UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL
DISCIPLINA DE CÁLCULO NUMÉRICO

Estudo de Casos: **Ajuste de Curvas**
Análise de dados experimentais
(Engenharia mecânica/aeroespacial)

Juazeiro do Norte, Ceará

2017

# Estudo de Casos: Ajuste de Curvas

O propósito deste estudo é usar os métodos numéricos para ajuste de curvas para resolver alguns problemas de engenharia. Com aplicação nas mais diversas áreas, o ajuste de curvas pode ter aplicação na engenharia química, ambiental, mecânica, aeroespacial com o escoamento dos fluídos, civil com o aquecimento e transporte de massa em um lago estratificado, determinação do potencial em redes elétricas, cálculo da tensão em estruturas metálicas na construção civil, cálculo da razão de escoamento em um sistema hidráulico, previsão da concentração de reagentes sujeitos a reações químicas simultâneas dentre outros casos.

O tema selecionado foi *a análise de dados experimentais* utilizado, voltado para a engenharia mecânica e aeroespacial para problemas envolvendo fluidos. As variáveis de projeto em engenharia em geral dependem de diversas variáveis independentes. Com frequência, essa dependência funcional é mais bem caracterizada por uma equação de potência em diversas variáveis. Uma regressão linear múltipla dos dados transformados pelo logaritmo fornece um meio de calcular tais relações.

Um estudo de engenharia mecânica indica que o escoamento de um fluido através de um tubo está relacionado ao diâmetro do tubo e à inclinação. Usa-se a regressão linear múltipla para analisar esses dados. Posteriormente, use-se o modelo resultante para prever o escoamento em um tubo com um diâmetro e inclinação selecionados.

A equação de potência a ser calculada é:

$$\boldsymbol{Q = a0 \times Da1 \times Sa2}$$

(Equação 01)

Onde $Q$ é o escoamento, $S$ é a inclinação, $D$ é o diâmetro do tubo, e $a$0, $a$1 e $a$2 são coeficientes.

Tomando o logaritmo dessa expressão, obtemos

$$\boldsymbol{\log Q = \log a0 + a1 \log D + a2 \log S}$$

(Equação 02)

Dessa forma, a equação é adequada à regressão linear múltipla porque log $Q$ é uma função linear de log $S$ e log $D$. O sistema resultante pode ser resolvido usando-se **eliminação de Gauss**.

Deve ser observado que a Equação pode ser usada para outros propósitos além do cálculo do escoamento. Por exemplo, a inclinação está relacionada à perda de carga $hL$ e ao comprimento do tubo $L$ por $S = hL/L$. Se essa relação for substituída na Equação 01 e $hL$ for isolada na fórmula resultante, pode-se deduzir a seguinte equação:

$$\boldsymbol{hL = (L / 1721) \times Q^{1,85} \times (1 / D^{4,85})} \qquad \textit{(Equação 03)}$$

Essa relação é chamada de *equação de Hazen-Williams*.

Muitas observações científicas e de engenharia são feitas em Experimentos nos quais grandezas físicas são medidas e gravadas. Quando precisamos abstrair os experimentos para uma função, ou mesmo aproximar valores entre os pontos observados, utilizamos: Ajuste de Curvas ou Interpolação. Para o exercício programa, escolhemos o ajuste de curvas e, para a resolução dos sistemas lineares resultantes dos casos mencionados acima, utilizamos o método de resolução direto chamado *Eliminação de Gauss.*

A resolução de sistemas lineares é um problema numérico que ocorre com frequência em aplicações científicas nas quais se faz necessária a simulação de situações do mundo real**.** A ideia central do Método da Eliminação de Gauss, é a de transformar em triangular um sistema que não o seja, permitindo, assim, sua solução.

Para tanto, o método contém duas fases:

1. Triangularização do sistema original;
2. Resolução propriamente dita, da última variável para a primeira;

Na primeira fase, é preciso eliminar a variável $x_1$ da segunda, terceira, até a última equação, só ficando na primeira; em seguida elimina-se $x_2$ da terceira, quarta, até que restem apenas nas duas primeiras; elimina-se a variável $x_3$ da quarta em diante, só ficando nas três primeiras e daí por diante. Ao final dessa fase, o sistema estará triangularizado.

Na segunda fase resolve-se de trás para a frente, calculando-se a última, a penúltima, até a primeira variável.

Observações:

1. Numa dada matriz, quando se subtrai de uma linha outra linha multiplicada por uma constante, o determinante da matriz não se altera. Como no processo de eliminação, o que se fez foi sempre subtrair de uma linha outra linha multiplicada por uma constante, conclui-se que ao ser triangularizada, a matriz original manteve constante o valor do determinante.
2. O determinante de matriz triangular é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal. Dessa maneira, o determinante da matriz original, antes de ser triangularizada pelo método de Eliminação de Gauss, será dado pelo produto dos elementos da diagonal principal da matriz triangular resultante.
3. No processo de eliminação da variável $x_j$ da linha i, faz-se a transformação $L_i – a_{ij}/a_{jj} . L_j$. No caso de $a_{jj}$ ser zero, deve-se renumerar as linhas para se conseguir $a_{jj}$ diferente de zero.
4. Na verdade, o ideal seria conseguir uma linha j tal que, além de ter ajj diferente de zero, tivesse esse elemento com o maior módulo possível e os demais elementos da linha j o menor possível para que alterassem o mínimo a linha i, da expressão Li – aij/ajj . Lj . Dessa maneira diminuem os erros propagados de uma linha para outra no processo de eliminação. Levar em conta a escolha adequada da linha que será a linha j, para minimizar a

propagação dos erros aumentando a precisão do método, é a chamada Condensação Pivotal.

**EXEMPLO:**

Para utilização do programa, o usuário deve fornecer os dados coletados no seu experimento. Primeiramente deve informar a quantidade de experimentos e depois adicionar os valores de diâmetro, inclinação e escoamento. Por exemplo:

| Experiência | Diâmetro, pés | Inclinação, pés/pé | Escoamento, pés$^3$/s |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0,001 | 1,4 |
| 2 | 2 | 0,001 | 8,3 |
| 3 | 3 | 0,001 | 24,2 |
| 4 | 1 | 0,01 | 4,7 |
| 5 | 2 | 0,01 | 28,9 |
| 6 | 3 | 0,01 | 84,0 |
| 7 | 1 | 0,05 | 11,1 |
| 8 | 2 | 0,05 | 69,0 |
| 9 | 3 | 0,05 | 200,0 |

Os dados fornecidos serão nomeados da seguinte forma:

- **n** = número de experimentos
- **x1** = diâmetro
- **x2** = inclinação
- **y** = escoamento

Depois de calculadas e devidamente convertidos para logaritimo todas as variáveis , a matriz que será utilizada para o calculo ficará desse modo:

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_{1i} & \Sigma x_{2i} \\ \Sigma x_{1i} & \Sigma x_{1i}^2 & \Sigma x_{1i}x_{2i} \\ \Sigma x_{2i} & \Sigma x_{1i}x_{2i} & \Sigma x_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_{1i} y_i \\ \Sigma x_{2i} y_i \end{Bmatrix}$$

Com os dados do exemplo, a matriz ficará assim:

$$\begin{bmatrix} 9 & 2{,}334 & -18{,}903 \\ 2{,}334 & 0{,}954 & -4{,}903 \\ -18{,}903 & -4{,}903 & 44{,}079 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \log a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11{,}691 \\ 3{,}945 \\ -22{,}207 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o problema por eliminação de Gauss, encontramos que os valores dos coeficientes log a0, a1 e a2.

$$\mathbf{\log a_0 = 1{,}7475}$$

$$\mathbf{a_1 = 2{,}62}$$

$$\mathbf{a_2 = 0{,}54}$$

Na equação 01 apresentada, precisamos do valor de $a_0$, desse modo, por análise, temos que o valor de $a_0$ é 55,9. Finalmente, temos que a equação geral é:

$$\mathbf{Q= 55{,}9D^{2{,}62}S^{0{,}54}}$$

A partir dessa equação, o usuário pode descobrir o escoamento de acordo com o diâmetro e inclinação do tubo que desejar. Por exemplo, para um diâmetro de 2,5 pés e inclinação e 0,025 pés/pé, temos que:

$$\mathbf{Q = 55{,}9\ (2{,}5)^{2{,}62}(0{,}025)^{0{,}54} = 84{,}1\ pés^3/s}$$

Ademais, se posteriormente fornecer ao programa o valor do comprimento do tubo, poderá descobrir a perda de carga da tubulação a partir da Equação 03.