

Álgebra 1 - Prof. Nazar

Resolução - Lista 2

Rafael Polli Carneiro, R.A.: 23201910232

1o quad - 2020

Sumário

Exercício 5	1
Exercício 7	2

Exercício 5

Seja M um módulo R -módulo simples, i.e., $M \neq (0)$ e seus únicos submódulos são (0) e M . Afirmamos que

- (i) Dado $f : M \rightarrow N$ um homomorfismo não nulo, então f é um monomorfismo;
- (ii) Caso, ainda, tivermos na afirmação acima que N é um R -módulo simples, então f será um isomorfismo;
- (iii) $\text{hom}_R(M, M)$ é um anel de divisão.

Para provarmos a afirmação (i), basta notarmos que $\ker(f)$ é um submódulo de M , que, por sua vez, por ser um módulo simples implica que

$$\ker(f) = (0) \quad \text{ou} \quad \ker(f) = M.$$

Como, por hipótese, f é um homomorfismo não nulo, temos que $\ker(f) = (0)$. Consequentemente, f é um monomorfismo.

Para o item (ii), decorre do contra-domínio ser um R -módulo simples, e da imagem $\text{Im}(f)$ ser um submódulo do contra domínio, que

$$\text{Im}(f) = (0) \quad \text{ou} \quad \text{Im}(f) = M.$$

Novamente, como f é não nula, concluímos que $\text{Im}(f) = M$ e, portanto, com o item (i) obtemos que f é um isomorfismo.

Seja o conjunto

$$\text{hom}_R(M, M) = \{f : M \rightarrow M; f \text{ é um homomorfismo}\}.$$

Agora, consideremos a seguinte estrutura algébrica,

$$(\text{hom}_R(M, M), +, \circ, \mathbb{1}),$$

onde, para todo $f, g, h \in \text{hom}_R(M, M)$ e para todo ponto $x \in M$, defini-se

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x); \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)).\end{aligned}$$

Obviamente, $(\text{hom}_R(M, M), +)$ é um grupo abeliano, pois M é um grupo abeliano. Note, também, que

$$(h \circ (f + g))(x) = h(f(x) + g(x)) = h(f(x)) + h(g(x)) = (h \circ f + h \circ g)(x),$$

i.e., a composição é distributiva à esquerda com a soma. Com um mesmo argumento, provamos a distributividade à direita. Pela composição de funções ser associativa, e pela identidade ser um homomorfismo, temos garantidos que

$$(\text{hom}_R(M, M) \setminus \{0\}, \circ, \mathbb{1})$$

é um monóide. (Aqui, denotamos 0 como o homomorfismo nulo.) Finalmente, pelo item (ii), temos que todo elemento de $\text{hom}_R(M, M) \setminus \{0\}$ é um isomorfismo. Consequentemente, dados $x, y \in M$ e $\alpha \in R$, vale, para $f \in \text{hom}_R(M, M) \setminus \{0\}$, que

$$f^{-1}(x + \alpha y) = f^{-1}(f(\tilde{x}) + \alpha f(\tilde{y}))$$

com $f(\tilde{x}) = x$ e $f(\tilde{y}) = y$. Portanto,

$$f^{-1}(x + \alpha y) = f^{-1}(f(\tilde{x} + \alpha \tilde{y})) = \tilde{x} + \alpha \tilde{y}.$$

Ou seja,

$$f^{-1}(x + \alpha y) = f^{-1}(x) + \alpha f^{-1}(y).$$

Portanto,

$$f \in \text{hom}_R(M, M) \implies f^{-1} \in \text{hom}_R(M, M)$$

e, desta forma,

$$(\text{hom}_R(M, M) \setminus \{0\}, \circ, \mathbb{1})$$

é um grupo. Consequentemente, $\text{hom}_R(M, M)$ é um anel de divisão.

Exercício 7

Seja a sequência exata

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} R \xrightarrow{h} S$$

Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) f é epimorfismo;
- (ii) $\text{Im}(g) = (0)$;
- (iii) h é monomorfismo.

Provemos as equivalências.

(i) \implies (ii). Se f form um epimorfismo, então vale $\text{Im } f = N$. Da mesma forma, por estarmos trabalhando com uma sequência exata, temos que

$$\ker(g) = \text{Im}(f) = N.$$

Logo, temos que $\ker(g) = N \implies g(N) = \{0\}$. Em outras palavras,

$$\text{Im}(g) = (0).$$

(ii) \implies (iii). Esta implicação é resultado imediato de

$$\text{Im}(g) = (0) = \ker(h).$$

A igualdade acima fornece que h é um monomorfismo.

(iii) \implies (i). Por h ser um monomorfismo, e por estarmos trabalhando numa sequência exata, vale

$$\ker(h) = (0) = \text{Im}(g) \implies \ker(g) = N = \text{Im}(f).$$

Portanto, f é um epimorfismo.