Resolução - Lista 2

Rafael Polli Carneiro

1o quad - 2020

Sumário

Exercício 5

Seja M um módulo R-módulo simples, i.e., $M \neq (0)$ e seus únicos submódulos são (0) e M. Afirmamos que

(i) Dado $f : M \to N$ um homomorfismo não nulo, então f é um monomorfismo;

(ii) Caso, ainda, tivermos na afirmação acima que N é um R-módulo simples, então f será um isomorfismo;

(iii) $\hom_R(M, M)$ é um anel de divisão.

Para provarmos a afirmação (i), basta notarmos que $\ker(f)$ é um submódulo de M, que, por sua vez, por ser um módulo simples implica que

$$\ker(f) = (0) \quad \text{ou} \quad \ker(f) = M.$$

Como, por hipótese, f é um homomorfismo não nulo, temos que $\ker(f) = (0)$. Consequentemente, f é um monomorfismo.

Para o item (ii), decorre do contra-domínio ser um R-módulo simples e, da imagem $\mathrm{Im}(f)$ ser um submódulo do contra domínio, que

$$\mathrm{Im}(f) = (0) \quad \text{ou} \quad \mathrm{Im}(f) = M.$$

Novamente, como f não é nula, concluímos que $\Im(f) = M$ e, portanto, com o item (i) obtemos que f é um isomorfismo.

Seja o conjunto

$$\hom_R(M, M) = \{f : M \to M;\ f \text{ é um homomorfismo}\}.$$

Agora, consideremos a seguinte estrutura algébrica,

$$(\hom_R(M, M), +, \circ, \mathbb{1}),$$

onde, para todo $f, g, h \in \hom_R(M, M)$ e para todo ponto $x \in M$, defini-se

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x);$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Obviamente, $(\hom_R(M, M), +)$ é um grupo abeliano, pois M é um grupo abeliano. Note, também, que

$$(h \circ (f + g))(x) = h(f(x) + g(x)) = h(f(x)) + h(g(x)) = (h \circ f + h \circ g)(x),$$

i.e., a composição é distributiva a esquerda com a soma. Com um mesmo argumento, provamos a distributividade a direita. Pela composição de funções ser associativa e, pela identidade ser um homomorfismo, temos garantidos que

$$(\hom_R(M,M) \setminus \{0\}, \circ, \mathbb{1})$$

é um monóide. (Aqui, denotamos 0 como o homomorfismo nulo.) Finalmente, pelo item (ii), temos que todo elemento de $\hom_R(M,M) \setminus \{0\}$ é um isomorfismo. Consequentemente, dados $x, y \in M$ e $\alpha \in R$, vale, para $f \in \hom_R(M,M) \setminus \{0\}$, que

$$f^{-1}(x + \alpha y) = f^{-1}(f(\widetilde{x}) + \alpha f(\widetilde{y}))$$

com $f(\widetilde{x}) = x$ e $f(\widetilde{y}) = y$. Portanto,

$$f^{-1}(x + \alpha y) = f^{-1}(f(\widetilde{x} + \alpha \widetilde{y})) = (\widetilde{x} + \alpha \widetilde{y}.$$

Ou seja,

$$f^{-1}(x + \alpha y) = f^{-1}(x) + \alpha f^{-1}(y).$$

Portanto,

$$f \in \hom_R(M,M) \implies f^{-1} \in \hom_R(M,M)$$

e, desta forma,

$$(\hom_R(M,M) \setminus \{0\}, \circ, \mathbb{1})$$

é um grupo abeliano. Consequentemente, $\hom_R(M,M)$ é um anel de divisão.

Exercício 7

Seja a sequência exata

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} R \xrightarrow{h} S$$

Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) f é epimorfismo;

(ii) $\mathrm{Im}(g) = (0)$;

(iii) h é monomorfismo.

Provemos as equivalências.

$(i) \implies (ii)$. Se f form um epimorfismo, então vale $\mathrm{Im}\, f = N$. Da mesma forma, por estarmos trabalhando com uma sequência exata, temos que

$$\ker(g) = \mathrm{Im}(f) = N.$$

Logo, temos que $\ker(g) = N \implies g(N) = \{0\}$. Em outras palavras,

$$\mathrm{Im}(g) = (0).$$

$(ii) \implies (iii)$. Esta implicação é resultado imediato de

$$\mathrm{Im}(g) = (0) = \ker(h).$$

A igualdade acima fornece que h é um monomorfismo.

$(iii) \implies (i)$. Por h ser um monomorfismo e, por estarmos trabalhando numa sequência exata, vale

$$\ker(h) = (0) = \mathrm{Im}(g) \implies \ker(g) = N = \mathrm{Im}(f).$$

Portanto, f é um epimorfismo.