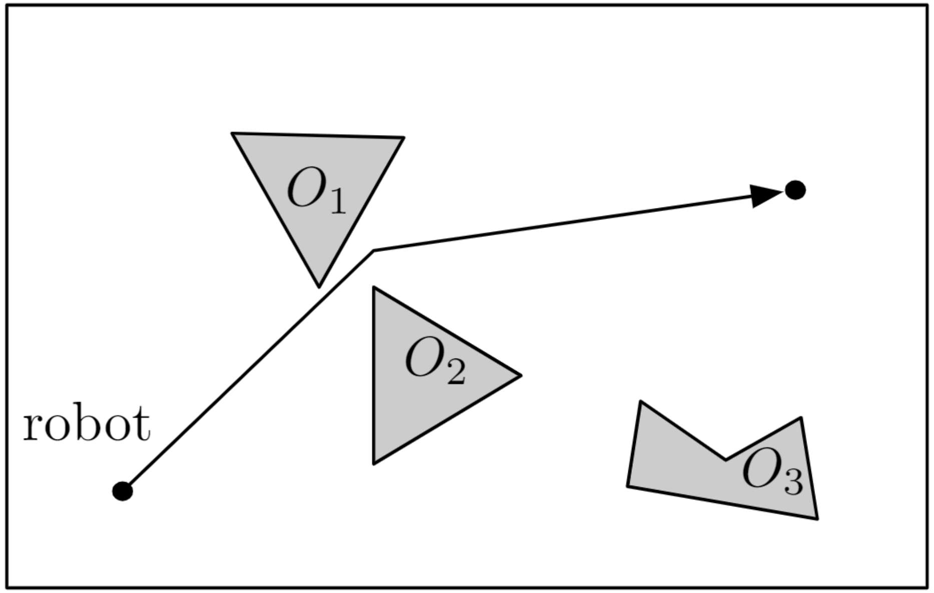
$$\boxed{{}^{T}_{G}T = {}^{B}_{T}T^{-1}\,{}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T}$$

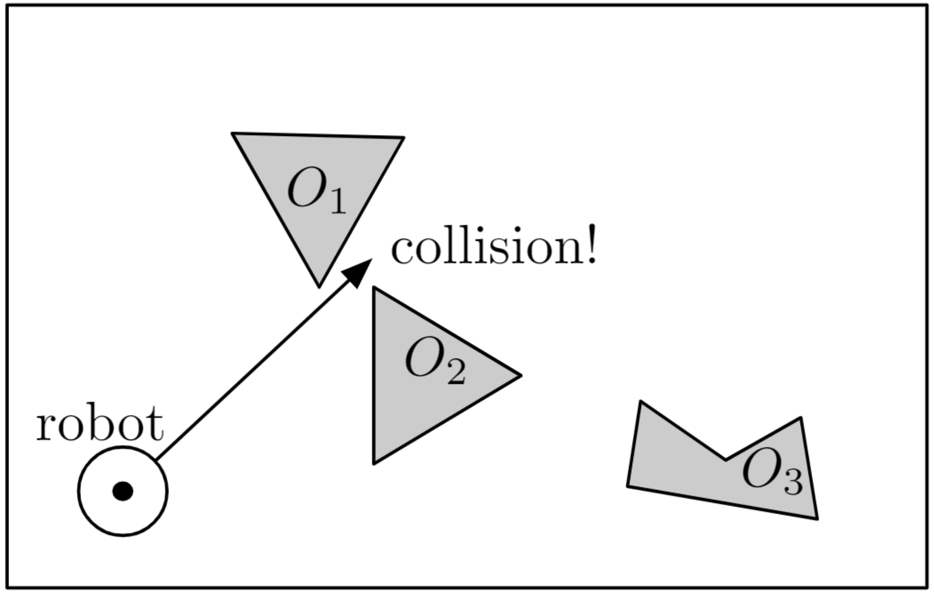
Representação

- Descrição espacial
  - Não define totalmente o corpo rígido
  - Como tratar todas as partes do robô?

- Configuração
  - Especificação mínima para se determinar as posições de todos os pontos do robô em relação a um sistema de coordenadas fixo

Representação

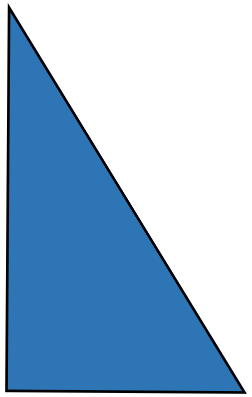


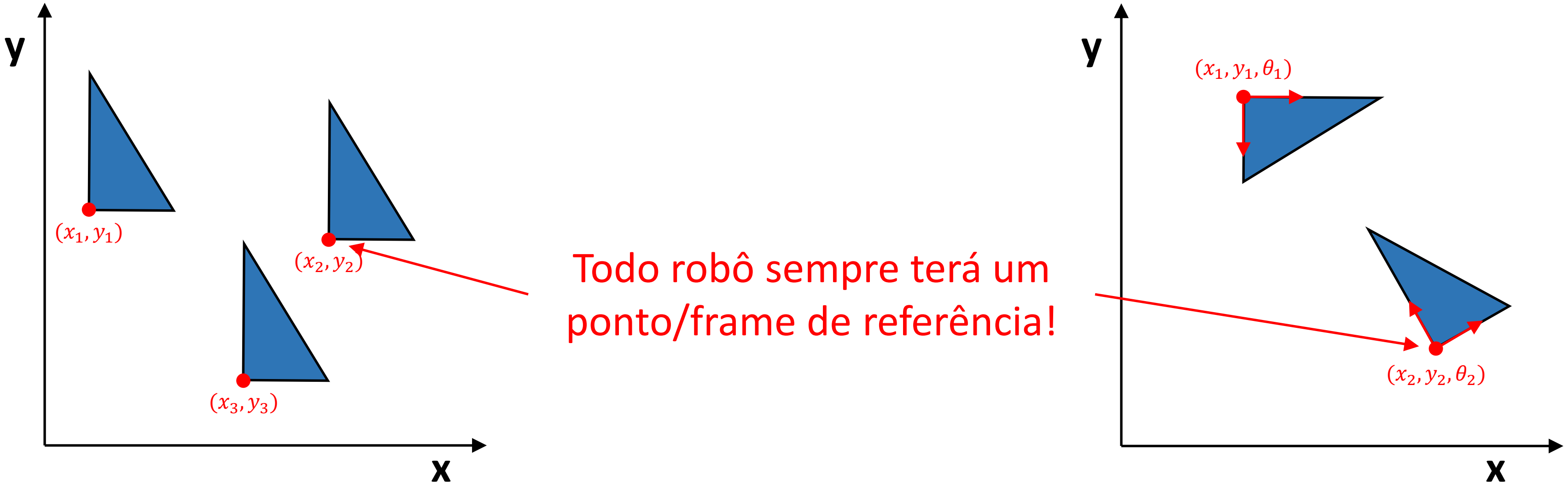


Fonte: *Lectures on Robotic Planning and Kinematics*

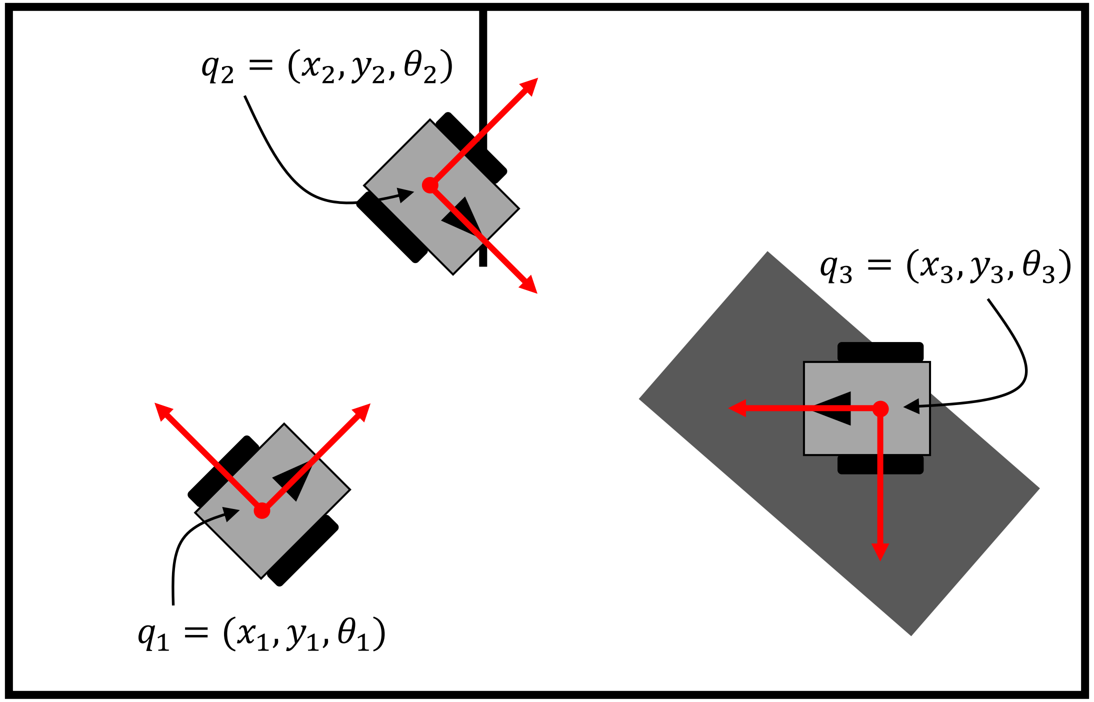
Representação

- Considere o robô triangular ao lado:
  - Se ele puder realizar apenas <u>translações</u>, como representar seus *estados* (configurações)?
  - E se ele puder agora realizar <u>rotações</u>?





Representação



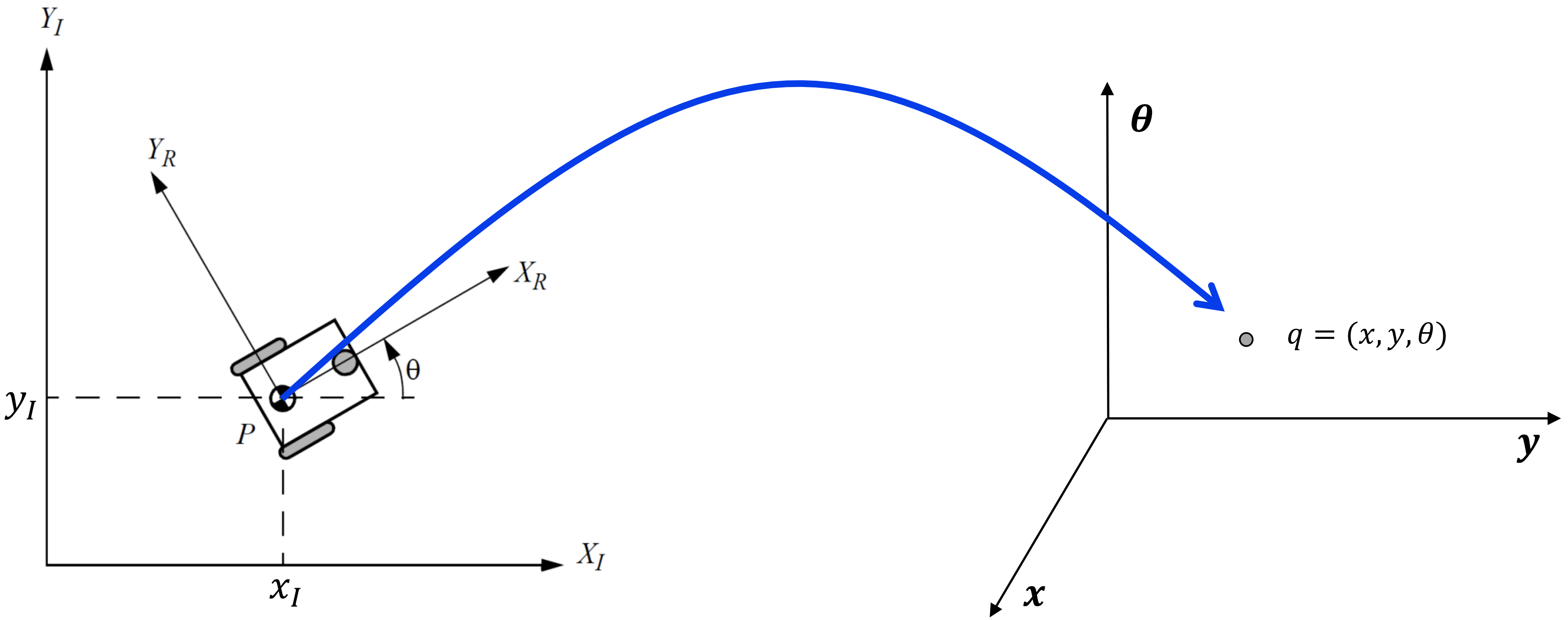
$$q = (\underbrace{x, y, z}_{\text{Translação}}, \underbrace{\phi, \theta, \psi}_{\text{Rotação}})$$

Espaços

- **Espaço de trabalho** (workspace)
  - $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathcal{W} = \mathbb{R}^2$ (2D) ou $\mathcal{W} = \mathbb{R}^3$ (3D)
- **Espaço de configurações** ($\mathcal{C}$-space)
  - Conjunto de todas as possíveis configurações instantâneas do robô (sistema mecânico) no espaço de trabalho ($\mathcal{W}$)
  - Robô no plano: $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$ ou $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \Rightarrow SE(2)$ Grupo de transformações homogêneas em 2D
  - Robô no espaço: $\mathcal{C} = \mathbb{R}^3 \times SO(3) \Rightarrow SE(3)$ Grupo de transformações homogêneas em 3D

Special Euclidean group: http://planning.cs.uiuc.edu/node147.html

Espaços



Espaço de trabalho ($\mathcal{W}$)

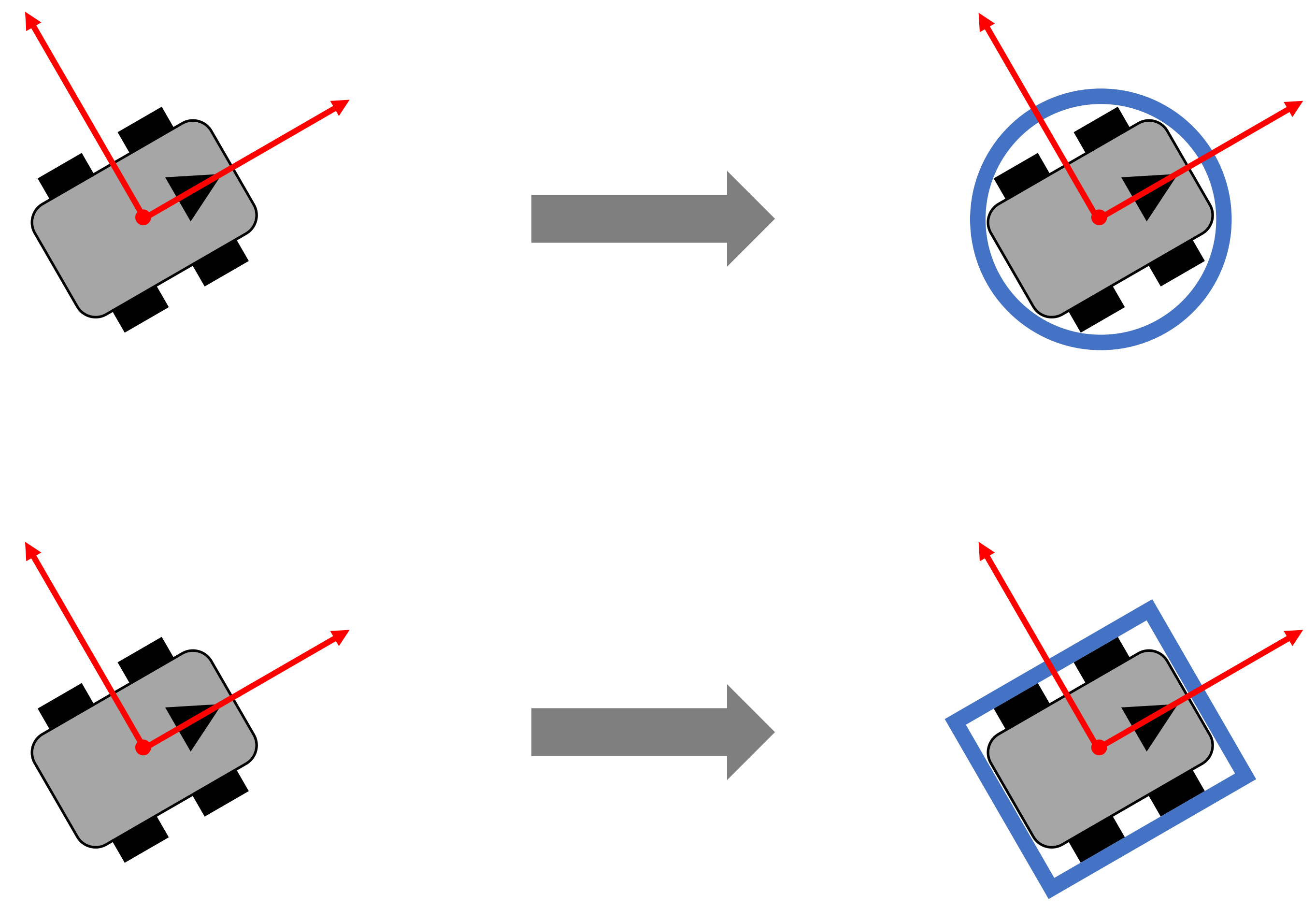
Espaço de configurações ($\mathcal{C}$)

Espaço de configurações

- Representação do robô
  - Um ponto no $\mathcal{C}$-space (configuração completa)
  - Cada eixo representa <u>uma</u> das variáveis

- Conjunto de pontos do robô
  - Região ocupada em $\mathcal{W}$ para uma dada configuração
  - $\mathcal{A}(q) \subset \mathcal{W} = \{x \mid x \in \mathcal{W}; \forall q \in \mathcal{C}\}$
  - Geometria real do robô pode ser simplificada → invólucro

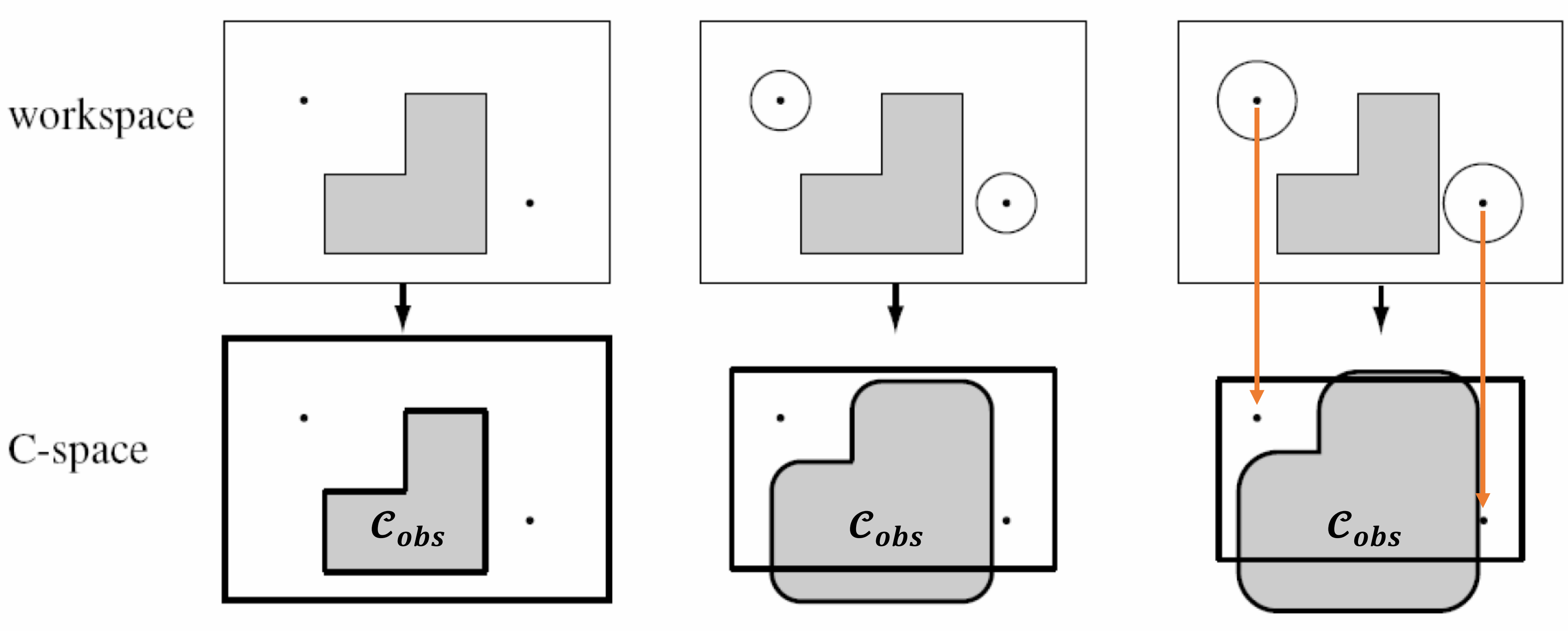
Espaço de configurações



Espaço de configurações
Obstáculos

- Conjuto de regiões com obstáculos no ambiente
  - $\mathcal{O} \subset \mathcal{W}$
- Espaço de configurações proibidas
  - Conjunto das configurações interceptam um obstáculo
  - $\mathcal{C}_{obs} = \{q \in \mathcal{C} \mid \mathcal{A}(q) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\}$
- Espaço de configurações livres (válidas)
  - $\mathcal{C}_{free} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{obs}$
  - Fundamental na etapa de planejamento!

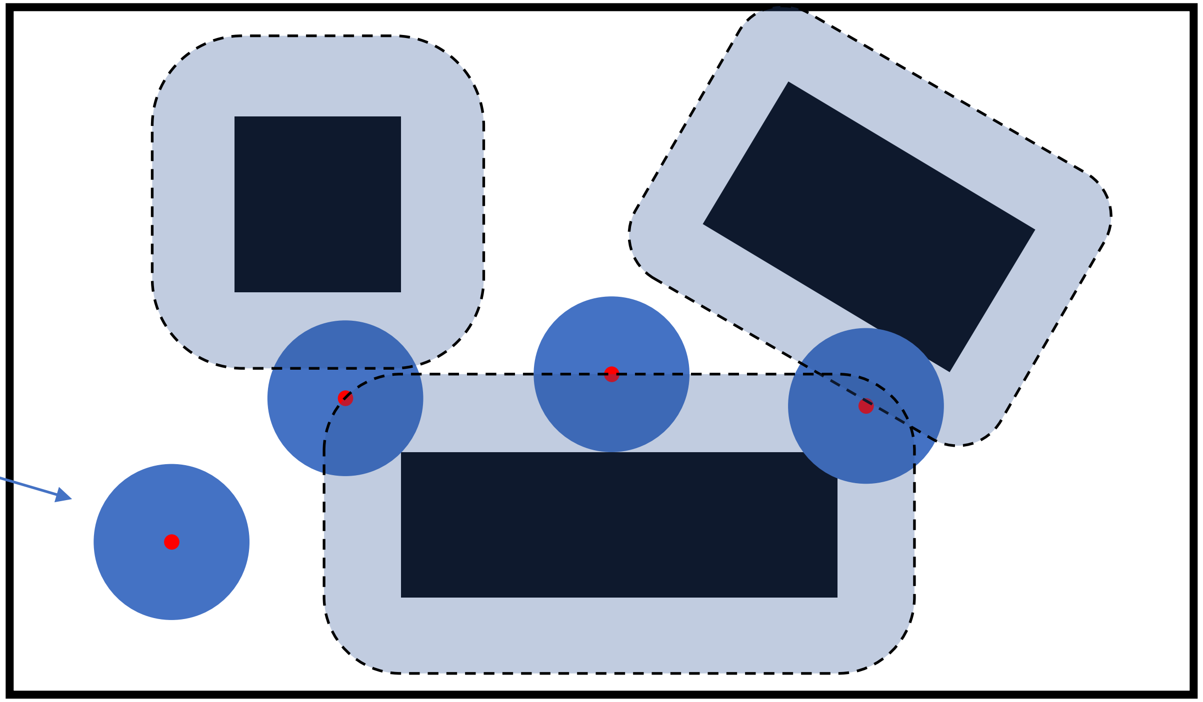
Espaço de configurações
Obstáculos



Fonte: *Principles of Robot Motion: Theory, Algorithms, and Implementation*

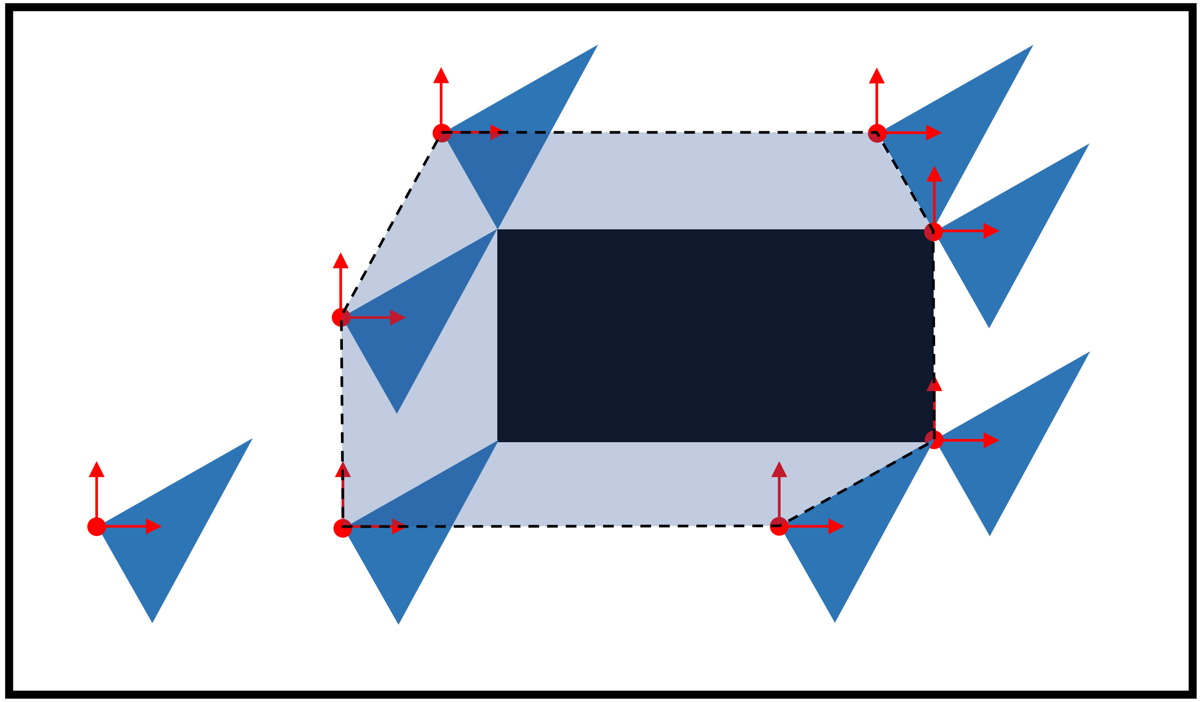
Espaço de configurações
Obstáculos

Tratar como um **ponto** no novo espaço gerado!



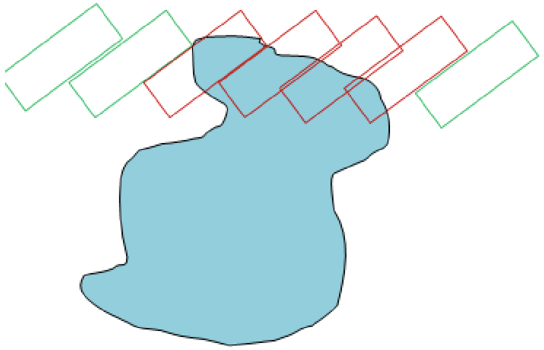
Espaço de configurações
Obstáculos

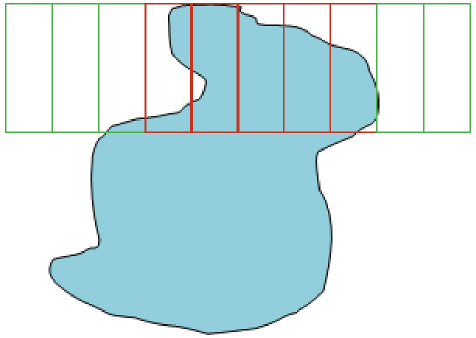
Sem rotação

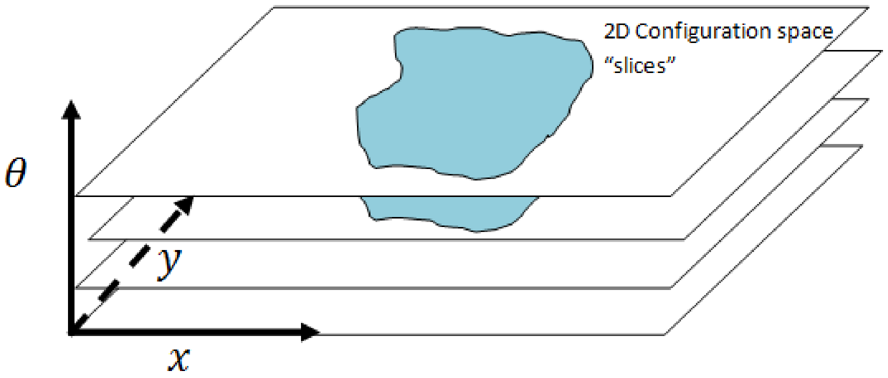


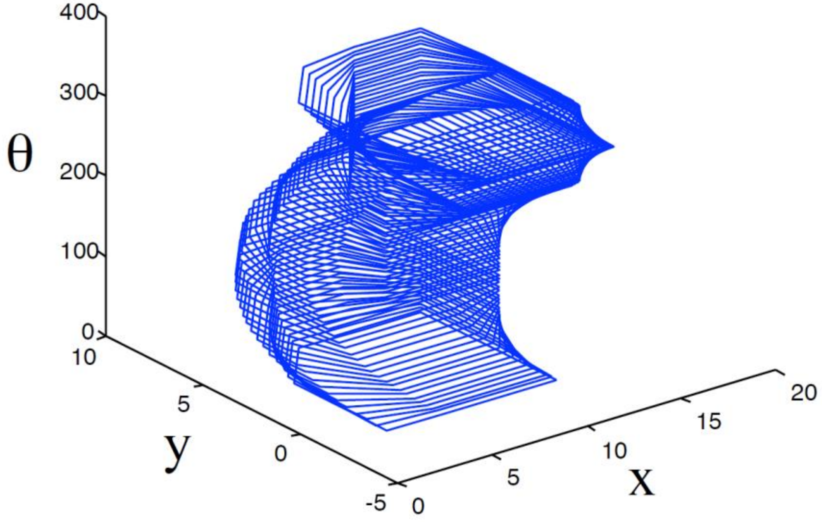
Espaço de configurações

Obstáculos







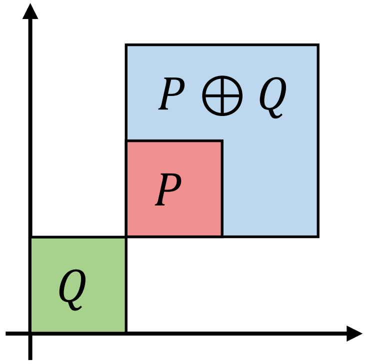


Espaço de configurações

- Como calcular o $\mathcal{C}$-space?
  - Força bruta: amostrar "todas" configurações e testar colisões
  - Útil em casos bem simples, mas pode ser muito ineficiente

- Minkowski sum (addition)
  - Também conhecida como dilatação morfológica
  - Dado dois conjuntos de vetores de posições P e Q

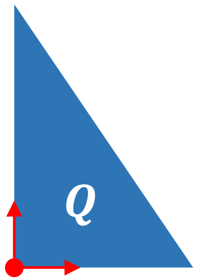
$$P \oplus Q = \{p + q \in \mathbb{R}^n \mid p \in P, q \in Q\}$$

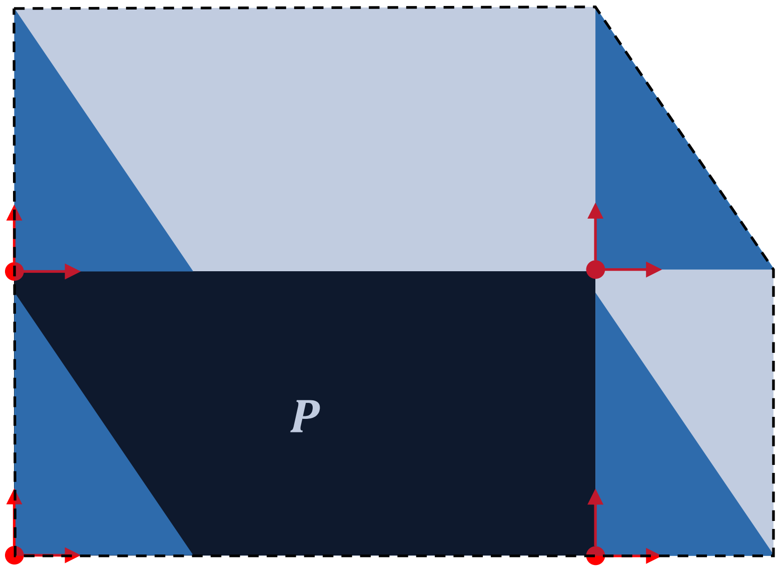


https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_addition

Espaço de configurações

Minkowski sum



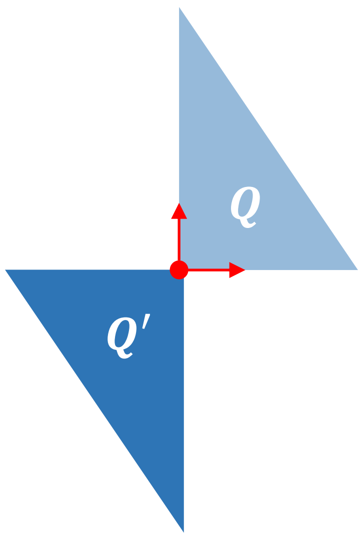


Bem relacionado com o que queremos, mas não podemos aplicar exatamente desse jeito (temos posições inválidas).

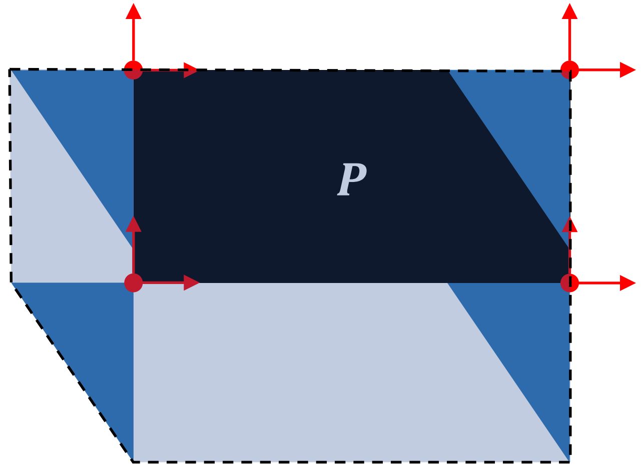
Alguma ideia de como resolver?

Varrer todos os pontos de Q por P, ou seja, transladando Q de modo que sua origem (ponto de referência comum dos vetores posição) passe por todos os pontos de P, e tomando a união de todos os pontos resultantes.

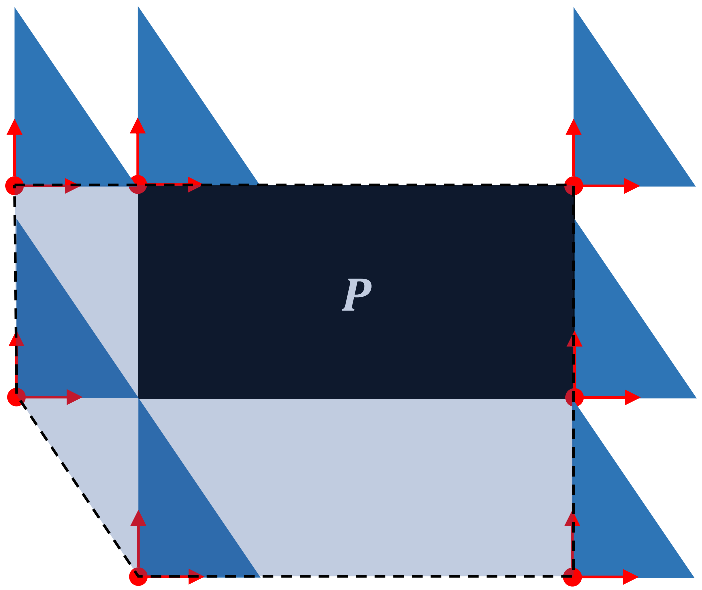
Espaço de configurações
Minkowski sum



Considerar o robô refletido, ou seja, rotacionado de 180^o sobre a origem.



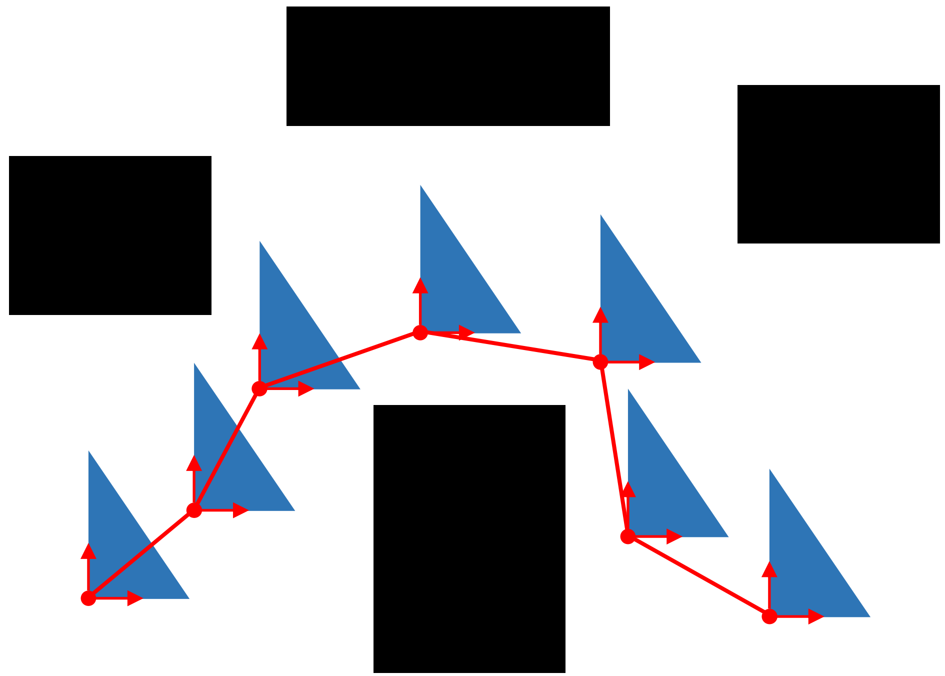
$P \oplus -Q \Rightarrow P \ominus Q$



Intuição geométrica

Espaço de configurações
Planejamento de caminhos

Espaço de trabalho



Espaço de configurações