



Álgebra I - Lista 2

1. Seja M um R -módulo. Mostre que:

(a) $(-r)m = r(-m) = -rm$ para todo $r \in R, m \in M$.

(b) $0m = 0$ para todo $m \in M$.

(c) $r \cdot 0 = 0$ para todo $r \in R$.

2. Determinar todos os submódulos do \mathbb{Z} -módulo \mathbb{Z}_{12} . Determine o anulador de \mathbb{Z}_{12} .

3. Seja S um subconjunto de um R -módulo M . Seja \mathcal{F} a família de todos os submódulos de M que contém S . Mostre que

$$(S) = \bigcap_{N \in \mathcal{F}} N$$

é um submódulo de S . Tal módulo é chamado de submódulo gerado por S .

4. Mostre que se m e n são coprimos, então o único homomorfismo entre os \mathbb{Z} -módulos \mathbb{Z}_m e \mathbb{Z}_n é o homomorfismo nulo.

5. Um R -módulo é chamado de simples se $M \neq (0)$ e os únicos submódulos de M são M e (0) . Mostre que se M é simples e $f : M \rightarrow N$ é um homomorfismo não nulo, então f é um monomorfismo. Mostre que se N também é simples, então f é um isomorfismo. Além disso, mostre que, se M é simples, então $\text{Hom}_R(M, M)$ é um anel de divisão.

6. Demonstre o segundo e o terceiro Teoremas do isomorfismo para módulos.

7. Mostre que, se a sequência

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} R \xrightarrow{h} S$$

é exata, são equivalentes:

(i) f é epimorfismo.

(ii) $\text{Im}(g) = (0)$.

(iii) h é monomorfismo.

8. Seja

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \xrightarrow{f'} & M & \xrightarrow{f} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \phi' & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{g'} & N & \xrightarrow{g} & N'' \end{array}$$

um diagrama comutativo, onde as filas são sequências exatas. Mostre que:

• Se ϕ' e ϕ'' são epimorfismos, então ϕ é epimorfismo.

- Se ϕ' e ϕ'' são isomorfismos, então ϕ é isomorfismo.

9. Mostre que todo submódulo de \mathbb{Z} (visto como \mathbb{Z} -módulo) é da forma $m\mathbb{Z}$ para algum $m \in \mathbb{Z}$.

10. Dada uma sequência exata

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0 ,$$

nem sempre $\text{Im}(f)$ é somando direto de F . Dê um contra-exemplo.

11. Seja $M = N_1 \oplus N_2$ um R -módulo e N' um submódulo de M isomorfo a N_1 . Em geral, não é verdade que $\frac{N_1 \oplus N_2}{N'} \cong N_2$. Dê um contra-exemplo.