Resolução da Lista 4 - Álgebra I
Prof Nazar

Rafael Polli Carneiro, R.A.: 23201910232

1^o quad 2020

Contents

Exercício 3 1

Exercício 6 2

Exercício 3

Seja o $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_{(p)} \,/\, \mathbb{Z}$ com

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{p^m};\ a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Provemos que

(a) M não é noetheriano;

(b) Todo submódulo próprio de M é finito e, portanto, M é artiniano.

O item (a) é fácil de provar, basta tomarmos a sequência de submódulos

$$N_i := \left\{ \frac{a}{p^i} + \mathbb{Z};\ a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Desta sequência, temos que para todo natural i e para todo inteiro a, vale a inclusão

$$\frac{a}{p^i} \in N_i \implies \frac{a}{p^i} = \frac{ap}{p^{i+1}} \in N_{i+1},$$

ou seja, a sequência de submódulos

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots \subseteq N_i \subseteq N_{i+1} \subseteq \ldots$$

é ascendente e não estacionária, pois, para todo natural i, vale

$$\frac{1}{p^{i+1}} \in N_{i+1} \setminus N_i.$$

Portanto, existe uma sequência ascendente e não estacionária de submódulos em M. Logo, M não é noetheriano.

Agora, provemos que M é artiniano. Para isto, provemos o item (b), ou seja, que todos os submódulos de M são finitos. Seja N um submódulo de M. Considere o conjunto

$$C := \left\{ \frac{a}{p^m};\ a \neq 0, p^m \text{ são primos entre si e } \frac{a}{p^m} + \mathbb{Z} \in N \right\}.$$

Então, se $C = \emptyset$, temos que

$$N = 0 + Z$$

que é finito. Caso contrário, fixe o elemento

$$\frac{a}{p^m} \in C \neq \emptyset.$$

Logo, pelo Teorema de Bezout, existem inteiros r, s tal que

$$ra + sp^m = 1.$$

Por esta igualdade somos capazes de inferir que

$$\frac{b}{p^i} + \mathbb{Z} \in N, \quad \forall b \in Z, i \in \mathbb{N} \text{ e } i \leq m.$$

De fato, seja $\frac{b}{p^i} + \mathbb{Z}$ um elemento como descrito acima. Logo,

$$\frac{b}{p^i} = \frac{bar}{p^i} + bsp^{m-i}$$

ou seja,

$$\frac{b}{p^i} + \mathbb{Z} = \frac{barp^{m-i}}{p^m} + \mathbb{Z} = (brp^{m-i})\left(\frac{a}{p^m} + \mathbb{Z}\right) \in N.$$

Agora, por $\mathbb{Q}$ ser arquimediano, sabemos que para todo b/p^n, com b um inteiro e n um natural, existe um natural n_0 tal que

$$\frac{b}{p^n} \leq n_0 \frac{a}{p^m} \implies \frac{b}{p^n} + \mathbb{Z} \in N.$$

Sendo assim, concluímos que

$$N = \left\{\frac{b}{p^i} + \mathbb{Z}; \quad \forall b \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N} \text{ e } i \leq m\right\}.$$

Além do mais, temos que todo $b \in \mathbb{Z}$ pode ser escrito como

$$b = \alpha_i p^i + b_i,$$

com $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ e $b_i \in [1, 2, \ldots, p^i - 1] \cap \mathbb{Z}$. Portanto

$$N = \left\{\frac{b}{p^i} + \mathbb{Z}; \quad i \leq m \text{ e } b \in [0, 1, \ldots p^i - 1]\right\}.$$

Ou seja, N é finito.

Finalmente, como todo submódulo de M é finito temos que que toda sequência descendente de submódulos deve ser estacionária. De fato, basta observar que a sequência dada pela cardinalidade dos submódulos será decrescente e limitada, portanto convergente. Desta forma, pela convergência concluímos que a sequência descendente de submódulos é estacionária. Portanto, M é artiniano.

Exercício 6

Seja $\mathbb{Q}$ o anel dos racionais e ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$ o $\mathbb{Q}$-módulo dos racionais. Note que todo submódulo N de ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$ é da forma

$$N = (0) \quad \text{ou} \quad N = {}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}.$$

Portanto, $\mathbb{Q}$ é uma anel artiniano, já que toda sequência descendente de submódulos é estacionária.

Porém, o subanel $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ não é um anel artiniano. Para isto, basta obeservar que a sequência

$$2\,\mathbb{Z} \supseteq 2^2\,\mathbb{Z} \supseteq 2^3\,\mathbb{Z}\,2^4\,\mathbb{Z} \supseteq \cdots$$

é descendente e nunca estacionária, pois

$$2^i \notin 2^{i+1}\,\mathbb{Z}, \quad \forall i \in \mathbb{N}\,.$$

Portanto, $\mathbb{Z}$ não será um anel artiniano.