Exercícios Extra ALGA

Ano letivo: 2023/2024

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcule A^2B^T e $\frac{1}{2}C + I_2$.

2. Indique quais das seguintes matrizes estão na forma escalonada por linhas e na forma escalonada por linhas reduzida.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

4.Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais o seguinte sistema é possível determinado, indeterminado e impossível.

$$\begin{cases} (1-\alpha)x + 8y = 0 \\ 2x + (1-\alpha)y = 0 \end{cases}$$

5. Calcule a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -10 \end{bmatrix}$

6. Sabendo que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

determine a matriz M que satisfaz a equação $MA = B$.

7. Determine os valores de α para os quais a seguinte matriz é invertível.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

8. Resolva o sistema $Ax = b$ usando uma fatorização LU.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

9. Considere uma economia dividida em 2 setores: agricultura e serviços. Por cada unidade de output, a agricultura usa 0 do seu próprio output e 0.6 unidades dos serviços. Por cada unidade de output, os serviços consomem 0.2 unidades dos serviços e 0.5 da agricultura. Sabendo que a demanda final é 50 unidades de agricultura e 30 unidades de serviços. Determine os níveis de produção necessários para satisfazer a demanda final.

10. Calcule o determinante da seguinte matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Determine o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais o seguinte sistema linear admite apenas uma solução

$$\begin{cases} (-2-\alpha)z = 0 \\ 8x + (1-\alpha)y - 6z = 0 \\ (5-\alpha)x - 3z = 1 \end{cases}$$

12. Utilizando apenas as propriedades dos determinantes calcule:

(a) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ -d & -e & -f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$ sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$

(b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ sabendo que $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c+3a \\ g & h & i+g \\ d & e & f+d \end{vmatrix} = 2$

13. Sabendo que $|A| = -7$ e A é uma matriz quadrada de ordem 2. Determine $|2A|$ e $|(2A)^{-1}|$.

14. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a matriz adjunta de A

(b) Determine o elemento $(2,2)$ da inversa de A, sem calcular a inversa

15. Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ -3x + y = 5 \end{cases}$$

(a) Justifique que é possível usar a regra de Cramer para resolver o sistema linear.

(b) Resolva o sistema linear usando a Regra de Cramer

16. Averigue se $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + y \neq 1\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
17. Averigue se

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\} \in M_{2\times 2} \,:\, a + b + c + d = 0\}$$

é um subespaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 2, $M_{2\times 2}$.

18. Seja $K = \{(1, 1, 1), (1, 0, -1), (-1, 1, -1)\}$.
(a) Averigue se K é linearmente independente.
(b) Escreva $(2, 0, 2)$ como combinação linear dos vetores $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ e $(-1, 1, -1)\}$.
(c) Determine o espaço gerado pelo conjunto K.