Relatório 2º Projeto ASA 2021/2022

Afonso Matos, ist1103479

Rafael Girão, ist199303

Grupo 072

Descrição do Problema e da Solução

Como segundo projeto de ASA foi proposto que, dado um grafo não dirigido $G = (V, E)$, onde: - Cada vértice representa uma região; - Cada arco entre dois vértices representa uma ligação ferroviária direta entre estas - o peso de cada arco representa o valor comercial que a construção desta ligação ferroviária traria;

se efetue um algoritmo que tenha como receba como input os arcos deste grafo e devolva o valor máximo de trocas comerciais, minimizando o número de troços ferroviários construídos - obviamente, de modo a que se possa ir de uma região arbitrária para outra.

Em primeiro lugar, é necessário observar que minimizar o número de troços que ligam as regiões (continuando a ser possível viajar de qualquer região para qualquer outra), corresponde a criar uma *Spanning Tree* do grafo, visto que satifaz a restrição de ligar todas as regiões (grafo ligado) usando o menor número de troços possível.

Como temos também como objetivo obter o valor máximo de trocas comerciais, concluimos que uma possível solução para o problema dado passa por criar uma *Maximum Spanning Tree* (MST) do grafo, dado que satisfaz adicionalmente o requisito de maximizar o valor dos pesos dos arcos. A solução propriamente dita será devolver o somatório do peso de todos os arcos da árvore criada.

Análise Teórica

De uma maneira *high-level*, o algoritmo criado começa por ler os arcos do grafo do *stdin* ($O(E)$); ordena-os por ordem decrescente do valor dos seus pesos, recorrendo ao *introsort* do C++ (que, da sua documentação, tem complexidade $\theta(NlogN)$); aplica o algoritmo de Kruskal (detalhado abaixo); finalmente, devolve o somatório dos pesos dos arcos na MST criada (o pior caso será quando G é esparso e somatório terá que percorrer todos os arcos iniciais, ou seja, $O(E)$).

O algoritmo de Kruskal implementado pode ser descrito pelo seguinte pseudocódigo: - Inicializar um conjunto MST vazio, e um conjunto P, inicialmente com V árvores disjuntas ($O(V)$). - Para cada arco existente: ($O(E)$) - Encontrar a raíz das árvores dos dois nós do arco ($O(1)$, devido à condição abaixo, a recursão implementada não deverá ter que percorrer mais do que um *parent*) - Se as raízes forem diferentes, adicionar o arco à MST, e definir o 2º nó do arco como pai do 1º. ($O(1)$)

Então, como $O(V) < O(V + E) < O(ElogE)$, conclui-se que o programa na sua totalidade terá complexidade ($O(ElogE)$), vindo esta complexidade final do algoritmo de ordenação usado. É de notar que a implementação realiza a escolha greedy de selecionar o arco com maior peso, dentro dos possíveis, dado que os arcos são pré-ordenados como descrito acima.

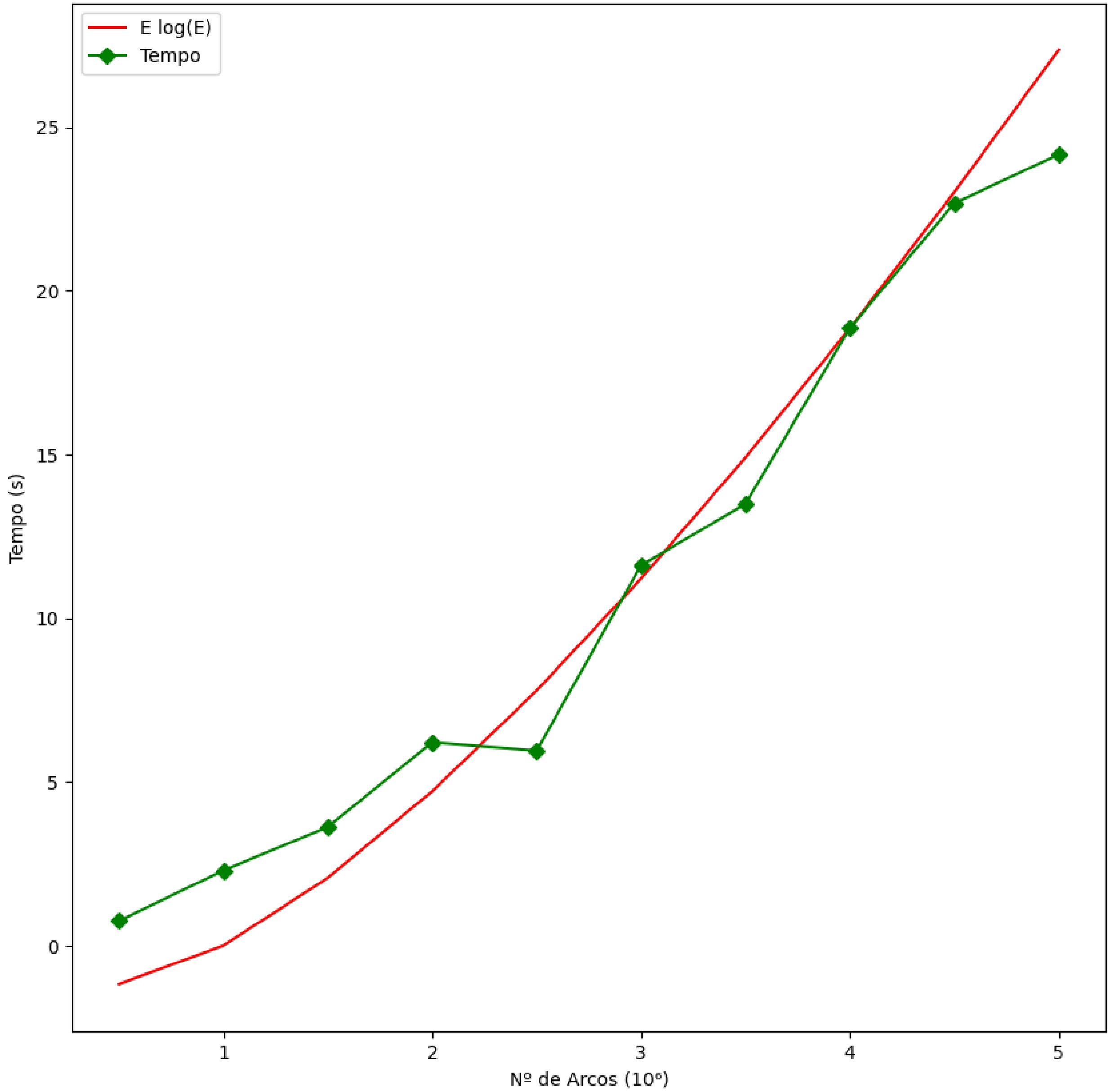
Complexidade Espacial

O algoritmo implementado começa por guardar um vetor com todos os arcos ($O(E)$), regista uma vetor MST onde, no pior caso (um grafo inicial esparso), o algoritmo de Kruskal guardará todos os arcos iniciais ($O(E)$). Por sua vez, internamente, o algoritmo de Kruskal regista um outro vetor onde regista o *parent* para cada um dos vértices ($O(V)$). Conclui-se então que o programa terá complexidade espacial $O(V + E)$.

Avaliação Experimental dos Resultados

O algoritmo foi analizado com a ferramenta de benchmarking `hyperfine` (descartando *outliers*). Os grafos foram gerados com o programa `dgg` (modificado para que todos os arcos tenham peso

$= 1$, para forçar o pior caso de *Kruskal*), sendo $V + E \in [0.5M, 5M]$, não tendo ocorrido *outliers*.



Observando o gráfico, dada a proximidade da complexidade teórica ($ElogE$) com a observada, fica assim comprovada a complexidade teórica declarada.