

17

$$\Delta P_{sist}^{ia \rightarrow id} = 0$$

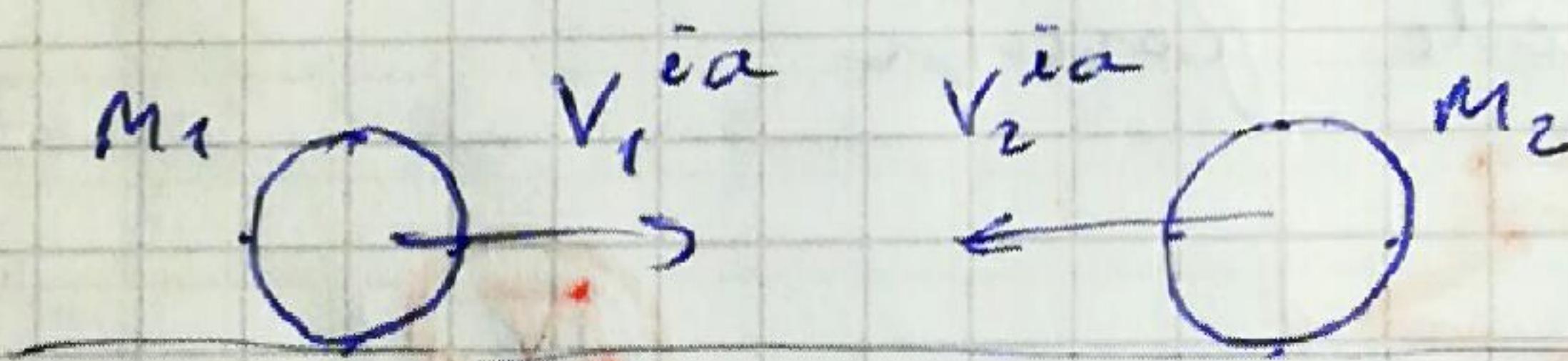
$$\Delta E_{sist}^{ia \rightarrow id} < E_{sist}^{ia}$$

$$V_1^{id} = V_2^{id} = V_{sist}^{id}$$

**Choque
Totalmente
inelástico**

CHOQUES ELÁSTICOS EN UNA DIMENSIÓN

Para calcular las velocidades finales de los partículas en Pygame utilicé la siguiente deducción de Wikipedia:



Planteo choque elástico entre las partículas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta P_{sist}^{ia \rightarrow id} = 0 \\ \Delta E_{sist}^{ia \rightarrow id} = 0 \end{array} \right.$$

2x2 no lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 V_1^{ia} + m_2 V_2^{ia} = m_1 V_1^{id} + m_2 V_2^{id} \\ \frac{1}{2} m_1 V_1^{ia^2} + \frac{1}{2} m_2 V_2^{ia^2} = \frac{1}{2} m_1 V_1^{id^2} + \frac{1}{2} m_2 V_2^{id^2} \end{array} \right.$$

Arreglo el sistema de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 (V_1^{id^2} - V_1^{ia^2}) = m_2 (V_2^{ia^2} - V_2^{id^2}) \end{array} \right. \quad \textcircled{I}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 (V_1^{id} - V_1^{ia}) = m_2 (V_2^{ia} - V_2^{id}) \end{array} \right. \quad \textcircled{II}$$

Dividir (I) / (II) :

$$\frac{V_1^{id^2} - V_1^{ia^2}}{V_1^{id} - V_1^{ia}} = \frac{V_2^{ia^2} - V_2^{id^2}}{V_2^{ia} - V_2^{id}} \quad (III)$$

Usa la siguiente propiedad: (Diferencia de cuadrados)

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a-b} = a+b$$

La ecuación (III) queda entonces como:

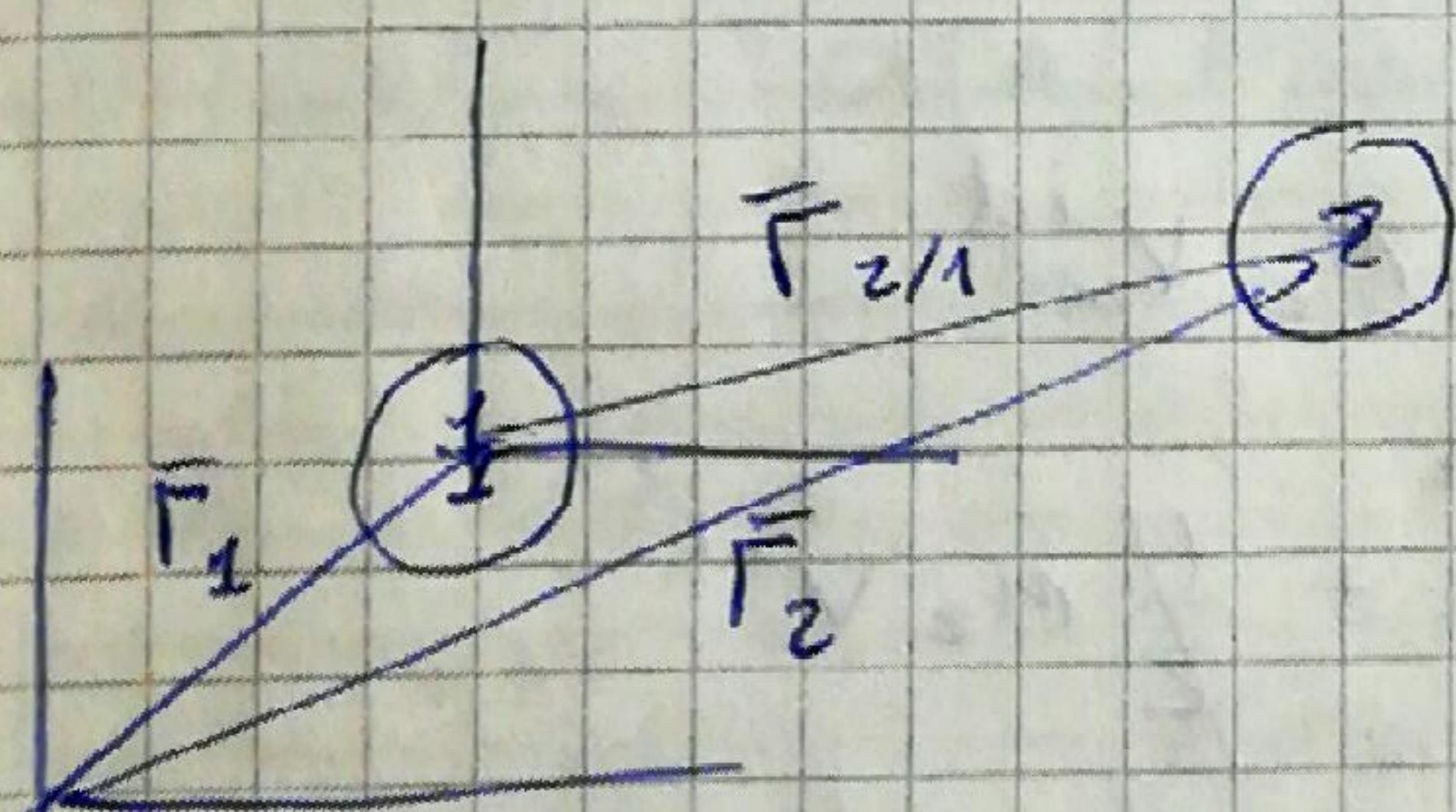
$$V_1^{id} + V_1^{ia} = V_2^{ia} + V_2^{id}$$

Si arregla de la siguiente forma

$$V_1^{id} - V_2^{id} = V_2^{ia} - V_1^{ia} \quad (IV)$$

¿Qué nos quiere decir este?

Bueno, imaginemos dos partículas que colisionan elásticamente:



$$\bar{F}_2 = \bar{F}_1 + \bar{F}_{2/1}$$

$$\frac{d}{dt} (\bar{F}_{2/1}) = \bar{F}_2 - \bar{F}_1$$

$$\bar{V}_{2/1} = \bar{V}_2 - \bar{V}_1$$

Suponiendo que esto son las velocidades justo antes del choque, tenemos:

$$\bar{V}_{2/1}^{ia} = \bar{V}_2^{ia} - \bar{V}_1^{ia}$$

¡Este es lo que aparece del lado derecho de la ec. (IV)!

Y ahora observemos que, después del choque, la velocidad relativa se convierte en:

$$\bar{v}_{21}^{id} = \bar{v}_2^{id} - \bar{v}_1^{id}$$

Que es lo mismo que:

$$\bar{v}_{211}^{id} = -(\underbrace{\bar{v}_1^{id} - \bar{v}_2^{id}}_{\rightarrow}) \Rightarrow -\bar{v}_{211}^{id} = \bar{v}_1^{id} - \bar{v}_2^{id}$$

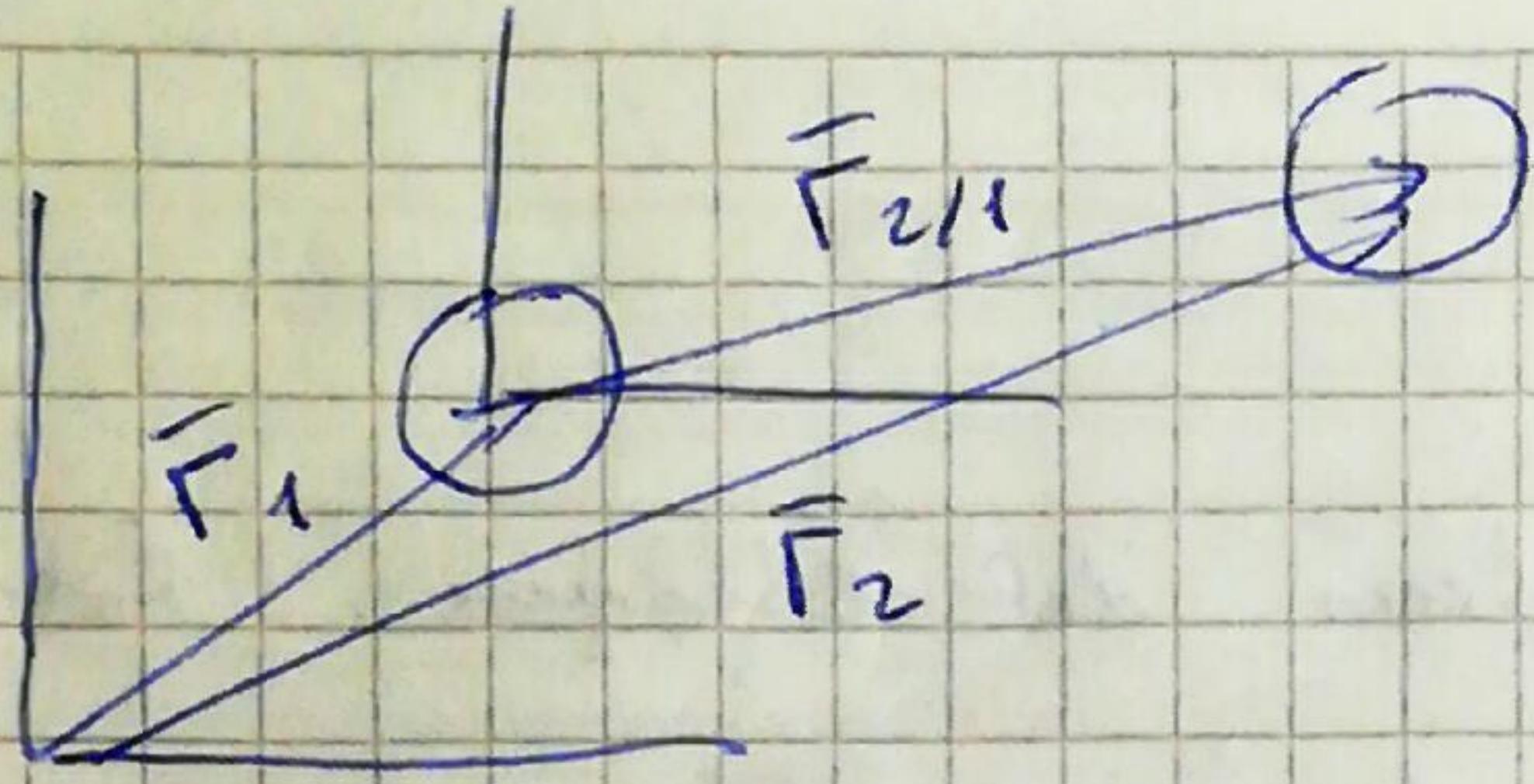
¡Esta es lo mismo que tenemos del lado izquierdo de la ecuación \textcircled{IV} !

Bueno, lo que nos está diciendo la ecuación \textcircled{IV} es:

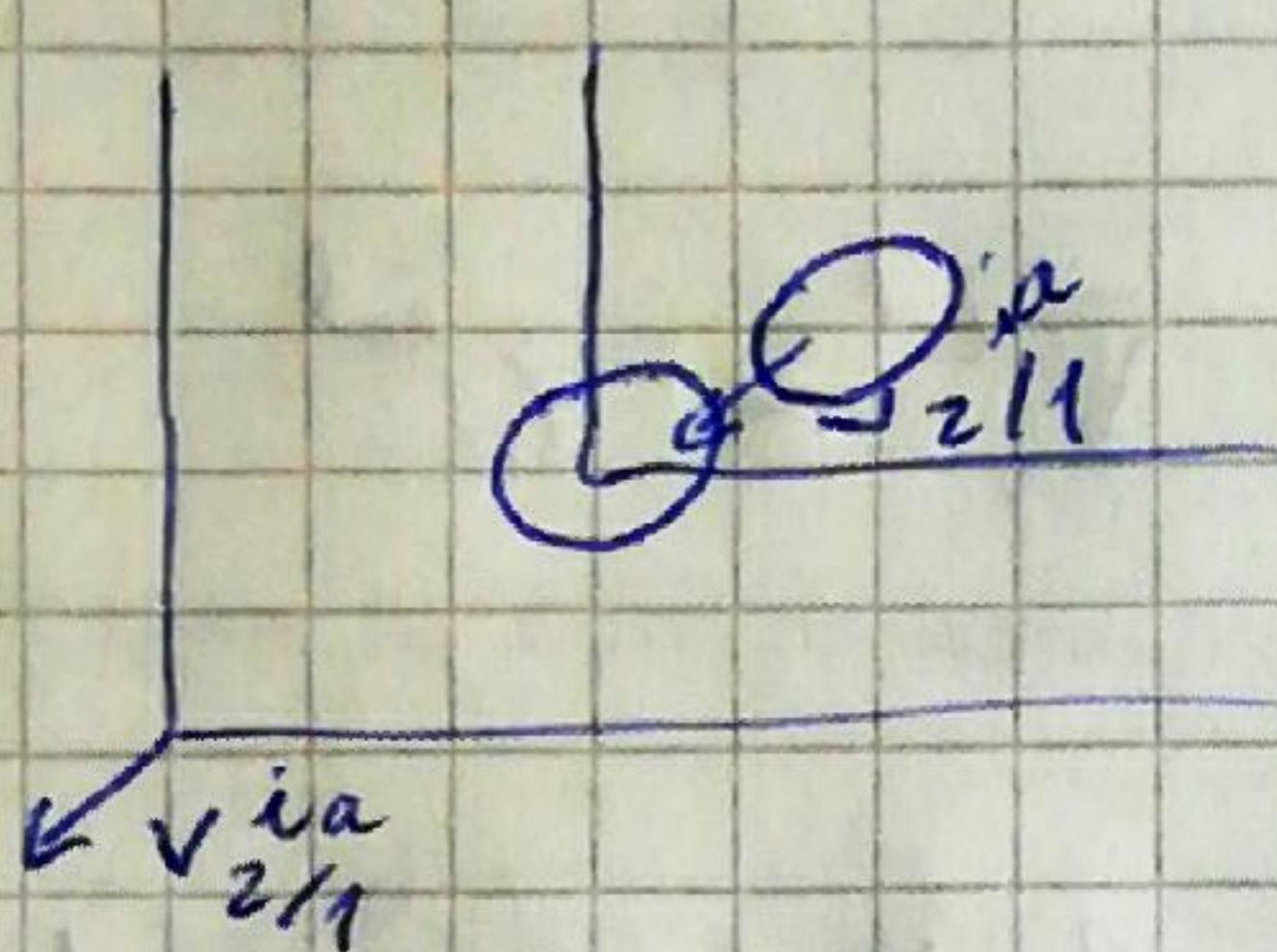
$$-\bar{v}_{211}^{id} = \bar{v}_{211}^{ia} \Rightarrow \boxed{\bar{v}_{211}^{id} = -\bar{v}_{211}^{ia}}$$

Este nos dice que la velocidad relativa entre las partículas después del choque es el opuesto de la que era justo antes de colisionar. (Para un choque elástico).

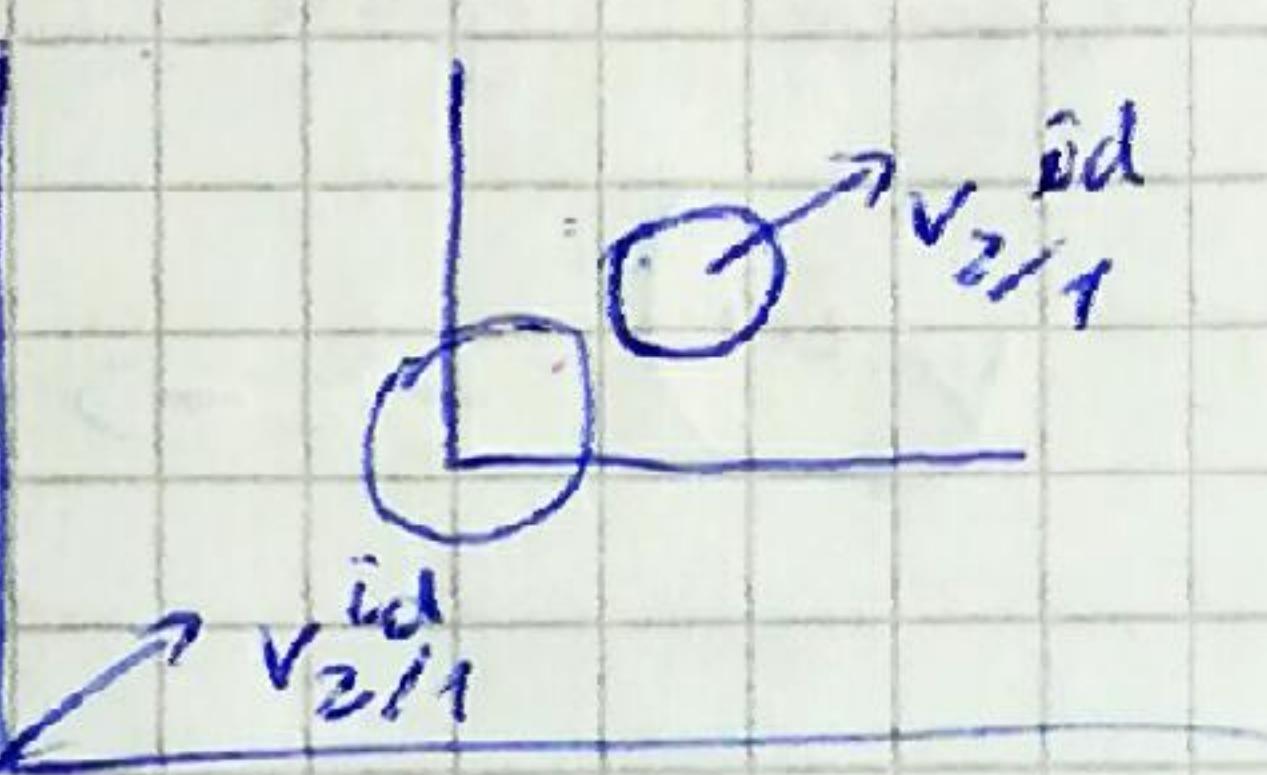
Sabiendo esto, y conociendo las velocidades iniciales de las partículas (cosa que generalmente es data), es fácil llegar a una relación entre las velocidades finales de cada partícula, y, con alguna otra ecuación (una lineal, por favor), despegar una y después la otra.



Inmediat.
Antes del choque:



$$\|v_{21a}\| = \|v_{211}\|$$



Inmediatamente
después del choque.

El vector velocidad relativa entre los partículas se da vuelta luego del choque

Luego del choque, las velocidades relativas entre las partículas se "dan vuelta", se convierten en su opuesta.

$$v_{21d} = -v_{21a}$$

"El signo cambia porque los cuerpos se están acercando antes y alejándose después" -Sears

$$v_{2d} - v_{1d} = -(v_{2a} - v_{1a})$$

¡es la ecuación

(IV)

$$v_{2d} - v_{1d} = v_{1a} - v_{2a}$$

Que es la ecuación (IV) a la que llegamos previamente.

Si podes recordar que en los choques elásticos sucede que las velocidades relativas se invierten luego del choque, tocas esos 3 dibujos tanto de arriba y podes llegar a la ecuación (IV), que,

Combinando con la ecuación de la conservación del momento lineal, nos van a permitir reescribir el sistema de ecuaciones 2×2 no-lineal del principio en el siguiente sistema de ecuaciones 2×2 , que es equivalente y, más importante, es lineal :

$$\left. \begin{array}{l} \text{2x2} \\ \text{lineal} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta P_{\text{sist}}^{\text{ia} \rightarrow \text{id}} = 0 \\ V_{2/1}^{\text{id}} = -V_{2/1}^{\text{ia}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Conservación del momento lineal} \\ \text{Inversión de las velocidades} \\ \text{relativas} \end{array}$$

Este es equivalente a :

$$\left. \begin{array}{l} \text{2x2} \\ \text{no} \\ \text{lineal} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta P_{\text{sist}}^{\text{ia} \rightarrow \text{id}} = 0 \\ \Delta E_{\text{C,sist}}^{\text{ia} \rightarrow \text{id}} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Conservación del momento lineal} \\ \text{Conservación de la energía cinética} \end{array}$$

Para es mucho más fácil de resolver el sistema lineal.

El sistema entonces queda :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 V_1^{\text{id}} + m_2 V_2^{\text{id}} = m_1 V_1^{\text{ia}} + m_2 V_2^{\text{ia}} \\ V_2^{\text{id}} - V_1^{\text{id}} = V_1^{\text{ia}} - V_2^{\text{ia}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array}$$

De aquí podemos llegar a expresiones para las velocidades finales de las dos partículas, que es lo que nos interesa para la simulación.

Luego de operar un poco, llegamos a que:

$$V_2^{id} = \frac{2m_1 V_1^{ia} - m_1 V_2^{ia} + m_2 V_2^{ia}}{M_1 + M_2}$$

Chequeado
Mathematica ✓

$$V_1^{id} = \frac{m_1 V_1^{ia} - m_2 V_1^{ia} + 2m_2 V_2^{ia}}{m_1 + m_2}$$

ii ✓

Más profundo:

$$V_2^{id} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_2^{ia} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_t^{ia}$$

$$V_t^{id} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_1^{ia} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} V_2^{ia}$$

Se puede dar la definición de choque elástico en base al hecho de que las velocidades relativas se invierten luego del choque. De hecho, siempre que se satisface esta condición, se conserva la Energía cinética total.