Estrutura de Dados e Algoritmos

PROFº Augusto Galego

SUMÁRIO

1. Módulo 1: Estrutura de Dados

1.1. Big O Notation

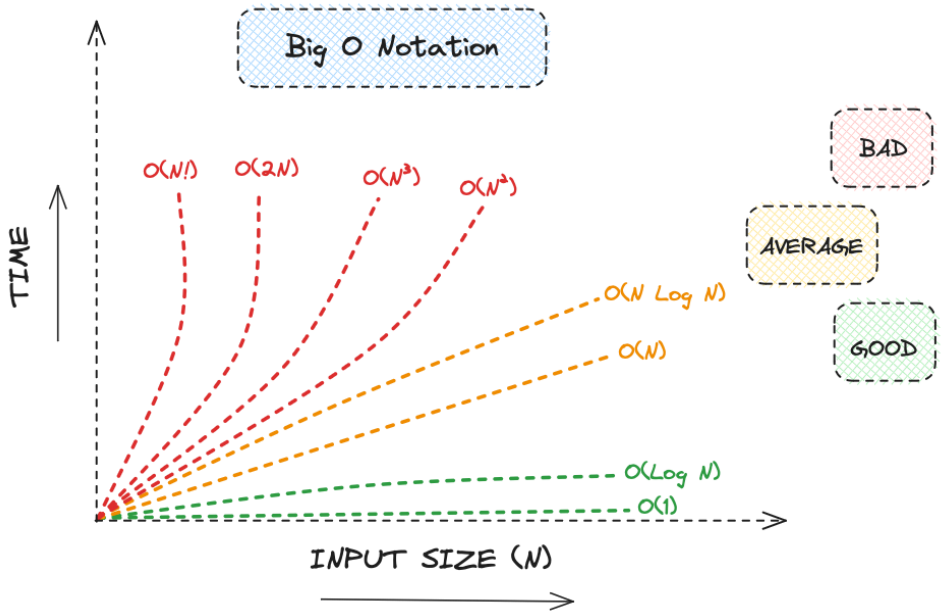
Conceito

A ***Big O Notation*** é uma notação matemática que descreve o **comportamento assintótico** de um algoritmo. Ela representa como o tempo de execução (*tempo*) ou o uso de memória (*espaço*) de um algoritmo cresce conforme o tamanho da entrada aumenta.

Foco: Avaliar **eficiência/escalabilidade** de algoritmos, especialmente para grandes volumes de dados.

Complexidade Temporal

A complexidade temporal mede **quantas operações** um algoritmo executa à medida que a entrada cresce.



Notação	Nome	Exemplo de uso	Descrição breve
O(1)	Constante	`return arr[0]`	Sempre leva o mesmo tempo, não importa o tamanho da entrada.
O(log n)	Logarítmica	`binary search(arr, x)`	Divide a entrada pela metade a cada passo.

O(n)	Linear	`for (i = 0; i < n; i++)`	O tempo cresce proporcionalmente à entrada.
O(n log n)	Quase-linear	`merge sort(arr)`	Divisão e conquista eficientes.
O(n²)	Quadrática	`bubble sort(arr)`	Duplo laço – cresce muito rápido com `n`.
O(2ⁿ)	Exponencial	`solve(subset problem)`	Inviável para entradas grandes.
O(n!)	Fatorial	`permute(n elementos)`	Custo extremo — cresce mais rápido que qualquer outra.

Complexidade Espacial (Space Complexity)
A complexidade espacial analisa **quanta memória adicional** o algoritmo consome.

Exemplo:

```
def soma_array(arr):
    soma = 0          # ocupa espaço constante → O(1)
    for i in arr:     # laço consome O(1) espaço extra
        soma += i
    return soma
```

→ Complexidade espacial: **O(1)**
→ Complexidade temporal: **O(n)** (o laço percorre todos os elementos)

Boas práticas para análise

1. **Ignore constantes**:
   `O(2n)` → **O(n)**
   `O(5 + n)` → **O(n)**

2. **Considere apenas o termo dominante**:
   `O(n² + n + 1)` → **O(n²)**

3. **Loops aninhados multiplicam complexidade**:
   Duplo for → O(n²)
   Triplo for → O(n³)

4. **Loops sequenciais somam**:
   Dois for em sequência → O(n) + O(n) = **O(n)**

1.2. Arrays

Conceito

Um ***array*** é uma **estrutura de dados linear** que armazena múltiplos elementos do mesmo tipo em posições contíguas na memória.

Estrutura de Memória

Os elementos de um array são armazenados **lado a lado** na RAM.

Isso permite **acesso direto** via índice:

endereco_base + (índice × tamanho_do_tipo)

É por isso que **o acesso por índice em arrays é O(1)**.

Imutabilidade vs. Mutabilidade

Arrays Mutáveis

- Suportam **modificações em tempo real**.
- Exemplo: `int arr[5] = {1, 2, 3, 4, 5};` em C.
- Linguagens como C, C++, Java e Python (listas) permitem modificar valores de um array existente.

Arrays Imutáveis

- Após a criação, **não podem ser modificados** (sem recriar outro array).
- Exemplo: Tuplas em Python (`(1, 2, 3)`).
- Em linguagens funcionais (como Haskell), arrays são geralmente imutáveis.

Operações e Complexidade

Operação	Complexidade	Observações
Acesso (por índice)	O(1)	Direto via ponteiro
Atualização (por índice)	O(1)	Similar ao acesso

Inserção (no fim sem redimensionar)	O(1)	Apenas incrementa o índice
Inserção (no fim com realocação)	O(n)	Cria novo array e copia todos os dados
Inserção (no início/meio)	O(n)	Deslocamento de elementos posteriores
Remoção (início ou meio)	O(n)	Necessita deslocar elementos à esquerda
Busca linear	O(n)	Sem ordenação, deve percorrer todos os elementos
Busca binária	O(log n)	Exige array **ordenado**

Quando usar Arrays?

- Quando você sabe o **tamanho fixo da coleção**.
- Precisa de **acesso rápido** por índice.
- Poucas inserções/remoções no meio da estrutura.
- Precisa de **baixa sobrecarga de memória**.

1.3. Linked List

Uma ***Linked List*** é uma estrutura de dados linear composta por **nós (nodes)**, onde cada nó armazena:

- Um **valor/dado**
- Um **ponteiro** (ou referência) para o **próximo nó** da lista

Ao contrário dos arrays, os elementos **não ocupam posições contíguas na memória**.

A navegação ocorre através de ponteiros, formando uma **cadeia de nós**.

Estrutura de um Nó

Em pseudocódigo:

```
Node {
  valor
  próximo → Node
}
```

Em C:

```
typedef struct Node {
    int valor;
    struct Node* proximo;
} Node;
```

Tipos de Linked List

1. Simplesmente Encadeada (Singly Linked List)

Cada nó aponta para o próximo:

```
[1|*] → [2|*] → [3|NULL]
```

2. Duplamente Encadeada (Doubly Linked List)

Cada nó aponta para o anterior e o próximo:

```
NULL ← [1|*|*] ↔ [2|*|*] ↔ [3|*|NULL]
```

3. Circular

O último nó aponta de volta para o primeiro:

```
[1|*] → [2|*] → [3|*] ↻
```

Circular ou não, simples ou dupla, essas variações servem para **otimizar operações específicas**.

Complexidade

Operação	**Tempo (Singly)**	**Tempo (Doubly)**
Acesso (por índice)	O(n)	O(n)
Inserção (início)	O(1)	O(1)
Inserção (fim)*	O(n)* ou O(1)**	O(n)* ou O(1)**
Remoção (início)	O(1)	O(1)
Remoção (fim)	O(n)	O(1)
Busca por valor	O(n)	O(n)

*O(n) se for necessário **percorrer até o fim**

O(1) se a lista **armazenar ponteiro para o fim (tail)

Comparação com Arrays

Característica	Array	Lista Encadeada
Acesso por índice	O(1)	O(n)
Inserção (meio/início)	O(n)	O(1)*
Remoção (meio/início)	O(n)	O(1)*
Uso de memória	Contíguo	Não contíguo
Cache da CPU	Mais eficiente	Menos eficiente
Redimensionamento	Complexo	Fácil (dinâmico)

*Inserção/remoção O(1) **somente se o nó de referência for conhecido**.

Exemplo de implementação em C (Lista Simples)

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

typedef struct Node {
    int valor;
    struct Node* proximo;
} Node;

void inserir_inicio(Node** cabeca, int valor) {
    Node* novo = malloc(sizeof(Node));
    novo->valor = valor;
    novo->proximo = *cabeca;
    *cabeca = novo;
}

void imprimir(Node* atual) {
    while (atual != NULL) {
        printf("%d -> ", atual->valor);
        atual = atual->proximo;
    }
    printf("NULL\n");
}
```

Aplicações Comuns

1. Implementação de **pilhas (stack)** e **filas (queue)**
2. **Sistemas operacionais**: gerenciamento de processos, buffers
3. **Playlists**, **navegação com histórico (back/forward)**
4. Estruturas como **hash tables com encadeamento**

Desvantagens

1. Acesso aleatório é **ineficiente** (precisa percorrer a lista).
2. Maior uso de memória (cada nó armazena ponteiros).
3. **Custo de gerenciamento de ponteiros** (especialmente ao remover nós).

1.4. Queue | Filas

Definição

Uma **fila (queue)** é uma estrutura de dados linear que segue o princípio **FIFO**:

First In, First Out
O primeiro elemento a entrar é o primeiro a sair — como uma fila de banco, tráfego ou impressão.

Características Principais

1. **Ordem** importa: elementos são processados na ordem de chegada.
2. Inserções ocorrem no **fim da fila** (traseira).
3. Remoções ocorrem no **início da fila** (frente).

Operações Fundamentais

Operação	Descrição	Complexidade
`enqueue`	Adiciona elemento ao final	O(1)
`dequeue`	Remove e retorna o elemento da frente	O(1)

`peek`	Retorna o elemento da frente sem remover	O(1)
`isEmpty`	Verifica se a fila está vazia	O(1)

Tipos de Filas

Fila Linear (Linear Queue)

- Simples: adiciona no final e remove do início.
- Problemas: o espaço inicial pode ficar “perdido” após remoções.

Fila Circular (Circular Queue)

- Usa um array fixo, onde o final da fila se conecta ao início.
- Evita desperdício de espaço.

Fila Duplamente Terminada (Deque)

- Permite inserções e remoções nas **duas extremidades**.
- Usada em algoritmos como o de janela deslizante.

Fila de Prioridade

- Cada elemento tem uma **prioridade**.
- O elemento com maior prioridade é processado primeiro (não necessariamente o primeiro a entrar).

Complexidade

Implementação	enqueue	dequeue	peek	espaço
Array	O(1)*	O(n)	O(1)	O(n)
Lista Encadeada	O(1)	O(1)	O(1)	O(n)
Fila Circular	O(1)	O(1)	O(1)	O(n)

* O(1) se não precisar redimensionar (em arrays dinâmicos)

1.5. Hashmap

Definição

Um **hashmap** é uma estrutura de dados que **associa pares chave → valor**, oferecendo acesso extremamente rápido aos dados por meio de uma **função de hash**.

Exemplo:
`map["nome"] = "Rafael"`
`"nome"` é a **chave**, `"Rafael"` é o **valor**

Como funciona?

1. **Chave (key)** é passada para uma **função de hash**.
2. A função retorna um **índice inteiro**.
3. O valor é armazenado nesse índice dentro de um array interno.

```
"Rafael" → hash("Rafael") = 2 → armazenado em índice 2
```

Estrutura Interna

Internamente, um hashmap geralmente é:

- Um **array de buckets** (listas ou ponteiros)
- Cada bucket pode conter:
    - Nenhum valor
    - Um único item
    - Uma **lista encadeada** (em caso de colisão)
    - Uma **árvore balanceada** (em implementações modernas, como no Java 8+)

Operações básicas

Operação	Descrição	Complexidade média	Complexidade pior caso
`t(k,v)`	Insere ou atualiza valor da chave `k`	O(1)	O(n)
`t(k)`	Retorna o valor associado a `k`	O(1)	O(n)
`e(k)`	Remove o par chave/valor	O(1)	O(n)
`ins(k)`	Verifica se a chave existe	O(1)	O(n)

No pior caso (muitas colisões), o desempenho pode cair para O(n)
→ Implementações modernas minimizam isso com árvores ou hashing eficiente.

Colisões

Duas chaves diferentes podem gerar o **mesmo índice**. Isso é chamado de **colisão**.

Métodos para tratar colisões:

1. Encadeamento (Chaining)

Cada posição do array contém uma **lista de pares chave/valor**.

```
array[5] → [ ("nome", "Rafael"), ("idade", 22) ]
```

2. Endereçamento Aberto (Open Addressing)

Se a posição estiver ocupada, procura-se **outra posição livre**.

- **Linear probing**: próxima posição (`i+1`, `i+2`, ...)
- **Quadratic probing**: salta em potências (`i+1²`, `i+2²`, ...)
- **Double hashing**: usa uma segunda função de hash

Funções de Hash

Uma **boa função de hash**:

- Deve ser **determinística**
- Deve espalhar as chaves **uniformemente**
- Deve ser **rápida** de computar
- Evita muitas colisões

Exemplos:

- `hash(k) = k % N` (simples)
- `std::hash` (C++), `hash()` (Python), `Objects.hash()` (Java)

Tamanho e Redimensionamento

- Ao atingir um certo **fator de carga** (`load factor`), o hashmap é **redimensionado** (ex: dobra de tamanho).
- Fator de carga = número de elementos / tamanho da tabela
- Ex: Se a tabela tem tamanho 16 e 12 elementos → load factor = 0.75

Redimensionamento é custoso (O(n)), mas ocorre raramente.

Exemplo em Python (dicionário)

```
agenda = {}
agenda["joao"] = "9999-1111"
agenda["ana"] = "8888-2222"

print(agenda["joao"])    # → 9999-1111
print("ana" in agenda)   # → True
```

→ Em Python, `dict` é uma **hashmap** otimizada

Exemplo visual

```
Tamanho da tabela: 10

Chave       | Hash       | Índice
------------|------------|--------
"joao"      | 834122     | 2
"ana"       | 583918     | 8
"rafael"    | 382918     | 2 (colisão!)
```

Bucket 2 conterá uma **lista encadeada** com "joao" e "rafael".

Comparações

Estrutura	Acesso por chave	Acesso por índice	Ordenação
Hashmap	O(1)	Não	Não
Array	Não	O(1)	Simples
Lista ligada	O(n)	O(n)	Linear
Árvores BST	O(log n)	Não	Sim

Aplicações

- Implementar dicionários de palavras
- Contar frequência de caracteres ou palavras
- Caches (ex: LRU cache)
- Lookup rápido (como alunos por RA, clientes por CPF)
- Implementar conjuntos (`set`)

1.6. Stack | Pilha

Definição

Uma **pilha** é uma estrutura de dados linear que segue o princípio **LIFO**:

Last In, First Out
O último elemento inserido é o primeiro a ser removido.

Imagine uma pilha de pratos: você empilha de cima, e sempre retira o último colocado primeiro.

Características Principais

- Acesso **apenas ao topo da pilha**.
- Não permite acesso aleatório a outros elementos.
- Toda inserção e remoção é feita no topo.

Operações Fundamentais

Operação	Descrição	Complexidade
`push(x)`	Insere o elemento `x` no topo	O(1)
`pop()`	Remove e retorna o topo	O(1)
`peek()`	Retorna o topo sem remover	O(1)
`isEmpty()`	Verifica se a pilha está vazia	O(1)
`size()`	Retorna o número de elementos na pilha	O(1)

Implementações

Usando Array/Vetor

```
stack = []
stack.append(10)   # push
stack.append(20)
print(stack.pop()) # 20 (pop)
print(stack[-1])   # 10 (peek)
```

- Simples e eficiente.
- Mas pode ter redimensionamento (custo amortizado O(1)).

Usando Lista Encadeada

```
typedef struct Node {
    int valor;
    struct Node* proximo;
} Node;

Node* topo = NULL;

void push(int val) {
    Node* novo = malloc(sizeof(Node));
    novo->valor = val;
    novo->proximo = topo;
```

```
    topo = novo;
}

int pop() {
    if (topo == NULL) return -1;
    int val = topo->valor;
    Node* temp = topo;
    topo = topo->proximo;
    free(temp);
    return val;
}
```

- Ideal para quando não se sabe o tamanho final da pilha.
- Boa performance, sem redimensionamento.

Complexidade

Operação	Array	Lista Encadeada
push	O(1)*	O(1)
pop	O(1)	O(1)
peek	O(1)	O(1)
espaço	O(n)	O(n)

*O(1) amortizado. Em arrays, o `push` pode disparar realocação (resize).

Uso de Pilhas na Prática

Pilhas são usadas quando há **retrocesso**, **ordem reversa**, ou **gerenciamento de contexto**. Exemplos:

1. **Recursão** (a pilha de chamadas do sistema)
2. **Backtracking** (sudoku, labirintos)
3. **Navegador (voltar página)**
4. **Desfazer (CTRL+Z)**
5. **Conversão de expressões (infixa → pós-fixa)**
6. **Avaliação de expressões pós-fixas**
7. **Balanceamento de parênteses**

Pilha x Fila

Conceito	Stack (Pilha)	Queue (Fila)
Ordem	LIFO	FIFO
Inserção	Topo	Final
Remoção	Topo	Início
Uso comum	Backtracking, Recursão	Agendamento, Buffers

Pilhas na Memória

A pilha (stack) é também usada na **execução de programas**, especialmente em chamadas de funções recursivas:

```
int fatorial(int n) {
    if (n == 0) return 1;
    return n * fatorial(n - 1);
}
```

Cada chamada ocupa **um quadro (stack frame)** na pilha, contendo:

1. Parâmetros da função
2. Variáveis locais
3. Endereço de retorno

1.7. Binary Trees | Árvores Binárias

Definição

Uma **árvore binária** é uma estrutura de dados hierárquica em que cada **nó** possui no máximo **dois filhos**, denominados:

- **Esquerdo (left)**
- **Direito (right**

A árvore possui um **nó raiz (root)**, e cada filho também pode ser a raiz de uma subárvore.

Representação de um nó

```
typedef struct No {
    int valor;
    struct No* esquerdo;
    struct No* direito;
} No;
```

Tipos de árvores binárias

- **Árvore binária cheia**: cada nó tem 0 ou 2 filhos
- **Árvore binária completa**: todos os níveis estão completos, exceto talvez o último (preenchido da esquerda para a direita)
- **Árvore balanceada**: a diferença de altura entre subárvores esquerda e direita é no máximo 1
- **Árvore de busca binária (BST)**: os nós obedecem à propriedade de ordenação:
    - Para cada nó `n`: todos os valores na subárvore esquerda são **menores** que `n.valor`
    - Todos os valores na subárvore direita são **maiores**

Complexidade (tempo e espaço)

Operação	**Árvore balanceada (AVL/Red-Black)**	**Árvore desbalanceada (BST comum)**
Inserção	O(log n)	O(n)
Busca	O(log n)	O(n)
Remoção	O(log n)	O(n)
Travessia (inorder)	O(n)	O(n)
Espaço	O(n)	O(n)

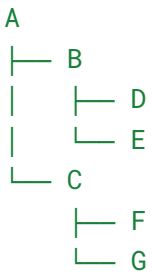
O desempenho ideal depende do **balanceamento** da árvore.

Travessias (percursos)

As travessias visitam todos os nós da árvore em uma determinada ordem.

1. Pré-Ordem (Pre-order)

Visita o nó atual → Esquerda → Direita




```
Pré-ordem: A B D E C F G
```

2. Em-Ordem (In-order)

Esquerda → Nó atual → Direita
Útil em **BST**, pois resulta em **ordem crescente**.

```
In-ordem: D B E A F C G
```

3. Pós-Ordem (Post-order)

Esquerda → Direita → Nó atual

```
Pós-ordem: D E B F G C A
```

4. Nível (Level-order)

Travessia em **largura** (Breadth-First Search – BFS)

```
Nível: A B C D E F G
```

Inserção em uma BST

```
No* inserir(No* raiz, int valor) {
    if (raiz == NULL) {
        No* novo = malloc(sizeof(No));
        novo->valor = valor;
        novo->esquerdo = novo->direito = NULL;
        return novo;
    }
    if (valor < raiz->valor)
        raiz->esquerdo = inserir(raiz->esquerdo, valor);
    else if (valor > raiz->valor)
        raiz->direito = inserir(raiz->direito, valor);
    return raiz;
}
```

Busca em uma BST

```
No* buscar(No* raiz, int valor) {
    if (raiz == NULL || raiz->valor == valor)
        return raiz;
    if (valor < raiz->valor)
        return buscar(raiz->esquerdo, valor);
    return buscar(raiz->direito, valor);
}
```

Aplicações práticas

- **Árvores de busca** (BST) para dados ordenados
- **Expressões matemáticas** (árvores de expressão)
- **Árvores de decisão**
- **Compiladores** (sintaxe e semântica)
- **Sistemas de arquivos hierárquicos**
- **Heaps** (para algoritmos de ordenação e filas de prioridade)

1.8. Grafos

Definição

Um **grafo** é uma estrutura que representa **relações** entre pares de elementos.
Ele é composto por:

- **Vértices (ou nós)**: entidades ou pontos do grafo
- **Arestas (ou arcos)**: conexões entre os vértices

Tipos de grafos

Tipo	**Descrição**
Não direcionado	Arestas não têm direção: (u, v) = (v, u)
Direcionado (dígrafo)	Arestas têm direção: (u → v) ≠ (v → u)
Ponderado	Arestas têm pesos (custos, distâncias, etc.)
Não ponderado	Arestas sem peso
Cíclico	Possui ciclos (caminhos que retornam ao mesmo nó)
Acíclico (DAG)	Sem ciclos
Conexo	É possível ir de qualquer nó a qualquer outro (em grafos não direcionados)
Fortemente conexo	Em grafos direcionados, há caminhos de ida e volta entre quaisquer dois vértices

Representação de grafos

1. Lista de Adjacência (mais eficiente para grafos esparsos)

```
// Em C (exemplo simples):
typedef struct No {
    int destino;
    struct No* proximo;
} No;

No* grafo[MAX_VERTICES];
```

2. Matriz de Adjacência (eficiente para grafos densos)

```
// Para grafo com 5 vértices
int matriz[5][5] = {
    {0, 1, 1, 0, 0},
    {1, 0, 1, 1, 0},
    ...
};
```

Representação	**Espaço**	**Vantagem**
Lista de adjacência	O(V + E)	Eficiente para grafos grandes e esparsos
Matriz de adjacência	$O(V^2)$	Boa para grafos densos ou com acesso direto a vizinhos

Complexidade de operações

Operação	**Lista de Adjacência**	**Matriz de Adjacência**
Verificar vizinho direto	O(grau do nó)	O(1)
Inserir aresta	O(1)	O(1)
Remover aresta	O(grau do nó)	O(1)
AIterar sobre vizinhos	O(grau do nó)	O(V)

Algoritmos clássicos

1. Busca em Largura (BFS)

- Explora por níveis (ideal para encontrar caminhos mínimos não ponderados)

```
from collections import deque

def bfs(grafo, inicio):
    visitado = set()
    fila = deque([inicio])

    while fila:
        atual = fila.popleft()
        if atual not in visitado:
            visitado.add(atual)
            fila.extend(grafo[atual])
```

- **Complexidade**: O(V + E)

2. Busca em Profundidade (DFS)

- Explora ao máximo antes de voltar

```
def dfs(grafo, v, visitado=None):
    if visitado is None:
        visitado = set()
    visitado.add(v)
    for viz in grafo[v]:
        if viz not in visitado:
            dfs(grafo, viz, visitado)
```

- **Complexidade**: O(V + E)

Algoritmos de caminhos mínimos

Algoritmo	Ponderado?	Negativo?	Complexidade
Dijkstra	Sim	Não	O((V + E) log V)
Bellman-Ford	Sim	Sim	O(VE)
Floyd-Warshall	Sim	Sim	$O(V^3)$
A*	Sim	Não	Heurística

Aplicações práticas

- **Redes de computadores** (roteamento, conexões)
- **Mapas e navegação GPS**
- **Engenharia elétrica** (circuitos)
- **Planejamento de tarefas** (DAGs)
- **Relacionamentos sociais** (redes sociais)
- **Compiladores** (ordem de dependências)
- **IA e jogos** (busca de caminhos)

Desafios e armadilhas comuns

1. Detecção de ciclos (em DFS)
2. Componentes fortemente conectados
3. Grafos direcionados x não direcionados
4. Caminhos negativos (exigem algoritmos apropriados)

1.9. Trie

O que é uma Trie?

Trie (pronuncia-se “trai”) é uma estrutura de dados em forma de **árvore** especializada para armazenar **conjuntos de strings**, com foco em **busca por prefixo**.
Ela é muito utilizada em:

- **Sistemas de autocomplete**
- **Corretores ortográficos**
- **Busca em dicionários**
- **IP routing (em redes)**

- **Compressão de texto**

Características principais

- Cada **nó** representa **um caractere** de uma palavra.
- Um **caminho da raiz até um nó folha** representa uma **palavra completa**.
- Cada **nó pode ter até N filhos**, onde **N = número de caracteres possíveis** (geralmente 26 para letras minúsculas a-z).
- Não há repetição de palavras.
- Armazena **compartilhamento de prefixos** eficientemente.

Complexidade

Operação	**Tempo**	**Observações**
Inserção	O(m)	m = comprimento da string
Busca	O(m)	Muito rápida
Remoção	O(m)	Requer verificar se é folha
Espaço	O(ALPHABET_SIZE × m × n)	Pode ser alto, especialmente sem compressão

Variações de Trie

- **Compressed Trie (Radix Tree)**: otimiza espaço ao unir caminhos únicos
- **Suffix Trie**: armazena todos os sufixos de uma string
- **Ternary Search Trie**: mistura busca binária com árvore de prefixos

Comparação com HashMap

Aspecto	**Trie**	**HashMap**
Busca por prefixo	Sim	Não (ineficiente)
Inserção ordenada	Sim	Não
Espaço	Maior	Menor
Velocidade de busca	Muito alta	Alta (por palavra exata)

Conclusão

Trie é extremamente útil quando precisamos de:

- Busca rápida por palavras completas e prefixos
- Autocompletar sugestões com base em input parcial
- Armazenar muitos textos com prefixos semelhantes

Apesar de consumir mais memória que outras estruturas, seu desempenho é excelente em aplicações linguísticas e busca inteligente.

1.10. B-Tree

O que é uma B-Tree?

A **B-Tree (Árvore-B)** é uma **árvore de busca balanceada de múltiplos caminhos**, generalizando a estrutura de árvore binária de busca (BST). Diferente das árvores binárias, cada nó pode ter **vários filhos e várias chaves**, o que a torna ideal para **acesso em disco ou SSD**, onde minimizar a quantidade de leituras é crucial.

Principais aplicações:

- Sistemas de banco de dados (ex: MySQL, PostgreSQL)
- Sistemas de arquivos (ex: NTFS, HFS+)
- Indexação de dados em memória secundária

Características

- Cada nó pode conter **m-1 chaves** e até **m filhos**, onde **m** é a ordem da árvore.
- Os dados são mantidos **ordenados**.
- A árvore é sempre **balanceada**: todas as folhas estão no mesmo nível.
- Cresce e diminui de forma **eficiente e controlada**.
- Permite **busca, inserção e remoção** em tempo logarítmico.

Regras da B-Tree de ordem `m`

1. Cada nó interno pode ter, no máximo, `m - 1` chaves.
2. Cada nó (exceto a raiz) deve ter, no mínimo, `ceil(m/2) - 1` chaves.
3. Todos os nós folha devem estar no mesmo nível.
4. A raiz pode ter entre 1 e `m - 1` chaves.
5. As chaves dentro de cada nó estão **ordenadas**.
6. A subárvore entre duas chaves `k[i]` e `k[i+1]` contém **apenas valores entre** essas chaves.

Complexidade

Operação	**Tempo**	**Observações**
Busca	O(log n)	Alta performance mesmo com grandes dados
Inserção	O(log n)	Ocorre split quando necessário
Remoção	O(log n)	Pode envolver fusão de nós
Espaço	O(n)	Armazena eficientemente dados grandes

Comparação: B-Tree vs BST vs AVL vs Trie

Estrutura	Melhor uso	Balanceamento	Tempo de busca
BST	Dados pequenos e dinâmicos	Não garantido	O(n) no pior
AVL	Dados dinâmicos e balanceamento rigoroso	Rígido	O(log n)
Trie	Strings e prefixos	Parcial	O(m) por string
B-Tree	Dados grandes em disco ou banco de dados	Simples	O(log n)

Conclusão

A **B-Tree** é uma estrutura altamente eficiente para dados em **largas quantidades**, onde o acesso a disco é lento e o custo de leitura precisa ser minimizado. Seu uso é padrão em bancos de dados relacionais, sistemas de arquivos e indexadores.

2. Módulo 2: *Arrays*

2.1. Two Pointer

O que é?

A técnica **Two Pointers** consiste em usar **dois índices (ou ponteiros)** para percorrer estruturas lineares como arrays, listas ou strings. O objetivo é resolver problemas de forma mais eficiente, frequentemente reduzindo a complexidade de tempo de algoritmos de `O(n²)` para `O(n)`.

Quando usar?

Essa técnica é útil em problemas que envolvem:

- Comparar elementos de extremidades opostas
- Encontrar pares com soma igual a um valor (`Two Sum`)
- Identificar subarrays ou substrings com restrições
- Detectar palíndromos
- Processar elementos repetidos (remoção de duplicatas)
- Encontrar janelas máximas ou mínimas em intervalos (`sliding window`)

Tipos de Two Pointers

Tipo	Posição dos ponteiros	Aplicações comuns
Início e fim	`left = 0`, `right = n - 1`	Busca de pares, palíndromos, compressão
Dois crescentes (`slow`, `fast`)	Ambos do início para frente	Remoção de duplicatas, detectores de ciclos
Sliding window	Ponteiros ajustam uma janela	Substrings, soma de subarrays, janelas fixas

Vantagens

- Redução significativa na complexidade de tempo
- Simples de implementar
- Consome espaço constante (`O(1)`), ideal para otimizações
- Evita estruturas adicionais como listas ou mapas em muitos casos

Exemplo 1: Soma de dois números (array ordenado)

Problema: Dado um array ordenado e um valor-alvo `target`, determinar se existe um par de elementos cuja soma é igual a `target`.

Estratégia:

- Um ponteiro começa no início (`left`), outro no fim (`right`)
- Compare `arr[left] + arr[right]`
    - Se for igual ao `target`, par encontrado
    - Se for menor, incremente `left`
    - Se for maior, decremente `right`

Implementação em C:

```
bool existeParComSoma(int arr[], int n, int target) {
    int left = 0, right = n - 1;

    while (left < right) {
        int soma = arr[left] + arr[right];
        if (soma == target) return true;
        else if (soma < target) left++;
        else right--;
```

```
    }

    return false;
}
```

Implementação em JavaScript:

```
function temParComSoma(arr, target) {
    let left = 0, right = arr.length - 1;

    while (left < right) {
        const soma = arr[left] + arr[right];
        if (soma === target) return true;
        else if (soma < target) left++;
        else right--;
    }

    return false;
}
```

Exemplo 2: Verificar se uma string é palíndromo

Estratégia:

- Ponteiros em `left = 0` e `right = len - 1`
- Compare caracteres `s[left]` e `s[right]` enquanto `left < right`
- Se todos forem iguais, é palíndromo

Exemplo 3: Remover duplicatas de array ordenado

Estratégia:

- Use dois ponteiros (`slow` e `fast`)
- `fast` percorre todos os elementos
- `slow` aponta para a próxima posição de gravação de valor único

Cuidados e armadilhas

- Não esquecer de mover o ponteiro adequado dentro do laço
- Evite ultrapassar os limites do array
- Confirme se o array está ordenado (quando necessário)
- Trate casos especiais: array vazio, string com espaços múltiplos, etc.

Complexidades típicas

Operação	Tempo	Espaço
Comparação de pares	O(n)	O(1)
Verificação de palíndromo	O(n)	O(1)
Sliding window	O(n)	O(1)
Busca com soma alvo	O(n)	O(1)

Conclusão

A técnica **Two Pointers** é uma estratégia poderosa para resolver diversos problemas que envolvem análise de elementos em estruturas sequenciais. Seu uso adequado permite otimizar algoritmos, melhorar desempenho e reduzir complexidade de forma elegante e eficiente.

2.2. Binary Search

Objetivo

Encontrar a posição de um valor `target` em um array ordenado.

Estratégia

- Utiliza os ponteiros `left` e `right` para limitar o intervalo de busca.
- Calcula o índice do meio: `mid = left + (right - left) / 2`.
- Compara `nums[mid]` com o `target` e reduz o intervalo pela metade.

Condições

- A busca **só funciona em arrays ordenados**.

Complexidade

- **Tempo:** `O(log n)`
- **Espaço:** `O(1)`

Exemplo em C#:

```
int BinarySearch(int[] nums, int target) {
    int left = 0, right = nums.Length - 1;

    while (left <= right) {
        int mid = left + (right - left) / 2;

        if (nums[mid] == target)
            return mid;
        else if (nums[mid] < target)
            left = mid + 1;
        else
            right = mid - 1;
    }

    return -1;
}
```

2.3. Sliding Window

Objetivo:

Processar substrings, subarrays ou sequências de forma eficiente, com base em uma **janela móvel de elementos**.

Tipos comuns:

- **Janela fixa:** usada para somas médias, contagem etc.
- **Janela variável:** expande ou reduz dinamicamente conforme uma condição (ex: frequência de caracteres).

Complexidade:

- **Tempo:** `O(n)`
- **Espaço:** `O(k)` onde `k` é o número de elementos distintos na janela (ex: 26 letras).

Exemplo em C# (maior substring sem caracteres repetidos):

```
int LengthOfLongestSubstring(string s) {
    var set = new HashSet<char>();
    int left = 0, maxLen = 0;

    for (int right = 0; right < s.Length; right++)
{
        while (set.Contains(s[right])) {
            set.Remove(s[left]);
            left++;
        }

        set.Add(s[right]);
        maxLen = Math.Max(maxLen, right - left +
1);
    }

    return maxLen;
}
```

2.4. Exponential Search

Objetivo:
Buscar em **arrays muito grandes**, onde o tamanho pode ser desconhecido ou o custo da leitura é alto (como em streams, arquivos, APIs etc.).

Etapas:

1. Expandir a janela de busca exponencialmente (`2^i`) até encontrar um valor maior que o `target` ou ultrapassar o array.
2. Aplicar **Binary Search** no intervalo identificado.

Complexidade:

- **Tempo:** `O(log i)` onde `i` é o índice onde `target` se encontra.
- **Espaço:** `O(1)`

Exemplo básico (c#):

```
int ExponentialSearch(int[] arr, int target) {
    if (arr[0] == target)
        return 0;

    int i = 1;
    while (i < arr.Length && arr[i] <= target)
        i *= 2;

    return BinarySearch(arr, target, i / 2, Math.Min(i,
arr.Length - 1));
}

int BinarySearch(int[] arr, int target, int left, int right) {
    while (left <= right) {
        int mid = left + (right - left) / 2;

        if (arr[mid] == target) return mid;
        else if (arr[mid] < target) left = mid + 1;
        else right = mid - 1;
    }
    return -1;
}
```

2.5. Problema com HashMap

HashMap (dicionário) é útil para:

- Frequência de elementos.
- Verificação de duplicatas.
- Mapear relações chave-valor (ex: índice, posição).
- Resolver problemas em tempo linear com espaço adicional.

Exemplo 1: Two Sum (Two Pointers + HashMap)

Objetivo: encontrar dois índices cujo valor soma seja igual ao `target`.

```
int[] TwoSum(int[] nums, int target) {
    var map = new Dictionary<int, int>();

    for (int i = 0; i < nums.Length; i++) {
        int complement = target - nums[i];
        if (map.ContainsKey(complement))
            return new int[] { map[complement], i };
```

```
        map[nums[i]] = i;
    }

    return new int[0];
}
```

Exemplo 2: Frequência Máxima de Caracteres

```
int MaxCharFrequency(string s) {
    var map = new Dictionary<char, int>();
    foreach (char c in s) {
        if (!map.ContainsKey(c))
            map[c] = 0;
        map[c]++;
    }

    return map.Values.Max();
}
```

Resumo Tabela

Técnica	**Tempo**	**Quando usar**
Binary Search	O(log n)	Arrays ordenados
Sliding Window	O(n)	Substrings/subarrays com restrições
Exponential Search	O(log i)	Arrays muito grandes ou streams
HashMap	O(n)	Frequência, buscas rápidas, mapas reversos

3. Módulo 3: *Linked List*

3.1. Implementação Linked Lists

Estrutura de um nó (em pseudocódigo/C#)

```
class Node {
    public int data;
    public Node next;

    public Node(int data) {
        this.data = data;
        this.next = null;
    }
}
```

Estrutura da lista

```
class LinkedList {
    public Node head;

    public void AddFirst(int value) {
        Node newNode = new Node(value);
        newNode.next = head;
        head = newNode;
    }

    public void AddLast(int value) {
        Node newNode = new Node(value);
        if (head == null) {
            head = newNode;
            return;
        }
        Node current = head;
        while (current.next != null) {
            current = current.next;
        }
        current.next = newNode;
    }

    public void Print() {
        Node current = head;
        while (current != null) {
            Console.Write(current.data + " -> ");
            current = current.next;
```

```
        }
        Console.WriteLine("null");
    }
}
```

3.2. Inverter uma linked list

Objetivo

Transformar a lista de forma que o último elemento se torne o primeiro

Exemplo

Entrada: `1 -> 2 -> 3 -> 4 -> null`
Saída: `4 -> 3 -> 2 -> 1 -> null`

Abordagem Iterativa (eficiente em tempo e espaço)

```
public Node Reverse(Node head) {
    Node prev = null;
    Node current = head;
    while (current != null) {
        Node nextTemp = current.next;
        current.next = prev;
        prev = current;
        current = nextTemp;
    }
    return prev; // novo head
}
```

Complexidade

- Tempo: O(n)
- Espaço: O(1)

3.3. Encontrar o meio de uma linked list

Objetivo

Encontrar o nó central de uma lista encadeada (ou o segundo, em listas com número par de elementos)

Abordagem com dois ponteiros (slow e fast)

```
public Node FindMiddle(Node head) {
    Node slow = head;
    Node fast = head;
```

```
    while (fast != null && fast.next != null) {
        slow = slow.next;
        fast = fast.next.next;
    }

    return slow; // middle node
}
```

Como funciona

- O ponteiro slow anda 1 passo de cada vez
- O ponteiro fast anda 2 passos de cada vez
- Quando fast atinge o fim, slow está no meio

Complexidade

- Tempo: O(n)
- Espaço: O(1)

3.4. Encontrar ciclos na linked list

Problema

Verificar se existe um ciclo (loop) na lista, ou seja, um nó aponta para algum nó anterior

Abordagem de Floyd (Tartaruga e Lebre)

```
public bool HasCycle(Node head) {
    Node slow = head;
    Node fast = head;

    while (fast != null && fast.next != null) {
        slow = slow.next;
        fast = fast.next.next;

        if (slow == fast) {
            return true; // ciclo detectado
        }
    }

    return false;
}
```

Como funciona

- Se houver um ciclo, os ponteiros slow e fast eventualmente se encontrarão

- Caso contrário, o fast chegará ao fim da lista (null)

Complexidade

- Tempo: O(n)
- Espaço: O(1)

Dicas Gerais para Entrevistas e Exercícios

- Sempre valide se a lista está vazia (head == null) antes de operações
- Em perguntas sobre reversão ou ciclos, priorize abordagens com espaço constante
- Para problemas complexos, desenhar os nós e ponteiros pode ajudar na visualização

Desafios de Prática

1. Reverter parte de uma lista entre duas posições dadas
2. Verificar se uma lista é palíndroma
3. Remover o n-ésimo elemento do final
4. Mesclar duas listas ordenadas
5. Detectar o nó onde o ciclo começa (usar a extensão de Floyd)

4. Módulo 4: *Sorting*

4.1. BubbleSort

[Repositório do Github]

4.2. QuickSort

[Repositório do Github]

4.3. MergeSort

[Repositório do Github]

5. Módulo 5: Binários

5.1. Left e right shift

Left Shift (<<)

Conceito:

- Desloca os bits para a **esquerda**.
- Multiplica o número por `2^n`, onde `n` é o número de deslocamentos.

Exemplo:

```
int valor = 5;          // 0000 0101
int resultado = valor << 1; // 0000 1010 = 10
```

Right Shift (>>)

Conceito:

- Desloca os bits para a **direita**.
- Divide o número por `2^n`.

Exemplo:

```
int valor = 10;         // 0000 1010
int resultado = valor >> 1; // 0000 0101 = 5
```

5.2. AND, OR, NOT, XOR

AND (&)

Compara bit a bit. Retorna 1 somente se os dois bits forem 1.

```
int a = 5; // 0101
int b = 3; // 0011
int c = a & b; // 0001 = 1
```

OR (|)

Compara bit a bit. Retorna 1 se pelo menos um bit for 1.

```
int c = a | b; // 0111 = 7
```

XOR (^)

Retorna 1 se os bits forem diferentes.

```
int c = a ^ b; // 0110 = 6
```

NOT (~)

- Inverte todos os bits (inclusive o bit de sinal).
- Em C#, `~5` resulta em `-6` porque inverte os bits e retorna o complemento de dois.

```
int a = 5;  // 0000 0101
int c = ~a; // 1111 1010 = -6
```

6. Módulo 6: *Binary Trees*

Definição

Uma árvore binária é uma estrutura de dados hierárquica composta por nós, na qual cada nó possui, no máximo, dois filhos:

- Filho à esquerda (left child)
- Filho à direita (right child)

Cada nó pode conter:

- Chave ou valor (data)
- Ponteiro para o filho esquerdo
- Ponteiro para o filho direito

A árvore binária é um caso particular da árvore geral, restrita a dois filhos por nó.

Propriedades Fundamentais

1. **Altura da árvore (height)**: número de arestas no caminho mais longo da raiz até uma folha.
2. **Profundidade de um nó (depth)**: número de arestas do nó até a raiz.
3. **Nível (level)**: conjunto de nós que se encontram à mesma profundidade.
4. **Número máximo de nós por nível**: em um nível `i`, pode haver até `2^i` nós.
5. **Número máximo de nós em uma árvore binária de altura** `h`: `2^(h+1) - 1`.
6. **Densidade**: uma árvore é considerada "cheia" quando todos os nós, exceto as folhas, possuem exatamente dois filhos.

Classificações de Árvores Binárias

- **Árvore Binária Completa (Complete Binary Tree)**: todos os níveis, exceto possivelmente o último, estão completamente preenchidos, e os nós do último nível estão o mais à esquerda possível.
- **Árvore Binária Cheia (Full Binary Tree)**: cada nó interno possui exatamente dois filhos.
- **Árvore Binária Perfeita (Perfect Binary Tree)**: árvore cheia em que todas as folhas estão no mesmo nível.
- **Árvore Binária Degenerada (ou patológica)**: cada nó possui apenas um filho, comportando-se como uma lista encadeada.

Percursos (Traversals)

O percurso de uma árvore é o processo de visitar todos os nós em uma ordem específica. Os principais são:

Em Profundidade (Depth-First Traversal)

1. **Pré-ordem (Preorder)**: raiz → esquerda → direita

○ Utilizado para copiar ou serializar árvores.

2. **Em-ordem (Inorder)**: esquerda → raiz → direita

○ Em árvores binárias de busca (BST), produz elementos em ordem crescente.

3. **Pós-ordem (Postorder)**: esquerda → direita → raiz

○ Útil para liberar memória ou avaliar expressões.

Em Largura (Breadth-First Traversal)

- Nível a nível (Level Order): percorre os nós da raiz até as folhas, nível por nível, normalmente implementado com fila (queue).

Árvores Binárias de Busca (Binary Search Trees – BST)

Uma BST é uma árvore binária em que:

- O filho esquerdo contém apenas valores menores que a chave do nó.
- O filho direito contém apenas valores maiores que a chave do nó.

Propriedades:

- Busca, inserção e remoção possuem, em média, complexidade O(log n), desde que a árvore esteja balanceada.
- No pior caso (árvore degenerada), a complexidade se degrada para O(n).

Operações Fundamentais

1. Inserção: segue a propriedade da BST, adicionando o nó como folha.
2. Busca: percorre comparando chaves até encontrar ou chegar a um nó nulo.
3. Remoção: três casos devem ser tratados:

    - Nó é folha (simples remoção).
    - Nó possui um filho (substitui-se pelo filho).
    - Nó possui dois filhos (substitui-se pelo sucessor ou predecessor em ordem).

Complexidade

- Busca, Inserção, Remoção:

    - Melhor caso (árvore balanceada): O(log n)
    - Pior caso (árvore degenerada): O(n)

- Percursos: todos possuem complexidade O(n), pois cada nó é visitado exatamente uma vez.

Árvores Binárias Balanceadas

Para evitar degradação de desempenho, foram desenvolvidas variações balanceadas:

- AVL Tree: mantém fator de balanceamento entre -1 e 1 para cada nó.
- Red-Black Tree: garante balanceamento aproximado por meio de regras de coloração.
- Splay Tree: ajusta dinamicamente a árvore a partir do acesso mais frequente.
- Treap e B-Trees (generalizadas): aplicam princípios probabilísticos ou voltados a armazenamento em disco.

Aplicações Práticas

- Representação de expressões matemáticas (árvores de expressão).
- Estruturas de indexação (ex.: compressores, compiladores).
- Implementação de dicionários, mapas e conjuntos (via BST balanceadas).
- Suporte a algoritmos de busca em grafos e IA (ex.: árvores de decisão).
- Sistemas de arquivos e bancos de dados (árvores B/B+ derivadas).

Considerações Finais

O estudo de árvores binárias é essencial na formação em Estruturas de Dados e Algoritmos, pois elas oferecem uma base sólida para compreender não apenas os fundamentos da hierarquia e organização de dados, mas também para o desenvolvimento de estruturas mais sofisticadas, como heaps, árvores balanceadas e *tries*.

O domínio das operações, propriedades e aplicações permite analisar a eficiência algorítmica, otimizar recursos e construir soluções escaláveis em sistemas complexos.

Implementação (C#)

```
using System;
using System.Collections.Generic;

namespace BinaryTreeDemo
{
  // Classe que representa um nó da árvore
  public class Node
  {
    public int Value;
    public Node Left;
    public Node Right;

    public Node(int value)
    {
      Value = value;
      Left = null;
      Right = null;
    }
  }

  // Classe da Árvore Binária de Busca (BST)
  public class BinarySearchTree
  {
    public Node Root;

    public BinarySearchTree()
    {
      Root = null;
    }

    // Inserção recursiva
    public void Insert(int value)
    {
      Root = InsertRec(Root, value);
    }

    private Node InsertRec(Node root, int value)
    {
```

```
    if (root == null)
        return new Node(value);

    if (value < root.Value)
        root.Left = InsertRec(root.Left, value);
    else if (value > root.Value)
        root.Right = InsertRec(root.Right, value);

    return root;
}

// Busca recursiva
public bool Search(int value)
{
    return SearchRec(Root, value);
}

private bool SearchRec(Node root, int value)
{
    if (root == null) return false;
    if (root.Value == value) return true;

    if (value < root.Value)
        return SearchRec(root.Left, value);
    else
        return SearchRec(root.Right, value);
}

// Remoção
public void Remove(int value)
{
    Root = RemoveRec(Root, value);
}

private Node RemoveRec(Node root, int value)
{
    if (root == null) return null;

    if (value < root.Value)
        root.Left = RemoveRec(root.Left, value);
    else if (value > root.Value)
        root.Right = RemoveRec(root.Right, value);
    else
    {
        // Caso 1: nó folha
        if (root.Left == null && root.Right == null)
            return null;

        // Caso 2: nó com apenas um filho
        if (root.Left == null)
            return root.Right;
        else if (root.Right == null)
            return root.Left;

        // Caso 3: nó com dois filhos
        root.Value = MinValue(root.Right);
```

```
            root.Right = RemoveRec(root.Right, root.Value);
        }
        return root;
    }

    private int MinValue(Node root)
    {
        int min = root.Value;
        while (root.Left != null)
        {
            min = root.Left.Value;
            root = root.Left;
        }
        return min;
    }

    // Percursos em ordem
    public void InOrder()
    {
        InOrderRec(Root);
        Console.WriteLine();
    }

    private void InOrderRec(Node root)
    {
        if (root != null)
        {
            InOrderRec(root.Left);
            Console.Write(root.Value + " ");
            InOrderRec(root.Right);
        }
    }

    public void PreOrder()
    {
        PreOrderRec(Root);
        Console.WriteLine();
    }

    private void PreOrderRec(Node root)
    {
        if (root != null)
        {
            Console.Write(root.Value + " ");
            PreOrderRec(root.Left);
            PreOrderRec(root.Right);
        }
    }

    public void PostOrder()
    {
        PostOrderRec(Root);
        Console.WriteLine();
    }

    private void PostOrderRec(Node root)
```

```
    {
        if (root != null)
        {
            PostOrderRec(root.Left);
            PostOrderRec(root.Right);
            Console.Write(root.Value + " ");
        }
    }

    // Percurso em largura (Level Order)
    public void LevelOrder()
    {
        if (Root == null) return;

        Queue<Node> queue = new Queue<Node>();
        queue.Enqueue(Root);

        while (queue.Count > 0)
        {
            Node current = queue.Dequeue();
            Console.Write(current.Value + " ");

            if (current.Left != null)
                queue.Enqueue(current.Left);

            if (current.Right != null)
                queue.Enqueue(current.Right);
        }
        Console.WriteLine();
    }
}

class Program
{
    static void Main()
    {
        BinarySearchTree bst = new BinarySearchTree();

        // Inserindo nós
        bst.Insert(50);
        bst.Insert(30);
        bst.Insert(70);
        bst.Insert(20);
        bst.Insert(40);
        bst.Insert(60);
        bst.Insert(80);

        Console.WriteLine("In-Order (crescente):");
        bst.InOrder();

        Console.WriteLine("Pré-Ordem:");
        bst.PreOrder();

        Console.WriteLine("Pós-Ordem:");
        bst.PostOrder();
```

```
            Console.WriteLine("Level Order:");
            bst.LevelOrder();

            Console.WriteLine("Busca pelo valor 40: " + bst.Search(40));
            Console.WriteLine("Busca pelo valor 100: " + bst.Search(100));

            Console.WriteLine("Removendo 20 (folha):");
            bst.Remove(20);
            bst.InOrder();

            Console.WriteLine("Removendo 30 (um filho):");
            bst.Remove(30);
            bst.InOrder();

            Console.WriteLine("Removendo 50 (dois filhos):");
            bst.Remove(50);
            bst.InOrder();
        }
    }
}
```

7. Módulo 7: Grafos

7.1. Clonar um Grafo

Clonar um grafo consiste em criar uma cópia exata de um grafo dado, incluindo todos os vértices e arestas, de modo que modificações na cópia não afetem o grafo original. Isso é particularmente útil em algoritmos que requerem manipulação temporária de grafos sem alterar o estado original.

Algoritmo de Clonagem

Uma abordagem comum é utilizar uma busca em profundidade (DFS) ou em largura (BFS) para percorrer o grafo original e construir a cópia. Durante o processo, é essencial manter um mapeamento entre os vértices originais e seus correspondentes na cópia para garantir a integridade das arestas.

Exemplo em Python

```
class Node:
    def __init__(self, val=0, neighbors=None):
        self.val = val
        self.neighbors = neighbors if neighbors is not None else []

def cloneGraph(node: 'Node') -> 'Node':
    if not node:
        return None
    mapping = {}
    def dfs(node):
        if node in mapping:
            return mapping[node]
        copy = Node(node.val)
```

```
        mapping[node] = copy
        for neighbor in node.neighbors:
            copy.neighbors.append(dfs(neighbor))
        return copy
    return dfs(node)
```

7.2. Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo de Dijkstra é um método clássico para encontrar o caminho mais curto de um vértice origem para todos os outros vértices em um grafo ponderado com arestas de peso não negativo.

Funcionamento

Inicializa-se a distância de todos os vértices como infinita, exceto a origem, que recebe distância 0.

Utiliza-se uma fila de prioridade para explorar os vértices com a menor distância conhecida.

Para cada vizinho de um vértice explorado, calcula-se a distância potencial e atualiza-se se for menor que a distância conhecida.

Complexidade

A complexidade do algoritmo é
$O((V+E) \log V)$, onde V é o número de vértices e E é o número de arestas, quando implementado com uma fila de prioridade binária.

7.3. Implementação do algoritmo de Dijkstra

A seguir, uma implementação do algoritmo de Dijkstra em Python utilizando um heap binário para a fila de prioridade:

```
import heapq

def dijkstra(graph, start):
    min_heap = [(0, start)]
    distances = {start: 0}
    while min_heap:
        current_dist, current_vertex = heapq.heappop(min_heap)
        if current_dist > distances.get(current_vertex, float('inf')):
            continue
        for neighbor, weight in graph[current_vertex]:
            distance = current_dist + weight
            if distance < distances.get(neighbor, float('inf')):
                distances[neighbor] = distance
                heapq.heappush(min_heap, (distance, neighbor))
```

```
    return distances
```

8. Módulo 8: *Stack*

8.1. Primeira implementação de stack

Implementação em C# usando Lista

```
using System;
using System.Collections.Generic;

public class Stack<T>
{
    private List<T> elements = new List<T>();

    public void Push(T item)
    {
        elements.Add(item);
    }

    public T Pop()
    {
        if (IsEmpty())
            throw new InvalidOperationException("Stack is empty.");
        T item = elements[^1]; // Último elemento
        elements.RemoveAt(elements.Count - 1);
        return item;
    }

    public T Peek()
    {
        if (IsEmpty())
            throw new InvalidOperationException("Stack is empty.");
        return elements[^1];
    }

    public bool IsEmpty()
    {
        return elements.Count == 0;
    }

    public int Size()
    {
        return elements.Count;
    }
}
```

8.2. Implementando stack com linked list

```
using System;

public class Node<T>
{
    public T Data { get; set; }
    public Node<T> Next { get; set; }

    public Node(T data)
    {
        Data = data;
        Next = null;
    }
}

public class StackLinkedList<T>
{
    private Node<T> top; // topo da pilha
    private int count;   // tamanho da pilha

    public StackLinkedList()
    {
        top = null;
        count = 0;
    }

    // Adiciona um elemento ao topo da pilha
    public void Push(T data)
    {
        Node<T> newNode = new Node<T>(data);
        newNode.Next = top;
        top = newNode;
        count++;
    }

    // Remove e retorna o elemento do topo da pilha
    public T Pop()
    {
        if (IsEmpty())
            throw new InvalidOperationException("Stack is empty.");

        T data = top.Data;
        top = top.Next;
        count--;
        return data;
    }

    // Retorna o elemento do topo sem remover
    public T Peek()
    {
        if (IsEmpty())
```

```
            throw new InvalidOperationException("Stack is empty.");

        return top.Data;
    }

    // Verifica se a pilha está vazia
    public bool IsEmpty()
    {
        return top == null;
    }

    // Retorna o tamanho da pilha
    public int Size()
    {
        return count;
    }
}
```

8.3. Implementando min stack

Conceito

Uma Min Stack é uma pilha que, além das operações básicas (Push, Pop, Peek), permite obter o menor elemento da pilha em tempo constante O(1).

Para isso, cada nó da pilha armazena:

1. O valor do elemento (Data)
2. O menor valor até aquele nó (MinSoFar)

Implementação em C#

```
using System;

public class Node<T> where T : IComparable<T>
{
    public T Data { get; set; }
    public T MinSoFar { get; set; }  // menor valor até este nó
    public Node<T> Next { get; set; }

    public Node(T data, T minSoFar)
    {
        Data = data;
        MinSoFar = minSoFar;
        Next = null;
    }
}

public class MinStack<T> where T : IComparable<T>
```

```
{
    private Node<T> top;
    private int count;

    public MinStack()
    {
        top = null;
        count = 0;
    }

    // Adiciona um elemento no topo
    public void Push(T data)
    {
        T min = IsEmpty() ? data : (data.CompareTo(top.MinSoFar) < 0 ? data :
top.MinSoFar);
        Node<T> newNode = new Node<T>(data, min);
        newNode.Next = top;
        top = newNode;
        count++;
    }

    // Remove e retorna o topo
    public T Pop()
    {
        if (IsEmpty())
            throw new InvalidOperationException("Stack is empty.");

        T data = top.Data;
        top = top.Next;
        count--;
        return data;
    }

    // Retorna o topo sem remover
    public T Peek()
    {
        if (IsEmpty())
            throw new InvalidOperationException("Stack is empty.");

        return top.Data;
    }

    // Retorna o menor elemento da pilha
    public T GetMin()
    {
        if (IsEmpty())
            throw new InvalidOperationException("Stack is empty.");

        return top.MinSoFar;
    }
```

```
    public bool IsEmpty()
    {
        return top == null;
    }

    public int Size()
    {
        return count;
    }
}
```

Exemplo de Uso

```
class Program
{
    static void Main()
    {
        MinStack<int> stack = new MinStack<int>();

        stack.Push(5);
        stack.Push(2);
        stack.Push(8);
        stack.Push(1);

        Console.WriteLine("Topo: " + stack.Peek());     // 1
        Console.WriteLine("Min: " + stack.GetMin());    // 1
        stack.Pop();
        Console.WriteLine("Min após pop: " + stack.GetMin()); // 2
        stack.Pop();
        Console.WriteLine("Min após outro pop: " + stack.GetMin()); // 2
    }
}
```

Características

- Push, Pop, Peek, GetMin: O(1)
- Crescimento dinâmico sem limite de tamanho
- Cada nó armazena o mínimo até aquele ponto, evitando uso de pilhas auxiliares

9. Módulo 9: *Heap*

9.1. Implementação de Heap

Conceito

Um Heap é uma **árvore binária completa** que satisfaz a propriedade de heap:

Max-Heap: cada nó é maior ou igual a seus filhos → o maior elemento está na raiz.

Min-Heap: cada nó é menor ou igual a seus filhos → o menor elemento está na raiz.

Observação: “Árvore binária completa” significa que todos os níveis, exceto possivelmente o último, estão completamente preenchidos, e os nós do último nível estão o mais à esquerda possível.

Representação

Array: um heap completo pode ser armazenado em array sem ponteiros:

Para um nó em índice i:

Esquerda: 2*i + 1
Direita: 2*i + 2
Pai: (i-1)/2

Operações Principais

Exemplo de Max-Heap em C# usando Array

```
using System;
using System.Collections.Generic;

public class MaxHeap
{
   private List<int> heap = new List<int>();

   public int Size() => heap.Count;

   public bool IsEmpty() => heap.Count == 0;

   public void Insert(int val)
   {
      heap.Add(val);
      HeapifyUp(heap.Count - 1);
   }

   public int Peek()
   {
      if (IsEmpty())
         throw new InvalidOperationException("Heap is empty.");
      return heap[0];
   }
```

```
public int ExtractMax()
{
   if (IsEmpty())
      throw new InvalidOperationException("Heap is empty.");

   int max = heap[0];
   heap[0] = heap[heap.Count - 1];
   heap.RemoveAt(heap.Count - 1);
   HeapifyDown(0);
   return max;
}

private void HeapifyUp(int index)
{
   while (index > 0)
   {
      int parent = (index - 1) / 2;
      if (heap[index] <= heap[parent])
         break;
      int temp = heap[index];
      heap[index] = heap[parent];
      heap[parent] = temp;
      index = parent;
   }
}

private void HeapifyDown(int index)
{
   int lastIndex = heap.Count - 1;
   while (true)
   {
      int left = 2 * index + 1;
      int right = 2 * index + 2;
      int largest = index;

      if (left <= lastIndex && heap[left] > heap[largest])
         largest = left;
      if (right <= lastIndex && heap[right] > heap[largest])
         largest = right;

      if (largest == index)
         break;

      int temp = heap[index];
      heap[index] = heap[largest];
      heap[largest] = temp;

      index = largest;
   }
```

```
    }
}
```

Exemplo de Uso

```
class Program
{
    static void Main()
    {
        MaxHeap heap = new MaxHeap();
        heap.Insert(10);
        heap.Insert(20);
        heap.Insert(5);

        Console.WriteLine("Maior elemento: " + heap.Peek()); // 20
        Console.WriteLine("Removendo: " + heap.ExtractMax()); // 20
        Console.WriteLine("Novo topo: " + heap.Peek()); // 10
    }
}
```

Aplicações Comuns de Heap

- Filas de prioridade
- Algoritmo de Dijkstra (min-heap para selecionar o menor caminho)
- Heap Sort (ordenação baseada em heap)
- Problemas de K maiores/menores elementos

Conclusão

Livros Avançados:

- "Introduction to Algorithms" de Cormen, Leiserson, Rivest e Stein (CLRS): Um recurso abrangente que cobre uma ampla gama de algoritmos em profundidade.
- "Algorithm Design" de Jon Kleinberg e Éva Tardos: Foca em técnicas de design de algoritmos e estratégias de resolução de problemas.
- "Algorithms" de Robert Sedgewick e Kevin Wayne: Oferece uma exploração detalhada de algoritmos com exemplos de código práticos.

Cursos e Aulas Online:

- Coursera:

  - Algorithms Specialization da Universidade de Stanford.
  - Advanced Algorithms and Complexity da Universidade da Califórnia em San Diego.

- edX:

  - Algorithms and Data Structures da Microsoft.
  - Advanced Data Structures do MIT.

- MIT OpenCourseWare:

  - Introduction to Algorithms (6.006).
  - Advanced Data Structures (6.851).

System Design:

- Coursera:

  - Software Design and Architecture Specialization - University of Alberta

- Outros:

  - Grokking the Modern System Design Interview (educative)
  - Grokking the System Design Interview (designgurus)
  - ByteByteGo System Design Course (bytebytego)