$$\Delta P_{sist}^{ia \to id} = 0$$

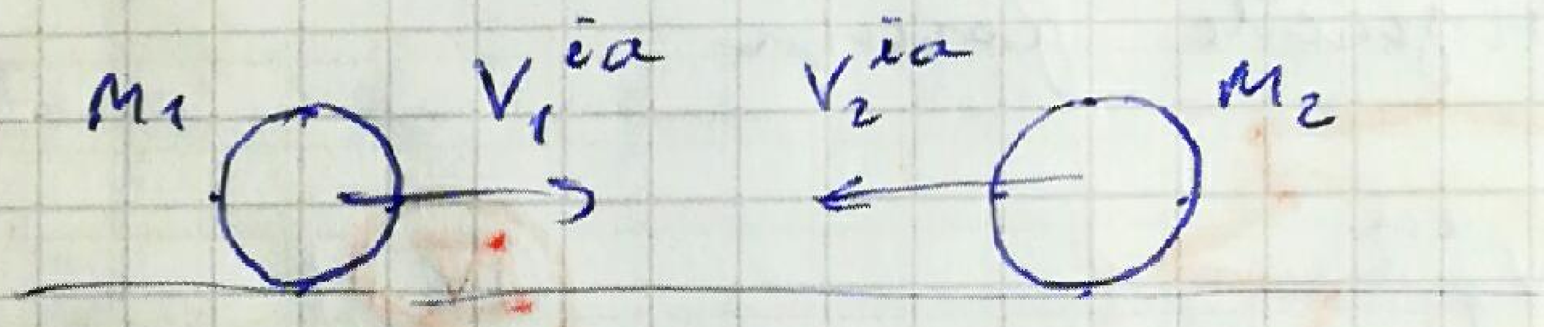
$$E_{c_{sist}}^{id} < E_{c_{sist}}^{ia}$$

$$V_1^{id} = V_2^{id} = V_{sist}^{id}$$

Choque totalmente inelástico

CHOQUES ELÁSTICOS EN UNA DIMENSIÓN

Para calcular las velocidades finales de las partículas en Pygame utilizé la siguiente deducción de Wikipedia:



Planteo choque elástico entre las partículas:

$$\begin{cases} \Delta P_{sist}^{ia \to id} = 0 \\ \Delta E_{c_{sist}}^{ia \to id} = 0 \end{cases}$$

2x2 no lineal

$$\begin{cases} m_1 V_1^{ia} + m_2 V_2^{ia} = m_1 V_1^{id} + m_2 V_2^{id} \\ \frac{1}{2} m_1 {V_1^{ia}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {V_2^{ia}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {V_1^{id}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {V_2^{id}}^2 \end{cases}$$

Arreglo el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{cases} m_1 \left({V_1^{id}}^2 - {V_1^{ia}}^2\right) = m_2 \left({V_2^{ia}}^2 - {V_2^{id}}^2\right) & \text{I} \\ m_1 \left(V_1^{id} - V_1^{ia}\right) = m_2 \left(V_2^{ia} - V_2^{id}\right) & \text{II} \end{cases}$$

Divido (I) / (II) :

$$\frac{V_1^{id^2} - V_1^{ia^2}}{V_1^{id} - V_1^{ia}} = \frac{V_2^{ia^2} - V_2^{id^2}}{V_2^{ia} - V_2^{id}} \quad \text{(III)}$$

Uso la siguiente propiedad: (Diferencia de cuadrados)

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \implies \frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b$$

La ecuación (III) queda entonces como:

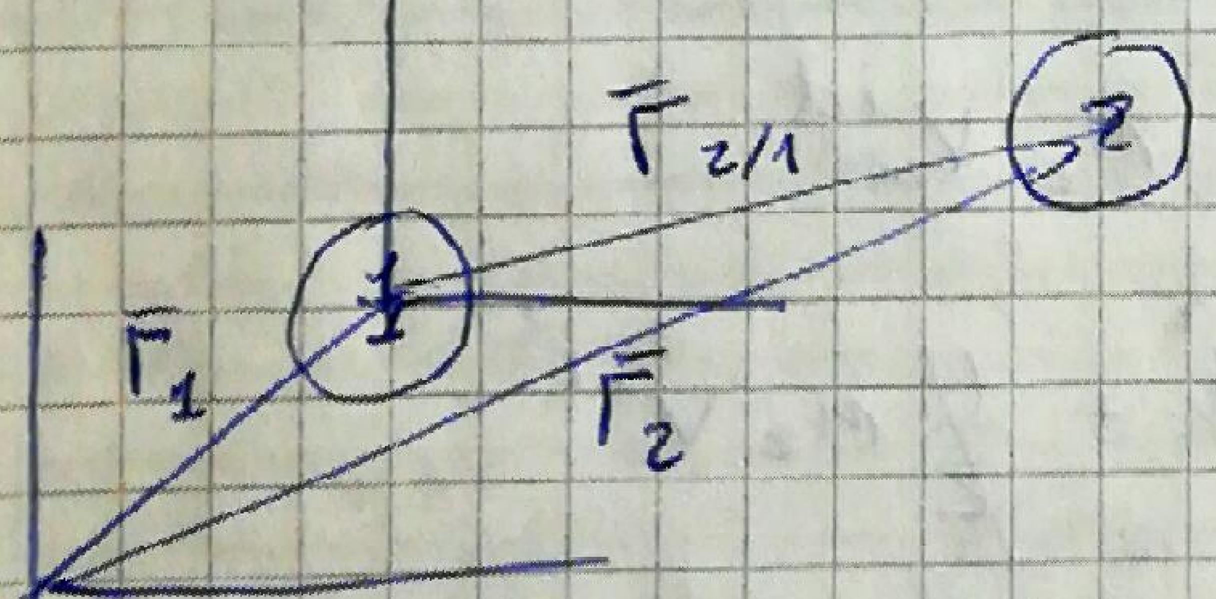
$$V_1^{id} + V_1^{ia} = V_2^{ia} + V_2^{id}$$

Si arreglo de la siguiente forma

$$V_1^{id} - V_2^{id} = V_2^{ia} - V_1^{ia} \quad \text{(IV)}$$

¿Qué nos quiere decir esto?

Bueno, imaginemos dos partículas que colisionan elásticamente:



$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + \bar{r}_{2/1}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\quad \bar{r}_{2/1} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$$

$$\bar{V}_{2/1} = \bar{V}_2 - \bar{V}_1$$

Suponiendo que estas tienen las velocidades justo antes del choque, tenemos:

$$\bar{V}_{2/1}^{ia} = \bar{V}_2^{ia} - \bar{V}_1^{ia}$$

¡Esto es lo que aparece del lado derecho de la ec. (IV)!

Y ahora observemos que, después del choque, la velocidad relativa se convierte en:

$$\bar{V}_{2/1}^{id} = \bar{V}_2^{id} - \bar{V}_1^{id}$$

Que es lo mismo que:

$$\bar{V}_{2/1}^{id} = -(\bar{V}_1^{id} - V_2^{id}) \Rightarrow -V_{2/1}^{id} = \bar{V}_1^{id} - V_2^{id}$$

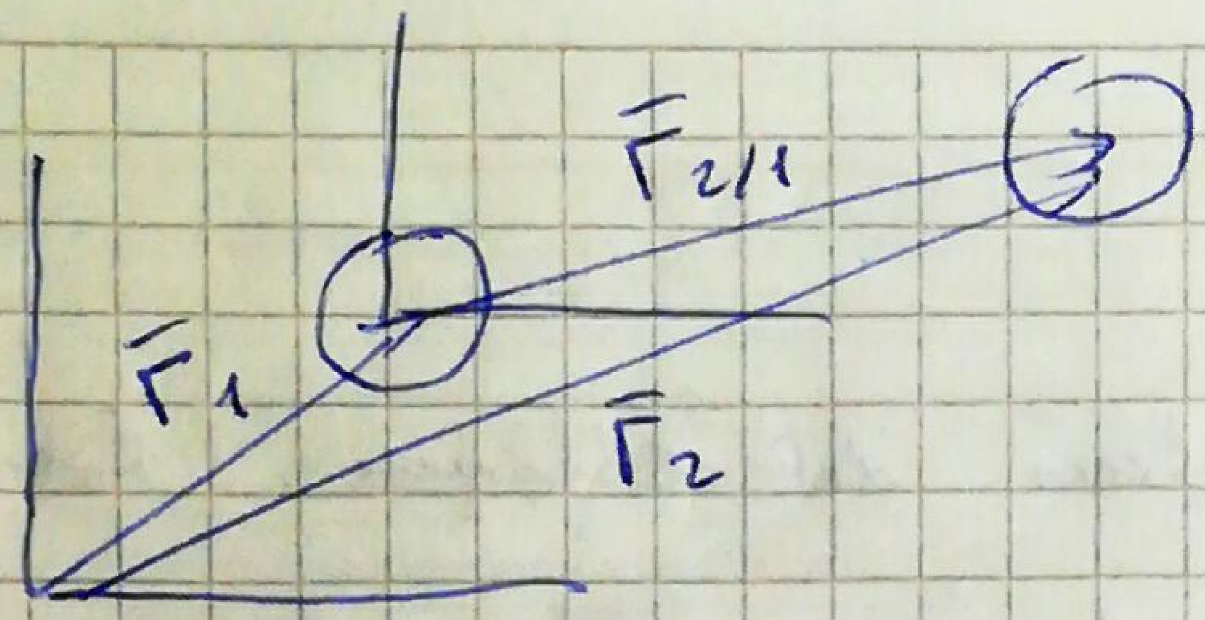
¡Esto es lo mismo que tenemos del lado izquierdo de la ecuación IV!

Entonces, lo que nos está diciendo la ecuación IV es:

$$-V_{2/1}^{id} = V_{2/1}^{ia} \Rightarrow \boxed{V_{2/1}^{id} = -V_{2/1}^{ia}}$$

Esto nos dice que la velocidad relativa entre las partículas después del choque es el opuesto de lo que era justo antes de colisionar (Para un choque elástico).

Sabiendo esto, y conociendo las velocidades iniciales de las partículas (cosa que generalmente es dato), es fácil llegar a una relación entre las velocidades finales de cada partícula, y, con alguna otra ecuación (una lineal, por favor), despejar una y después la otra.



$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + \bar{r}_{2/1}$$

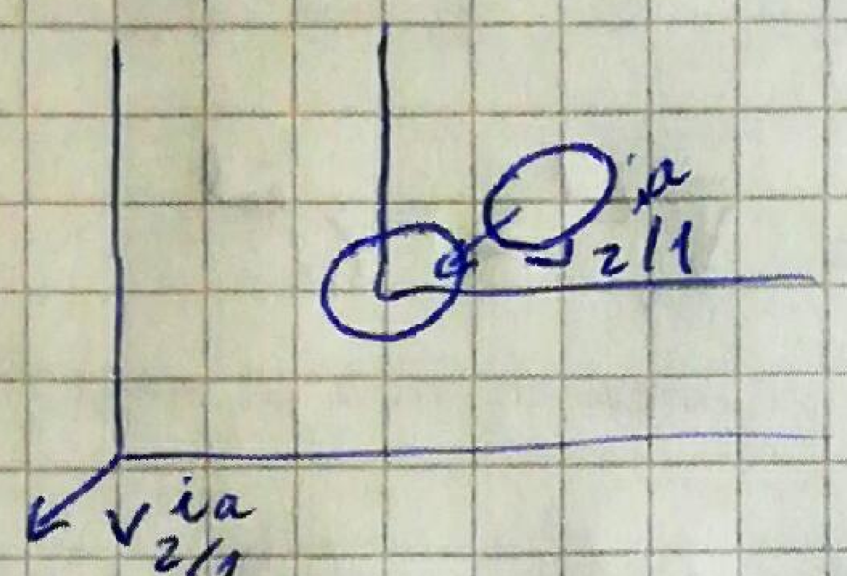
$$r_{2/1} = r_2 - r_1$$

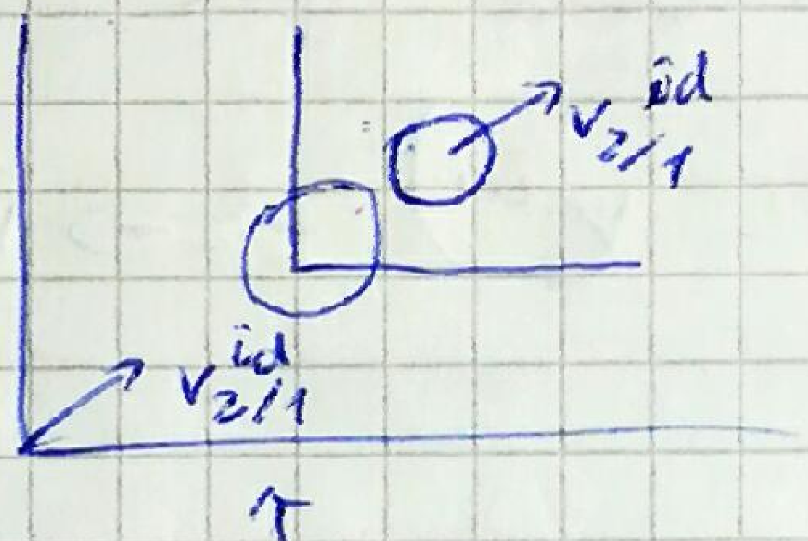
$$\frac{d}{dt}$$

$$V_{2/1} = V_2 - V_1$$

Inmediat.
Antes del choque:

Inmediatamente
después del choque.





El vector velocidad relativa entre las partículas se da vuelta luego del choque

$$\|V_{2/1}^{ia}\| = \|V_{2/1}^{id}\|$$

Luego del choque, las velocidades relativas entre las partículas se "dan vuelta", se convierten en su opuesto.

$$V_{2/1}^{id} = -V_{2/1}^{ia}$$

"El signo cambia porque los cuerpos se están acercando antes y alejándose después"
—Sears

$$V_2^{id} - V_1^{id} = -(V_2^{ia} - V_1^{ia})$$

$$V_2^{id} - V_1^{id} = V_1^{ia} - V_2^{ia}$$

¡es la ecuación IV!

Que es la ecuación IV a la que llegamos previamente :)

Si podés recordar que en los choques elásticos sucede que las velocidades relativas se invierten luego del choque, hacés esos 3 dibujos tontos de arriba y podés llegar a la ecuación IV, que, Combinada con la ecuación de la conservación del momento lineal, nos van a permitir reescribir el sistema de ecuaciones 2x2 no-lineal del principio en el siguiente sistema de ecuaciones 2x2, que es equivalente y, más importante, es lineal :

2x2 lineal

$$\begin{cases} \Delta P_{sist}^{ia \to id} = 0 & \leftarrow \text{Conservación del momento lineal} \\ V_{2/1}^{id} = -V_{2/1}^{ia} & \leftarrow \text{Inversión de las velocidades relativas} \end{cases}$$

Esto es equivalente a:

2x2 no lineal

$$\begin{cases} \Delta P_{sist}^{ia \to id} = 0 & \leftarrow \text{Conservación del momento lineal} \\ \Delta E_{c\,sist}^{ia \to id} = 0 & \leftarrow \text{Conservación de la energía cinética} \end{cases}$$

Pero es mucho más fácil de resolver el sistema lineal.

El sistema entonces queda:

$$\begin{cases} m_1 V_1^{id} + m_2 V_2^{id} = m_1 V_1^{ia} + m_2 V_2^{ia} & \text{I} \\ V_2^{id} - V_1^{id} = V_1^{ia} - V_2^{ia} & \text{II} \end{cases}$$

De aquí podemos llegar a expresiones para las velocidades finales de las dos partículas, que es lo que nos interesa para la simulación.

Luego de operar un poco, llegamos a que:

$$\boxed{V_2^{id} = \frac{2m_1 V_1^{ia} - m_1 V_2^{ia} + m_2 V_2^{ia}}{m_1 + m_2}}$$

Chequeado Mathematica ✓

$$\boxed{V_1^{id} = \frac{m_1 V_1^{ia} - m_2 V_1^{ia} + 2 m_2 V_2^{ia}}{m_1 + m_2}}$$

" ✓

Más prolijo:

$$\boxed{V_2^{id} = \frac{2m_2}{m_1+m_2} V_2^{ia} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1^{ia}}$$

$$\boxed{V_1^{id} = \frac{2m_1}{m_1+m_2} V_1^{ia} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} V_2^{ia}}$$

Se puede dar la definición de choque elástico en base al hecho de que las velocidades relativas se invierten luego del choque. De hecho, siempre que se satisface esta condición, se conserva la Energía cinética total.