1.0 – INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PARA CALCULAR O TRABALHO:

Muitos problemas de engenharia envolvem o cálculo do trabalho. Em aplicações bastante simplificadas, quando a força permanece constante e é aplicada na mesma direção do deslocamento, o cálculo do trabalho é feito de forma simples e direta pela equação *(i)*.

$$W = F \cdot d \qquad (i)$$

Onde: W *– trabalho;*

F *– força aplicada;*

d *– deslocamento.*

Porém, problemas em situações reais geralmente são mais complexos. Nestes casos, tanto a força quanto o ângulo de aplicação em relação ao movimento podem variar em função da posição. Assim, a equação *(i)* deve ser modificada para levar em conta esses efeitos.

$$W = \int_{x_0}^{x_n} F(x) \cdot cos[\theta(x)]\, dx \qquad (ii)$$

Onde: x_o *e* x_n *– posições inicial e final, respectivamente;*

$F(x)$ *– força que varia em função da posição;*

$\theta(x)$ *– ângulo que varia em função da posição;*

dx *– elemento infinitesimal de deslocamento.*

Se $F(x)$ e $\theta(x)$ são funções simples, a equação *(ii)* pode ser resolvida analiticamente. Entretanto, quando a relação funcional é complicada ou se dispõe apenas de dados tabulares, os métodos numéricos fornecem a única alternativa para determinar a solução da integral.

EXEMPLO 1: FORÇA E ÂNGULO VARIÁVEIS EM RELAÇÃO À POSIÇÃO

Suponhamos um experimento onde tanto o ângulo quanto o valor absoluto da força agindo sobre um bloco sejam variáveis causando um deslocamento conforme figura 1 abaixo.

Figura 1 – Força *F(x)* e ângulo *θ(x)* variáveis agindo sobre um bloco.

Embora as funções $F(x)$ e $\theta(x)$ sejam contínuas, devido a restrições experimentais, foi possível obter apenas medidas discretas em intervalos de $\boldsymbol{x = 5}$ ***pés***, conforme tabela 1 abaixo.

x, pés	*F(x), lb*	*θ(x), rad*	*F(x) ·cos θ(x)*
0	0,0	0,50	0,0000
5	9,0	1,40	1,5297
10	13,0	0,75	9,5120
15	14,0	0,90	8,7025
20	10,5	1,30	2,8087
25	12,0	1,48	1,0881
30	5,0	1,50	0,3537

Tabela 1 – Dados obtidos para a força $F(x)$ e para os ângulos $\theta(x)$ como funções da posição x.

Uma interpretação geométrica para a integral da equação *(ii)* é que o trabalho W é numericamente igual à área sob o gráfico da função resultante. Dessa forma, fazendo o produto $F(x)\cdot cos\theta(x)$, plotando o resultado e adicionando uma linha de tendência obtemos a função estimada em vermelho conforme indicado na figura 2 abaixo.

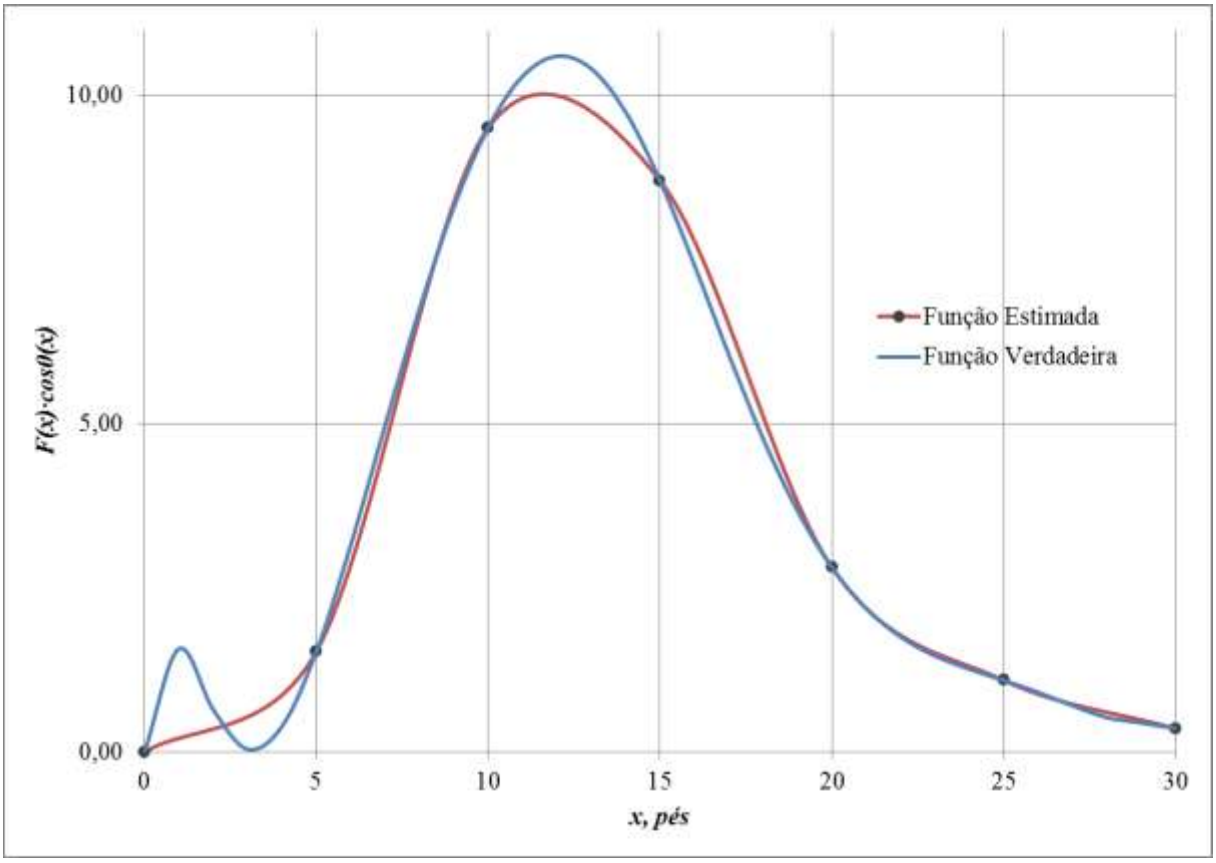

Figura 2 – Gráficos da função estimada e da função verdadeira para o exemplo considerado.

Entretanto, usar somente sete pontos para caracterizar a função verdadeira (indicada em azul na figura 2) é insuficiente, pois se perdem informações nos picos próximos a $\boldsymbol{x = 1,5}$ e $\boldsymbol{x = 12,5}$ ***pés***. Portanto, deve-se buscar uma forma de recuperar parte dessas informações.

Neste sentido, fizemos uma interpolação usando o método de Lagrange a partir dos pontos obtidos no experimento de modo que o polinômio resultante ***P(x)*** reduzisse essa diferença entre as funções estimada e verdadeira. Em seguida, aplicamos os métodos numéricos de integração para determinar o valor da integral em *(ii)*.

Neste exemplo, foram codificados em Python os métodos compostos de Simpson e dos Trapézios para calcular o trabalho entre ponto inicial $x_0 = 0$ e ponto final $x_n = 30$ considerando ***50 subintervalos*** aplicados ao polinômio interpolado ***P(x),*** obtendo os valores $W_{simp} = 122{,}20$ ***pés·lb*** e $W_{trap} = 122{,}06$ ***pés·lb***, respectivamente.

São indicados na tabela 2, os erros relativos percentuais ε_r calculados em relação ao valor verdadeiro da integral ($W_{real} = 129{,}52$ ***pés·lb***) que foi obtido com base em **30 medições** realizadas em intervalos de ***x = 1 pé***.

Técnica Utilizada	***Nº Subintervalos***	***W, pés ·lb***	ε_r ***(%)***
	30	**129,52**	**0,00**
Regra dos Trapézios	2	133,19	-2,83
	3	124,98	3,51
	6	119,09	8,05
	50	122,06	5,76
Regra 1/3 de Simpson	2	175,81	-35,74
	3	146,73	-13,29
	6	117,13	9,57
	50	122,20	5,65

Tabela 2 – Erros relativos no cálculo do trabalho utilizando os métodos de Simpson e dos Trapézios.

Análise dos Resultados Obtidos

Observando os resultados obtidos na tabela 2, percebe-se que erros menores são obtidos usando a regra dos Trapézios com 2 e 3 subintervalos, respectivamente. Apesar de interpolar os dados obtidos, encontrar a função *P(x)* que reduz a diferença entre as funções estimada e verdadeira e usar 50 subintervalos ainda obtivemos erros da ordem de 6%.

A razão para esse resultado aparentemente contraditório é que o espaçamento grosseiro dos pontos em intervalos de *x = 5 pés* não é adequado para captar as variações da força e dos ângulos, principalmente nos pontos de pico. Isto fica mais evidente quando analisamos os resultados apresentados na figura 2. A omissão destes pontos limita a precisão das estimativas feitas pelos métodos numéricos de Simpson e dos Trapézios.

Apesar disso, os resultados obtidos para os métodos numéricos utilizando 50 subintervalos oferecem uma aproximação bem confiável que está próximo do valor verdadeiro. Resultados mais precisos poderiam ser conseguidos utilizando um número adequado de medidas que compreendessem as regiões de pico ou utilizando *splines* quadráticas ou cúbicas para estimar com maior precisão a função verdadeira.

O fato da regra dos Trapézios com 2 subintervalos fornecer o resultado mais preciso decorre de um simples acaso nas posições dos pontos para esse problema em particular. Por conta de existem áreas subestimadas e sobrestimadas, usar 2 trapézios para o cálculo da integral leva a um balanceamento entre os erros positivos e negativos, conforme a figura 3.

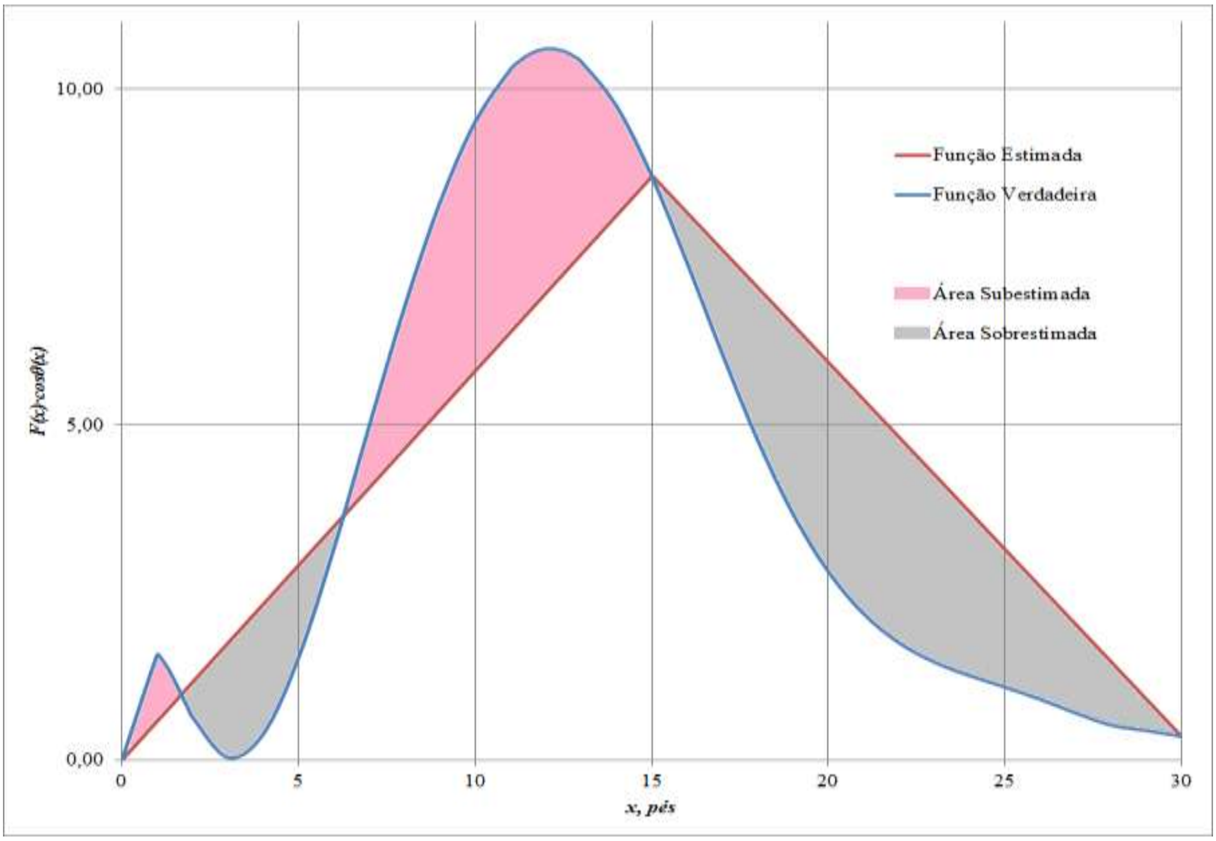

Figura 3 – Explicação gráfica da boa precisão do método dos trapézios com 2 subintervalos.