27 de julho de 2021

Introdução

Estes slides consistem em apresentar meus resultados preliminares para os seguintes problemas

1. **Primeiro Problema**:

   Estudar "propriedades persistentes" de uma coleção de pontos oriundos de um Processo Pontual não estacionário;

2. **Segundo Problema**:
   - ***Avaliar o comportamento de um grafo de conversas referentes a COVID-19 no Twitter***
   - ***e estudar as "propriedades persistentes" de seu subgrafo formado pelas mensagens classificadas como Fake News;***

Introdução

- O termo "**propriedades persistentes**" é destacado de propósito;
- De fato, este termo vem por causa da **Homologia Persistente**;
- E será objeto central de toda minha argumentação;
- Para isso, antes de prosseguirmos
- Precisamos entendê-la
- E criar intuição sobre a ferramenta central para nosso trabalho...

O que é Homologia Persistente

- Como dito no slide anterior
- Por **propriedades persistente** nos referimos a todo e qualquer elemento do ramo da

  Homologia Persistente
- Ramo este que se fundamenta fortemente na **Homologia Simplicial**

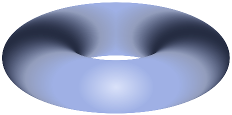
Hom. Simplicial $\Rightarrow$ Hom. Persistente

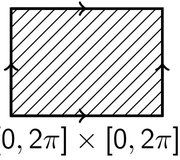
O que é Homologia Persistente

A Homologia Simplicial

- Com um olhar mais ingênuo
- Para desenvolvermos intuição
- Pensaremos na **Homologia Simplicial** como
    - uma ferramenta capaz de detectar *certas propriedades geométricas* de um conjunto
    - Tais Propriedades Geométricas serão:

componentes conexas ou “buracos”

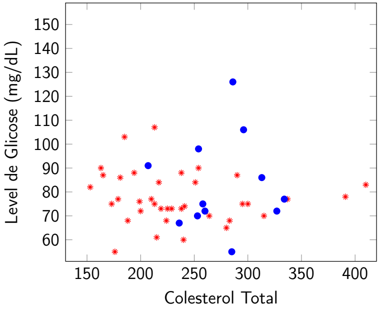




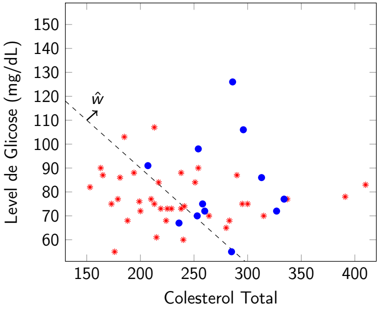
O que é a Homologia Persistente

Motivação

- Técnicas de análise estatística baseiam-se quase certamente em
  - Ajustar um hiperplano a uma amostra
  - Seguindo certos critérios de minimização



(a) Valores da amostra de 50 indivíduos.

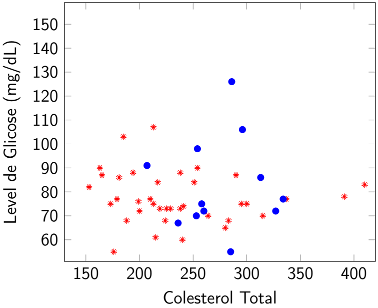


(b) Exemplo de hiperplano separando os pontos.

O que é a Homologia Persistente

Motivação

- Lado negativo destas técnicas:
  1. Propriedades locais da amostra são perdidos
  2. Em prol de se resolver um problema de minimização
- Observe-se como os pontos azuis estão mais distantes entre si;
- Se comparados aos pontos vermelhos;



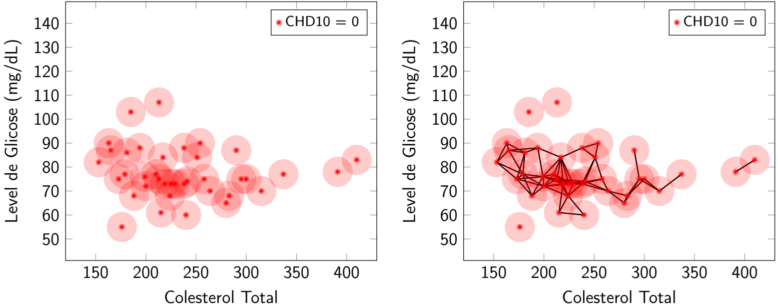
O que é a Homologia Persistente

Motivação

- **Observações**
  - Seria legal incorporar propriedades locais no modelo de análise
  - E também seria legal avaliar as características geométricas da amostra
- Motivados por estes pontos, as seguintes ideais parecem razoáveis
  1. Agrupar os pontos distantes entre si, $d(x, y) \leq r$
  2. E aplicar a homologia simplicial nestes agrupamentos (simplexos)

O que é a Homologia Persistente

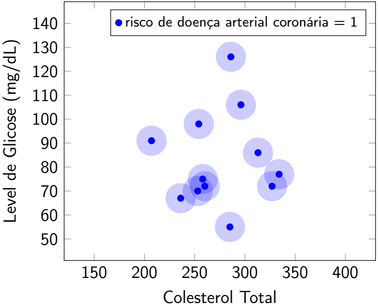
Motivação



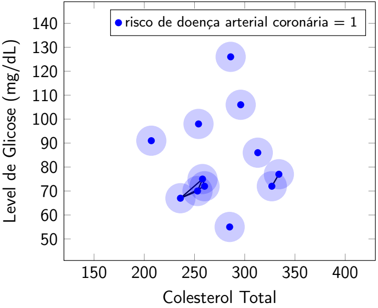
(c) (d)

O que é a Homologia Persistente

Motivação



(e)



(f)

O que é a Homologia Persistente

Motivação

- Até agora tudo bem...
- Porém:

  Qual valor r usar para agrupar os pontos em função de suas distâncias
  $$d(x, y) \leq r???$$
- Aí que surge a

Homologia Persistente

O que é a Homologia Persistente

Finalmente, a Homologia Persistente

- Seja X um conjunto finito (a amostra);
- E X_r uma sequência indexada por $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$X_r = \{\sigma \subseteq X; x, y \in d(x, y) \leq r\}$$

- Onde

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$$

- Temos que

$$\{X_r\}_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \text{ será chamada de filtração}$$

- Da propriedade $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$
- A filtração nos garante o seguinte diagrama comutativo

O que é a Homologia Persistente

Finalmente, a Homologia Persistente

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & H_2(X_a) \arrow[r, "\iota_{*,2}^{a,b}"] \arrow[d, "\partial_2"'] & H_2(X_b) \arrow[r, "\iota_{*,2}^{b,c}"] \arrow[d, "\partial_2"'] & H_2(X_c) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_2"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_1(X_a) \arrow[r, "\iota_{*,1}^{a,b}"] \arrow[d, "\partial_1"'] & H_1(X_b) \arrow[r, "\iota_{*,1}^{b,c}"] \arrow[d, "\partial_1"'] & H_1(X_c) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_1"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_0(X_a) \arrow[r, "\iota_{*,0}^{a,b}"] \arrow[d, "\partial_0"'] & H_0(X_b) \arrow[r, "\iota_{*,0}^{b,c}"] \arrow[d, "\partial_0"'] & H_0(X_c) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_0"'] & \cdots \\
 & (0) & (0) & (0) &
\end{tikzcd}
$$

$$\leq \quad a \quad \leq \quad b \quad \leq \quad c \quad \leq$$

O que é a Homologia Persistente

Finalmente, a Homologia Persistente

- Considerando cada grupo de homologia um $\mathbb{K}$-espaço vetorial

Definição

A ***Homologia Persistente*** de uma filtração $\mathcal{F} = (X_r)_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ é nada mais que a sequência de ***módulos de persistência*** $H_p(\mathcal{F})$, com $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

sendo que

Definição

Um ***módulo de persistência*** $H_p(\mathcal{F})$, é a tupla

$$H_p(\mathcal{F}) = \left(H_p(X_r), (\iota_{*,p}^{r,r'} : H_p(X_r) \to H_p(X_{r'})\right)_{r,r' \in \mathbb{R}_{\geq 0}, r \leq r'}.$$

O que é a Homologia Persistente

Finalmente, a Homologia Persistente

- Seja $H_p(\mathcal{F})$ um módulo de persistência de dimensão p
- E $\mathcal{F} = \{X_r\}_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ uma filtração de um conjunto finito X
- Então $H_p(\mathcal{F})$ pode ser visto como o multiset

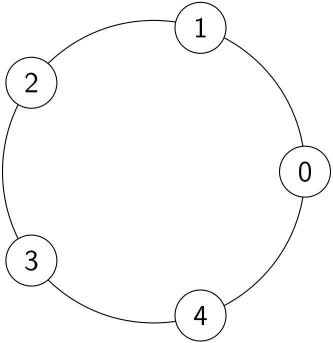
$$\{(b, d); b \leq d \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

- onde $(b, d) \in \mathbb{R}^2$ representa
  - $b \to$ o instante do surgimento de um *ciclo* em X_b
  - $d \to$ o instante em que o *ciclo* se torna um *bordo* em X_d

O que é a Homologia Persistente

Um exemplo

Consideremos o grafo não orientado

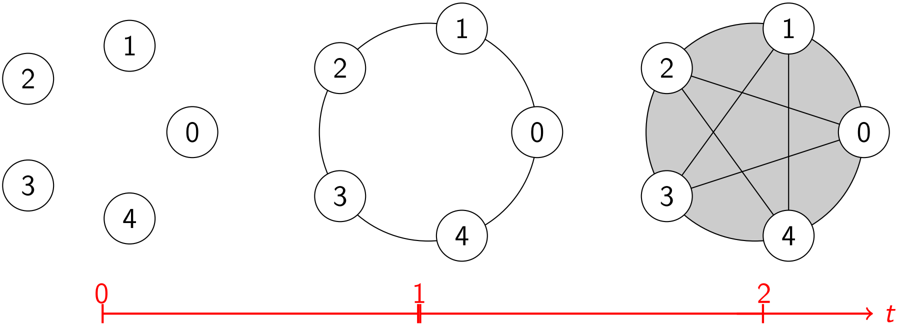


Munido da métrica do menor caminho entre vértices

O que é a Homologia Persistente

Um exemplo

O qual admite a filtração



O que é a Homologia Persistente

Um exemplo

- E os seguintes módulos de persistência

$$H_0(\mathcal{F}): \quad \mathbb{R}^5 \xmapsto{i_{*,0}^{0,1}} \mathbb{R} \xmapsto{i_{*,0}^{1,2}} \mathbb{R} \xmapsto{i_{*,0}^{2,3}} \mathbb{R} \quad \cdots$$

$$0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad \cdots \qquad \mathbb{R}_{\geq 0}$$

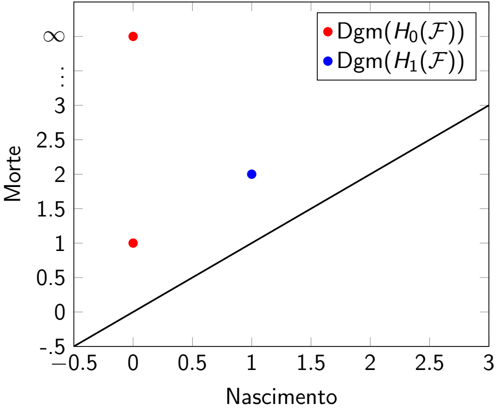
$$H_1(\mathcal{F}): \quad (0) \xmapsto{i_{*,1}^{0,1}} \mathbb{R} \xmapsto{i_{*,1}^{1,2}} (0) \xmapsto{i_{*,1}^{2,3}} (0) \quad \cdots$$

$$0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad \cdots \qquad \mathbb{R}_{\geq 0},$$

O que é a Homologia Persistente

Um exemplo

- A homologia persistente desta filtração pode ser vista pelo gráfico de nascimento e morte de ciclos



O que é a Homologia Persistente

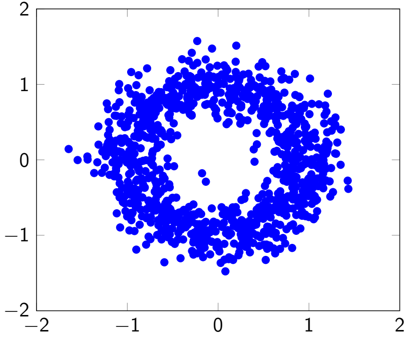
Implementação Computacional

- A vantagem de se trabalhar com filtrações simpliciais é a de existir um algoritmo simples para o cálculo da Homologia Persistente
- De fato, o algoritmo consiste basicamente em realizar uma eliminação gaussiana dos operadores bordos
- Apresentamos outro Exemplo para ilustrar que a Homologia Persistente nos fornece resultados condisentes com o esperado
- Este exemplo será resultado da eliminação gaussiana

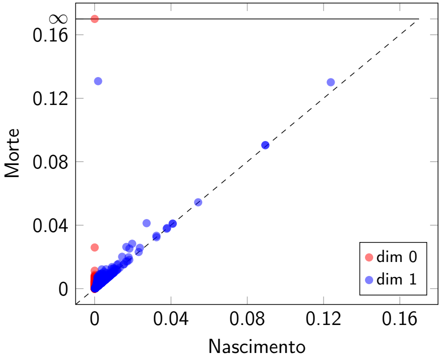
O que é a Homologia Persistente

Último Exemplo

Simulação e Cálculo da Homologia Persistente



(g)



(h)

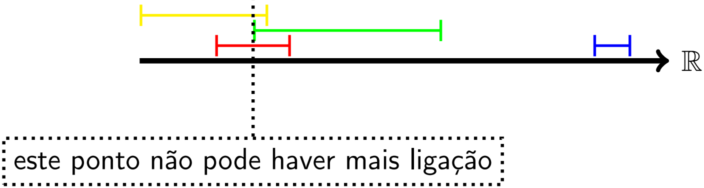
Primeira Parte do Trabalho

O Processo Pontual Estudado

- O Processo Pontual que servirá de base para nosso estudo pode ser entendido como

  A evolução temporal de chamadas telefônicas na reta real sendo que apenas C chamadas podem ocorrer simultâneamente no mesmo ponto

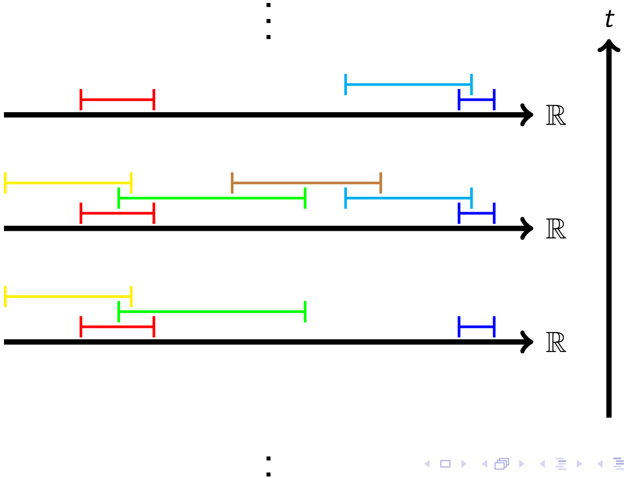
- Exemplo: fixado um tempo $t \in \mathbb{R}$ e $C = 3$ temos



Primeira Parte do Trabalho

O Processo Pontual Estudado

- O mesmo Exemplo, agora considerando sua dinâmica no tempo



Primeira Parte do Trabalho

O Processo Pontual Estudado

- Sob certas condições esta dinâmica de "nascimento" e "morte" converge para um "equilíbrio",
- ou melhor dizendo, converge

  para uma **medida invariante**
- Ou seja, temos um padrão para o Processo Pontual das chamadas telefônicas, quando $t \to \infty$
- Ai que chegamos aonde queriamos:

  $\boxed{\text{Simulação Perfeita}}$

Primeira Parte do Trabalho

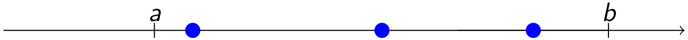
O Processo Pontual Estudado

- A **Simulação Perfeita** será a ferramenta que nos fornecerá o Processo Pontual em equilíbrio
- De forma simplificada, ela consiste em
- Dado um intervalo $[a, b]$
- E considerando que o comprimento de ligações vem de uma distribuição π

$$\pi \sim \mathcal{U}(0, H)$$

1. Gerar pontos de um Processo Pontual de Poisson de taxa λ em $[a, b]$:

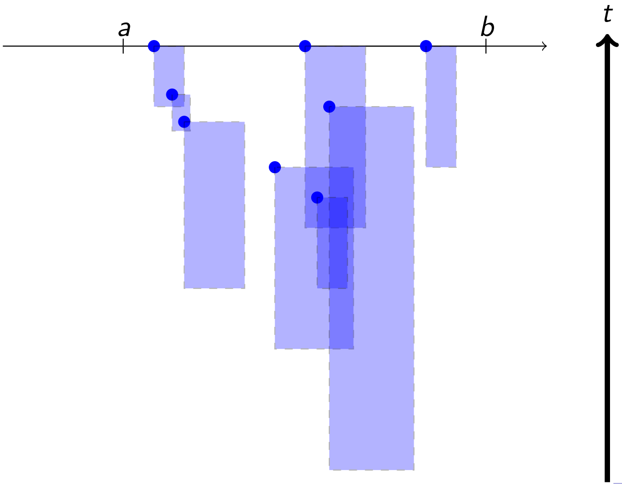
$$x_1, x_2, \ldots, x_N$$



Primeira Parte do Trabalho

O Processo Pontual Estudado

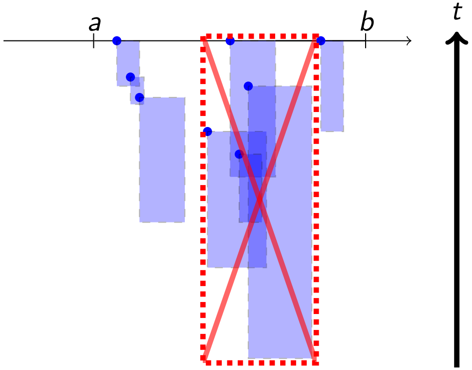
2. E gerar uma sequência de pontos ancestrais a x_i



Primeira Parte do Trabalho

O Processo Pontual Estudado

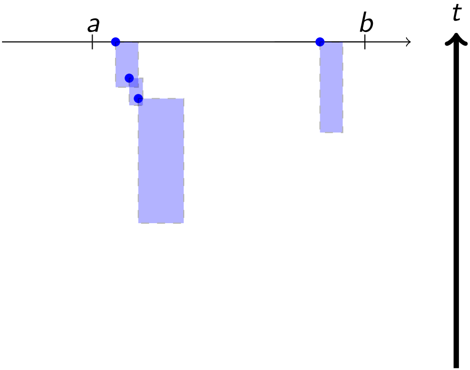
3. Com os pontos ancestrais uma filtração é realizada baseada no máximo de ligações simultâneas C
4. Por exemplo, sendo $C = 3$



Primeira Parte do Trabalho

O Processo Pontual Estudado

5. Após a filtração, o Processo Pontual será:
   - (i) Os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_N$ restantes da filtração;
   - (ii) E os retângulos ancestrais, formando o ***clã de ancestrais***



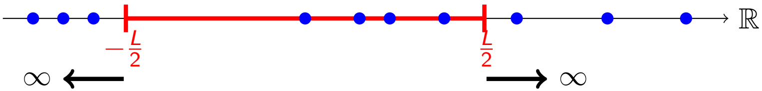
Primeira Parte do Trabalho

O Processo Pontual Estudado

- Dado o Processo Pontual resultante da Simulação Perfeita, denotado por ζ
- Vamos Estudar o comportamento da taxa do ***número de persistência de Betti de dimensão*** 0 de ζ na janela

$$\Lambda = \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \cap \zeta,$$

com $L \in \mathbb{R}_{>0}$, fazendo $L \to \infty$



Primeira Parte do Trabalho

O que é o Número de Persistência de Betti

- Lembremos que o módulo de Persistência de dimensão 0 será a tupla

$$H_0(\mathcal{F}) : \quad H_0^0 \xrightarrow{i_{*,0}^{0,1}} H_0^1 \xrightarrow{i_{*,0}^{1,a}} H_0^a \xrightarrow{i_{*,0}^{a,b}} H_0^b \quad \cdots$$

Definição

Fixados $0 \leq a \leq b \in \mathbb{R}$, o ***Número de Persistência de Betti*** de dimensão 0, no intervalo (a, b), é o valor

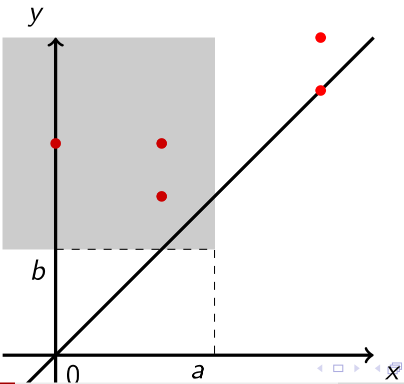
$$\beta_0^{a,b} = \dim(\mathrm{Im}(i_{*,0}^{2,3}))$$

Primeira Parte do Trabalho

O Número de Persistência de Betti como uma medida

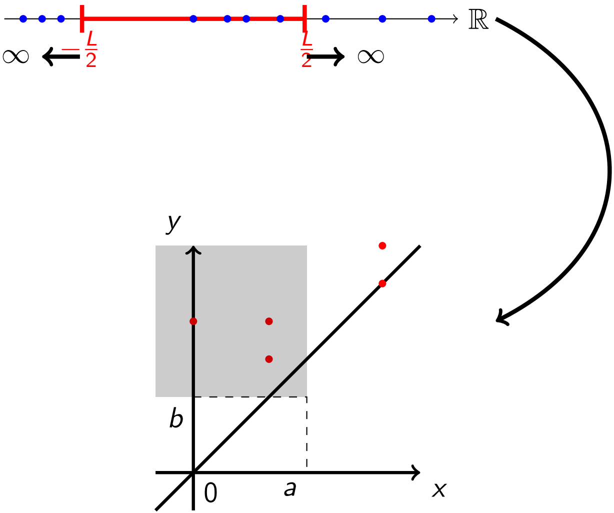
- Podemos interpretar o Número de Persistência de Betti como a quantidade de pontos do Diagrama de Persistência no retângulo

$$[-\infty, a] \times [b, \infty]$$



Primeira Parte do Trabalho

Tática



$$\frac{\beta_0^{a,b}}{L}$$