Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Trabalho 2:

VERIFICAÇÃO DA POSITIVIDADE DE UMA MATRIZ ATRAVÉS DO MÉTODO DE CHOLESKY

Disciplina: Despacho e Pré-Despacho de Geração

Discente: Rafael Pavan

Docente: Prof. Dr. Leonardo Nepomuceno

Bauru, 2020

SUMÁRIO

1. SUSTENTAÇÃO TEÓRICA

Uma matriz ***A*** é definida positiva se $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} > \mathbf{0}$ para todos os vetores ***v*** não nulos com entradas reais, sendo o transposto de ***v*** denotado por: $\boldsymbol{v}^T$. Uma matriz complexa ***A*** é definida positiva se a parte real de $\boldsymbol{v}^{T*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} > \mathbf{0}$ para todos os vetores complexos e não-nulos ***v***, sendo o transposto conjugado de ***v*** denotado por: $\boldsymbol{v}^{T*}$ [1].

Uma maneira de descobrir se uma dada matriz é definida positiva, é a partir da aplicação da decomposição de Cholesky. A decomposição de Cholesky é uma metodologia para solução numérica de sistemas lineares, sendo mais eficiente que a metodologia LU, e parte da premissa de que a matriz a ser utilizada é quadrada (de dimensões *n* x *n*) e definida positiva. A decomposição de matrizes definidas positivas e simétricas é frequente em problemas práticos da matemática e da engenharia.

Se ***A*** é quadrada, simétrica e definida positiva, então, segundo a fatoração de Cholesky, existe uma única matriz inferior denominada ***G*** cuja diagonal é positiva, tal que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^T$.

Seja:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

O fator ***G*** é obtido a partir multiplicação matricial $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^T$, que resulta em uma equação:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & & & \\ g_{21} & g_{22} & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ & g_{22} & \cdots & g_{n2} \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \\ & & & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

Uma vez multiplicada as matrizes, encontra-se que para a Coluna 1 de ***G***:

- $\boldsymbol{G_{1,1} = \sqrt{A_{1,1}}}$

- $\boldsymbol{G_{L,1} = \frac{A_{L,1}}{G_{1,1}}}$

Onde L representa as linhas da matriz *A* (L = 2 .... *n*). Encontrando os termos da Coluna 1, temos que para a Coluna 2:

- $G_{2,2} = \sqrt{A_{2,2} - G^2{}_{2,1}}$

- $G_{L,2} = \frac{A_{L,2} - G_{L,1} * G_{2,1} *}{G_{2,2}}$ (L = 3 .... *n*)

E por fim, para as demais colunas:

- $G_{K,K} = \sqrt{A_{K,K} - \sum_{i=1}^{k-1} G^2{}_{k,i}}$

- $G_{L,K} = \frac{A_{L,K} - \sum_{i=1}^{k-1} G_{k,i} * G_{i,k}}{G_{k,k}}$

Onde K representa as colunas da matriz *A* (K = 3 .... *n*). Computacionalmente, o algoritmo apresenta o seguinte aspecto, segundo Ruggiero [2]:

Seja A: n × n, simétrica definida positiva:

Para $k = 1, \ldots, n$
[soma = 0
Para $j = 1, \ldots, (k-1)$
[soma = soma + g_{kj}^2
$r = a_{kk} - \text{soma}$
$g_{kk} = (r)^{1/2}$
Para $i = (k+1), \ldots, n$
[soma = 0
Para $j = 1, \ldots, (k-1)$
[soma = soma + $g_{ij}g_{kj}$
$g_{ik} = (a_{ik} - \text{soma}) / g_{kk}$

Este algoritmo será implementado com a finalidade de provar que uma matriz é definida positiva a partir de uma contraposição (Se A, então B. Logo se não B, então não A). Ou seja, como a Fatoração de Cholesky pressupõe que a matriz seja quadrada, simétrica e definida positiva para que a decomposição possa ser realizada, uma vez dada uma matriz quadrada e simétrica, caso a mesma não possa ser fatorável, implica-se que ela não é definida positiva. Durante o processo de determinação dos termos de ***G***, caso algum valor de **r** (variável do algoritmo acima) seja negativo, não se é possível terminar a fatoração, pois o respectivo termo seria a raiz quadrada de um número negativo.

Outras maneiras para se verificar se uma matriz é definida positiva [3]:

Escalonar a matriz e verificar se os elementos da diagonal, denominados “pivôs”, são positivos maiores que zero. Caso haja algum negativo, a matriz não é definida positiva. Por exemplo, seja a matriz ***M*** dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Após ser escalonada, tem-se que ***M*** é igual a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Os pivôs da matriz são 1 e -3. Portanto, a matriz não é definida positiva.

Outra maneira de realizar a verificação, é através do cálculo dos determinantes superiores esquerdos da matriz. Caso todos os determinantes sejam positivos maiores que zero, todos os pivôs da matriz também serão, logo ela será definida positiva. Seja o exemplo de uma dada matriz ***B**:*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula-se os determinantes para cada submatriz superior esquerda, conforme demarcado a seguir:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinante da Submatriz Vermelha: 2

Determinante da Submatriz Verde: 3

Determinante da Submatriz Azul: 4

Como todos os determinantes são maiores que zero, a matriz é definida positiva.

Outra maneira é verificar se os autovalores da matriz são positivos e os autovetores diferentes de zero. Seja $\boldsymbol{x}$ um autovetor da matriz $\boldsymbol{A}$, e $\boldsymbol{\lambda}$ um autovalor. Neste caso, se $\mathbf{x}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}^T\boldsymbol{x}$, caso $\boldsymbol{\lambda > 0}$, tem-se que $\mathbf{x}^T\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$. Assim encontramos a condição inicial descrita anteriormente, que define uma matriz $\boldsymbol{A}$ definida positiva:

$$\mathbf{x}^T\boldsymbol{Ax} > \boldsymbol{0}$$

2. PROBLEMÁTICA

1. Assumir que a matriz *A* é quadrada e simétrica.
2. Utilizar o método de Cholesky para a solução de sistemas lineares do tipo: $Ax = b$
3. No algoritmo de Cholesky a fatoração também pode ser utilizada para checar a positividade da matriz *A.*
4. Implementação do algoritmo de Cholesky para checar a positividade de algumas matrizes exemplo.
5. Texto explicativo sobre o método de Cholesky e sua utilização para a verificação de positividade de matrizes.

3. ALGORITMO DESENVOLVIDO

O algoritmo proposto por Ruggiero foi implementado em um script do MATLAB, com a inserção de algumas mudanças. Inicialmente, verifica-se se a matriz a ser fatorada é quadrada, e após isso, se é simétrica. Caso não obedeça tais pré-requisitos, o algoritmo informa ao usuário que a matriz não apresenta tais características, e a fatoração não é realizada. Uma vez inserida uma matriz que atende aos requisitos da fatoração de Cholesky, o mesmo realiza o cálculo conforme demonstrado na seção anterior, e no final emite um relatório informando as características da matriz e os fatores $\boldsymbol{G}$ e $\boldsymbol{G}^T$.

Algoritmo Comentado:

```
% Insira a Matriz:

A = [16,-4,12,-4;-4,2,-1,1;12,-1,14,-2;-4,1,-2,83;];

A=real(A);

[l c] = size(A);

quad=0;
pos=0;
sim=0;
```

```
 % Verifica se é quadrada

if (l ~= c )
    quad=1;
else

% Verifica se é simétrica

for i=1:l
    for j=1:c
       if (A(i,j) ~= A(j,i))
            sim=sim+1;
       end
    end
end


G=zeros(l,c);
Gt=zeros(l,c);
G(1,1) = sqrt(A(1,1));


% Aplica o algoritmo de Fatoração de Cholesky (Pág. 153 -
Métodos Numéricos
% - Aspectos Teóricos e Computacionais - Márcia A. Gomes
Ruggiero

for k = 1:l
    soma=0;
    for j = 1:k-1
        soma=soma+G(k,j)*G(k,j);
    end
    R = A(k,k) - soma;
    pos=0;
    if R<=0;
        pos=pos+1;
    end

    G(k,k) = sqrt(R);

        for i=(k+1):l
            soma = 0;
                for j =1:k-1
                     soma = soma + G(i,j)*G(k,j);
                end
            G(i,k) = (A(i,k)-soma)/G(k,k);
        end
```

```
end
end

% Emite Relatório com Resultados

disp('Relatório do Programa:')
disp('_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _')
disp(' ')
disp('Matriz de Entrada:')
disp(' ')
A
disp('_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _')
disp(' ')
if quad ~= 0
    disp('- A matriz não é quadrada.')
    disp('_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _')
else
    disp('- A matriz é quadrada.')

    if sim ~= 0
        disp('- A matriz não é simétrica.')

    else
        disp('- A matriz é simétrica.')

        if pos ~=0
                disp('- A matriz não é definida positiva.')

        else
                disp('- A matriz é definida positiva.')
                disp('_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _')
                disp(' ')
                disp('Fator de Cholesky:')
                disp(' ')

                G
                Gt=transpose(G)
        end
    end
end
```

4. CASOS DE TESTE

- **Teste 1: Matriz 4x4, Simétrica, Quadrada e Definida Positiva:**

Relatório do Programa:

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Matriz de Entrada:

A =

16	-4	12	-4
-4	2	-1	1
12	-1	14	-2
-4	1	-2	83

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

- A matriz é quadrada.
- A matriz é simétrica.
- A matriz é definida positiva.

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Fator de Cholesky:

G =

4	0	0	0
-1	1	0	0
3	2	1	0
-1	0	1	9

Gt =

4	-1	3	-1
0	1	2	0
0	0	1	1
0	0	0	9

- **Teste 2: Matriz 3x3, Não Simétrica, Quadrada:**

Relatório do Programa:

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Matriz de Entrada:

A =

1	2	3
4	5	6
7	8	9

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

- A matriz é quadrada.

- A matriz não é simétrica.

- **Teste 3: Matriz 3x3, Simétrica, Quadrada e Definida Positiva:**

Relatório do Programa:

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Matriz de Entrada:

A =

2	-1	0
-1	2	-1
0	-1	2

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

- A matriz é quadrada.

- A matriz é simétrica.

- A matriz é definida positiva.

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Fator de Cholesky:

G =

1.4142	0	0
-0.7071	1.2247	0
0	-0.8165	1.1547

Gt =

1.4142   -0.7071   0

0   1.2247   -0.8165

0   0   1.1547

- **Teste 4: Matriz 2x2, Simétrica, Quadrada e Definida Negativa:**

Relatório do Programa:

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Matriz de Entrada:

A =

-1   0

0   -1

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

- A matriz é quadrada.

- A matriz é simétrica.

- A matriz não é definida positiva.

- **Teste 5: Matriz 3x2, Não-Quadrada:**

Relatório do Programa:

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Matriz de Entrada:

A =

1 2

2 1

3 3

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

- A matriz não é quadrada.

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

5. ALGORITMO BÔNUS

O algoritmo bônus realiza a mesma fatoração de Cholesky, no entanto, adotando uma metodologia diferente. Para esta metodologia, que denominaremos de LDU*, caso uma matriz ***A*** seja simétrica, quadrada e positiva, ela pode ser fatorada na forma **=** $\boldsymbol{LDL^T}$ onde ***L*** representa a matriz triangular inferior com diagonal unitária e ***D*** a matriz diagonal com elementos estritamente positivos. Inicialmente se realiza a decomposição da matriz ***A*** em LU. A matriz ***U**** é igual a $\boldsymbol{L^T}$. A matriz ***D*** é dada pelos elementos da diagonal da matriz ***U*** com os demais elementos iguais a zero. A matriz ***D**** é dada pela raiz quadrada da matriz ***D***. Assim, temos que o fator de Cholesky ***G*** é igual a ***LD*.***

O algoritmo abaixo realiza as operações descritas anteriormente para encontrar o fator de Cholesky e determinar se a matriz é definida positiva:

```
A = [16,-4,12,-4;-4,2,-1,1;12,-1,14,-2;-4,1,-2,83;];



A=real(A)


[l c]=size(A);

if (l ~= c )
    disp ( 'Erro, a matriz deve ser quadrada.' );
else
    disp ( 'A matriz é quadrada.' )

x=0;
for i=1:l
    for j=1:c
        if (A(i,j) ~= A(j,i))
            x=x+1;
        end
    end
end

if x ~= 0
    disp('Erro, A matriz não é simétrica.')
else
```

```
    disp('A matriz é simétrica.')


L=zeros(l,c);
U=zeros(l,c);
Ub=zeros(l,c);
D=zeros(l,c);
Db=zeros(l,c);

%Realiza Decomposição LU
for i=1:l
    for k=1:i-1
        L(i,k)=A(i,k);
        for j=1:k-1
            L(i,k)= L(i,k)-L(i,j)*U(j,k);
        end
        L(i,k) = L(i,k)/U(k,k);
    end

    for k=i:l
        U(i,k) = A(i,k);
        for j=1:i-1
            U(i,k)= U(i,k)-L(i,j)*U(j,k);
        end
    end
end

for i=1:l
    L(i,i)=1;
end

  L; % Matriz L

  U; % Matriz U

% Encontra a matriz Ubarrada

for z=1:l
    for t=1:c
        Ub(z,t) = U(z,t)/U(z,z);
    end
end
Ub;

% Encontra a matriz D diagonal
for u=1:l
```

```
D(u,u)=U(u,u);

end
% Verifica se a matriz possui elementos negativos, caso sim não
é positiva
dp=0;
for i=1:l
    for j=1:c
        if D(i,j)<0
        dp=dp+1;
        end
    end
end

if dp == 0

    disp('A matriz é definida positiva.')
D;

Db = sqrt(D);
 % Encontra matriz fator de Cholesky
G = L*Db

Gt = Db*transpose(L)
else
    disp('A matriz não é definida positiva.')
end


end
end
```

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Em muitas aplicações de otimização o conceito de matriz definida positiva e negativa é importante, pois se a matriz Hessiana de uma função de um problema de várias dimensões é definida positiva, então, a função é estritamente convexa, possuindo um mínimo global.

Através do algoritmo de Fatoração de Cholesky, pode-se determinar por contraposição se uma matriz é definida positiva ou não, pois o mesmo supõe que para poder ser realizada a fatoração esta deve ser quadrada, simétrica e definida positiva. Uma vez dada uma matriz quadrada e simétrica, caso o algoritmo falhe, temos que a matriz não é definida positiva.

O presente trabalho realizou a fatoração de Cholesky por dois algoritmos distintos, e apresentou 5 casos de testes aos quais o algoritmo sugerido por Ruggiero [2] se mostrou totalmente eficaz. A decomposição de Cholesky é mais rápida e eficiente que o algoritmo que utiliza a decomposição LU, pois tem de realizar menos operações matemáticas.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Wolfram Math World, **Positive Definite Matrix**. [Online]. <https://mathworld.wolfram.com/PositiveDefiniteMatrix.html#:~:text=A%20Hermitian%20(or%20symmetric)%20matrix,all%20its%20eigenvalues%20are%20positive.&text=The%20determinant%20of%20a%20positive,.> Acessado em: 27 de Setembro de 2020.

[2] M. A. G. Ruggiero, V. L. R. Lopes, **Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais**. São Paulo, Brasil: Pearson.

[3] D. Zwick**, Math 2270 - Lecture 33 : Positive Definite Matrices - University of Utah**.[Online].<https://www.math.utah.edu/~zwick/Classes/Fall2012_2270/Lectures/Lecture33_with_Examples.pdf>Acessado em: 05 de Outubro de 2020.