EM423 – RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS AULA 4

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FABIO MAZZARIOL SANTICIOLLI – FABIOMAZ@UNICAMP.BR

LAYSE BOERE – LAYSEBOERE@GMAIL.COM

DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES

- Fazer diagramas de esforços solicitantes com funções de singularidade pode ser bem prático.
- Quanto à obtenção das forças cortantes e dos momentos internos, o primeiro passo é descrever os esforços externos e as reações de apoio com funções de singularidade, gerando uma função de carregamento.

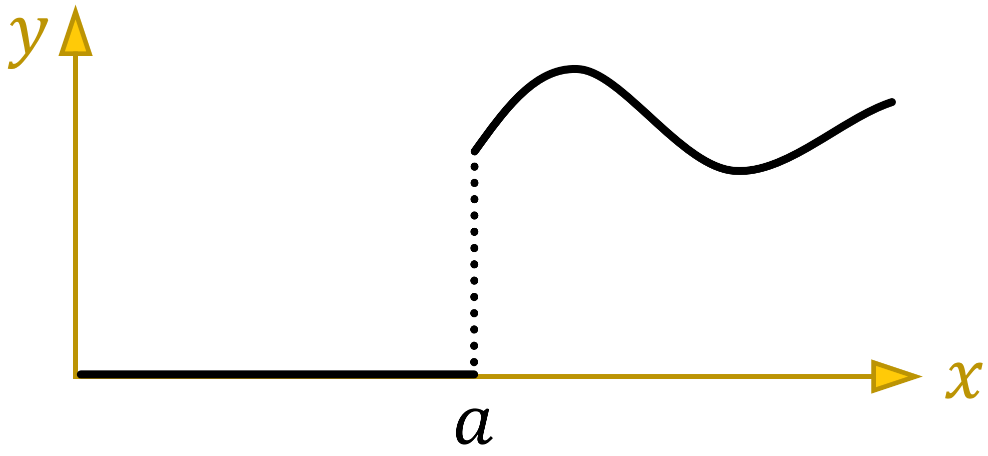
DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES

- Integrando a função de carregamento uma vez chega-se às forças cortantes.
- Integrando as forças cortantes chega-se aos momentos.
- Neste procedimento, não são necessários cortes virtuais (substituindo o método das seções).

FUNÇÕES DE SINGULARIDADE

- Funções de singularidade são funções com comportamentos distintos em torno de um ponto singular.

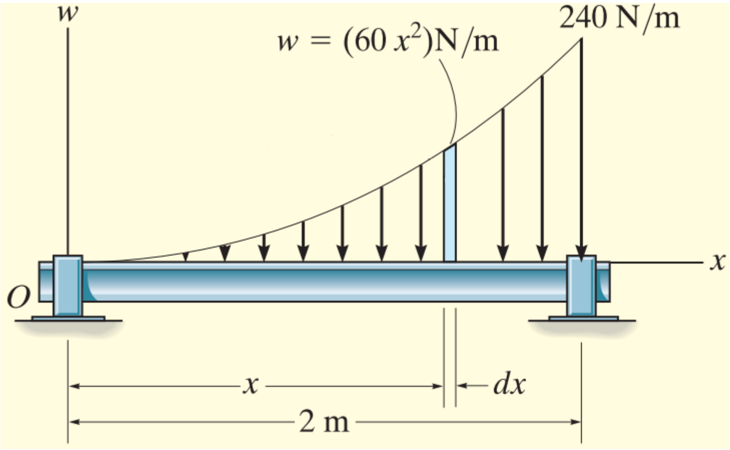
$$y(x) = \langle x - a \rangle^{n} + \cdots$$



DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES

Carregamentos de distribuição quadrática podem ser representados por uma função parábola unitária:

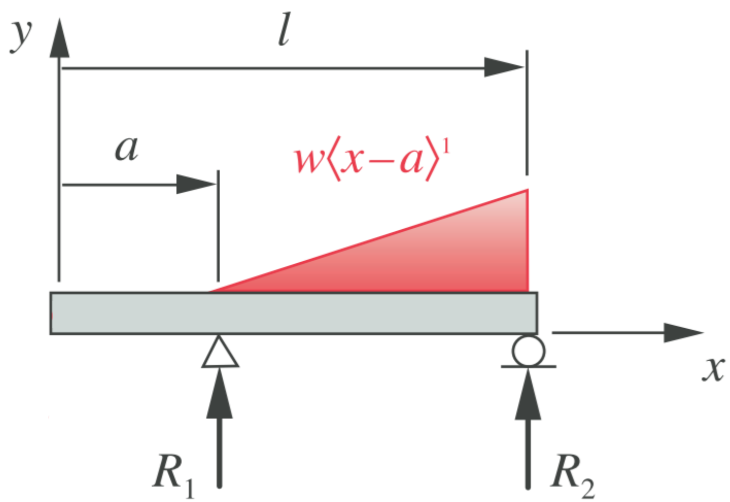
$$\langle x-a\rangle^{2}=\begin{cases}0 \text{ para } x<a\\(x-a)^{2} \text{ para } x\geq a\end{cases}$$



DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES

Carregamentos de distribuição linear podem ser representados por uma função rampa unitária:

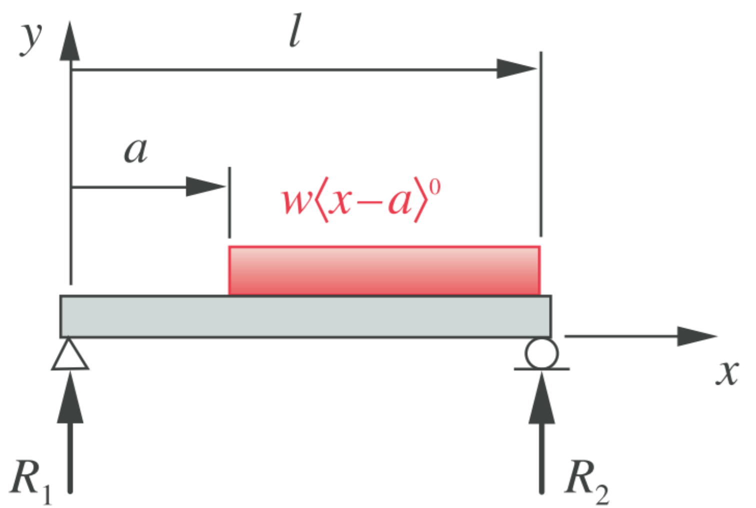
$$\langle x-a\rangle^{1} = \begin{cases} 0 \text{ para } x < a \\ (x-a)^{1} \text{ para } x \geq a \end{cases}$$



DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES

Carregamentos de distribuição uniforme podem ser representados por uma **função degrau unitário ou Heaviside**:

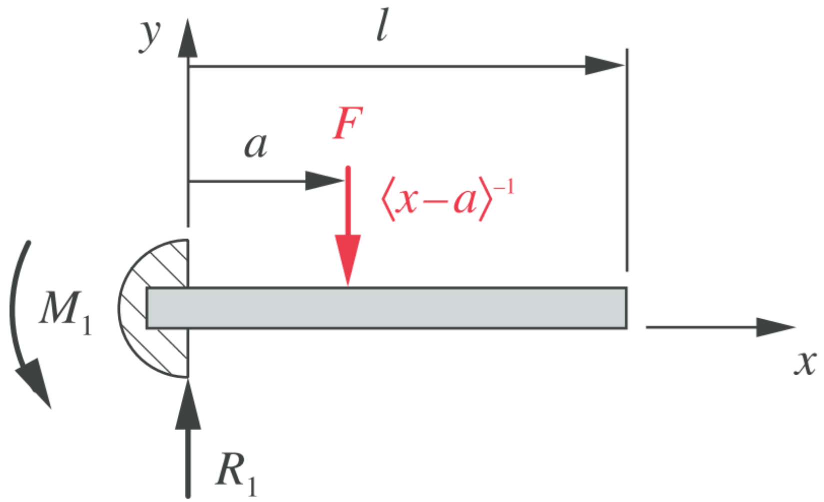
$$\langle x-a\rangle^{0}=\begin{cases}0 \text{ para } x<a\\ 1 \text{ para } x\geq a\end{cases}$$



DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES

Forças concentradas podem ser representadas por uma função impulso ou Delta de Dirac:

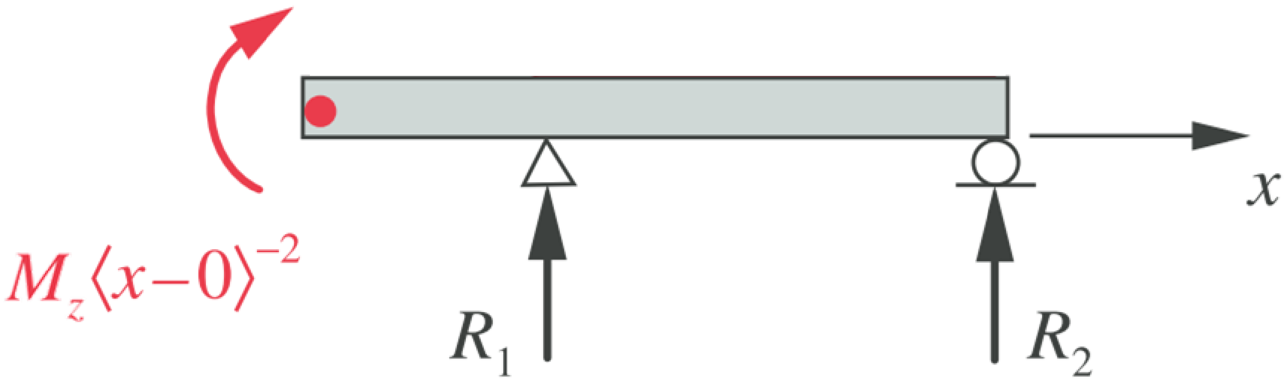
$$\langle x-a\rangle^{-1} = \begin{cases} 0 \text{ para } x < a \\ \infty \text{ para } x = a \\ 0 \text{ para } x > a \end{cases}$$

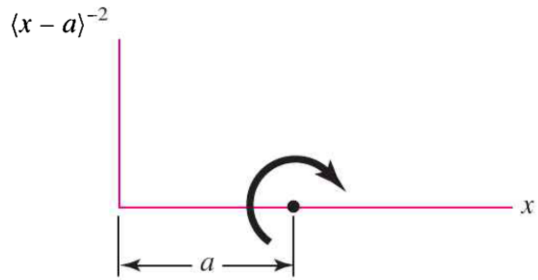
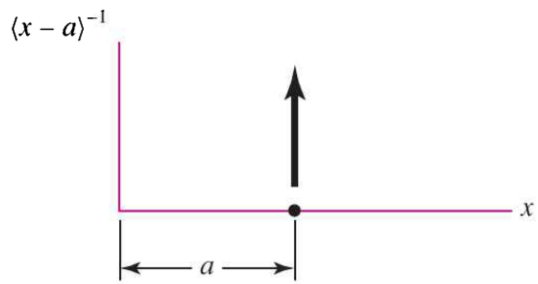
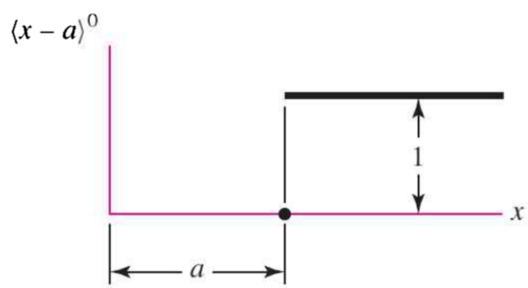
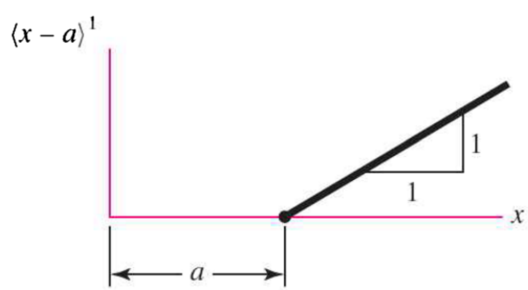


DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES

Momentos concentrados podem ser representados por uma função dipolo ou *doublet* unitária:

$$\langle x-a\rangle^{-2} = \begin{cases} 0 \text{ para } x < a \\ \pm\infty \text{ para } x = a \\ 0 \text{ para } x > a \end{cases}$$



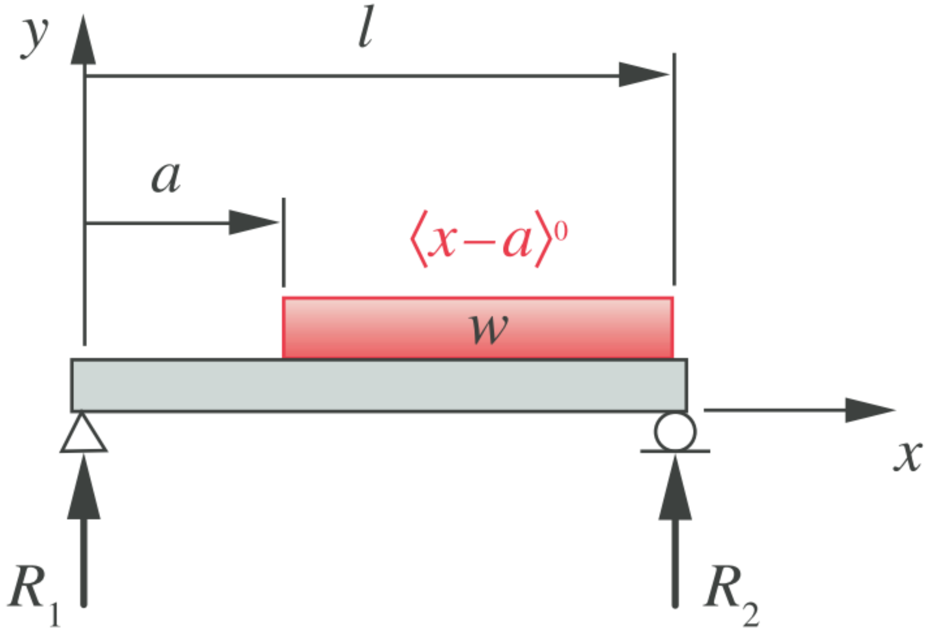
Função	**Gráfico de $f_n(x)$**	**Significado**
Momento concentrado (conjugado unitário)		$\langle x - a\rangle^{-2} = 0 \quad x \neq a$ $\langle x - a\rangle^{-2} = \pm\infty \quad x = a$ $\int \langle x - a\rangle^{-2}\,dx = \langle x - a\rangle^{-1}$
Força concentrada (impulso unitário)		$\langle x - a\rangle^{-1} = 0 \quad x \neq a$ $\langle x - a\rangle^{-1} = +\infty \quad x = a$ $\int \langle x - a\rangle^{-1}\,dx = \langle x - a\rangle^{0}$
Degrau unitário		$\langle x - a\rangle^{0} = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$ $\int \langle x - a\rangle^{0}\,dx = \langle x - a\rangle^{1}$
Rampa		$\langle x - a\rangle^{1} = \begin{cases} 0 & x < a \\ x - a & x \geq a \end{cases}$ $\int \langle x - a\rangle^{1}\,dx = \dfrac{\langle x - a\rangle^{2}}{2}$

Fonte: BUDYNAS, Richard G.; NISBETH, J. Keith. **Elementos de Máquinas de Shigley-10ª Edição**. McGraw Hill Brasil, 2016.

DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES

Compondo as funções apresentadas com a magnitude e sinal de cada esforço, é possível obter uma equação para o carregamento da viga toda. Por exemplo:

$$q = R_1\langle x-0\rangle^{-1} - w\langle x-a\rangle^{0} + R_2\langle x-l\rangle^{-1}$$



DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES

É possível chegar aos diagramas de esforços solicitantes por meio das integrais indefinidas dos carregamentos:

$$V = \int q\,dx \qquad \text{e} \qquad M = \int V\,dx$$

Mas quais são as integrais das funções de singularidade?

?

DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES

Integrais das funções de singularidade:

Integral da parábola unitária:

$$\int \langle x-a \rangle^2 \, dx = \frac{\langle x-a \rangle^3}{3} + C$$

Integral da rampa unitária:

$$\int \langle x-a \rangle^1 \, dx = \frac{\langle x-a \rangle^2}{2} + C$$

Integral do degrau unitário:

$$\int \langle x-a \rangle^0 \, dx = \langle x-a \rangle^1 + C$$

Integral da função impulso:

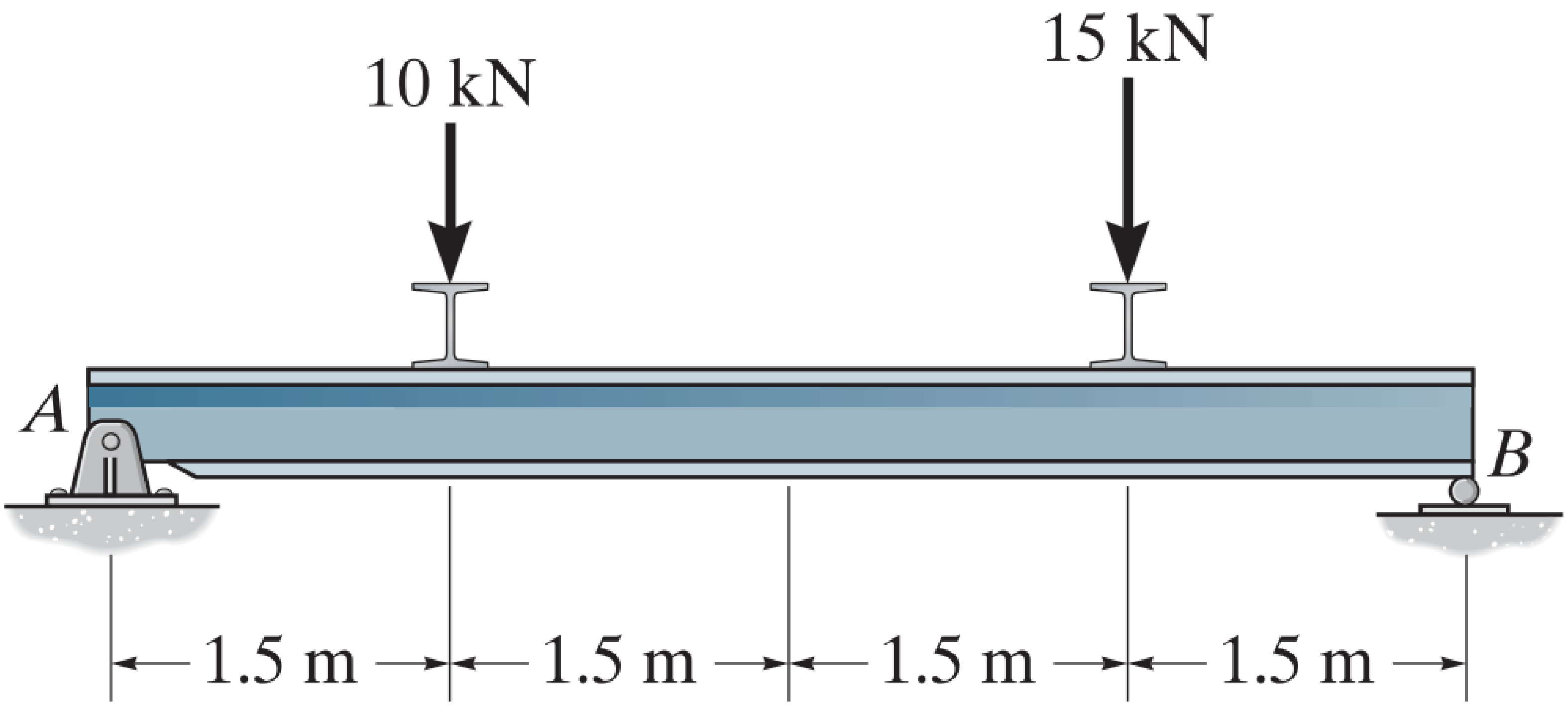
$$\int \langle x-a \rangle^{-1} \, dx = \langle x-a \rangle^0 + C$$

Integral da função dipolo:

$$\int \langle x-a \rangle^{-2} \, dx = \langle x-a \rangle^{-1} + C$$

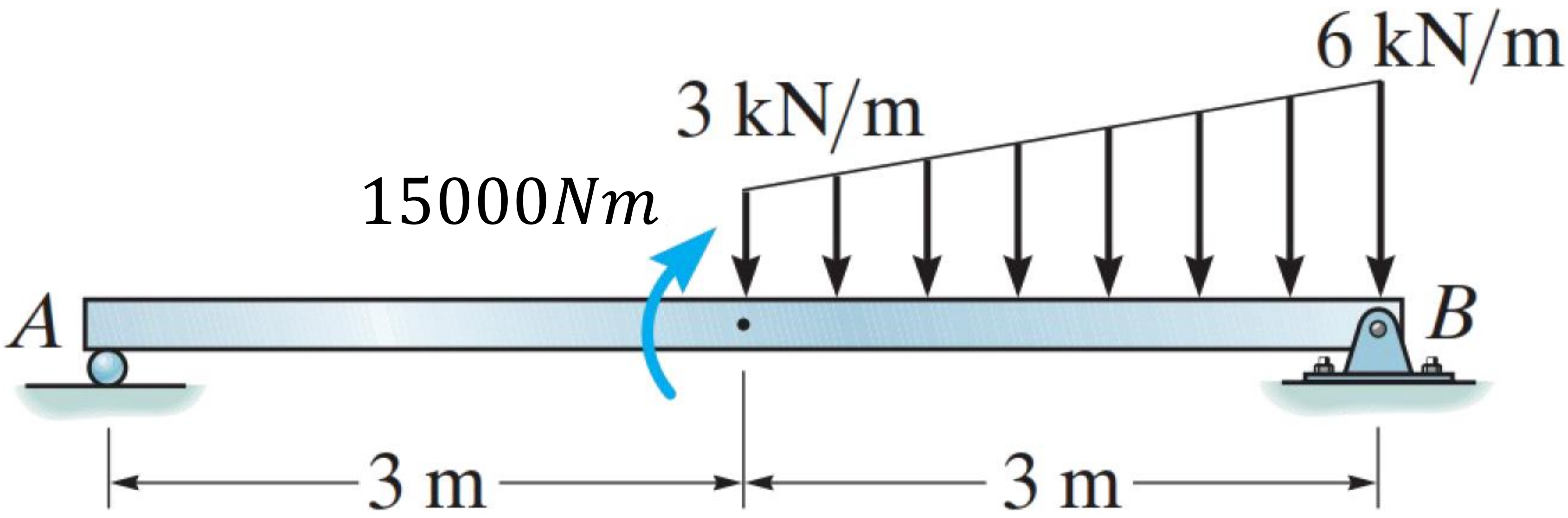
EXERCÍCIO 1

- Faça o diagrama de esforços solicitantes da viga abaixo:



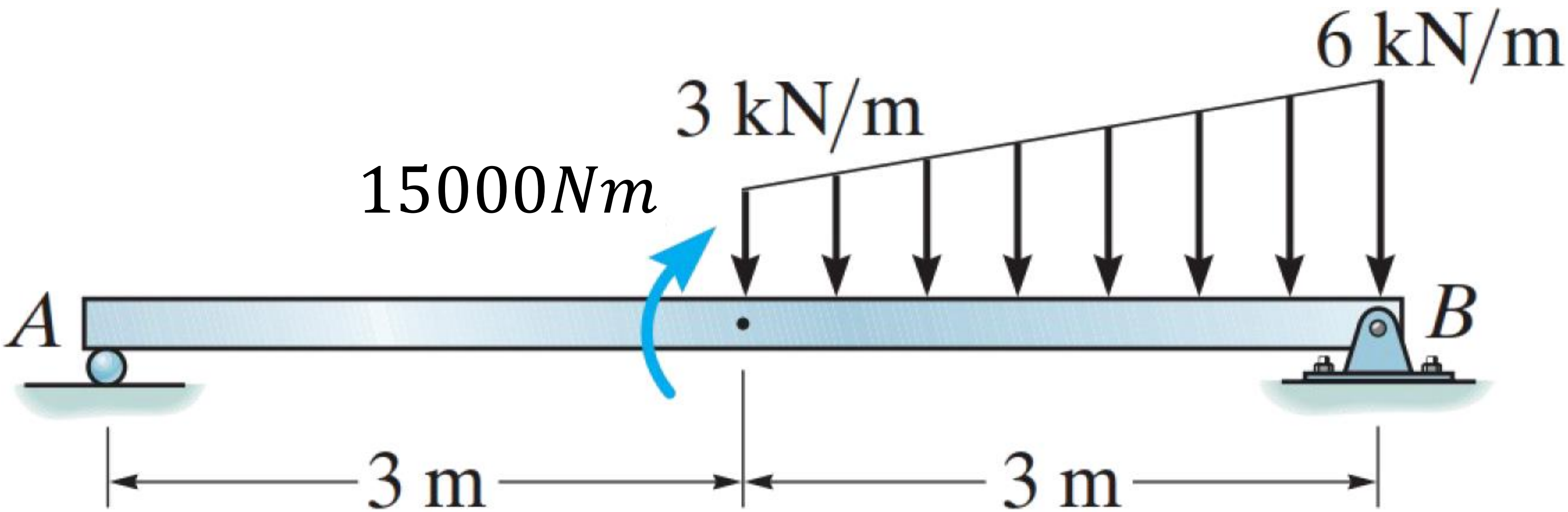
EXERCÍCIO 2

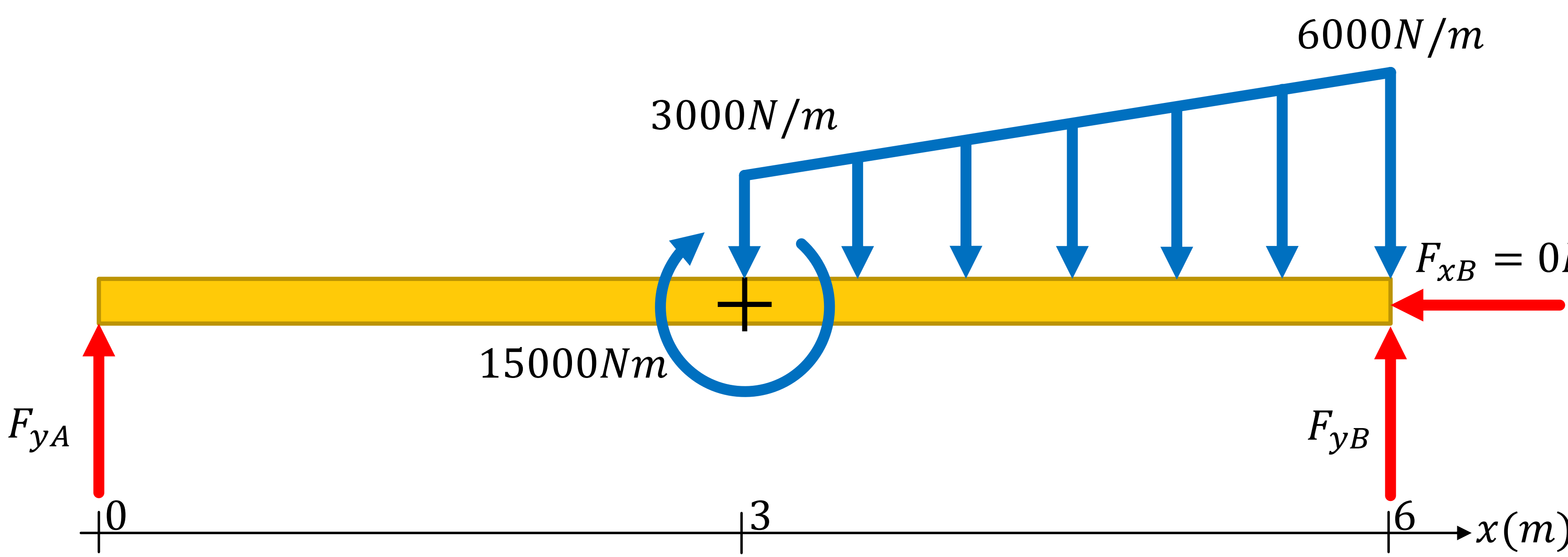
- Faça o diagrama de esforços solicitantes da viga abaixo:



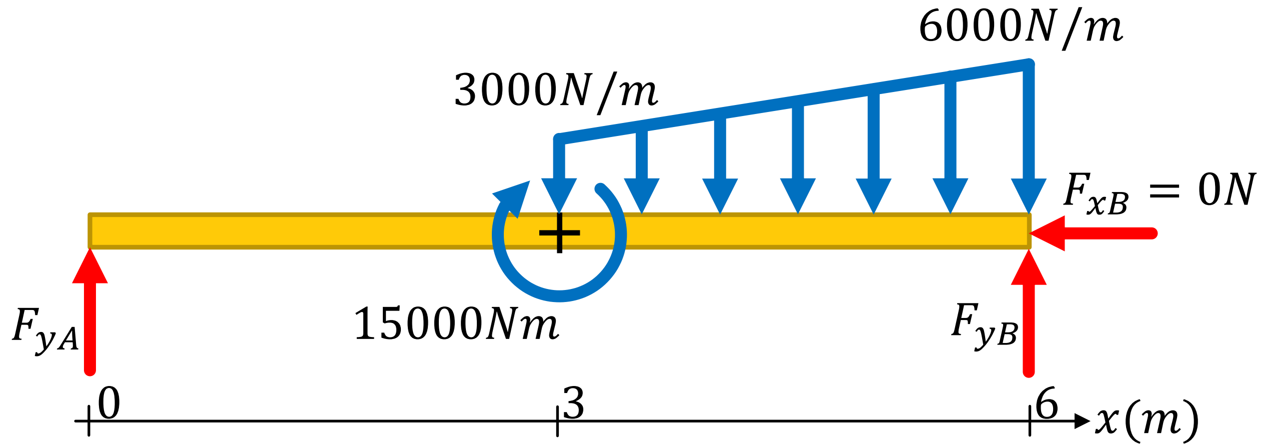
EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO

- Diagrama de Corpo Livre:

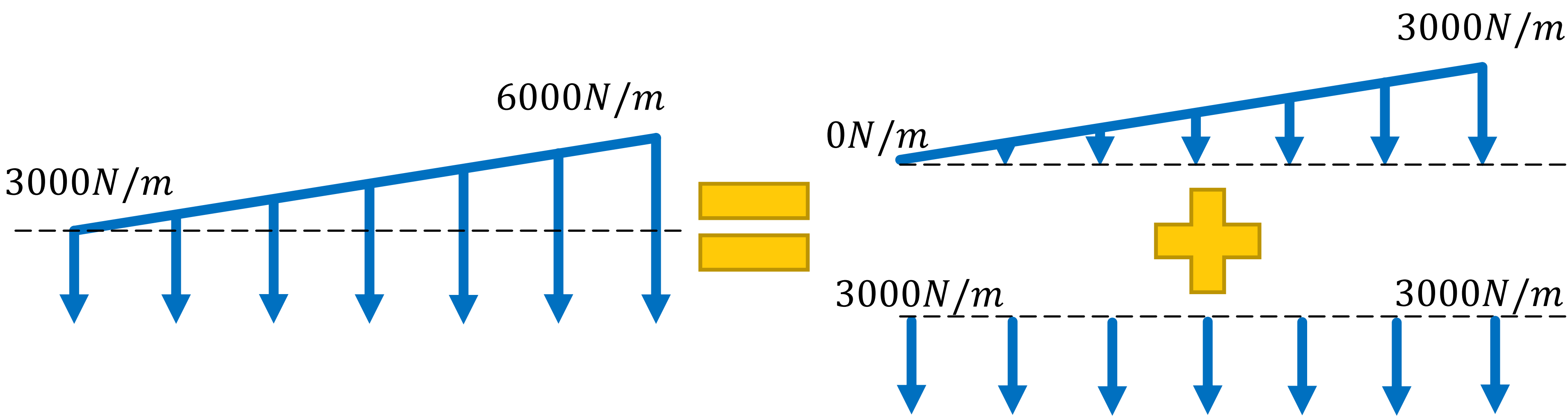




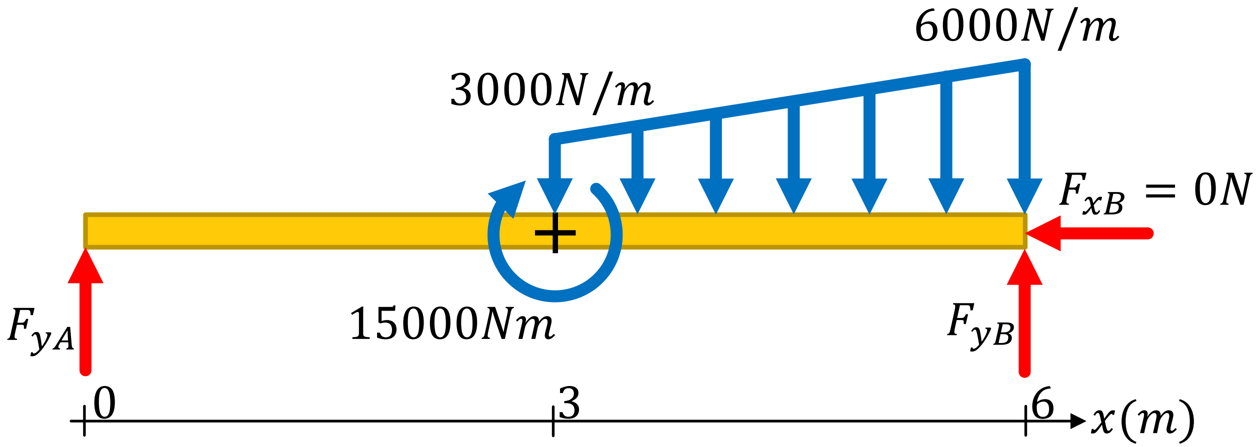
EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO



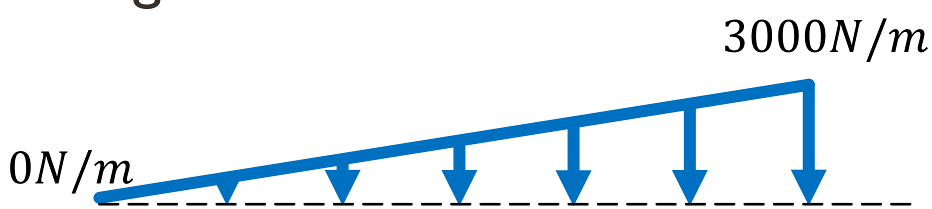
- Carregamentos distribuídos:



EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO



- Carregamento triangular:

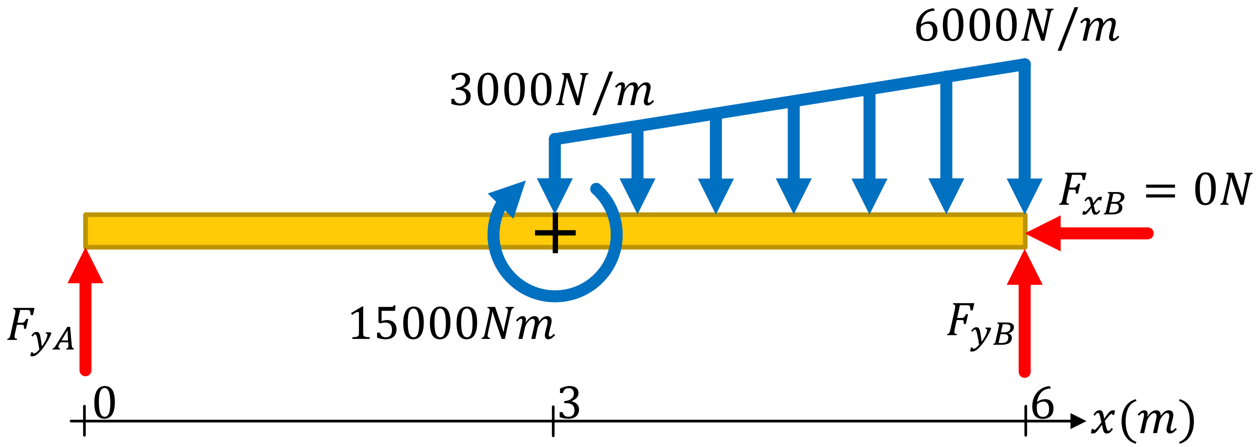


$$w_T(x) = -\alpha\langle x-3\rangle^1$$

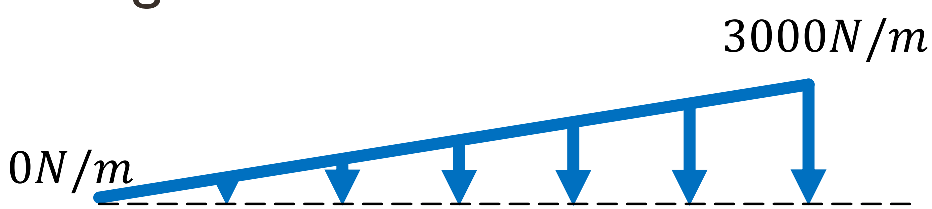
Coeficiente angular:

$$\alpha = \frac{\Delta V}{\Delta H} = \frac{\Delta w_T}{\Delta x}$$

EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO



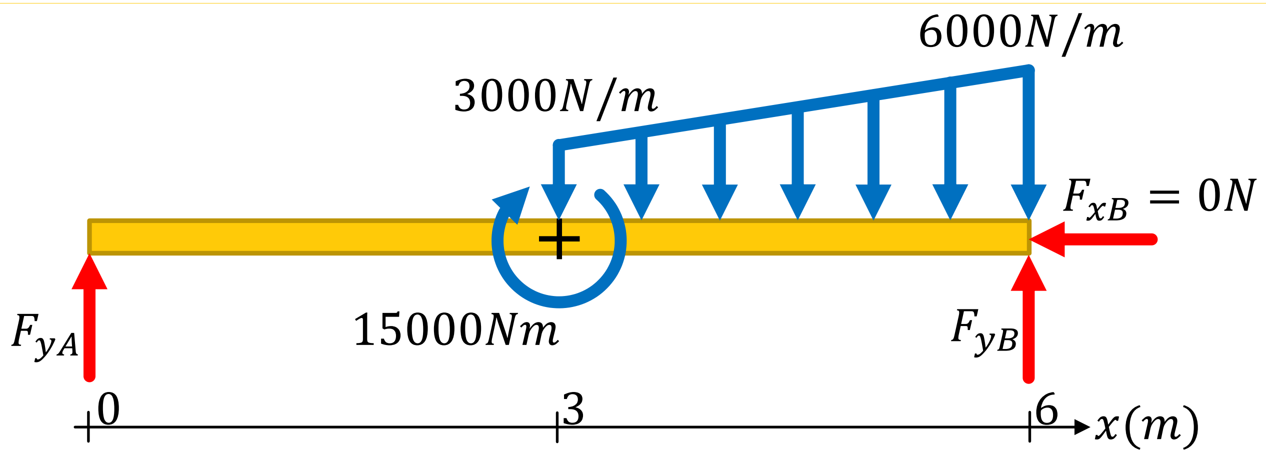
- Carregamento triangular:



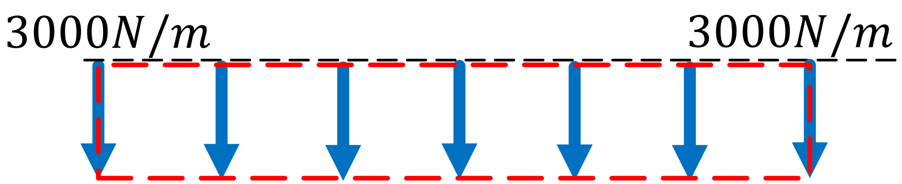
$$\alpha = \frac{\Delta w_T}{\Delta x} = \frac{3000 - 0}{6 - 3} = 1000\left[\frac{N}{m^2}\right]$$

$$w_T(x) = -\alpha\langle x - 3\rangle^1 = -1000\langle x - 3\rangle^1$$

EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO

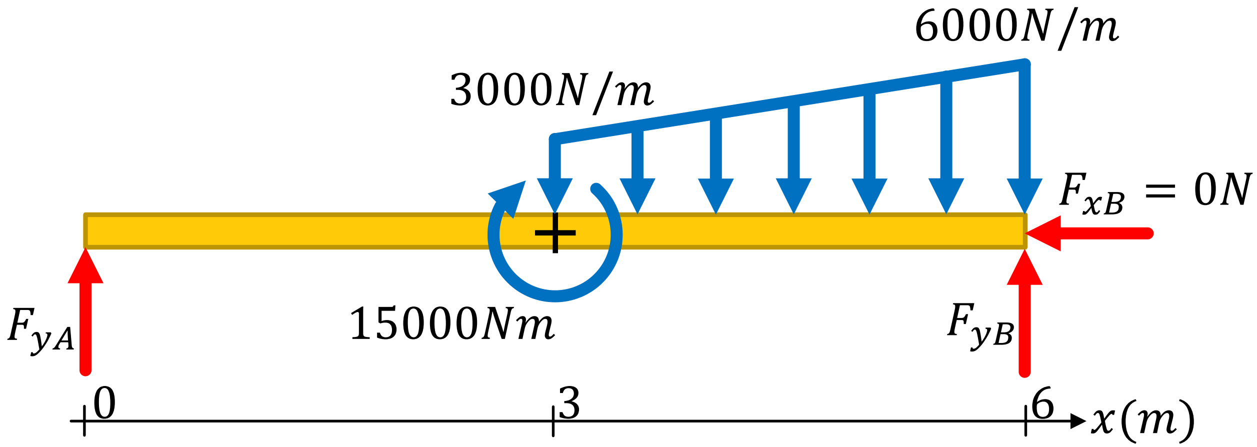


- Carregamento retangular:



$$w_R(x) = -3000\langle x-3\rangle^0$$

EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO



- Equação de carregamento:

$$q(x) = \underline{F_{yA}\langle x-0\rangle^{-1}} + \underline{15000\langle x-3\rangle^{-2}} - \underline{3000\langle x-3\rangle^{0} - 1000\langle x-3\rangle^{1}} + \underline{F_{yB}\langle x-6\rangle^{-1}}$$

EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO

- Equação de carregamento:

$$q(x) = F_{yA}\langle x-0\rangle^{-1} + 15000\langle x-3\rangle^{-2} - 3000\langle x-3\rangle^{0} - 1000\langle x-3\rangle^{1} + F_{yB}\langle x-6\rangle^{-1}$$

- Equação de força cortante:

$$V(x) = \int q(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a\rangle^{-1} d\lambda = \langle x-a\rangle^{0}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a\rangle^{0} d\lambda = \langle x-a\rangle^{1}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a\rangle^{-1} d\lambda = \langle x-a\rangle^{0}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a\rangle^{-2} d\lambda = \langle x-a\rangle^{-1}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a\rangle^{1} d\lambda = \frac{\langle x-a\rangle^{2}}{2}$$

$$V(x) = F_{yA}\langle x-0\rangle^{0} + 15000\langle x-3\rangle^{-1} - 3000\langle x-3\rangle^{1} - 500\langle x-3\rangle^{2} + F_{yB}\langle x-6\rangle^{0} + C_1$$

$C_1 = 0,$
pois
$V(0^-) = 0N$

Assim:

$$V(x) = F_{yA}\langle x-0\rangle^{0} + 15000\langle x-3\rangle^{-1} - 3000\langle x-3\rangle^{1} - 500\langle x-3\rangle^{2} + F_{yB}\langle x-6\rangle^{0}$$

EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO

- Equação de carregamento:

$$q(x) = F_{yA}\langle x-0\rangle^{-1} + 15000\langle x-3\rangle^{-2} - 3000\langle x-3\rangle^{0} - 1000\langle x-3\rangle^{1} + F_{yB}\langle x-6\rangle^{-1}$$

- Equação de força cortante:

$$V(x) = F_{yA}\langle x-0\rangle^{0} + 15000\langle x-3\rangle^{-1} - 3000\langle x-3\rangle^{1} - 500\langle x-3\rangle^{2} + F_{yB}\langle x-6\rangle^{0}$$

- Equação de Momento Fletor:

$$M(x) = \int V(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a\rangle^{-1} d\lambda = \langle x-a\rangle^{0}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a\rangle^{2} d\lambda = \frac{\langle x-a\rangle^{3}}{3}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a\rangle^{0} d\lambda = \langle x-a\rangle^{1}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a\rangle^{1} d\lambda = \frac{\langle x-a\rangle^{2}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a\rangle^{0} d\lambda = \langle x-a\rangle^{1}$$

$$M(x) = F_{yA}\langle x-0\rangle^{1} + 15000\langle x-3\rangle^{0} - 1500\langle x-3\rangle^{2} - 167\langle x-3\rangle^{3} + F_{yB}\langle x-6\rangle^{1} + C_2$$

$C_2 = 0$, pois
$M(0^-) = 0Nm$

Assim:

$$M(x) = F_{yA}\langle x-0\rangle^{1} + 15000\langle x-3\rangle^{0} - 1500\langle x-3\rangle^{2} - 167\langle x-3\rangle^{3} + F_{yB}\langle x-6\rangle^{1}$$

EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO

- Reações de apoio:

$$\text{Utilizar condições de contorno para } x = l^+ \begin{cases} V(l^+) = 0N \\ M(l^+) = 0Nm \end{cases}$$

$$\text{nesse caso } x = 6^+$$

$$V(6^+) = F_{yA}\underline{\langle 6^+ - 0\rangle^0} + 15000\langle 6^+ - 3\rangle^{-1} - 3000\langle 6^+ - 3\rangle^1 - 500\langle 6^+ - 3\rangle^2 + F_{yB}\langle 6^+ - 6\rangle^0$$

Grau 0: Função Degrau

$$\langle x - a\rangle^0 = \begin{cases} 0 \text{ para } x < a \\ 1 \text{ para } x \geq a \end{cases}$$

$$V(6^+) = F_{yA} * \underline{1} + \cdots$$

EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO

- Reações de apoio:

$$\text{Utilizar condições de contorno para } x = l^{+} \begin{cases} V(l^{+}) = 0N \\ M(l^{+}) = 0Nm \end{cases}$$

$$\text{nesse caso } x = 6^{+}$$

$$V(6^{+}) = F_{yA}\langle 6^{+} - 0\rangle^{0} + 15000\underline{\langle 6^{+} - 3\rangle^{-1}} - 3000\langle 6^{+} - 3\rangle^{1} - 500\langle 6^{+} - 3\rangle^{2} + F_{yB}\langle 6^{+} - 6\rangle^{0}$$

Grau -1: Função Impulso

$$\langle x - a\rangle^{-1} = \begin{cases} 0 \text{ para } x < a \\ \infty \text{ para } x = a \\ 0 \text{ para } x > a \end{cases}$$

$$V(6^{+}) = F_{yA} * 1 + 15000 * \underline{0} + \cdots$$

EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO

- Reações de apoio:

Utilizar condições de contorno para $x = l^+ \begin{cases} V(l^+) = 0N \\ M(l^+) = 0Nm \end{cases}$

nesse caso $x = 6^+$

$$V(6^+) = F_{yA}\langle 6^+ - 0\rangle^0 + 15000\langle 6^+ - 3\rangle^{-1} - 3000\underline{\langle 6^+ - 3\rangle^1} - 500\langle 6^+ - 3\rangle^2 + F_{yB}\langle 6^+ - 6\rangle^0$$

Grau 1: Função Rampa

$$\langle x - a\rangle^1 = \begin{cases} 0 \text{ para } x < a \\ (x - a)^1 \text{ para } x \geq a \end{cases}$$

$$V(6^+) = F_{yA} * 1 + 15000 * 0 - 3000 * \underline{(6 - 3)^1} + \cdots$$

EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO

- Reações de apoio:

Utilizar condições de contorno para $x = l^+ \begin{cases} V(l^+) = 0N \\ M(l^+) = 0Nm \end{cases}$

nesse caso $x = 6^+$

$$V(6^+) = F_{yA}\langle 6^+ - 0\rangle^0 + 15000\langle 6^+ - 3\rangle^{-1} - 3000\langle 6^+ - 3\rangle^1 - 500\underline{\langle 6^+ - 3\rangle^2} + F_{yB}\langle 6^+ - 6\rangle^0$$

Grau 2: Função Parábola

$$\langle x - a\rangle^2 = \begin{cases} 0 \text{ para } x < a \\ (x-a)^2 \text{ para } x \geq a \end{cases}$$

$$V(6^+) = F_{yA} * 1 + 15000 * 0 - 3000 * (6-3)^1 - 500 * \underline{(6-3)^2} + \cdots$$

EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO

- Reações de apoio:

$$\text{Utilizar condições de contorno para } x = l^+ \begin{cases} V(l^+) = 0N \\ M(l^+) = 0Nm \end{cases}$$

$$\text{nesse caso } x = 6^+$$

$$V(6^+) = F_{yA}\langle 6^+ - 0\rangle^0 + 15000\langle 6^+ - 3\rangle^{-1} - 3000\langle 6^+ - 3\rangle^1 - 500\langle 6^+ - 3\rangle^2 + F_{yB}\langle 6^+ - 6\rangle^0$$

Grau 0: Função Degrau

$$\langle x - a\rangle^0 = \begin{cases} 0 \text{ para } x < a \\ 1 \text{ para } x \geq a \end{cases}$$

$$V(6^+) = F_{yA} * 1 + 15000 * 0 - 3000 * (6 - 3)^1 - 500 * (6 - 3)^2 + F_{yB} * 1 = 0$$

$$F_{yA} + F_{yB} = 13500$$

EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO

- Reações de apoio:

Utilizar condições de contorno para $x = l^+ \begin{cases} V(l^+) = 0N \\ M(l^+) = 0Nm \end{cases}$

nesse caso $x = 6^+$

Já temos a primeira equação: $F_{yA} + F_{yB} = 13500$

Segunda equação virá de $M(6^+)$:

$$M(6^+) = F_{yA}\langle 6^+ - 0\rangle^1 + 15000\langle 6^+ - 3\rangle^0 - 1500\langle 6^+ - 3\rangle^2 - 167\langle 6^+ - 3\rangle^3 + F_{yB}\langle 6^+ - 6\rangle^1$$

$$M(6^+) = F_{yA} * 6^1 + 15000 * 1 - 1500 * (6-3)^2 - 167 * (6-3)^3 + F_{yB} * (6-6)^1 = 0$$

$$F_{yA} = 500N$$

Substituindo F_{yA} na primeira equação:

$$F_{yB} = 13000N$$

EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO

- Reescrever equação de Força Cortante:

$$V(x) = 500\langle x-0\rangle^0 + 15000\langle x-3\rangle^{-1} - 3000\langle x-3\rangle^1 - 500\langle x-3\rangle^2 + 13000\langle x-6\rangle^0$$

- Reescrever equação de Momento Fletor:

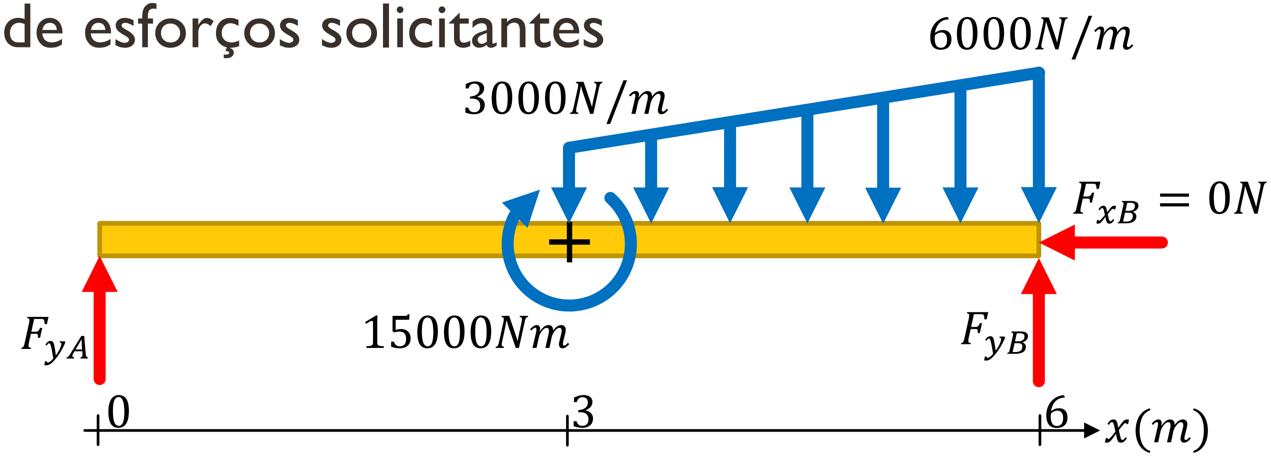
$$M(x) = 500\langle x-0\rangle^1 + 15000\langle x-3\rangle^0 - 1500\langle x-3\rangle^2 - 167\langle x-3\rangle^3 + 13000\langle x-6\rangle^1$$

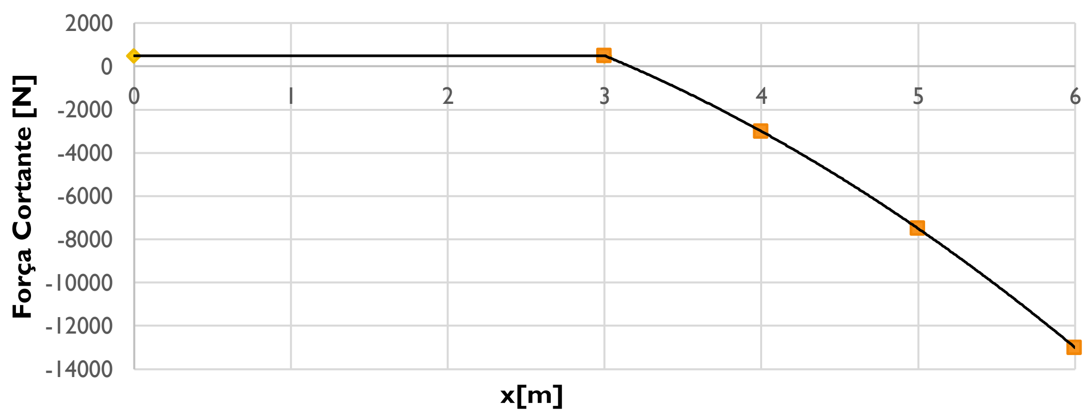
- Tabela de Valores:

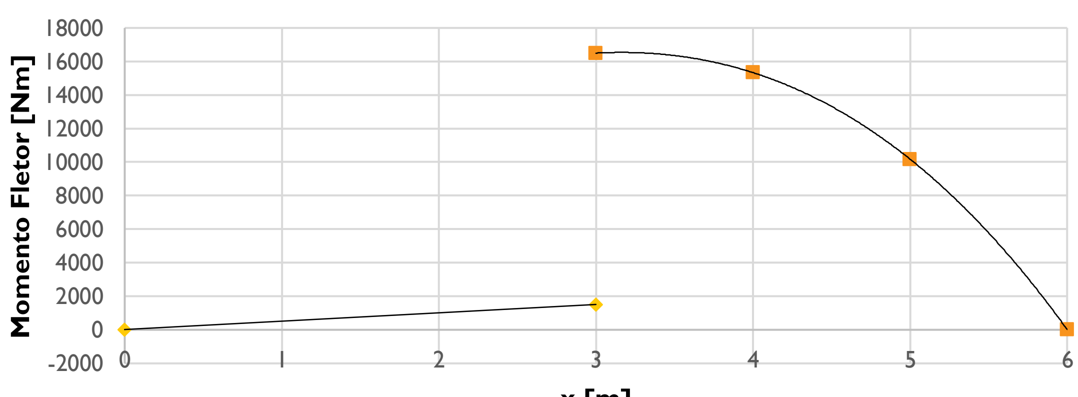
X[m]	V(x)[N]	M(x)[Nm]
0^+	500	0
3^-	500	1500
3^+	500	16500
4	-3000	15333
5	-7500	10164
6^-	-13000	-9

EXERCÍCIO 2 - SOLUÇÃO

- Diagramas de esforços solicitantes

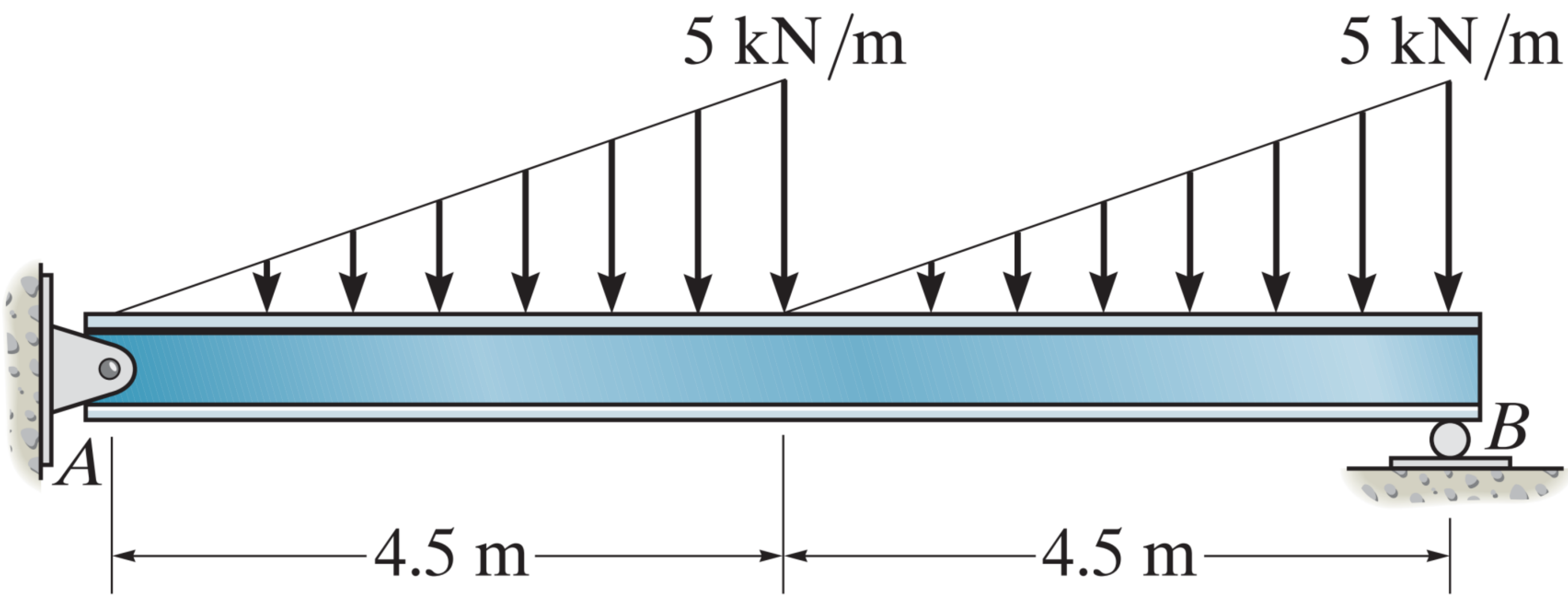






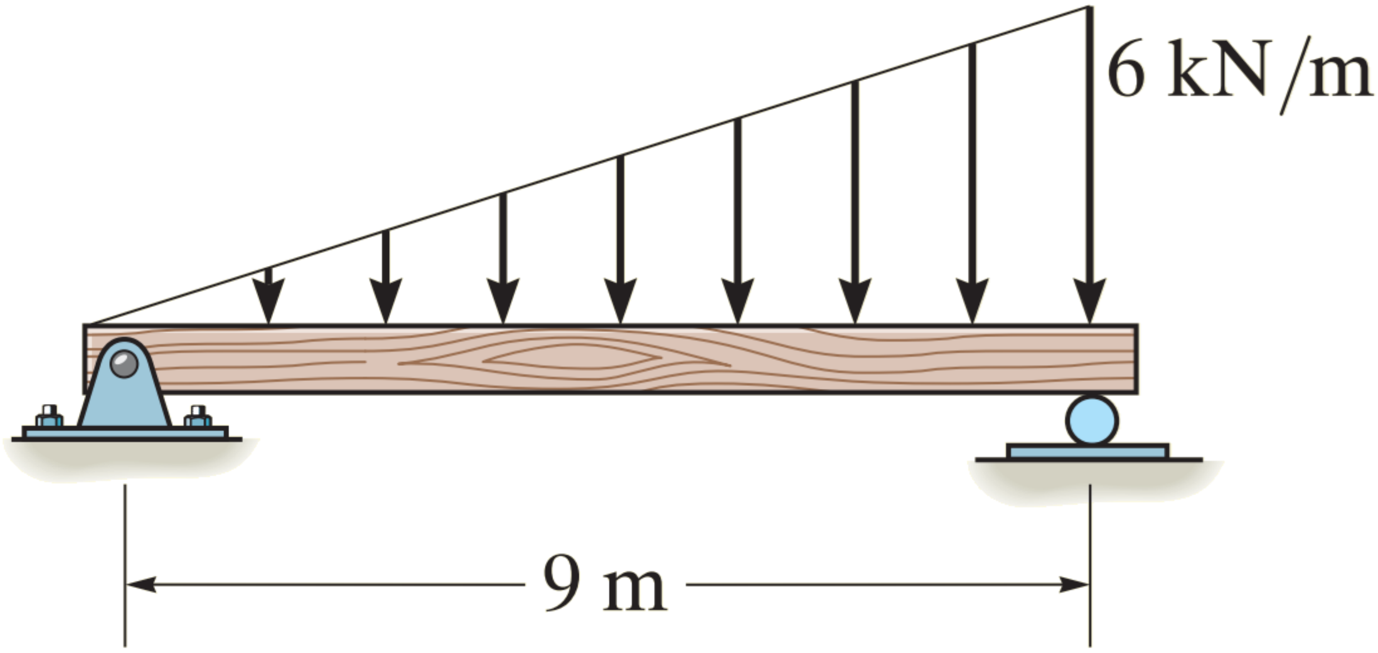
EXERCÍCIO 3

- Faça o diagrama de esforços solicitantes da viga abaixo:



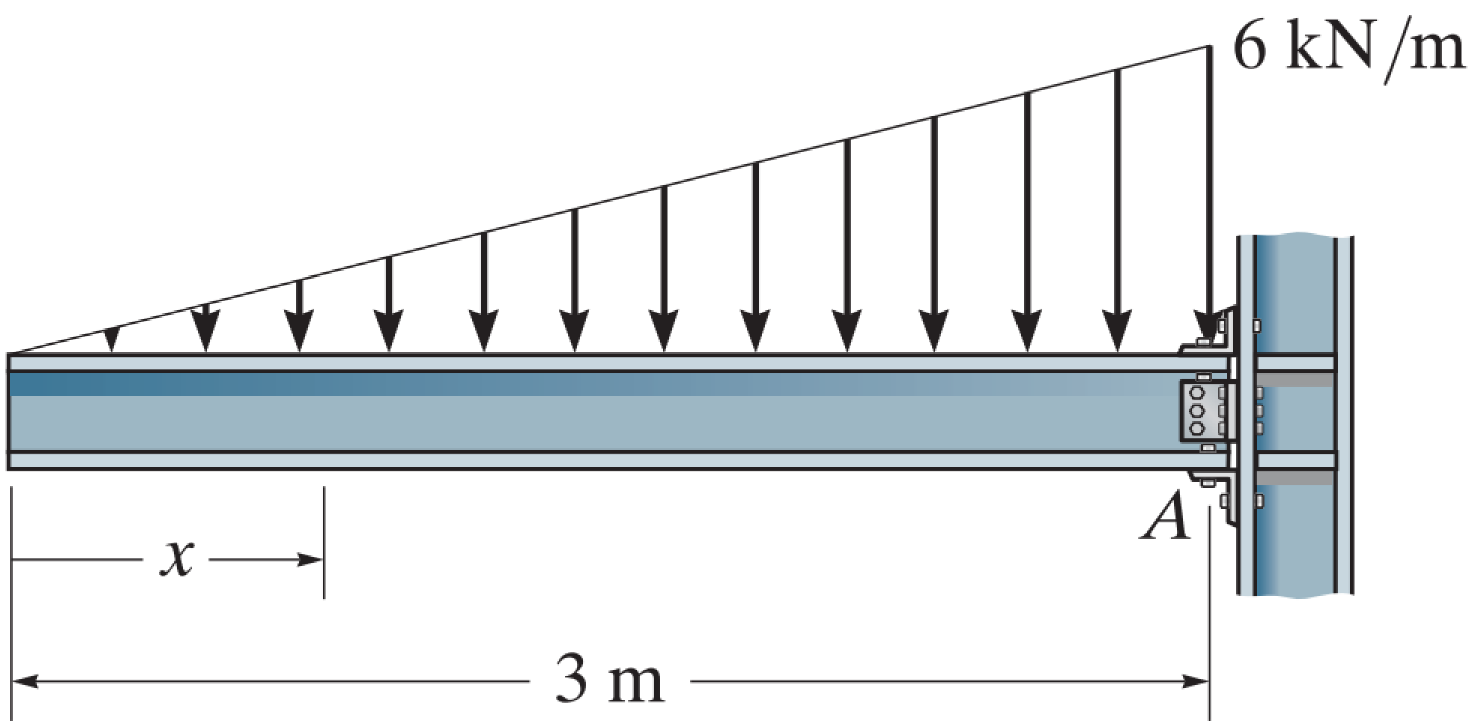
EXERCÍCIO 4

- Faça o diagrama de esforços solicitantes da viga abaixo:



EXERCÍCIO 5

- Faça o diagrama de esforços solicitantes da viga abaixo:



REFERÊNCIAS

- GERE, J. M. Mecânica dos materiais. Tradução da: 7. edição americana São Paulo, SP: Cengage Learning, 2011. E-BOOK.
- HIBBELER, R. C., Resistência de materiais. Prentice Hall, 2010.
- SCHIEL, F. - Introdução à resistência dos materiais, apostila, vol.1, Escola de Engenharia de São Carlos, depto de publicações.
- COELHO, E.; MORI, D. e outros - Exercícios propostos de resistência dos materiais - Escola de Engenharia de São Carlos, depto de publicações.
- NASH, W. - Resistência dos materiais, coleção SCHAUM, Ed. Mc Graw Hill.
- BEER, Ferdinand - Resistência dos materiais, Ed. Mc Graw Hill.
- TIMOSHENKO, S. - Resistência dos Materiais, Ed. livros técnicos e científicos, vol.1.
- WILLEM, N.; EASLEY, J.; ROLFE, S. - Resistência dos materiais, Ed. Mc Graw Hill.