① $A^2 B^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 18 \\ 9 & 27 \\ 27 & 18 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{2} C + I_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 & 1 \\ 5 & 5/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 7/2 & 1 \\ 5 & 7/2 \end{bmatrix}$

(Basta justificar porquê que não é').

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ Escalonada 🟥 (pivots) mas não é escalonada reduzida porque, por exemplo, temos pivots (8 e 4) que são diferentes de 1.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Escalonada por linhas. reduzida

- Todos os pivots são iguais a 1
- Acima e abaixo de cada pivot só ocorrem zeros.
- A linha nula está no fundo da matriz
- ~~Pivots em linhas abaixo~~ O pivot da 2ª linha está mais à direita do que o pivot da 3ª linha.

$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Não é escalonada porque abaixo do pivot da 1ª linha ~~[illegible]~~ temos algo diferente de zero.

③ (Vou usar ~~[illegible]~~ Gauss- Jordan.)

Forma matricial do sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{B.}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_2 = \frac{L_2}{2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 = \frac{L_3}{3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - L_3 \\ L_1 = L_1 - L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

$$\underset{L_1 = L_1 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{C} & \underbrace{\begin{matrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{matrix}}_{\mathcal{D}} \end{array}\right]$$

Resolver $CX = \mathcal{D} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\iff \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ A sol. do sistema é $X = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

④ A matriz ampliada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-\alpha & 8 & 0 \\ 2 & 1-\alpha & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 \Leftrightarrow L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1-\alpha & 0 \\ 1-\alpha & 8 & 0 \end{array}\right] \sim$$

(vou trocar para ter como pivot na 1ª linha o 2)

$$\underset{L_2 = L_2 - (1-\alpha)\frac{L_2}{2}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 8-\frac{(1-\alpha)^2}{2} & 0 \end{array}\right]$$

- O sistema é possível determinado se $car(A) = \underset{=2}{car([A|B])}$ ou seja, quando $8 - \frac{(1-\alpha)^2}{2} \neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{16-(1-\alpha)^2}{2} \neq 0 \Leftrightarrow 16 - 1 - \alpha^2 + 2\alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow -\alpha^2 + 2\alpha + 15 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{-2}$

$\Leftrightarrow \alpha \neq -\frac{2 \pm 8}{-2} \Leftrightarrow \alpha \neq -3$ e $\alpha \neq 5$

- O sistema é impossível quando $1 = car(A) < \underset{=2}{car([A|B])}$

Isto nunca acontece.

- O sistema é possível indeterminado quando $car(A) = car([A|B]) = 1. < 2.$

Ou seja, $8 - \frac{(1-\alpha)^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3$ ou $\alpha = 5.$

Assim, o sistema é possível determinado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 5\}$ e possível indeterminado quando $\alpha = -3$ ou $\alpha = 5$.

⑤

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ -6 & -10 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftarrow L_2+3L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}}_{I_2}$$

$$\underset{L_1=L_1-L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1=\frac{L_1}{2} \\ L_2=\frac{L_2}{5}}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} \underbrace{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}}_{I_2} & \underbrace{\begin{array}{cc} -1 & -1/2 \\ 3/5 & 1/5 \end{array}}_{\text{Inversa}} \end{array}\right]$$

$$\left(\text{NOTA: } \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 3/5 & 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -10 \end{bmatrix} = I_2 \right)$$

⑥ $MA = B \Leftrightarrow MAA^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow MI_2 = BA^{-1}$

$$\Leftrightarrow M = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

⑦ A matriz é invertível sse $\det(A) \neq 0$.

Desenvolvimento a partir da 3ª coluna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 2(-1)^{3+2} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} + \alpha(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix}$$

$$= -2 + \alpha(\alpha+1) = -2 + \alpha^2 + \alpha$$

- $\alpha + \alpha^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq 1$ ou $\alpha \neq -2$

Assim, a matriz tem inversa se o det. for diferente de 0, isto é, se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

⑦ Podiam testar outras condições como, por ex- exemplo.

A tem inversa $\Leftrightarrow$ $car(A) = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 + L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha+1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2 = L_2 - (\alpha+1)L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & & 2-\alpha(\alpha+1) \end{bmatrix}$$

A $car(A) = 3$ quando $2 - \alpha(\alpha+1) \neq 0$

$\Leftrightarrow 2 - \alpha^2 - \alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow \alpha \neq 1$ $\alpha \neq -2$.

ou seja, a matriz tem inversa quando

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

⑧ 1º Escalonar A (Só podemos usar operações do tipo $L_i = L_i + \beta L_j$)

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{matrix} -5 \\ 7 \\ -8 \end{matrix} \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -2 \\ 0 \end{matrix}} & 2 \\ 0 & & \boxed{2} \end{bmatrix} \text{ Escalonada } = U.$$

2º Construir L

$$\mathcal{L} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} 4 & & \\ -4 & -2 & \\ 8 & 0 & 2 \\ \hline \div \boxed{4} & \div(-2) & \div 2 \end{array} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{VL}$

3º Resolver $Ly=b$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b} \underset{\substack{L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right] \quad \underbrace{}_{y}$$

4º Resolver $Ux=y$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -5 & -7 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/4 & \frac{-5}{4} & \frac{-7}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

U $\quad$ y

$L_1 = L_1/4$

$L_2 =$ ~~[illegible]~~ $- \frac{L_2}{2}$

$L_3 = \frac{L_3}{2}$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 & 33/4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

$L_2 = L_2 + L_3$ $\qquad$ $L_1 = L_1 - \frac{3}{4} L_2$ $\qquad$ $\underbrace{}_{x}$

$L_1 = L_1 + \frac{5}{4} L_3$

Soluçr do sistema $AX=B$ é $X = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$

V.11

⑨

	Agric.	Serv.
Agric.	0	0.5
Serv	0.6	0.2

$d = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}$

Modelo Leontief $x = Cx + d$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}$$

matriz amplíada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -0.5 & 50 \\ -0.6 & 0.8 & 30 \end{array}\right] \underset{L_2 = 10L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -0.5 & 50 \\ -6 & 8 & 300 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_2 = L_2 + 6L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -0.5 & 50 \\ 0 & 5 & 600 \end{array}\right] \underset{L_2 = \frac{L_2}{10}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -0.5 & 50 \\ 0 & 0.5 & 60 \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1 + L_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 110 \\ 0 & 0.5 & 60 \end{array}\right] \underset{L_2 = \frac{10L_2}{5}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 110 \\ 0 & 1 & 120 \end{array}\right]$$

Para satisfazer a demanda final de 50 unidades de agricultura e 30 unidades de serviços a agricultura deve produzir <u>110</u> unidades e os serviços devem produzir <u>120</u> unidades.

⑩ Lix

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2(1+2) = -6.$$

⑪ O sistema linear $AX = B$ tem uma sol. única $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Matriz coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2-\alpha \\ 8 & 1-\alpha & -6 \\ 5-\alpha & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = (1-\alpha)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & -2-\alpha \\ 5-\alpha & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\alpha)(-(-2-\alpha)(5-\alpha)) = (1-\alpha)(2+\alpha)(5-\alpha)$$

O $\det(A) \neq 0$ quando $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$ e $\alpha \neq 5$.

Logo o sistema tem apenas uma solução quando $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2, 5\}$.

⑫ (a)

$$\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ -d & -e & -f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix} \underset{(L_3 = L_3 + 4L_2)}{=} \begin{vmatrix} \textcircled{-3}a & \textcircled{-3}b & \textcircled{-3}c \\ \textcircled{-}d & \textcircled{-}e & \textcircled{-}f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= (-3)(-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-3)(-1)(-3) = -9$$

(b)

$$2 = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c+3a \\ g & h & i+g \\ d & e & f+d \end{vmatrix} \underset{(C_3 = C_3 - C_1)}{=} \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Logo $2 = -3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}$

⑬

$|A| = -7$

$|2A| = 2^2 |A| = 4(-7) = -28$

$|(2A)^{-1}| = \frac{1}{|2A|} = \frac{1}{2^2|A|} = -\frac{1}{28}$

⑭ (a) $\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} 4 = 4$; $A_{21} = (-1)^{2+1} 2 = -2$

$A_{12} = (-1)^{1+2} 3 = -3$; $A_{22} = (-1)^{2+2}(-1) = -1$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

x1

(b) Sabendo que

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}\,A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}4 & -2.\\ -3 & -1\end{bmatrix}$$

O elemento $(\underset{\text{Linha}}{2},\underset{\text{coluna.}}{2})$ da inversa é $\frac{-1}{|A|}$.

$$|A| = \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} = -4-6 = -10.$$

Logo o elemento (2,2) da inversa de A é $\frac{1}{10}$.

(15) (a) É possível usar a regra de Cramer para resolver o sistema pq a matriz dos coeficientes é quadrada e tem determinante diferente de 0.

$$A = \begin{bmatrix}2 & 4\\ -3 & 1\end{bmatrix} \quad ; \quad |A| = 2+12 = 14 \neq 0.$$

(b).
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(1-20)}{14} = -\frac{19}{14}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & 5\end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10+3}{14} = \frac{13}{14}.$$

O sistema tem solução $\begin{bmatrix}-\frac{19}{14}\\ \frac{13}{14}.\end{bmatrix}$

(16) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 1\}$ (x11

· $(0,0) \in S$? Sim porque $0+0 \neq 1$.

· Seja $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$, isto é, $x_1+y_1 \neq 1$ e $x_2+y_2 \neq 1$.

Será que $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) \in S$?

$(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$. Nem sempre teremos que $x_1+x_2+y_1+y_2 \neq 1$. Por exemplo, $(1,2)$ e $(-1,-1) \in S$ mas $(1,2)+(-1,-1)=(0,1) \notin S$.

Logo S não é um subespaço vetorial.

⑰ $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} : a+b+c+d=0 \right\}$

· $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$? Sim porque $0+0+0+0=0$.

· Seja $A, B \in S$. $A+B \in S$?

$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in S$ logo $a_1+a_2+a_3+a_4=0$

$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in S$ logo $b_1+b_2+b_3+b_4=0$.

$A+B = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ b_3+a_3 & a_4+b_4 \end{bmatrix}$ temos que

$a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3+a_4+b_4$

$= a_1+a_2+a_3+a_4+b_1+b_2+b_3+b_4$

$= 0+0 = 0$

Logo $A+B \in S$.

· Se $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in S$, isto é, $a_1+a_2+a_3+a_4=0$

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que $\alpha \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in S$?

$$\alpha \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_3 & \alpha a_4 \end{bmatrix}$$

Temos que $\alpha a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_3 + \alpha a_4 = \alpha(a_1+a_2+a_3+a_4)$
$= \alpha \cdot 0 = 0$

Logo $\alpha A \in S$.

Assim S é um subespaço vetorial de ~~$\mathbb{R}$~~ $M_{2\times2}$.

⑱ (a). $(0,0,0) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(-1,1,-1)$

$\Leftrightarrow (0,0,0) = (\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3, \alpha_1+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3=L_3-2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0 \\ -\alpha_2+2\alpha_3=0 \\ -4\alpha_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1=0. \\ \alpha_2=0 \\ \alpha_3=0 \end{cases}$$

Logo K é l. independente.

(b). $(2,0,2) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,-1) + \alpha_3(-1,1,-1)$

$\Leftrightarrow (2,0,2) = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{L_3 = L_3 - 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 2 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 = -2 \\ -4\alpha_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

$(2,0,2) = (1,1,1) + 0.(1,0,-1) - (-1,1,-1)$

(c) $S = \langle (1,1,1), (1,0,-1), (-1,1,-1) \rangle = ?$

$(x,y,z) \in S \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que
$(x,y,z) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,-1) + \alpha_3(-1,1,-1)$

$\Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que $(x,y,z) = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & -1 & -1 & z \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & x \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & y - x \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & z - x - 2(y - x) \end{array}\right]$$

$car(A) = car([A|B]) = 3$ o sistema é sempre possível. Logo $S = \mathbb{R}^3$.

Qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ é c.l. dos elementos de K.