Álgebra 1 - Prof Nazar
Lista 3, Resolução

Rafael Polli Carneiro, RA: 23201910232

1o quad 2020

Contents

Exercício 1

Provemos que todo R-módulo livre L é, também, um módulo projetivo. Em outras palavras, provemos que, dados os R-módulos L, M, N, um epimorfismo $f : M \to N$ e um homomorfismo $g : L \to N$ então, se L for um módulo livre, existirá um homomorfismo $g' : L \to M$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dashed, "\exists\, g'"'] \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "f"] & N. \end{tikzcd}$$

Inicialmente, notemos que por L ser um módulo livre então existe uma base $B \subseteq L$ tal que para todo R-módulo Q e toda função $\phi : B \to Q$ existe um único homomorfismo ϕ' tal que o diagrama abaixo comuta,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & L \arrow[d, dashed, "\exists\, \phi'"] \\ & Q, \end{tikzcd}$$

onde i representa a inclusão.

Consequentemente, por $f : M \to N$ ser um epimorfismo, podemos definir uma função

$$\begin{aligned} \phi : B &\to M \\ x &\mapsto y, \quad \text{tal que } f(y) = g(x), \end{aligned}$$

que satisfaz $f(\phi(x)) = g(x)$.

Agora, pela propriedade universal dos módulos livres, explicitada no diagrama acima, temos garantido a existência de um homomorfismo $\phi' : L \to M$ tal que

$$\phi' \circ i = \phi.$$

Finalmente, aplicando o homomorfismo ϕ' para todo $x \in L$, o qual podemos escrever como a soma finita

$$x = \sum_{a \in B} \lambda_a a,$$

obtemos o desejado:

$$\phi'(x) = \sum_{a \in B} \lambda_a \phi(a) \implies f \circ \phi'(x) = \sum_{a \in B} \lambda_a f(\phi(a)) = \sum_{a \in B} \lambda_a g(a) = g(x).$$

Exercício 2

Este exercício sai como resultado trivial do Exercício 1 junto com a propriedade de sequências exatas que cindem. De fato, dado o epimorfismo $f : M \to L$ e a identidade $\mathbb{1}_L : L \to L$, sabemos, por L ser um módulo livre, que existe um homomorfismo $g : L \to M$ tal que

$$f \circ g = \mathbb{1}_L .$$

Finalmente, se considerarmos a sequência

$$(0) \longrightarrow \ker(f) \xhookrightarrow{i} M \xrightarrow{f} L \longrightarrow (0),$$

com i a inclusão, e observarmos que a mesma satisfaz as propriedades

(i) $i : \ker(f) \to M$ é um monomorfismo;

(ii) f é um epimorfismo;

(iii) existe um homomorfismo $g : L \to M$ tal que $f \circ g = \mathbb{1}_l$;

ou seja, que ela é uma sequência exata e que cinde, concluímos que

$$M \cong \ker(f) \oplus L.$$

Exercício 8

Seja P um R-módulo projetivo finitamente gerado pelo subconjunto $X \subseteq P$, ou seja,

$$(X) = P,$$

com

$$X = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$$

e R um anel comutativo com unidade. Mostremos que existem $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \hom_R(P, R)$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) m_i$$

para todo $x \in P$ e, ainda mais,

$$f \in \hom_R(P, R) \implies f = \sum_{i=1}^{n} f(m_i) f_i.$$

Para provarmos este fato, notemos que a partir do conjunto X podemos induzir o seguinte R-módulo livre

$$R^X := \{(\lambda_x)_{x \in X};\ \lambda_x \in R,\ \forall x \in X\}$$

com base

$$B = \{e_x \in R^X;\ x \in X\}$$

onde $e_x = (\delta_{i,x})_{i \in X}$, com $\delta_{i,x}$ o índice de Kronecker.

Agora, note que este módulo livre pode ser escrito como a soma direta

$$R^X = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_{m_i}$$

o qual, consequentemente, induz as projeções (ortogonais):

$$\begin{aligned} \pi_i : R^X &\to {}_R R \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_{m_j} &\mapsto \lambda_i, \end{aligned}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Finalmente, utilizaremos a hipótese de que P é um módulo projetivo. Antes, observe que podemos definir a função

$$\Phi : B \to P,\ e_x \mapsto x, \quad \forall x \in X$$

e, como R^X é um módulo livre, Φ pode ser estendida de forma única para um homomorfismo, o qual denotaremos por $\overline{\Phi}$. É imediato que $\overline{\Phi}$ é um epimorfismo pois

$$\overline{\Phi}\left(\sum_{x \in X} \alpha_x e_x\right) = \sum_{x \in X} \alpha_x x$$

e X gera P. Agora, dada a identidade $\mathbb{1}_P$ e por P ser um módulo projetivo, existe um homomorfismo $g : P \to R^X$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "\mathbb{1}_P"] \\ R^X \arrow[r, "\overline{\Phi}"] & P, \end{tikzcd}$$

i.e.,

$$\overline{\Phi} \circ g = \mathbb{1}_P\,.$$

Logo, para todo $x \in P$ temos que

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{m_i}$$

o qual, aplicando $\overline{\Phi}$ na igualdade acima e usando a comutatividade do diagrama, fornece

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\Phi}(e_{m_i}) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(g(x)) m_i.$$

Portanto, definindo os homomorfismos

$$f_i := \pi_i \circ g : P \to {}_R R, \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n$$

obtemos a primeira igualdade desejada

$$x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) m_i.$$

Agora, para obtermos a segunda igualdade, basta, para todo homomorfismo $f : P \to {}_R R$, aplicarmos f na igualdade acima, obtendo

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) f(m_i)$$

para todo $x \in P$, ou seja, podemos escrever f como combinação linear dos $f_1, f_2, \ldots, f_n$:

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(m_i) f_i.$$