Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

4ª aula Prática

Sumário:
Movimento a 1 dimensão. Método de Euler.

Método de Euler (método numérico de integração)

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{v_x(t+\delta t)-v_x(t)}{\delta t} = a_x(t)$$

aproximado por

$$\frac{v_x(t+\delta t)-v_x(t)}{\delta t} \approx a_x(t)$$

$$\Leftrightarrow v_x(t+\delta t) \approx +v_x(t) + \ a_x\ (t)\times\delta t$$

matemática

Considere-se $v_x(0) = v_{x0}$

$$v_x(\delta t) \approx v_{x0} + a_x\ (0)\times\delta t$$
$$v_x(\delta t+\delta t) \approx v_x(\delta t) + a_x\ (\delta t)\times\delta t$$
$$v_x(2\delta t+\delta t) \approx v_x(2\delta t) + a_x\ (2\delta t)\times\delta t$$
...
$$v_x(N\delta t+\delta t) \approx v_x(N\delta t) + a_x\ (N\delta t)\times\delta t$$

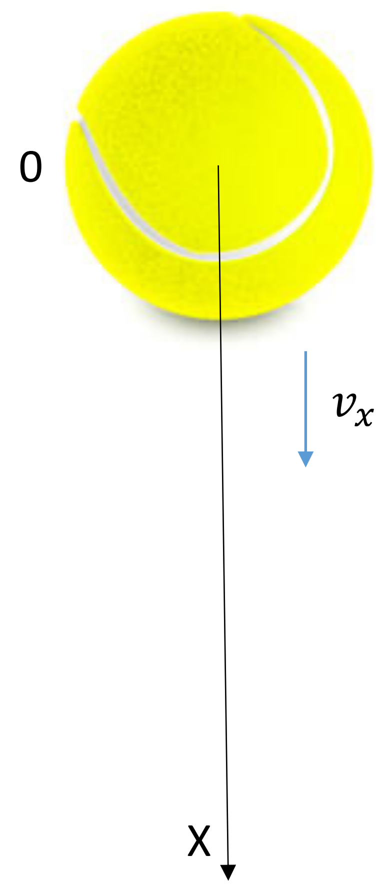
python

vx[0] = vx0

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    aceler=g                    # queda livre
    vx[i+1]=vx[i]+aceler*dt
```

Pergunta 1:
Como é que esta pedaço do programa deve ser alterada para o caso de uma aceleração não constante?

Problema cap 2



Um objeto pequeno é largado de uma altura elevada. Considere a queda livre, sem resistência do ar. Considere $g = 9.80\ \mathrm{m/s}$

a) Qual a relação entre a velocidade e a aceleração instantânea?

b) Construa um programa que determine a velocidade do objeto, usando o método de Euler, no intervalo de tempo $[0, 4\ \mathrm{s}]$. Qual a velocidade em $3\mathrm{s}$?

c) Repita a alínea anterior, com um passo 10 vezes menor.

d) Compare o resultado obtido em b) e c) com o resultado exato. Que conclui?

e) Construa um programa que determine a posição do objeto, usando o método de Euler, no intervalo de tempo $[0, 4\ \mathrm{s}]$. Qual a posição no instante 2 s, se o objeto partiu da posição 0 m? (Usa o passo de tempo usado em alínea b) .)

f) Repita a alínea anterior, com um passo 10 vezes menor.

g) Compare o resultado obtido em e) e f) com o resultado exato. Que conclui?

h) Calcule novamente a posição no instante 2s, com o passo 10 vezes menor do que em alínea f). Faça o gráfico do desvio do valor aproximado com o valor exato em função do passo. Como varia o erro com o passo?

Resistência do ar

Vamos **supor que a aceleração devido resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade**

$a_y^{(res)} = -D\ v_y|v_y|$ sempre oposta ao sentido do movimento, e

Assim

$$a_y(t) = g - D\ v_y|v_y|$$ em que o parâmetro D é positivo e a determinar

O termo da aceleração da resistência do ar se opõe ao movimento, e, **a partir de algum instante esse termo anula a parte gravítica**.

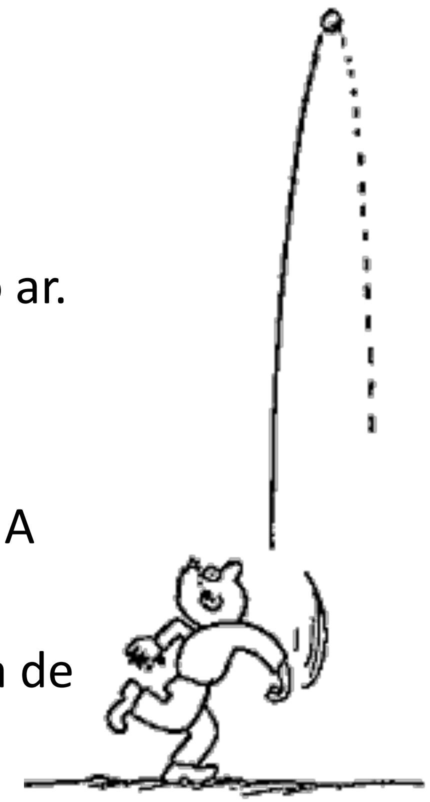
Se a aceleração for nula, temos movimento uniforme e a velocidade é constante $|v_y| = v_T$
e chamada de velocidade terminal (também chamada de velocidade limite)

$$0 = g - Dv_T|v_T|$$

$$\Longrightarrow \quad D = \frac{g}{v_T|v_T|} = \frac{g}{v_T^2}$$

Se medimos a velocidade limite saberemos o valor de D.

Problema cap 2



Uma bola é lançada verticalmente para cima com a velocidade 10 m/s.

a) Encontre analiticamente a lei do movimento $y = y(t)$, se não considerar a resistência do ar.
b) Qual a altura máxima e o instante em que ocorre, no caso da alínea a)?
c) Em que instante volta a passar pela posição inicial, no caso da alínea a)?
d) Resolva a alínea a), considerando a resistência do ar. Resolva usando o método de Euler. A velocidade terminal da bola no ar é de 100 km/h.
e) Repita alíneas b) e c) nas condições de alínea d). Deve encontrara uma maneira numérica de estimar os instantes da altura máxima e do retorno ao posição inicial.

Pergunta 2:
Como é que a velocidade terminal se alteraria se a bola fosse maior (com todas as outras características iguais)?