Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

2ª aula Prática

Sumário:

Resolução de problemas sobre o cap. 1

Bibliografia:

Anders Malthe-Sørenssen, *Elementary Mechanics Using Python*, 2016, Springer, cap. 2.

Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Quando se tem um conjunto x, y de N medições, o método dos mínimos quadráticos oferece o ajuste linear que apresenta a menor diferença entre os valores medidos e os estimados por uma reta $y = m\,x + b$.
Se se considerar que os erros que afetam os valores de y são iguais, as expressões que o método fornece são:

$$m = \frac{N\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ \sum_{i=1}^{N} y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2\ \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$r^2 = \frac{\left(N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ \sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2}{\left[N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right]\ \left[N \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2\right]}$$

O coeficiente de determinação r^2 é tal que quando ~1 indica um ótimo ajuste, enquanto que ~ 0 indica que não o modelo não é linear.

$$\Delta m = |m| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N-2}} \quad \text{e} \quad \Delta b = \Delta m \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}}$$

Escreva uma função em python que calcule as quantidades anteriores, dado os valores de x_i e y_i:

- Como passo intermédio, calcule as somas:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\,, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i, \ \sum_{i=1}^{N} y_i\,, \ \sum_{i=1}^{N} x_i^2, \ \sum_{i=1}^{N} y_i^2.$$

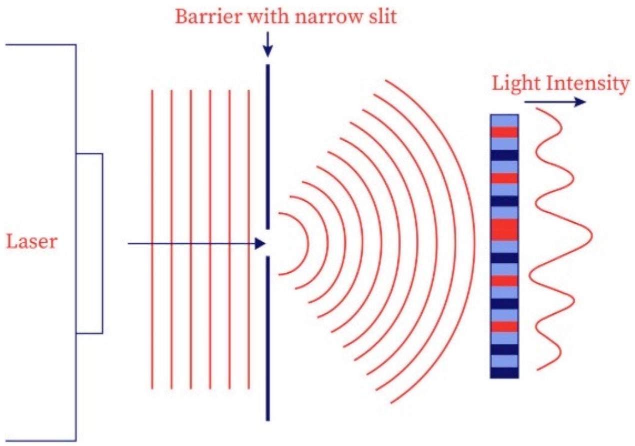
- A função deve retornar as quantidades m, b, r^2, Δm e Δb

Pergunta 1:
Qual é a vantagem de calcular estas somas separadamente?

Problema 1.5 **Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos**

Numa experiência de difração de um feixe de luz por uma fenda única foram medidos 7 pares de valores (na tabela) da distância da fonte de luz ao alvo, L, e a distância entre máximos luminosos consecutivos (entre a mancha vermelha central e as outras manchas vermelhas) da figura de difração, X.

L (cm)	X (cm)
222.0	2.3
207.5	2.2
194.0	2.0
171.5	1.8
153.0	1.6
133.0	1.4
113.0	1.2
92.0	1.0



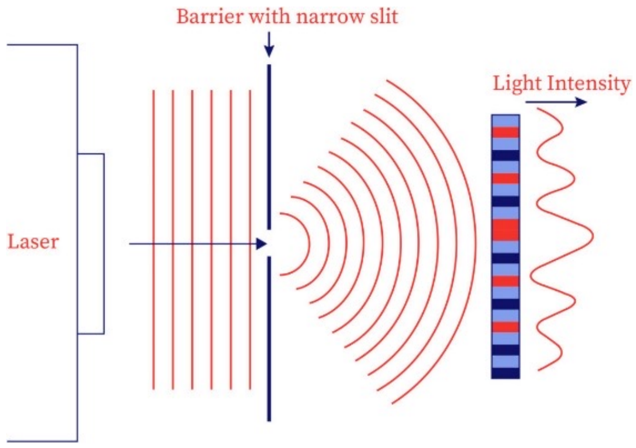
Escreva um programa em python que calcule as quantidades m, b, r^2, Δm e Δb para este conjunto de dados:

a) Comece por representar os dados experimentais num gráfico.

b) Verifique as somas das expressões

$$\sum_{i=1}^{N} x_i y_i = 2322.4; \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1286.0\,; \sum_{i=1}^{N} y_i = \ 13.5; \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 221719.5; \sum_{i=1}^{N} y_i^2 = 24.33;$$

Problema 1.5 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos...continuação



c) De seguida calcule o declive, a ordenada na origem e o coeficiente de determinação ou de correlação r^2.

Compare com os valores $m = 0.01015505\,;\ \Delta m = 0.000162973$

$b = 0.05507544;\ \Delta b = 0.02713077$

$r^2 = 0.99845714$

d) faça um gráfico com os pontos experimentais e a reta cujos parâmetros *m* e *b* calculou anteriormente.

e) Encontre o valor de X, quando $L = 165.0$ cm. Use a reta determinada pela regressão linear.

f) Afaste da reta encontrada um dos valores medidos de y. Compare o coeficiente de determinação com o valor anterior. Faça um gráfico com os novos pontos experimentais e a nova reta.

Pergunta 2:
Sugire uma maneira de estimar o erro no valor de *X* encontrado.

Problema cap 1.6 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Um ciclista tenta percorrer a velocidade constante (uniforme) uma distância de 10 km.
O seu treinador nos primeiros 9 minutos e a cada minuto mede a distância percorrida, e regista os valores em km:

0.00 0.735 1.363 1.739 2.805 3.814 4.458 4.955 5.666 6.329

a) Apresente estas medições num gráfico. A analisar o gráfico, a relação entre o tempo e a distância percorrida é linear?

b) Encontre o declive, a ordenada na origem, os erros respetivos e o coeficiente de determinação.
É uma relação linear bem aproximada?

c) Qual a velocidade média do ciclista?

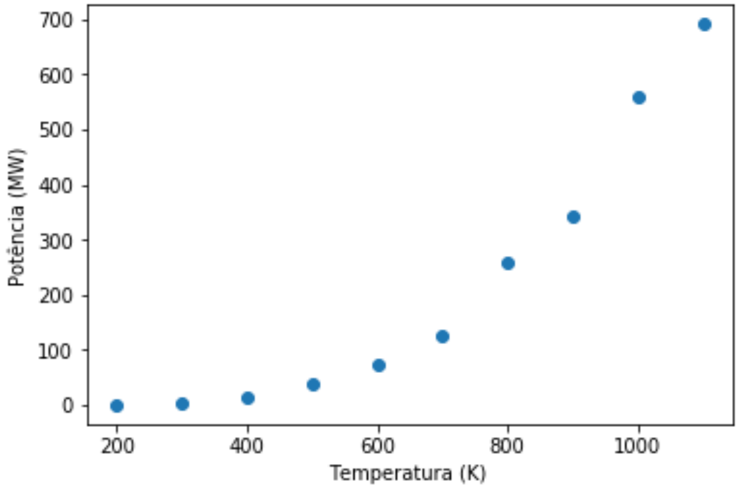
d) Use a função *polyfit* do pacote *numpy* ou do pacote *pylab* para encontrar a reta que mais se aproxima das medições.

O declive e a ordenada na origem concordam com os valores calculados na alínea b)?

e) Apresente a velocidade em km/hora.

Pergunta 3:
O ciclista conseguiu manter a mesma velocidade uniforme durante o percurso?

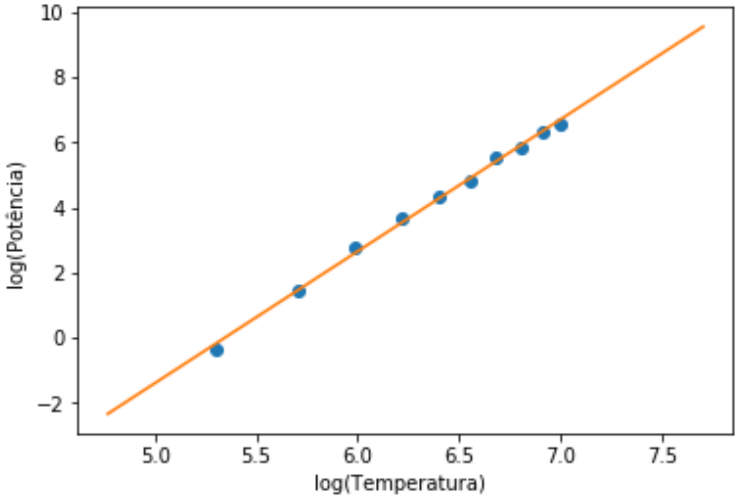
Leis de potência $y = cx^n$



logaritmo base b:

$$\log_b y = \log_b c + \underbrace{n}_{\text{declive}} \cdot \log_b x$$

Reta!



Propriedades dos logaritmos:

$\log_b e^x = x$

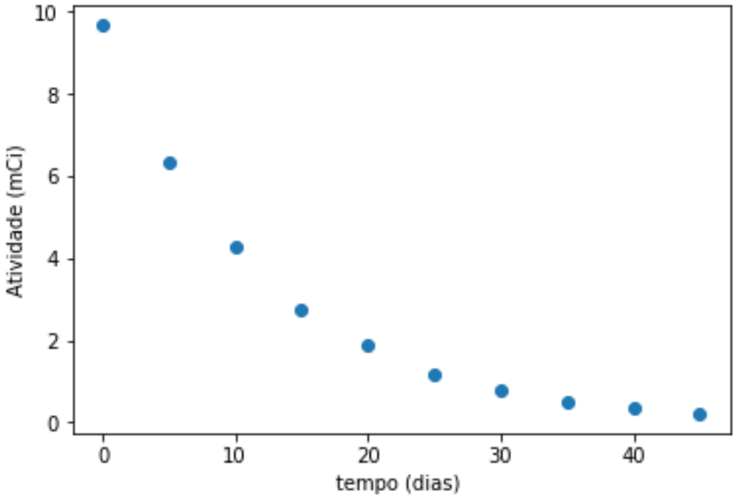
$\log_b x^y = y \cdot \log_b x$

$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$

$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$

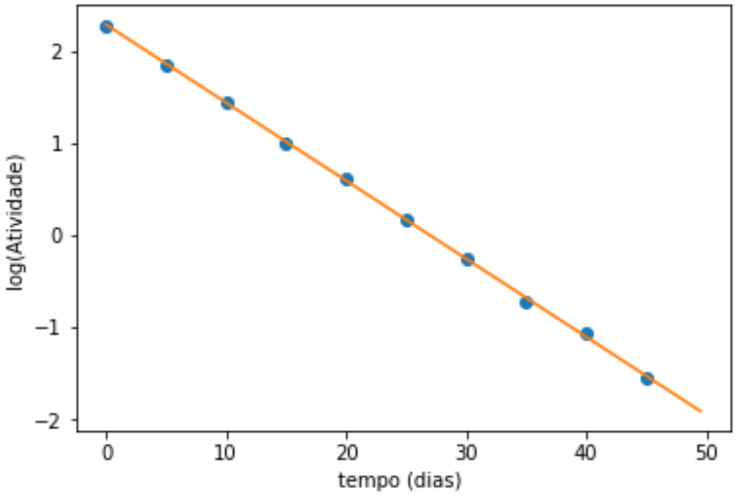
Lei exponencial $y = y_0 e^{\lambda t}$



logaritmo base b:

$$\log_b y = \log_b y_0 + \lambda t$$

declive



Propriedades dos logaritmos:

$$\log_b e^x = x$$

$$\log_b x^y = y \cdot \log_b x$$

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

y e y_0 expressos nas mesmas unidades

Problema cap 1.8 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Foi medida a energia por segundo (potência) emitida por um corpo negro (corpo que absorve toda a energia que incide nele) de área 100 cm^2 em função da temperatura absoluta, T, e registada na seguinte tabela

T (K)	200.	300.	400.	500.	600.	700.	800.	900.	1000.	1100.
E (J)	0.6950	4.363	15.53	38.74	75.08	125.2	257.9	344.1	557.4	690.7

a) Apresente estas medições num gráfico. A analisar o gráfico, a relação entre a energia emitida e a temperatura é linear?

b) Apresente as medições num gráfico log-linear e um gráfico log-log.
   Pode usar as funções de `matplotlib.pyplot` `plot()`, `semilogy()` e `loglog()`.

c) Qual a dependência entre as quantidade energia emitida e a temperatura?
   Pista: encontre uma lei de potência ou uma lei exponencial que se ajuste aos dados

Problema cap 1.9 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Foi medida a atividade de uma amostra do isótopo radioativo ^{131}I tem de 5 em 5 dias. Os valores medidos da atividade com o tempo são, em mCi:

9.676 , 6.355, 4.261, 2.729, 1.862, 1.184, 0.7680, 0.4883, 0.3461, 0.2119

a) Apresente estas medições num gráfico. A analisar o gráfico, a relação entre a atividade e o tempo é linear?

b) Apresente as medições num gráfico semilog. Como depende a atividade com o tempo?

A unidade curie indica $3{,}7\times10^{10}$ desintegrações nucleares/s