

# EM423 – RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

## AULA 7

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FABIO MAZZARIOL SANTICIOLLI – [FABIOMAZ@UNICAMP.BR](mailto:FABIOMAZ@UNICAMP.BR)

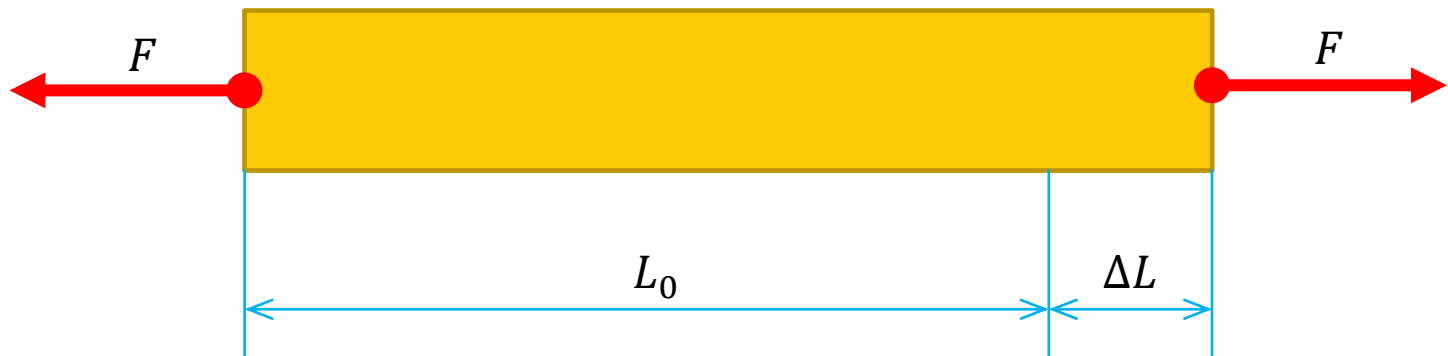
LAYSE BOERE – [LAYSEBOERE@GMAIL.COM](mailto:LAYSEBOERE@GMAIL.COM)

## ALONGAMENTO ( $\Delta L$ )

- Uma barra inicialmente livre de esforços externos tem comprimento original  $L_0$ .



- Ao aplicar-se uma força longitudinal nesta barra, ela se deformará. O comprimento acrescido é chamado alongamento ( $\Delta L$ ):



## ALONGAMENTO ( $\Delta L$ )

- É possível encontrar o alongamento a partir da seguinte integral indefinida:

$$\Delta L(x) = \int \frac{1}{E * A} N(x) dx$$

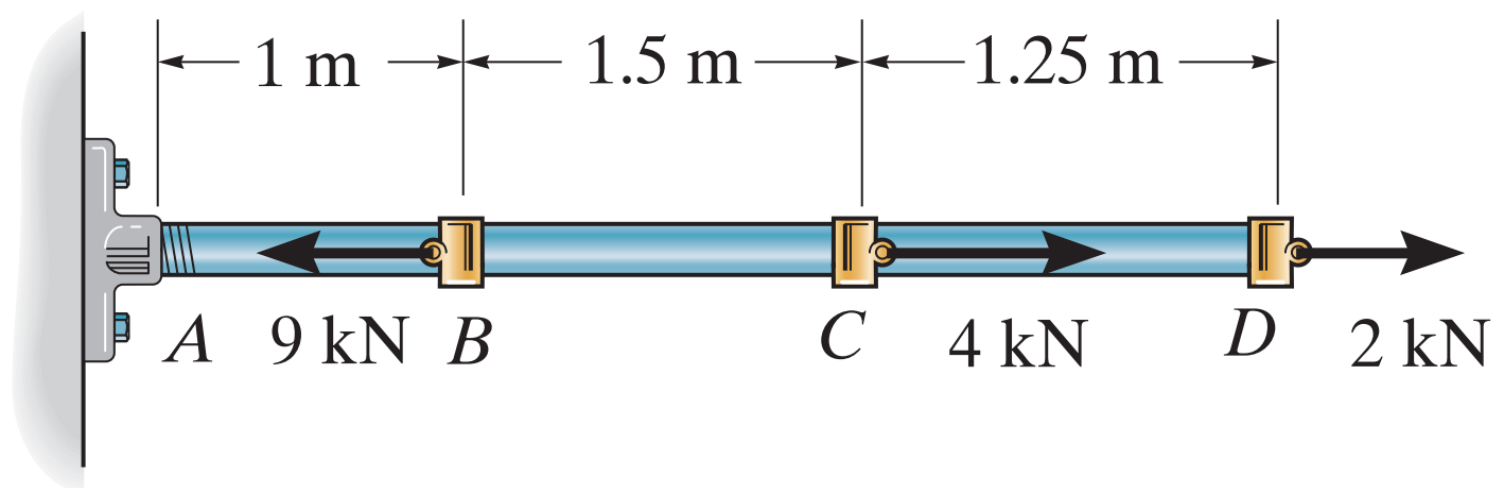
Com:

$E$ : Módulo Elástico

$A$ : Área da Seção Transversal

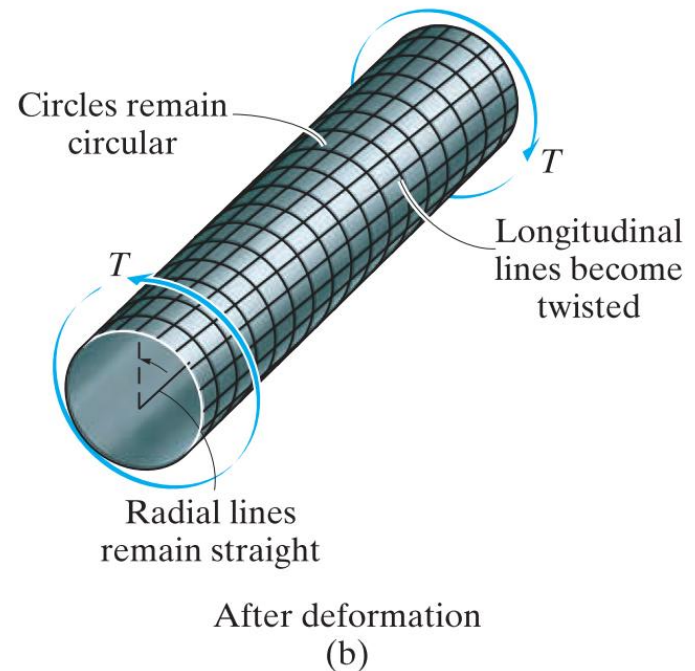
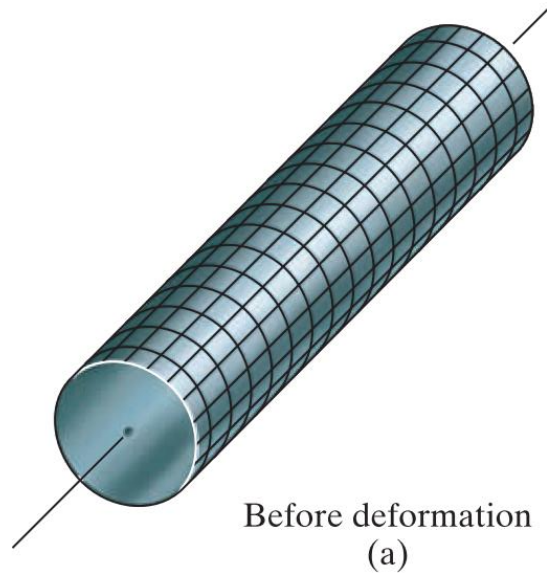
## EXERCÍCIO I

- Determine o alongamento ao longo da viga maciça feita de alumínio com 25mm diâmetro.



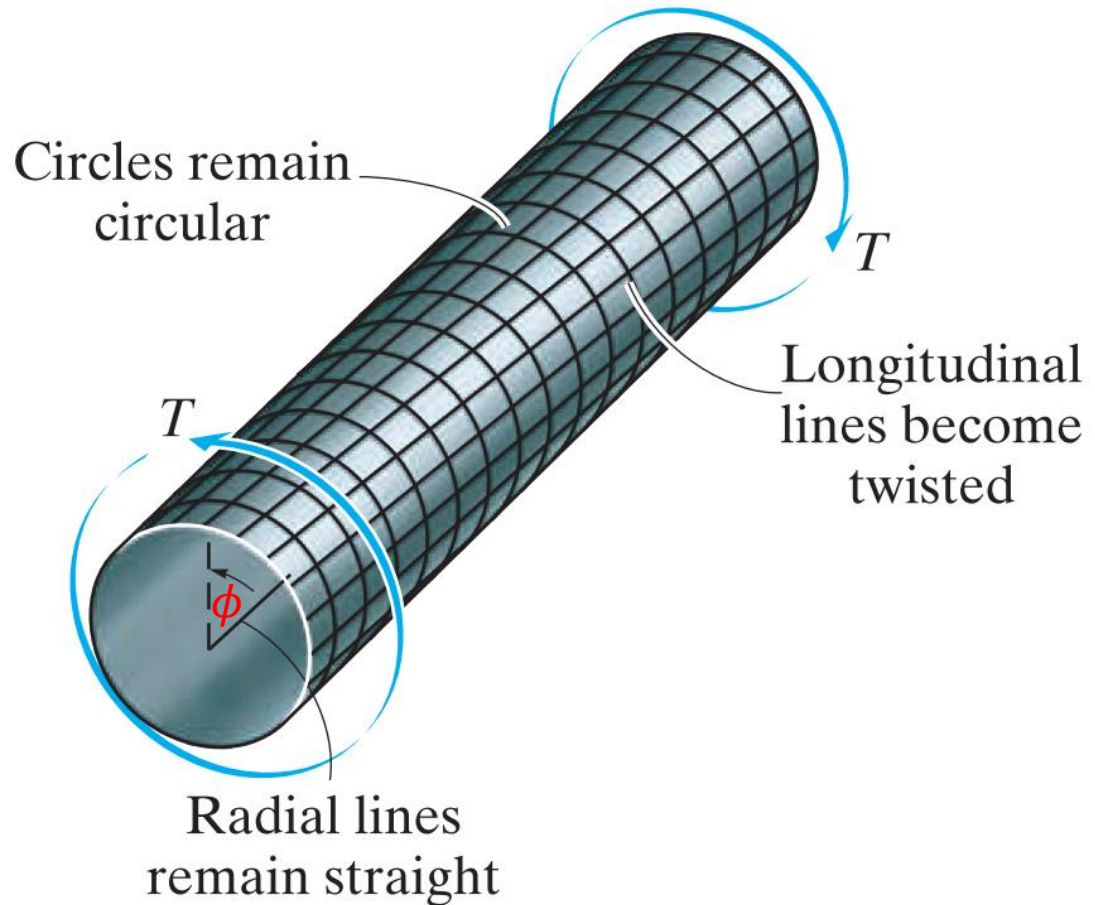
# TORÇÃO

- A torção ocorre quando existe um torque que tende a torcer um elemento em torno do seu eixo longitudinal.



# TORÇÃO

- O ângulo que seção transversal torceu em relação ao um referencial no eixo é chamado ângulo de torção  $\phi$ .



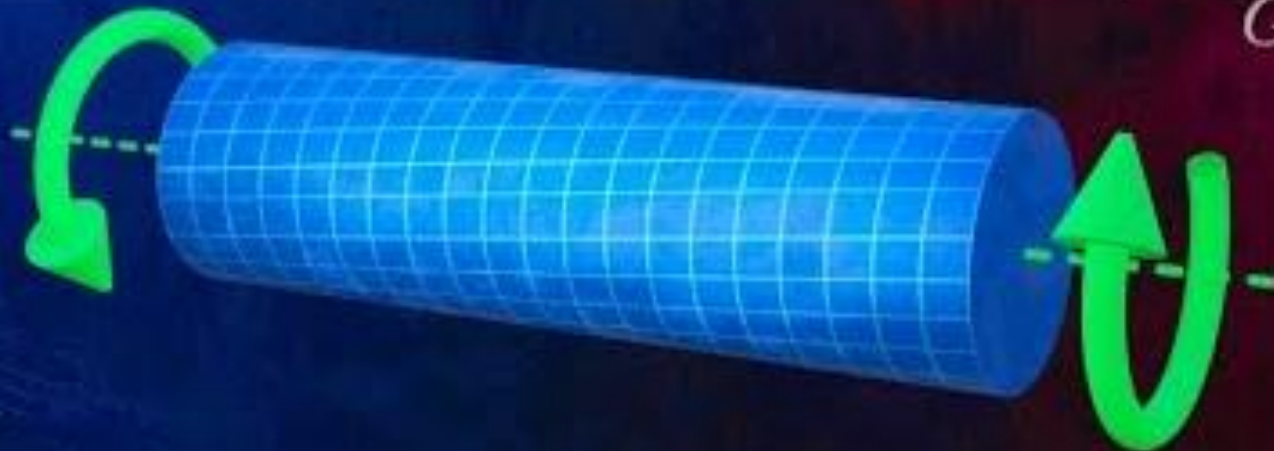
# TORÇÃO

## UNDERSTANDING TORSION

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

$$\theta = \frac{TL}{GJ}$$

$$\gamma = \frac{\rho\theta}{L}$$



## ÂNGULO DE TORÇÃO ( $\phi$ )

- É possível encontrar o ângulo de torção, em radianos, a partir da seguinte integral indefinida:

$$\phi(x) = \int \frac{1}{G * I_p} M_x(x) dx$$

Com:

$G$ : Módulo Elástico Transversal ou Módulo de Cisalhamento

$I_p$ : Momento de Inércia Polar de Área



## MÓDULO DE CISALHAMENTO ( $G$ )

- Representa a rigidez do material frente ao cisalhamento, produzido por forças cortantes ou torque.

Material	$G$ (GPa)
Aço	75,8
Cobre	63,4
Titânio	41,4
Vidro	26,2
Alumínio	25,5
Madeira	4,0
Polietileno	0,117
Borracha	0,0003

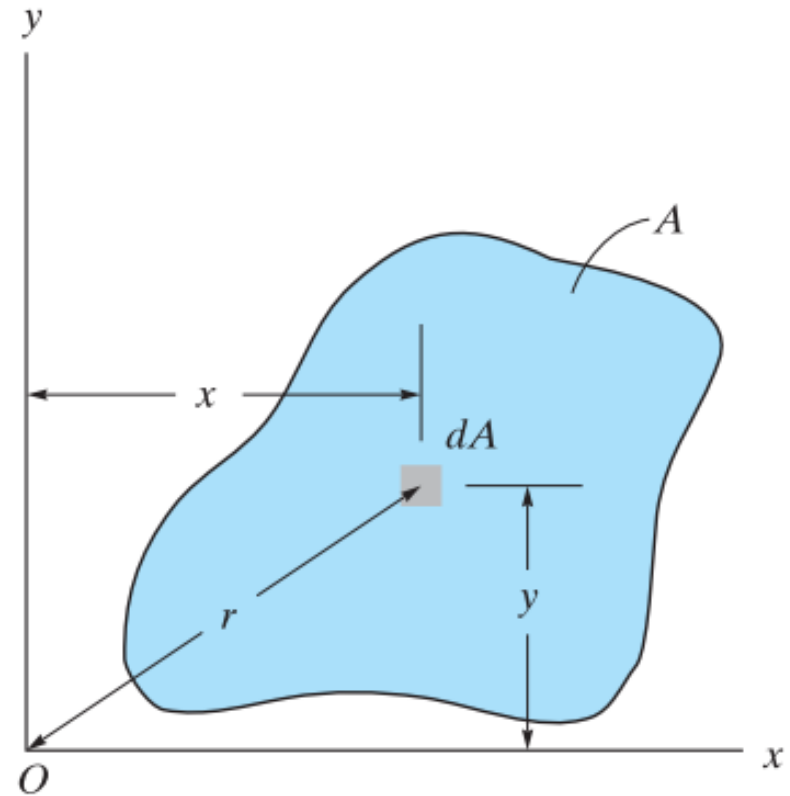
# MOMENTO DE INÉRCIA POLAR

■ O que é Momento de Inércia Polar de Área ( $I_p$  ou  $J_p$ )?

É uma quantificação do “espalhamento” da seção transversal em torno do seu centro.

É uma propriedade geométrica que influencia na rigidez da viga em relação ao torque.

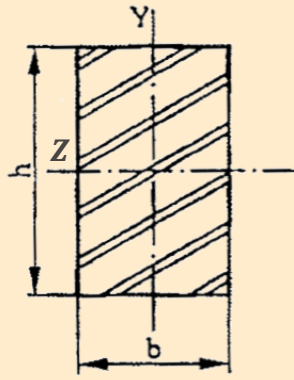
■ Como ele pode ser calculado?



$$I_p = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

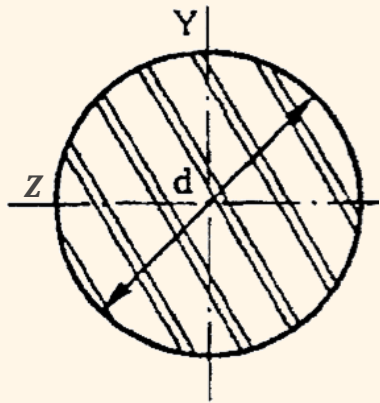
## Seção

## Momento de Inércia

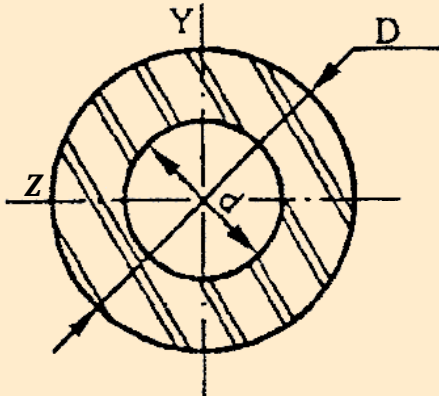


$$I_Z = \frac{b * h^3}{12}$$

$$I_Y = \frac{h * b^3}{12}$$



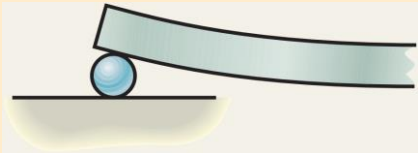
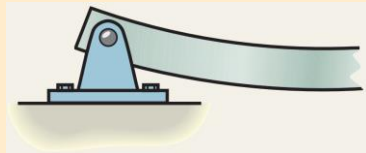
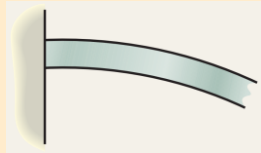
$$I_Z = I_Y = \frac{\pi * d^4}{64}$$



$$I_Z = I_Y = \frac{\pi * (D^4 - d^4)}{64}$$

# CUIDADO!!!

- Novas constantes de integração e reações de apoio aparecerão!!!
- Elas devem ser encontradas a partir dos apoios:

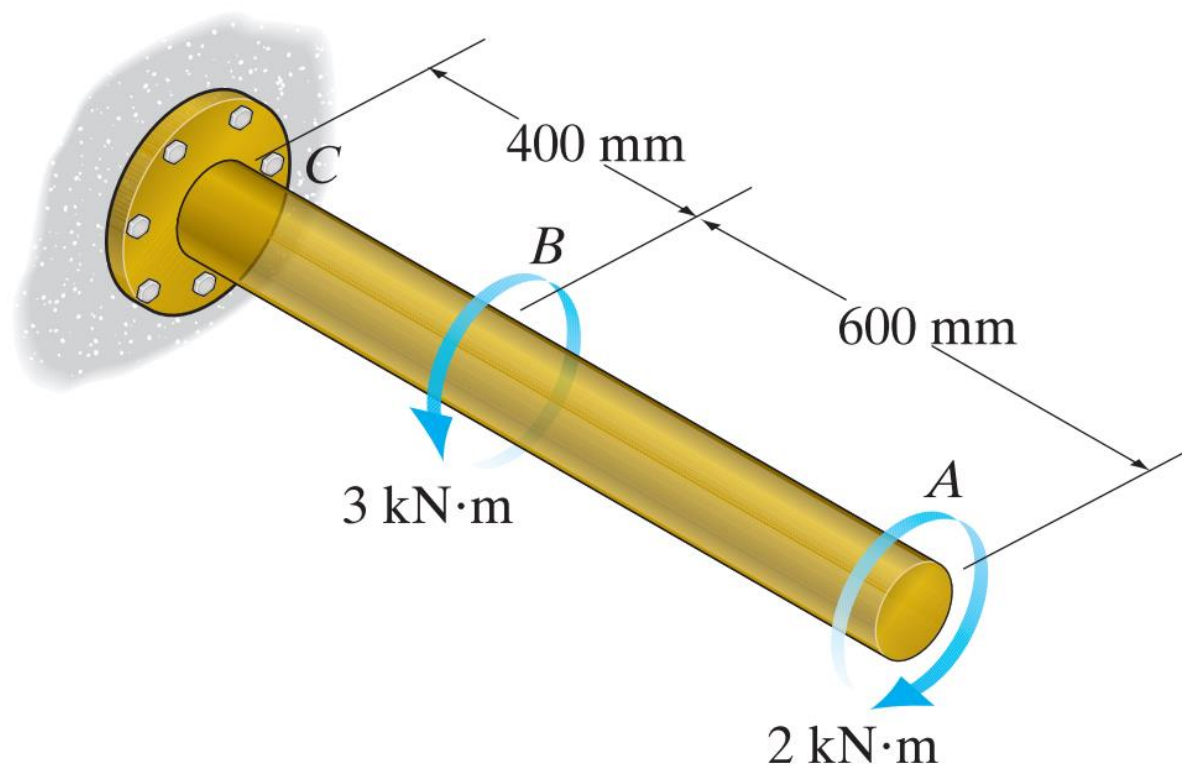
	Apoio Rolete	Apoio Pino	Apoio Fixo
Representação:			
Condição de Contorno:	$v = 0[m]$	$v = 0[m]$ $\Delta L = 0[m]$ $\phi = 0[rad]$	$\theta = 0[rad]$ $v = 0[m]$ $\Delta L = 0[m]$ $\phi = 0[rad]$
Reação de Apoio:	Vertical	Vertical Horizontal Torque	Vertical Horizontal Momento Torque

# REQUISITOS DO PROGRAMA (TRABALHO)

- O programa deve ser capaz de:
  - Resolver os problemas (viga  $1D$  no eixo  $x$ , forças no eixo  $x$  e  $y$ , torques no eixo  $x$ , momentos no eixo  $z$ ) tratados em EM423;
  - Lidar com forças (principais e decompostas), torques e momentos;
  - Lidar com carregamentos distribuídos sobre uma linha (polinomiais);
  - Determinar reações de apoio;
  - Plotar os diagramas de esforços solicitantes.
  - Receber propriedades (todas as necessárias) do material e da seção transversal da viga.
  - Plotar os gráficos de inclinação e deflexão da viga.
  - Plotar os gráficos de alongamento e de ângulo de torção da viga.
- ✳ A lista de requisitos será incrementada conforme novos assuntos forem trabalhados.

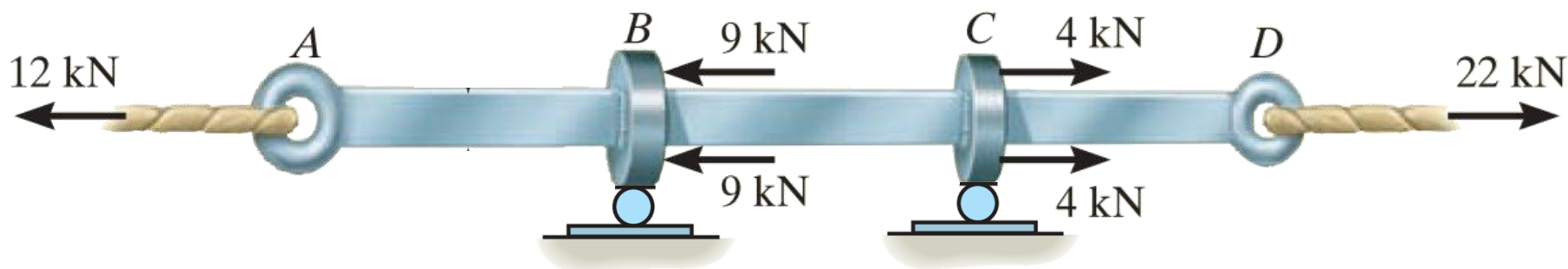
## EXERCÍCIO 2

- Determine os diagramas de esforços solicitantes e o ângulo de torção do eixo abaixo. Ele é feito de cobre, é maciço e tem um diâmetro de 50mm.



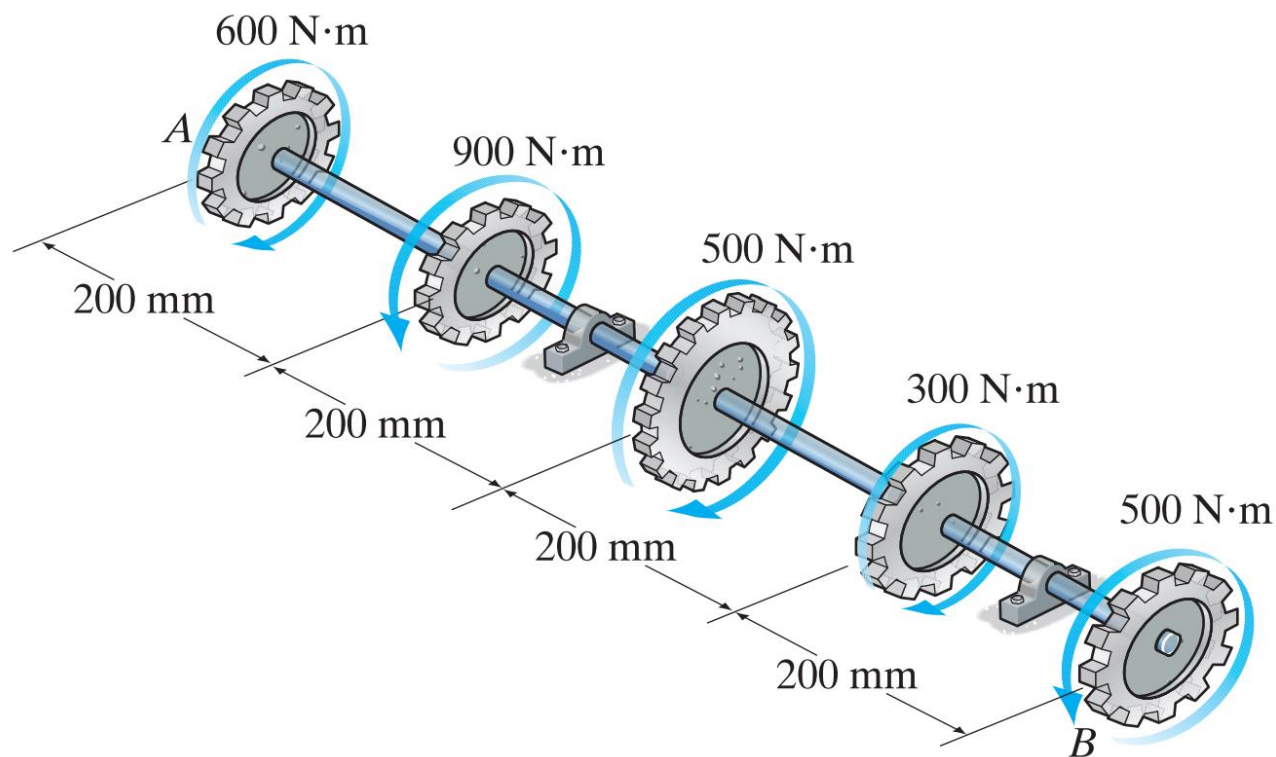
## EXERCÍCIO 3

- A seção transversal da viga tem altura 35mm e espessura 10mm. Cada trecho tem 1 metro de comprimento. Faça o diagrama dos esforços solicitantes e o gráfico do alongamento dado  $E = 13[GPa]$ .



## EXERCÍCIO 4

- Determine os diagramas de esforços solicitantes e o ângulo de torção do eixo abaixo. O eixo de aço tem um diâmetro externo de 40mm e um diâmetro interno de 37mm.





## REFERÊNCIAS

- GERE, J. M. Mecânica dos materiais. Tradução da: 7. edição americana São Paulo, SP: Cengage Learning, 2011. E-BOOK.
- HIBBELER, R. C., Resistência de materiais. Prentice Hall, 2010.
- SCHIEL, F. - Introdução à resistência dos materiais, apostila, vol. I, Escola de Engenharia de São Carlos, depto de publicações.
- COELHO, E.; MORI, D. e outros - Exercícios propostos de resistência dos materiais - Escola de Engenharia de São Carlos, depto de publicações.
- NASH, W. - Resistência dos materiais, coleção SCHAUM, Ed. Mc Graw Hill.
- BEER, Ferdinand - Resistência dos materiais, Ed. Mc Graw Hill.
- TIMOSHENKO, S. - Resistência dos Materiais, Ed. livros técnicos e científicos, vol. I.
- WILLEM, N.; EASLEY, J.; ROLFE, S. - Resistência dos materiais, Ed. Mc Graw Hill.