UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

Robótica Móvel

Descrição espacial e Transformações rígidas

Prof. Douglas G. Macharet
douglas.macharet@dcc.ufmg.br

DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

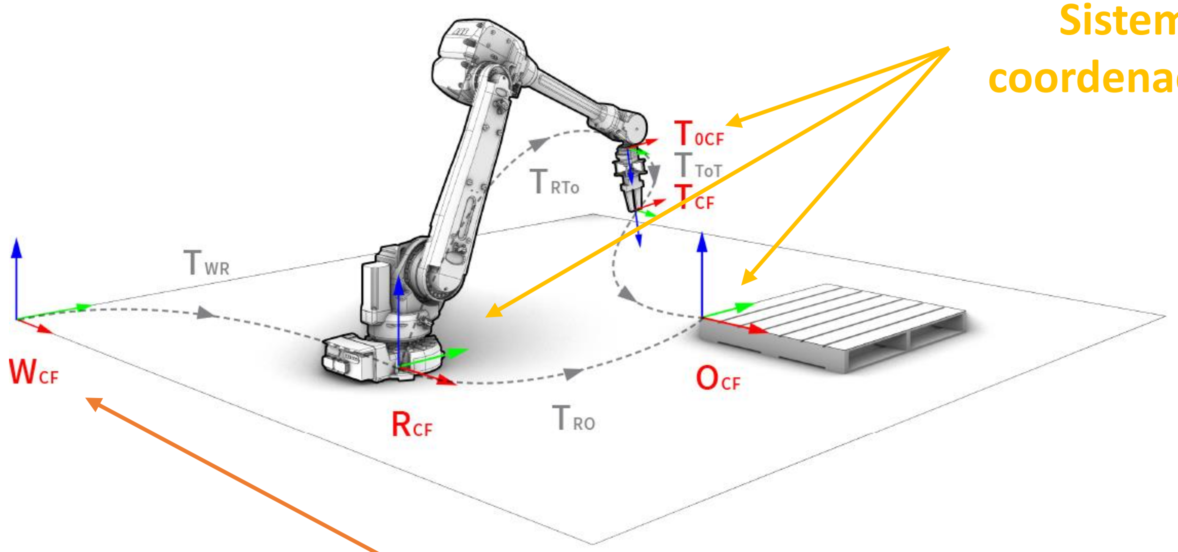
Visão e Robótica

Introdução

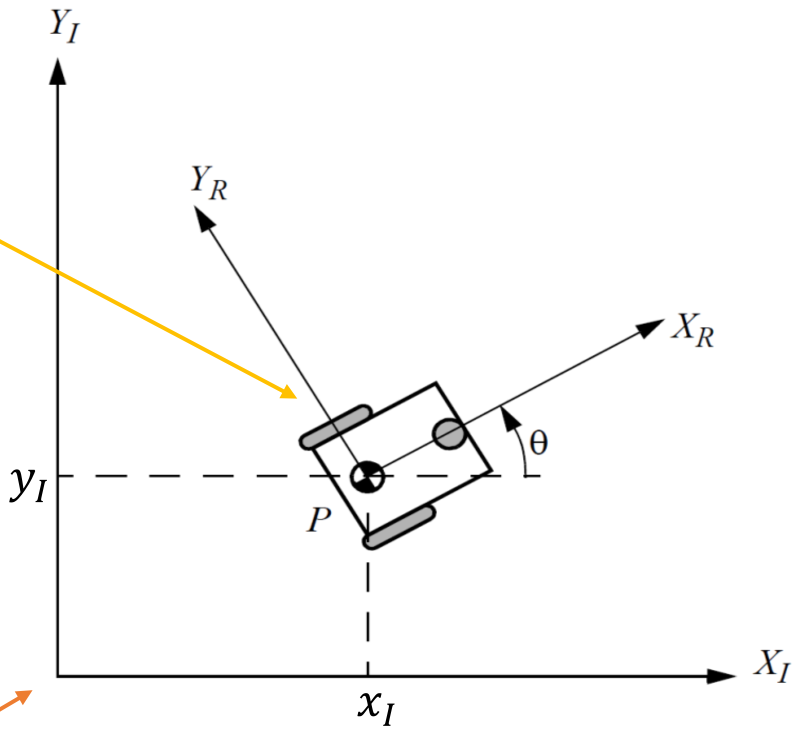
- Ciências e engenharias: é essencial identificar e manipular representações matemáticas de quantidades físicas e reais
- Robótica: Posições e Orientações
  - Partes, ferramenta e o próprio robô
  - Demais elementos no ambiente
- É necessário adotar uma convenção geral

Sistema de coordenadas geral ⟷ **Sistemas de coordenadas locais**

Introdução



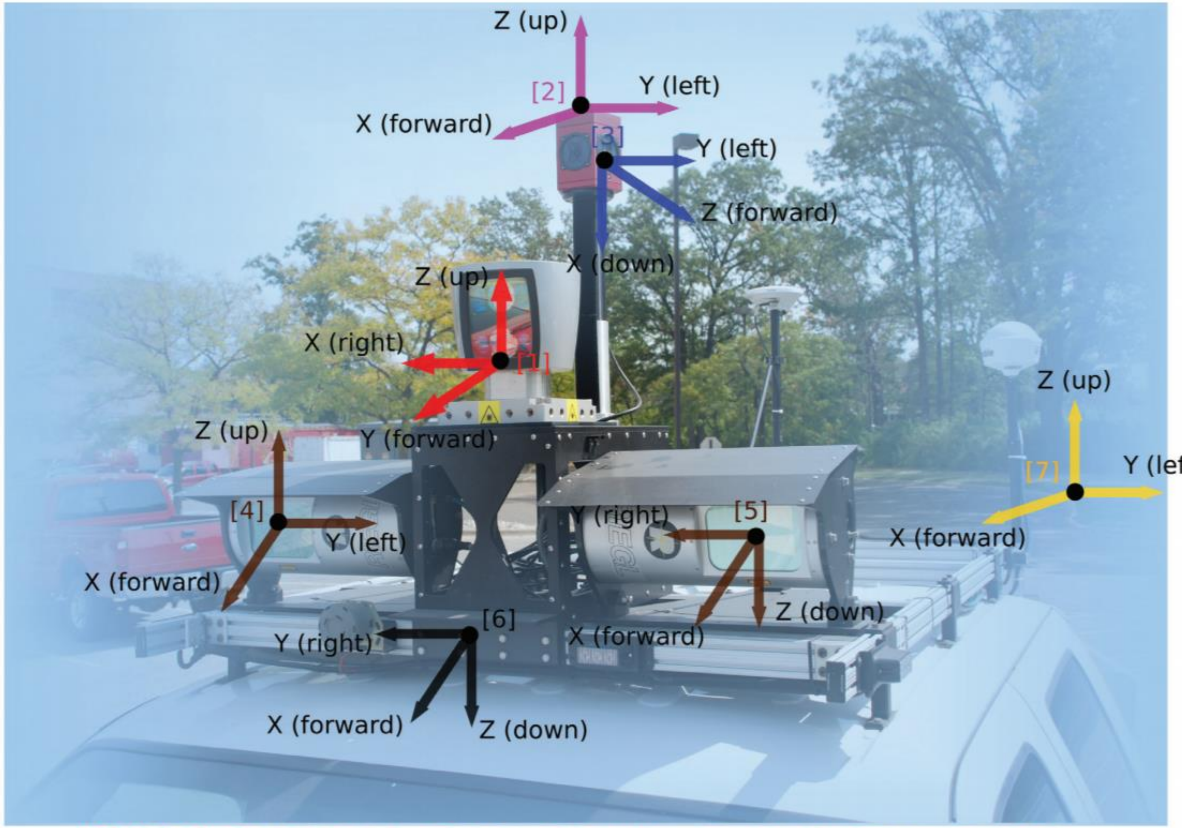
Sistemas de coordenadas locais



Sistema de coordenadas geral

Fonte: https://gramaziokohler.github.io/compas_fab/latest/examples/01_fundamentals/02_coordinate_frames.html

Introdução



[1] Velodyne, [2] Ladybug3 (actual location: center of camera system),
[3] Ladybug3 Camera 5, [4] Right Riegl, [5] Left Riegl,
[6] Body Frame (actual location: center of rear axle)
[7] Local Frame (Angle between the X-axis and East is known)

Fonte: Pandey G, McBride JR, Eustice RM. Ford Campus vision and lidar data set. The International Journal of Robotics Research. 2011;30(13):1543-1552.

Introdução

Objetivos

Representação

Mapeamento

Introdução

Notação

- Vetores e Matrizes
  - Letra Maiúscula (P, X, A)
- Escalares
  - Letra Minúscula (p, x, a)
- Referenciais
  - Sobrescrito e Subscrito <u>antes</u> ou <u>depois</u> $({}^{A}_{B}R, \hat{X}_A)$

Convenção para nossa disciplina!
Você pode encontrar várias outras notações diferentes na literatura.

Representação

Posição

Orientação

Referencial

Representação

Descrição de posição

- Posição: vetor n-dimensional (tupla de números reais)
  - $P = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ➔ 2D/3D ($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$)
- A posição (vetor) deve conter de maneira explícita em relação a qual sistema de coordenadas ela está definido

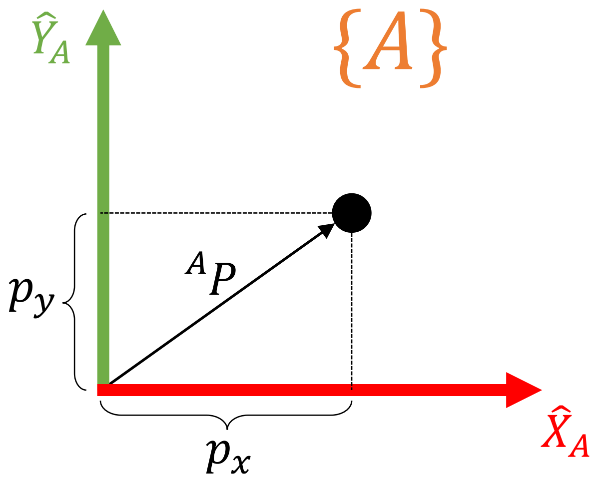
Sistema de coordenadas →

$$^{A}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

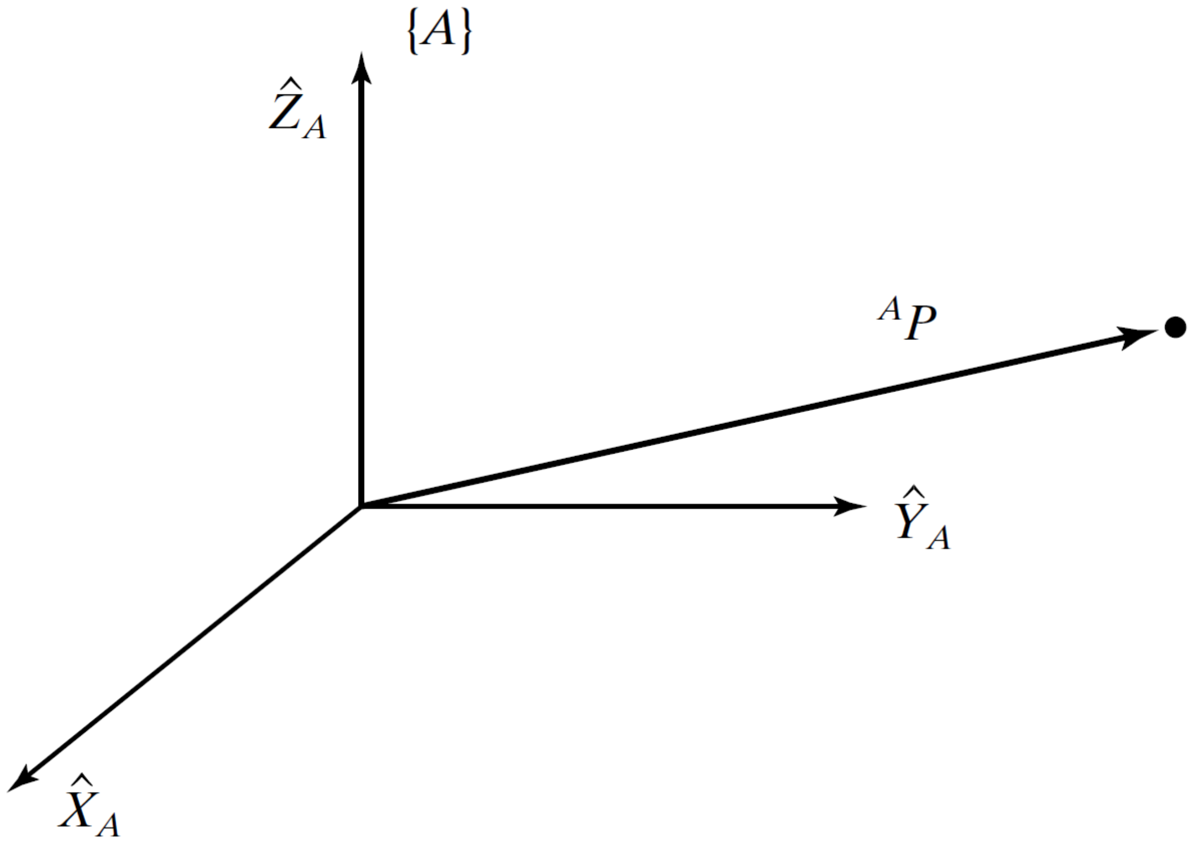
Representação

Descrição de posição

- Um sistema de coordenadas (referencial, frame) é representado por uma letra maiúscula entre chaves
- Vetores unitários que indicam os eixos principais do sistema de coordenadas usam a notação “chapeu”



Representação
Descrição de posição



Produto vetorial (produto externo):

$$\hat{X}_A \times \hat{Y}_A = \hat{Z}_A$$

$$\hat{Y}_A \times \hat{Z}_A = \hat{X}_A$$

$$\hat{Z}_A \times \hat{X}_A = \hat{Y}_A$$

Produto escalar (produto interno):

$$\hat{X}_A \cdot \hat{X}_A = \left\| \hat{X}_A \right\| = 1$$

$$\hat{X}_A \cdot \hat{Y}_A = 0$$

$$\hat{X}_A \cdot \hat{Z}_A = 0$$

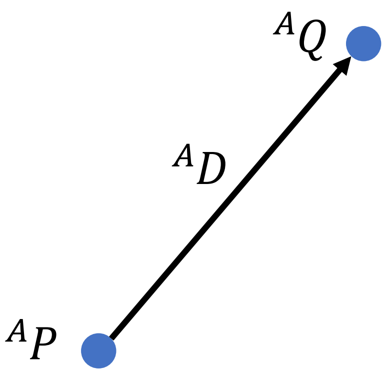
Representação
Descrição de direção

- Vetores também são usados para representar grandezas <u>direcionais</u>, como um deslocamento, direção ou derivada
  - **Deslocamento**: Diferença entre pontos, e.g., ${}^{A}Q - {}^{A}P$
    - Possui direção e magnitude
  - **Direção**: vetor unitário que possui apenas a direção

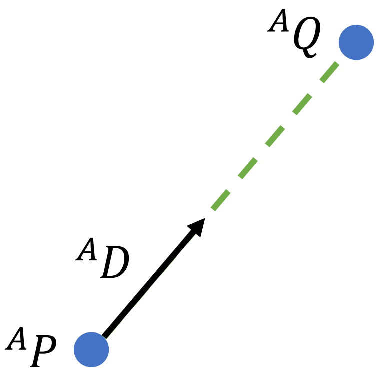
$$\frac{{}^{A}Q - {}^{A}P}{\|{}^{A}Q - {}^{A}P\|}$$

  - **Derivada**: deslocamento infinitesimal $({}^{A}P'(t) = (p_x(t), p_y(t)))$

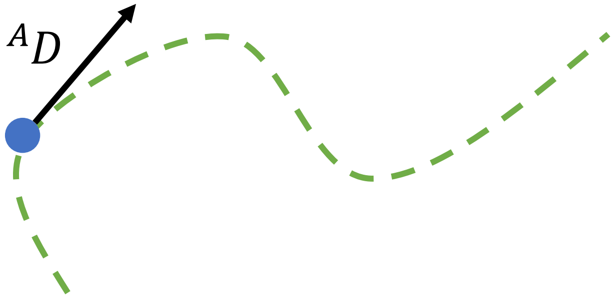
Representação
Descrição de direção



Deslocamento



Direção



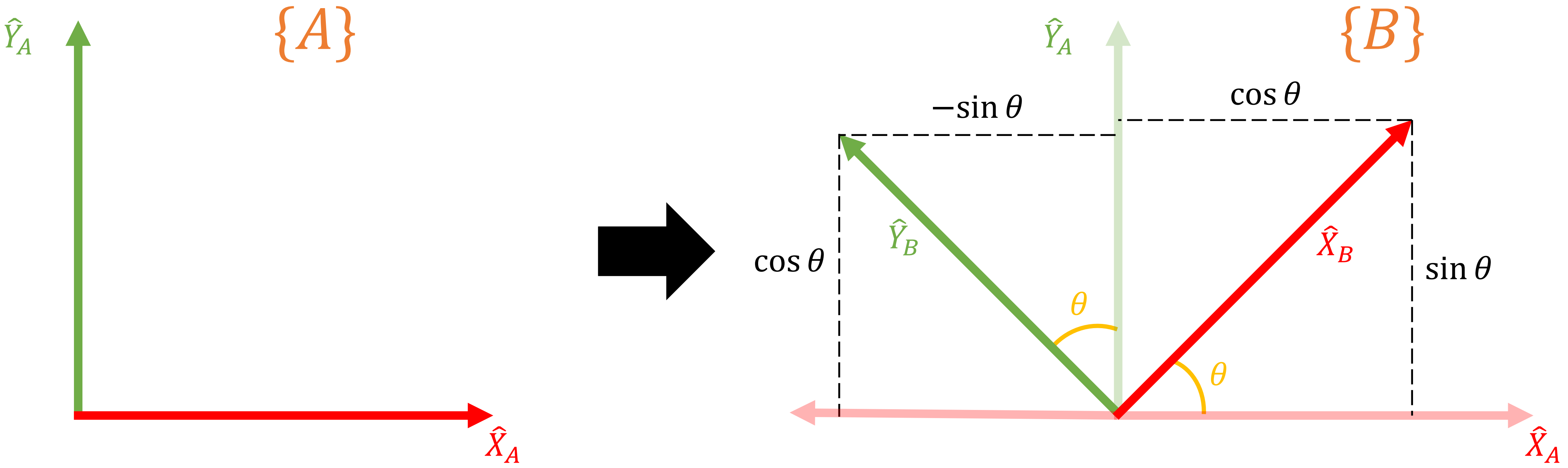
Derivada

Representação
Descrição de orientação

- Corpo rígido: é importante representar a orientação?
- Descrever completamente um corpo rígido utilizando-se apenas um ponto pode não ser muito representativo

- Descrita a partir de um sistema de coordenadas <u>afixado no próprio corpo</u> em relação a outro sistema de coordenadas

Representação
Descrição de orientação



$$\begin{aligned} \hat{X}_B &= \cos\theta\,\hat{X}_A + \sin\theta\,\hat{Y}_A \\ \hat{Y}_B &= -\sin\theta\,\hat{X}_A + \cos\theta\,\hat{Y}_A \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_B \\ \hat{Y}_B \end{bmatrix}$$

Global → Local   Local → Global

Representação
Descrição de orientação

- Matriz de rotação de $\{B\}$ em relação a $\{A\}$

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$

- Vetores unitários de $\{B\}$ descritos em termos do sistema $\{A\}$

Representação
Descrição de orientação

- Cossenos direcionais (diretores)

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} $$

Projeções do vetor nas direções unitárias do sistema de referência.

$$ \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A = \|\hat{X}_B\| \|\hat{X}_A\| \cos\theta = \cos\theta $$

$$ \|\hat{X}_B\| = \|\hat{X}_A\| = 1 $$

Representação
Descrição de orientação

- Colunas: vetores unitários de $\{B\}$ em $\{A\}$
- E o que representam as linhas?
  - Vetores unitários $\{A\}$ em $\{B\}$

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} $$

Representação
Descrição de orientação

- Matriz ortogonal
  - Colunas (ou linhas) são vetores ortonormais
  - A inversa é igual a sua transposta (${}^{A}_{B}R\,{}^{A}_{B}R^{T} = I$)

$$ {}^{A}_{B}R = {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T} $$

- Composição: $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$
- Determinante: $\det(R(\theta)) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Representação
Descrição de um referencial (*frame*)

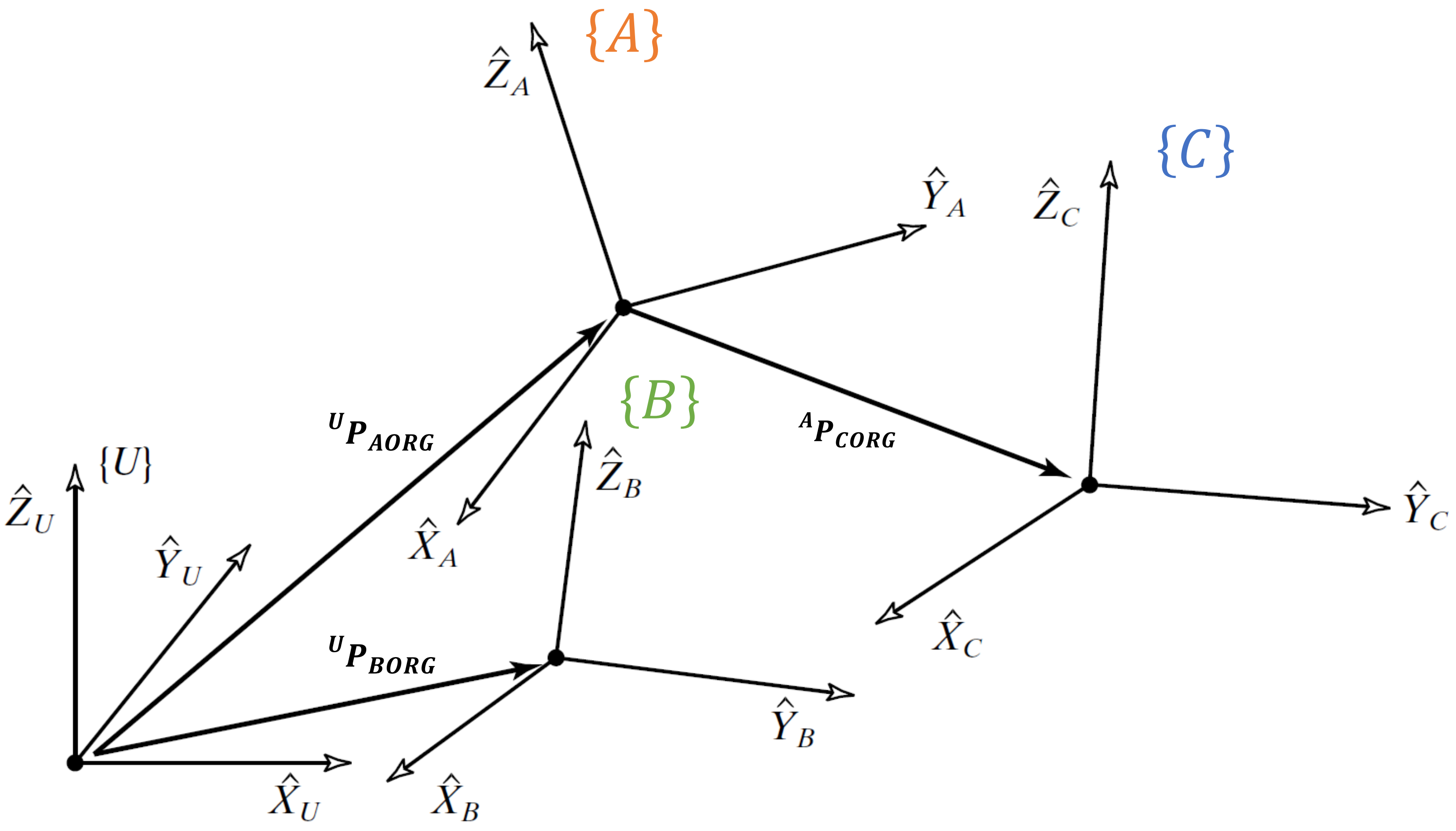
- Referencial: sistema de coordenadas que, além da orientação, possui o vetor posição da origem em relação a outro *frame*

$$\{B\} = \{{}^{A}_{B}R,\ {}^{A}P_{BORG}\}$$

- Posição: *frame* em que a matriz de rotação é a identidade
- Orientação: *frame* onde o vetor posição é nulo

Representação

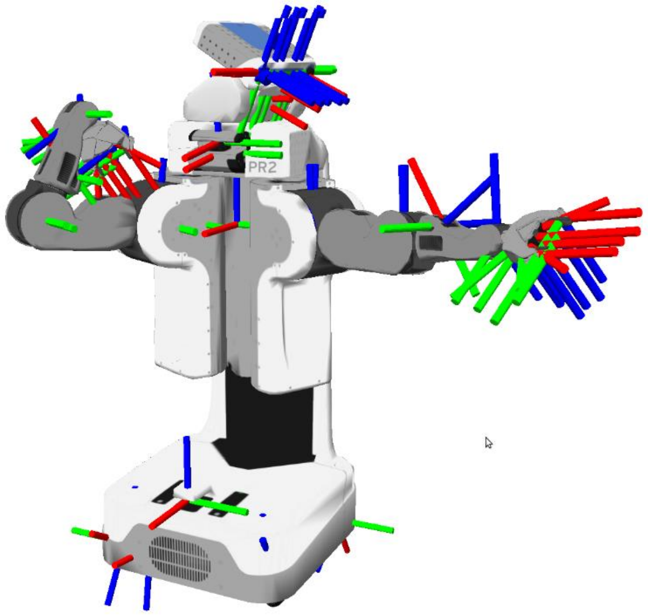
Descrição de um referencial (*frame*)



$$\{A\} = \{{}^{U}_{A}R,\ {}^{U}P_{AORG}\}$$
$$\{B\} = \{{}^{U}_{B}R,\ {}^{U}P_{BORG}\}$$
$$\{C\} = \{{}^{A}_{C}R,\ {}^{A}P_{CORG}\}$$

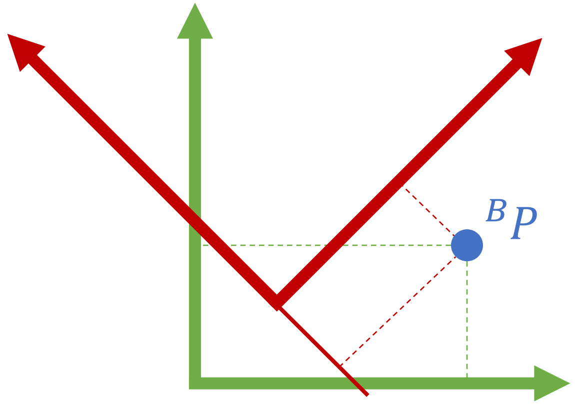
Representação
Descrição de um referencial (*frame*)

- Trabalhamos com diversos referenciais
  - Sistema de coordenadas do mundo
  - Sistema de coordenadas do robô
  - Sistema de coordenadas de um sensor
  - Sistema de coordenadas de um objeto



Mapeamento

- Como descrever a posição de um ponto em relação ao referencial $\{A\}$ dada a descrição dele no referencial $\{B\}$?



- Alterar <u>descrições</u> de um referencial para outro referencial

Translação **Rotação**

Mapeamento
Translação

- Considerando referenciais com a <u>mesma orientação</u> (sem rotação relativa), porém origens diferentes (translação)

$$^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}$$

- O vetor ${}^{A}P_{BORG}$ localiza a origem de $\{B\}$ em relação a $\{A\}$

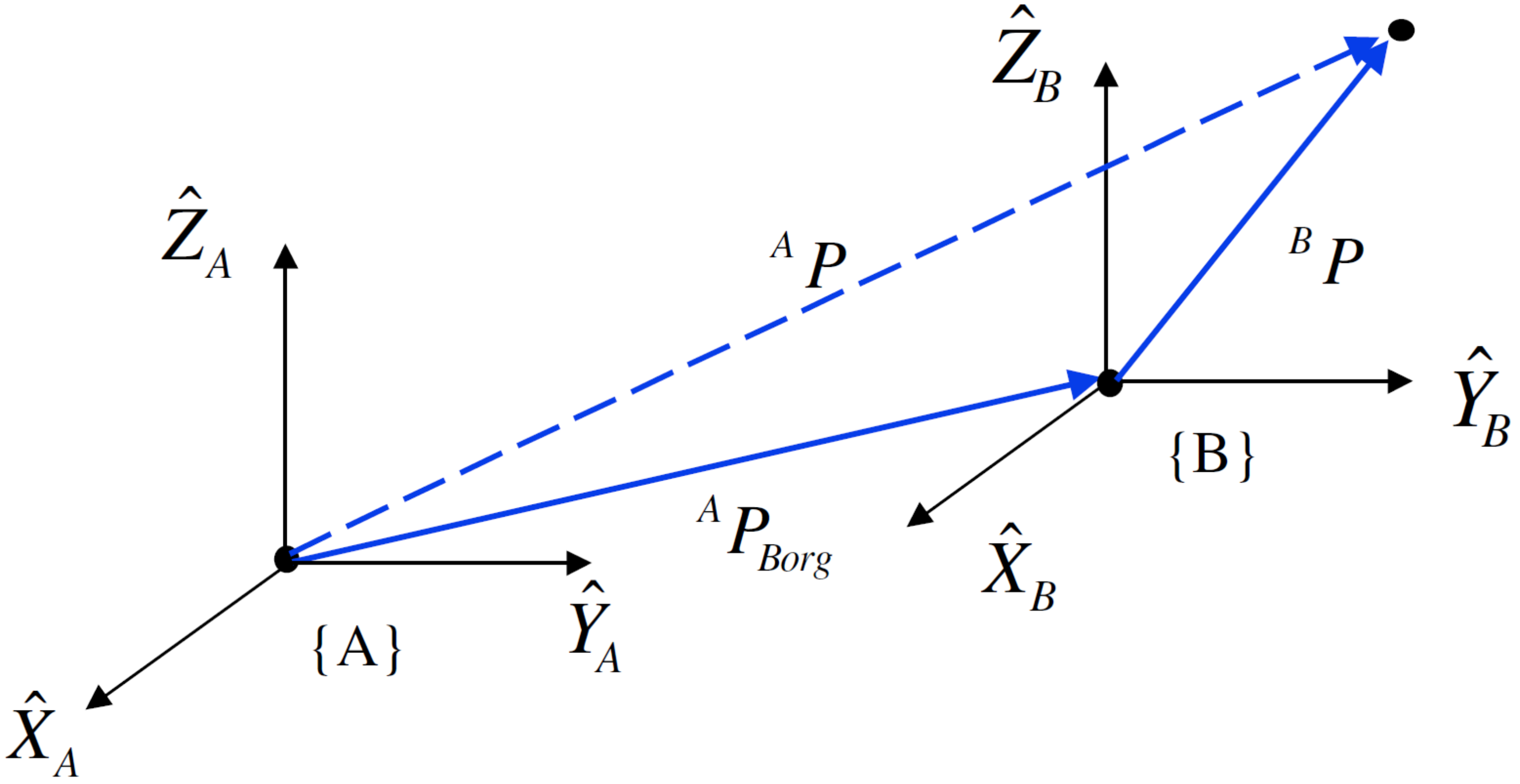
Mapeamento
Translação (Exemplo)

- Dados 2 referenciais $\{A\}$ e $\{B\}$ com mesma orientação, porém a origem de $\{B\}$ está deslocada 7 unidades da origem de $\{A\}$ ao longo do eixo $\hat{X}_A$ e 2 unidades ao longo do eixo $\hat{Y}_A$. Dado o ponto ${}^{B}P$, defina ${}^{A}P_{BORG}$ e ${}^{A}P$.

$$ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T \qquad {}^{A}P_{BORG} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T $$

$$ {}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} $$

Mapeamento
Translação (Exemplo)

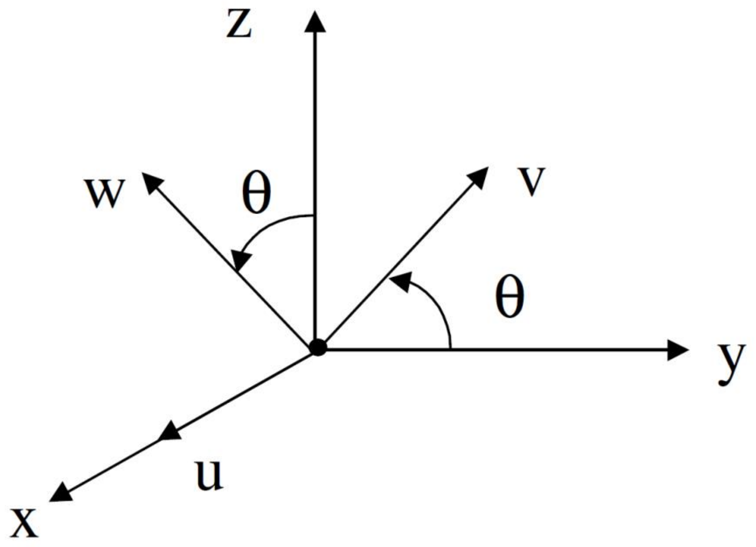


Mapeamento
Rotação

- Considerando referenciais com a mesma origem (sem translação), porém com orientações (rotação) diferentes
- Componentes são as projeções do vetor sobre os eixos (vetores unitários) de seu sistema de referência (*frame*)

$$
{}^{A}P = \begin{array}{l} {}^{A}p_x = {}^{B}\hat{X}_A \cdot {}^{B}P \\ {}^{A}p_y = {}^{B}\hat{Y}_A \cdot {}^{B}P \\ {}^{A}p_z = {}^{B}\hat{Z}_A \cdot {}^{B}P \end{array} \quad \Longrightarrow \quad {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P
$$

Mapeamento
Rotação



$$R_{\mathrm{x},\theta} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot i_v & i_x \cdot i_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot i_v & j_y \cdot i_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot i_v & k_z \cdot i_w \end{bmatrix}$$

$$R_{\mathrm{x},\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Mapeamento
Rotação

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mapeamento
Rotação (Exemplo)

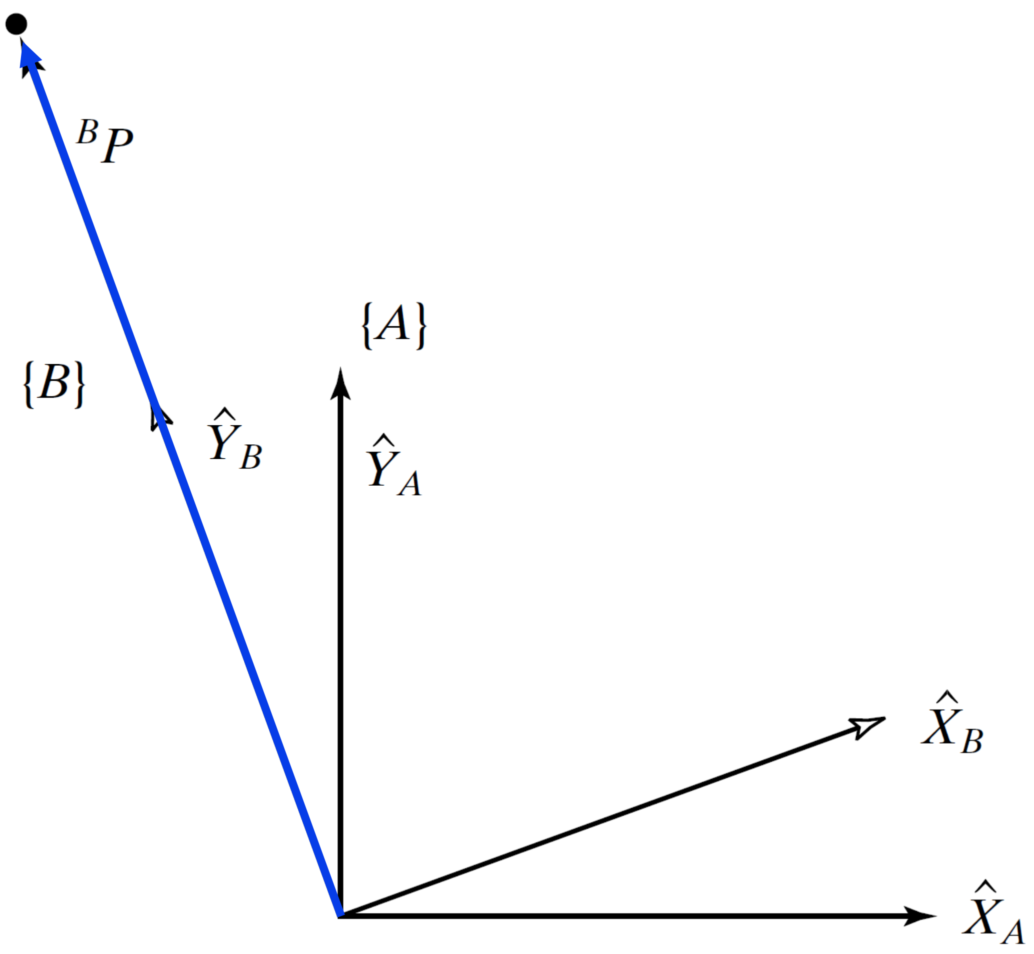
- Um referencial $\{B\}$ está rotacionado de $\theta = 30°$ em relação ao eixo $\hat{Z}_A$ do referencial $\{A\}$. Dado o ponto ${}^{B}P$, defina ${}^{A}_{B}R$ e ${}^{A}P$.

$$ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 & 0{,}000 \\ 0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R \; {}^{B}P = \begin{bmatrix} -1{,}000 \\ 1{,}732 \\ 0{,}000 \end{bmatrix} $$

Mapeamento

Rotação (Exemplo)



Mapeamento
Rotação

- Translações são fáceis de visualizar
- Rotações não são tão intuitivas
  - Difíceis de descrever e especificar
  - Fechada sobre a multiplicação

$$ {}^{A}_{C}R = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R $$

O resultado da múltiplicação é outra matriz de rotação!

  - Não é comutativa

$$ {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R \neq {}^{B}_{C}R\,{}^{A}_{B}R $$

$$ R_x(30)R_z(30) = \begin{bmatrix} 0{,}87 & -0{,}50 & 0{,}00 \\ 0{,}43 & 0{,}75 & -0{,}50 \\ 0{,}25 & 0{,}43 & 0{,}87 \end{bmatrix} \quad R_z(30)R_x(30) = \begin{bmatrix} 0{,}87 & -0{,}43 & 0{,}25 \\ 0{,}50 & 0{,}75 & -0{,}43 \\ 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}87 \end{bmatrix} $$

Mapeamento
Rotação

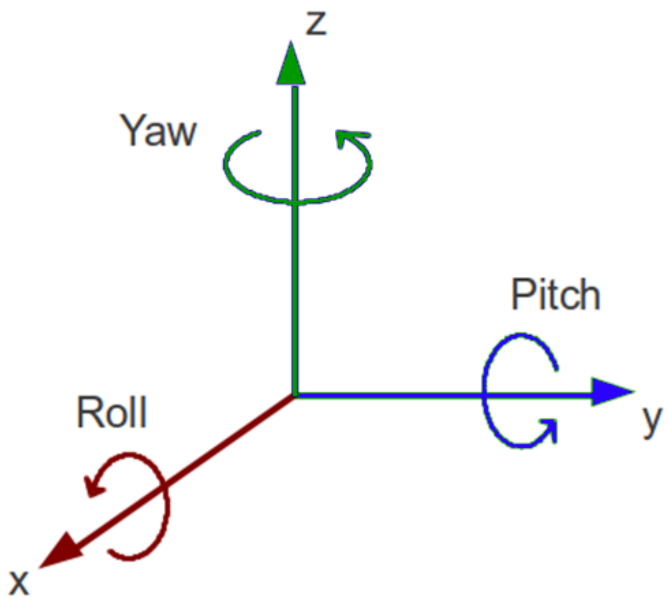
- Matriz de rotação 3×3
  - Colunas mutualmente ortogonais
  - Colunas com magnitude 1 (vetor unitário)
  - Matriz ortonormal própria (determinante = 1)

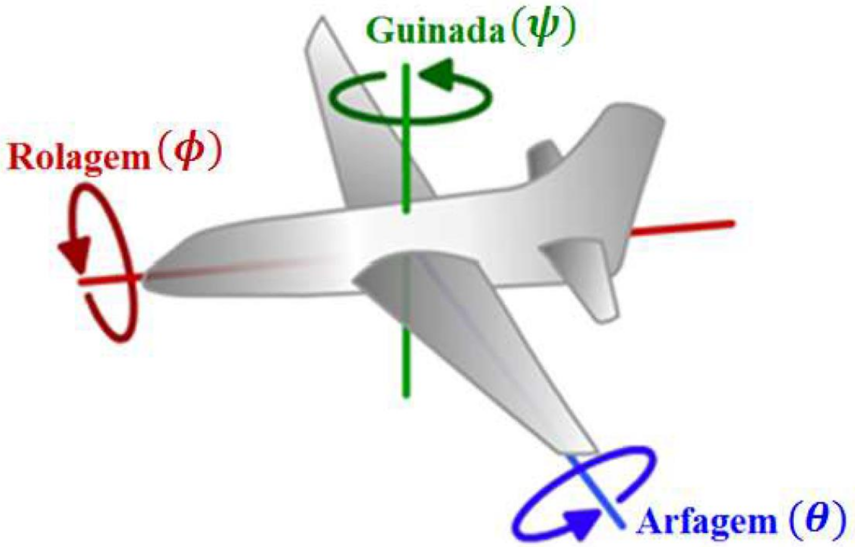
- *Euler angles*: representação mais compacta (3 parâmetros)
  - Definidos a partir de três rotações (encadeadas) em relação aos três eixos principais do sistema de coordenadas local (*body*)

Mapeamento

Rotação (*Euler angles* / Z-Y-X)

- Também conhecido por *roll*, *pitch* e *yaw*
  - Muito utilizado em aviação, náutica e robótica

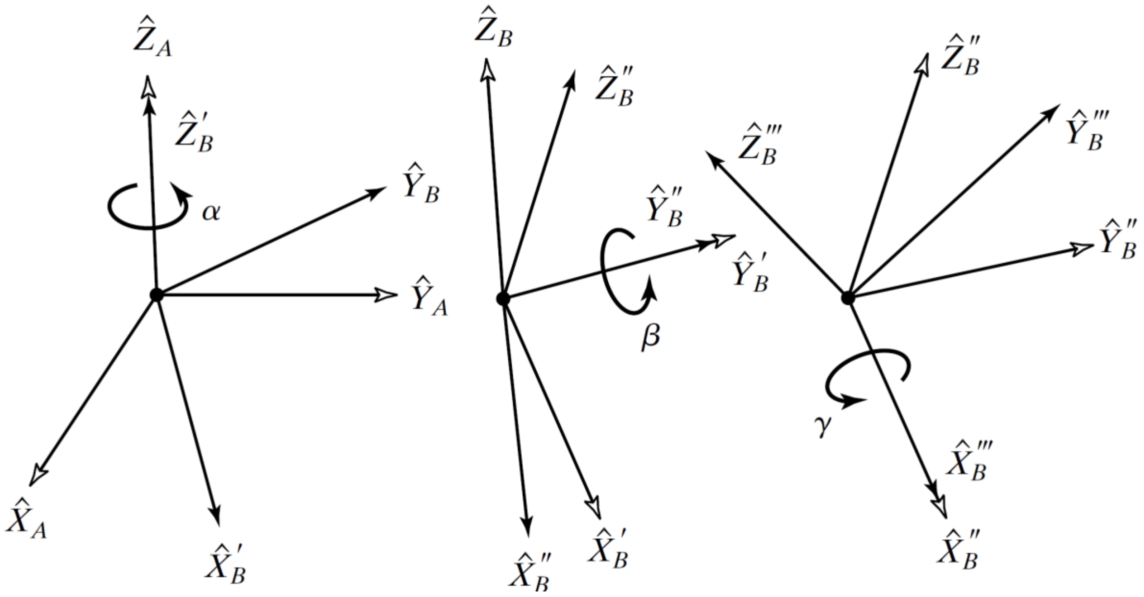




Mapeamento

Rotação (*Euler angles* / Z-Y-X)

- Iniciar com o referencial $\{B\}$ coincidente com um referencial conhecido $\{A\}$. Primeiro, rotacione $\{B\}$ em torno de $\hat{Z}_A$ de um ângulo α, em seguida em torno de $\hat{Y}_A$ de um ângulo β, e finalmente em torno de $\hat{X}_A$ de um ângulo γ.



Sempre em relação ao *body* frame!

$$ {}^{A}_{B}R = {}^{A}_{B'}R\,{}^{B'}_{B''}R\,{}^{B''}_{B}R $$

Mapeamento

Rotação (*Euler angles* / Z-Y-X)

$$
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_Z(\alpha)\,R_Y(\beta)R_X(\gamma)
= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta s\gamma \end{bmatrix}
$$

Mapeamento

Rotação (*Euler angles* / Z-Y-X)

- Problema inverso
  - Como obter os ângulos a partir da matriz?

$$ {}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$

$$ \cos\beta = \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2} $$

$$ \boxed{\begin{aligned} \beta &= \mathrm{atan2}(-r_{31}, \mathrm{c}\beta) \\ \alpha &= \mathrm{atan2}\left(\frac{r_{21}}{\mathrm{c}\beta}, \frac{r_{11}}{\mathrm{c}\beta}\right) \\ \gamma &= \mathrm{atan2}\left(\frac{r_{32}}{\mathrm{c}\beta}, \frac{r_{33}}{\mathrm{c}\beta}\right) \end{aligned}} $$

Mapeamento
Rotação (*Euler angles* / Z-Y-X)

- Problema inverso – Casos Especiais

$$\beta = 90^\circ$$
$$\alpha = 0$$
$$\gamma = \operatorname{atan2}(r_{12}, r_{22})$$

$$\beta = -90^\circ$$
$$\alpha = 0$$
$$\gamma = -\operatorname{atan2}(r_{12}, r_{22})$$

Mapeamento

Representações de orientação

Formato	Parâmetros	Singularidade	Composição
Matriz de rotação	9	Não	Multiplicação
Roll-pitch-yaw	3	Sim	Não trivial
Quatérnio unitário*	4	Não	Multiplicação

*Número hipercomplexo

Mapeamento
Translação e Rotação

- Referenciais com <u>origens</u> e <u>orientações</u> diferentes. Considera-se duas etapas:
  - Descrever o ponto ${}^{B}P$ em relação a um referencial <u>intermediário</u>, mesma origem mas a orientação de $\{A\}$ — **Rotação**
  - Somar a diferença (deslocamento) entre as origens — **Translação**

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} $$ (transformação rígida)

Mapeamento

Translação e Rotação (Exemplo)

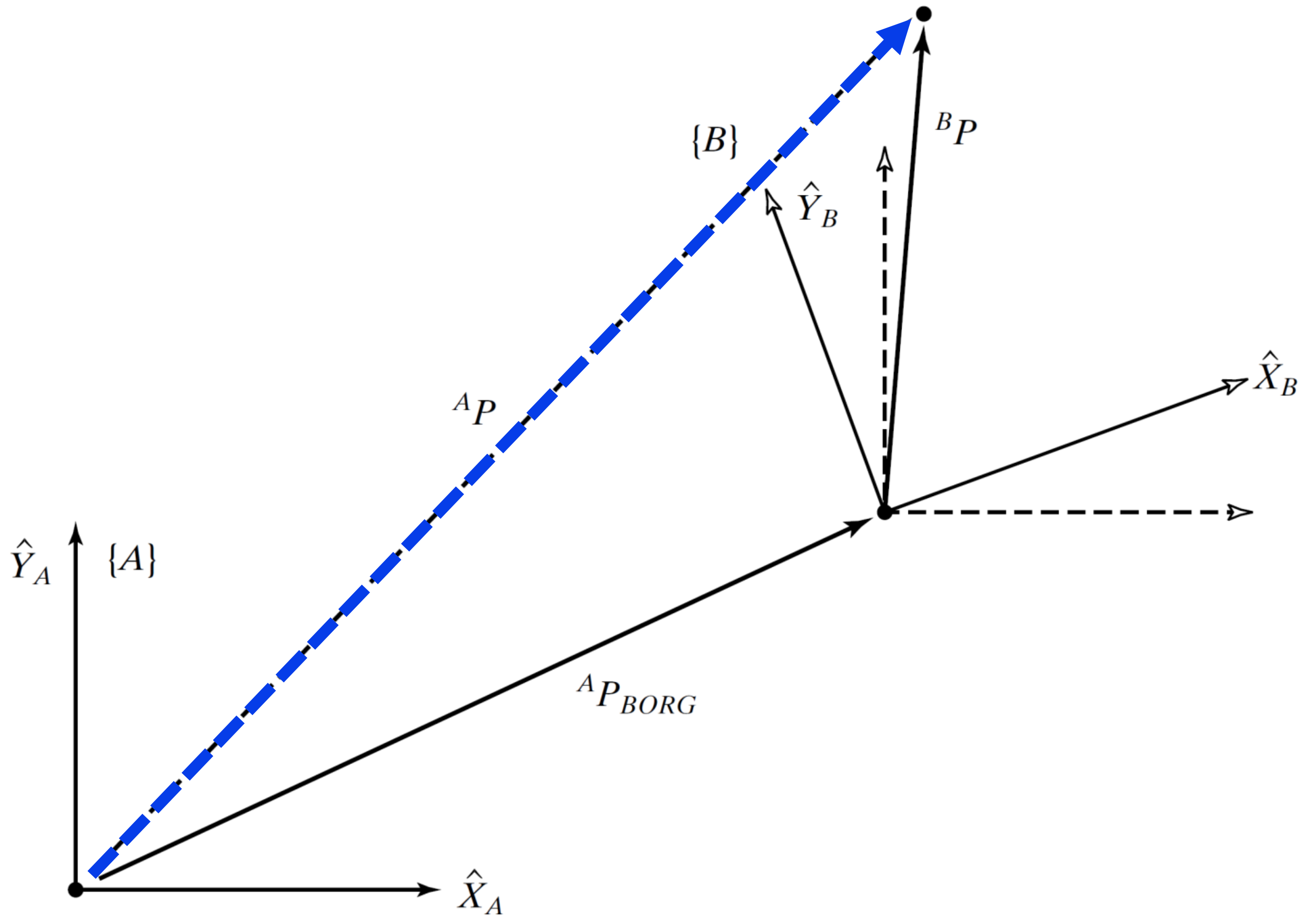
- Seja $\{B\}$ um referencial rotacionado $\theta = 30°$em torno de $\hat{Z}_A$ e transladado 10 unidades em $\hat{X}_A$ e 5 unidades em $\hat{Y}_A$. Dado ${}^{B}P$, defina ${}^{A}P_{BORG}$, ${}^{A}_{B}R$ e ${}^{A}P$.

$$
{}^{B}P = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{A}P_{BORG} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 & 0{,}000 \\ 0{,}500 & 0{,}866 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 1{,}000 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} = \begin{bmatrix} 9{,}098 \\ 12{,}562 \\ 0{,}000 \end{bmatrix}
$$

Mapeamento

Translação e Rotação (Exemplo)



Considerações finais

- Composição de translação e rotação se torna complexa ao agrupar operações considerando muitos referenciais
- Exemplo:
  - $\{C\} \xrightarrow{T_1} \{B\} \xrightarrow{T_2} \{A\}$
  - $^{A}P = {}^{A}_{B}R\left({}^{B}_{C}R\,{}^{C}P + {}^{B}P_{CORG}\right) + {}^{A}P_{BORG} \Rightarrow \underbrace{\boxed{{}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}P}}_{\text{Rotação}} + \underbrace{\boxed{{}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{CORG} + {}^{A}P_{BORG}}}_{\text{Translação}}$

- Como resolver? ➔ Transformações homogêneas