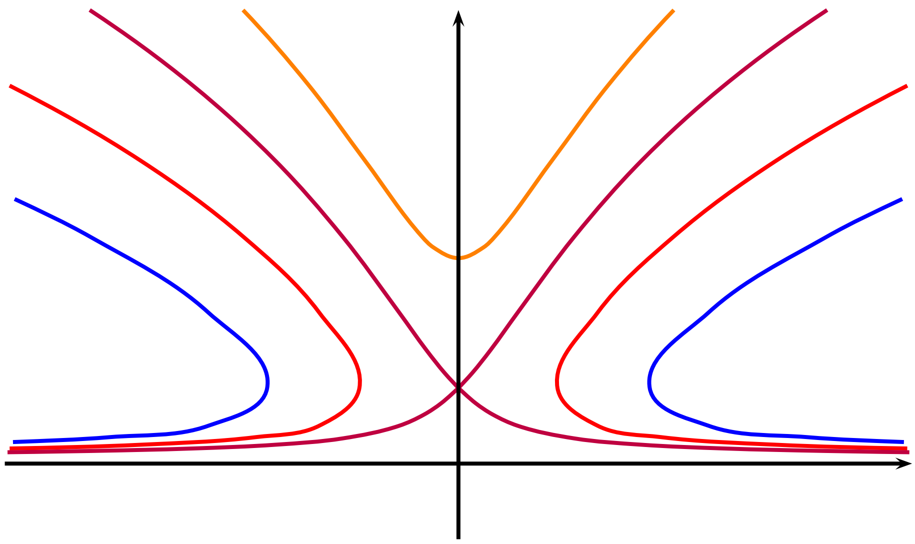
Equações Diferenciais Ordinárias

Resumos teóricos. Exercícios resolvidos e propostos.



Tatiana Tchemisova
Vera Kharlamova
Adelaide Freitas
Alexander Plakhov

universidade de aveiro
theoria poiesis praxis

FICHA TÉCNICA:

Título
Equações Diferenciais Ordinárias. Resumos teóricos. Exercícios resolvidos e propostos

Autores
Tatiana Tchemisova, Vera Kharlamova, Adelaide Freitas, Alexander Plakhov

Conceção Gráfica da capa
Alexander Plakhov

Editora
UA Editora - Universidade de Aveiro

1.ª edição - julho 2019

ISBN
978-972-789-610-3

Prefácio

O presente livro tem como base uma publicação interna da Universidade de Aveiro realizada pelas primeiras três autoras na forma de uma sebenta com resumos teóricos e exercícios propostos de equações diferenciais ordinárias[1]. Neste livro, todos os tópicos abordados na sebenta foram melhorados e novos exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, acompanhados das respetivas soluções, foram acrescentados. Novos exemplos de aplicações de equações diferenciais e as ilustrações ficaram a cargo do quarto autor.

Existem vários manuais, livros e ferramentas digitais dedicados ao estudo das equações diferenciais, em geral, e das equações diferenciais ordinárias, em particular. Sem a pretensão de os substituir, o presente livro tem como objetivo proporcionar um instrumento de trabalho complementar ao estudo inicial das equações diferenciais ordinárias e destina-se a estudantes do primeiro ciclo do ensino universitário e politécnico cujos *curricula* contenham estes tópicos.

O livro é constituído por cinco capítulos e dois apêndices. No primeiro capítulo são introduzidas algumas noções básicas e apresentados exemplos de problemas e fenómenos determinísticos simples (físicos, biológicos e outros) que podem ser modelados usando equações diferenciais. O segundo capítulo é dedicado às equações diferenciais de primeira ordem. Não tendo como objetivo abordar todos os tipos de equações diferenciais de primeira ordem, foi considerado um leque variado de exercícios que permite aprender um conjunto diverso de técnicas de resolução. No terceiro capítulo foram consideradas as equações diferenciais lineares e alguns outros tipos de equações diferenciais de ordem superior a um. O quarto capítulo é dedicado às técnicas mais simples de resolução de sistemas de equações lineares de primeira ordem. O último capítulo contém um conjunto de questões de escolha múltipla e de resposta aberta para complementar a autoavaliação do estudo realizado. Por último, nos apêndices, foi feita uma breve introdução às funções reais de várias variáveis e ao conceito de diferencial, dado estes temas não fazerem, por vezes, parte do programa de unidades curriculares de primeiros anos.

Os autores gostariam de endossar um especial agradecimento a todos os alunos que motivaram este trabalho e esperam que o presente livro sirva como material didático útil numa primeira abordagem às equações diferenciais ordinárias e sistemas de equações.

Parte do presente trabalho foi suportado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), dentro do projeto UID/MAT/04106/2019 (CIDMA, Universidade de Aveiro).

Aveiro, julho de 2019

Tatiana Tchemisova, Vera Kharlamova, Adelaide Freitas e Alexander Plakhov
Departamento de Matemática - Universidade de Aveiro

[1]Tchemisova, T, Kharlamova, V., Freitas, A. (2006) Cadernos de Matemática CM06/D-05, Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.(preprint).

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

1.1 Noções básicas

Chama-se **equação diferencial ordinária**[1] a uma equação

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

que relaciona uma variável real independente x, uma função desconhecida $y = y(x)$, com $y : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e as derivadas de y de diferentes ordens.

Chama-se **ordem** de uma equação diferencial ordinária à maior ordem da derivada que entra nessa equação. Assim, a equação diferencial (1.1) é de ordem n.

Exemplo 1.1.1 (Ordem, função e variável independente de uma equação diferencial)
(a) A equação $y' = x$ ou, de forma equivalente, $y' - x = 0$ é uma equação diferencial (ordinária) de primeira ordem da função $y = y(x)$.
(b) A equação $s^2t'' + stt' = s - 2$ é uma equação diferencial de segunda ordem da função $t = t(s)$.
(c) A equação $\frac{d^3x}{dy^3} = y^2 + 1$ é uma equação diferencial de terceira ordem da função $x = x(y)$.

Diz-se que a função $y = y(x)$ é uma **solução** da equação diferencial de ordem n (1.1) se substituindo na equação (1.1) a função y, juntamente com as suas derivadas até a ordem n, se obtém uma identidade. Por outras palavras, a função $y = y(x)$ satisfaz a equação diferencial.

Exemplo 1.1.2 (Soluções de uma equação equação diferencial) *As funções $y = -2x$, $y = -2x + 3$ e $y = -2x - 7$ são soluções da equação diferencial*

$$y' + 2 = 0.$$

Resolver uma equação diferencial consiste em obter o conjunto de todas as soluções dessa equação[2].

As soluções obtidas por processo de integração de uma equação diferencial são habitualmente

[1] A palavra *ordinária*, na designação da equação diferencial (1.1), indica que a função desconhecida y é uma função de uma só variável. Em geral, sempre que é subentendido, simplifica-se a linguagem omitindo o termo "ordinária". Existem, ainda, as chamadas *equações diferenciais às derivadas parciais* as quais envolvem funções desconhecidas de várias variáveis e as suas derivadas parciais.

[2] Alguns autores chamam **integração** ao processo de resolução de equações diferenciais usando integrais.

designadas por **integral geral** ou **solução geral** dessa equação diferencial. Toda a solução que não pode ser deduzida por processo de integração da equação diferencial é designada por **solução singular**.

A solução geral de uma equação diferencial de ordem n é representada pela família de funções y, dependentes da variável x e de n constantes arbitrárias[3] $C_1, C_2, ..., C_n$ e dadas, explicitamente, na forma

$$y = \phi(x, C_1, C_2, ..., C_n) \tag{1.2}$$

ou, implicitamente, na forma

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0, \tag{1.3}$$

as quais são soluções da equação (1.1) para valores de $C_1, C_2, ..., C_n$ fixos, sendo ϕ e Φ funções[4] n vezes diferenciáveis em ordem a x.

Exemplo 1.1.3 (Solução geral na forma explícita) *O conjunto de funções*

$$y = C_1x^2 + C_2x + C_3\ , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

é a solução geral (na forma explícita) da equação diferencial de terceira ordem

$$y''' = 0. \tag{1.5}$$

De facto, substituindo y por $C_1x^2 + C_2x + C_3$ *na equação (1.5) obtém-se a identidade* $0 = 0$*, pelo que a função (1.4) é solução da equação (1.5). Por outro lado, na expressão (1.4) entram três constantes arbitrárias, tantas quanto a ordem da equação diferencial (1.5). Assim sendo, (1.4) representa o integral geral da equação diferencial (1.5).*

Exemplo 1.1.4 (Solução geral na forma explícita) *A família de funções*

$$y = Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

é a solução geral da equação diferencial de 1.ª ordem

$$y' = -2y. \tag{1.7}$$

De facto, substituindo a função y dada por (1.6) na equação (1.7) obtém-se uma identidade, concretamente

$$-2Ce^{-2x} = -2Ce^{-2x}.$$

Exemplo 1.1.5 (Solução geral na forma implícita) *O conjunto de funções* $y = y(x)$ *definidas implicitamente por*

$$x^2 + y^2 = C, \tag{1.8}$$

com $C \in \mathbb{R}_0^+$*, representa o integral geral da equação diferencial de 1.ª ordem*

$$yy' + x = 0. \tag{1.9}$$

[3]Considera-se aqui $C_i \in \mathbb{R},\ i \in 1, 2, \ldots, n$, embora, em geral, as constantes possam pertencer ao conjunto dos números complexos.

[4]As funções ϕ e Φ são funções reais de várias variáveis reais (consulte o Apêndice II para mais detalhe para o caso particular de duas variáveis reais).

Na realidade, derivando em ordem a x ambos os membros da equação (1.8), obtém-se

$$2x + 2yy' = 0,$$

donde

$$yy' = -x. \tag{1.10}$$

Substituindo o primeiro termo do primeiro membro de (1.9) pela expressão encontrada em (1.10), obtém-se a identidade $0 = 0$. A equação (1.8) depende de uma constante arbitrária e a equação diferencial (1.9) é de ordem 1.

Exemplo 1.1.6 (Família de funções como solução de uma equação diferencial) *Pretende-se mostrar que a família de curvas*

$$y = (x + C)e^x, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{1.11}$$

é solução da equação diferencial

$$y' - y = e^x. \tag{1.12}$$

Para mostrar o pretendido basta verificar que a equação (1.11) satisfaz a equação diferencial dada. Assim, derivando ambos os membros da equação (1.11) em ordem a x, supondo $y = y(x)$, obtém-se

$$y' = e^x + (x + C)e^x.$$

Substituindo na equação diferencial (1.12), vem

$$y' - y \;=\; e^x + (x + C)e^x - (x + C)e^x = e^x,$$

como se pretendia verificar.

Dada uma equação diferencial de ordem n e sua solução geral na forma (1.2) ou (1.3), se em (1.2) ou (1.3) se atribuírem valores reais fixos às constantes arbitrárias $C_1, C_2, ..., C_n$, obtém-se uma **solução particular** dessa equação diferencial.

Exemplo 1.1.7 (Solução particular na forma explícita) *Tendo em conta o Exemplo 1.1.3, observa-se que a função $y = x^2 - 2$ é uma solução particular da equação diferencial $y''' = 0$. Aquela solução particular resulta da solução geral $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$ quando os valores das constantes C_1, C_2, C_3 são substituídos por $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = -2$.*

Exemplo 1.1.8 (Solução particular na forma explícita) *Tendo em conta o Exemplo 1.1.4, observa-se que a função $y = -3e^{-2x}$ é uma solução particular da equação diferencial (1.7). Esta solução obtém-se quando se toma o valor da constante $C = -3$ na solução geral $y = Ce^{-2x}$.*

Exemplo 1.1.9 (Solução particular na forma implícita) *Tendo em conta o Exemplo 1.1.5, observa-se que a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ é uma solução particular da equação diferencial $yy' + x = 0$. Esta solução particular resulta da solução geral $x^2 + y^2 = C$ para o valor da constante $C = 4$.*

Dada uma equação diferencial de ordem n e sua solução geral na forma (1.2) ou (1.3), o conjunto dos gráficos dessas funções (1.2) ou (1.3), para todos os possíveis valores das constantes arbitrárias $C_1, C_2, ..., C_n$, constitui a **família de curvas integrais** daquela equação diferencial.

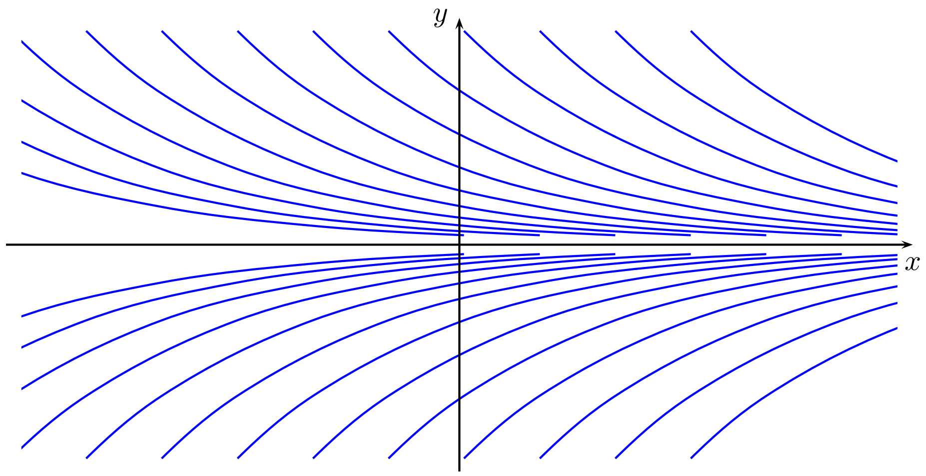


Figura 1.1: Curvas integrais da equação diferencial $y' = -2y$ do Exemplo 1.1.4.

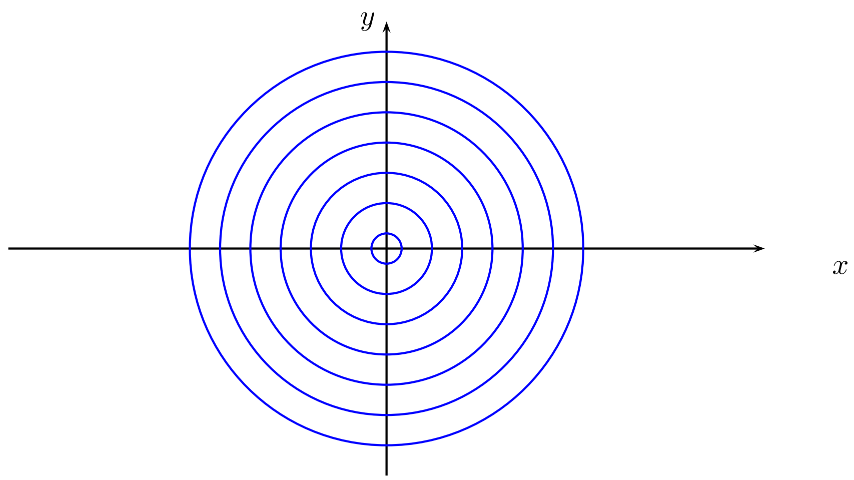


Figura 1.2: Curvas integrais da equação diferencial $y'y + x = 0$ do Exemplo 1.1.5.

Exemplo 1.1.10 (Família de curvas integrais) *Nas Figuras 2.1 e 2.2 são ilustradas curvas integrais pertencentes às famílias de curvas integrais da equação diferencial $y' = -2y$ considerada no Exemplo 1.1.4 e da equação diferencial $yy' + x = 0$ considerada no Exemplo 1.1.5, respetivamente.*

Recorde-se que, para algumas equações diferenciais, pode acontecer que existam outras soluções, chamadas **soluções singulares**, as quais não podem ser obtidas atribuindo um valor específico às constantes arbitrárias em (1.2) ou (1.3).

Exemplo 1.1.11 (Solução singular) *Todas as funções da família*

$$y = \frac{1}{x+C} - 2, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{1.13}$$

são soluções da equação diferencial

$$y' + (y+2)^2 = 0. \tag{1.14}$$

Porém, a função $y = -2$ também satisfaz esta equação diferencial, mas não pode ser representada na forma (1.13), para algum $C \in \mathbb{R}$. Consequentemente, a função $y = -2$ é uma solução singular da equação diferencial (1.14). O conjunto de todas as soluções da equação (1.14) é constituído pela solução geral:

$$y = \frac{1}{x + C} - 2, \quad C \in \mathbb{R},$$

e pela solução singular

$$y = -2.$$

Na Figura 2.3 estão representados gráficos de soluções da equação (1.14).

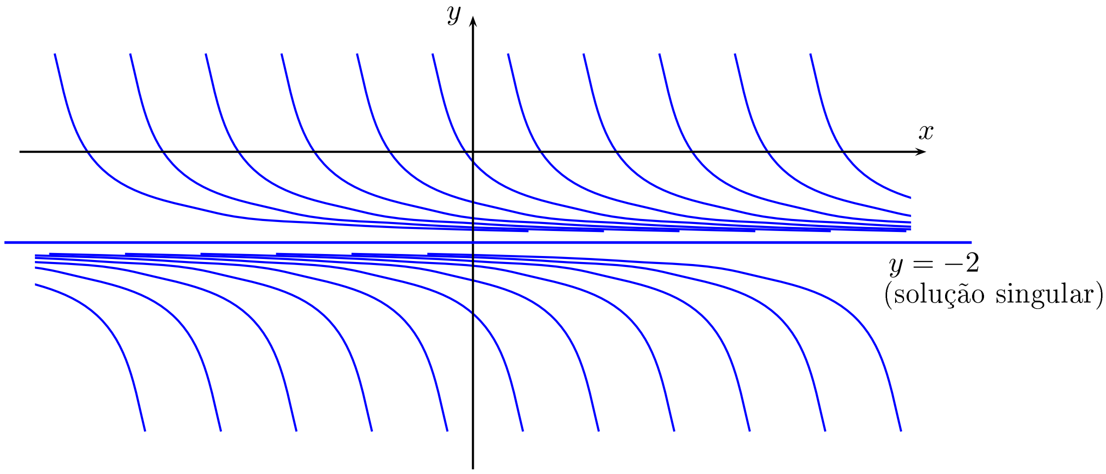


Figura 1.3: Representação gráfica de algumas soluções, incluindo a solução singular, da equação diferencial (1.14).

1.2 Modelação de problemas usando equações diferenciais

Variados processos dinâmicos observados na Natureza e diferentes problemas de Física, Geometria, Economia, etc., podem ser representados à custa de equações diferenciais. Consideram-se aqui alguns exemplos de fenómenos (físicos, biológicos, etc) e de problemas simples que podem ser modelados usando equações diferenciais ordinárias.

A lei do movimento. Suponha-se que é conhecida, em cada instante de tempo t, a velocidade com que um ponto material se desloca ao longo do eixo OX. Suponha-se também que essa velocidade pode ser descrita por uma função $v(t)$ que é contínua para $t \geq 0$. Pretende-se encontrar a lei do movimento desse ponto, i.e., a lei que determina o valor x da abcissa do ponto em função do tempo.
O problema formulado reduz-se ao problema de determinação da solução geral $x = x(t)$ da equação diferencial de primeira ordem

$$x'(t) = v(t),$$

ou, na sua forma mais curta, $x' = v$.

A equação do movimento de uma partícula sujeita a duas forças. Assuma-se que uma partícula de massa m se move ao longo do eixo Ox sujeita a duas forças: uma proporcional ao seu deslocamento a partir de um ponto fixo da sua trajectória e dirigida para a origem O, e uma outra, uma força da resistência, proporcional à sua velocidade. Pretende-se exprimir a lei do movimento da partícula por meio de uma equação diferencial.

A primeira força pode ser expressa por $-k_1x(t)$ e a segunda por $-k_2x'(t)$, onde k_1 e k_2 são coeficientes de proporcionalidade ($k_1, k_2 \geq 0$). A força total será dada pela soma destas duas, ou seja, $-k_1x(t) - k_2x'(t)$, onde a função $x = x(t)$ determina a lei do movimento da partícula. Por outro lado, de acordo com a segunda lei de Newton, a força total aplicada à partícula é igual à massa multiplicada pela aceleração e pode ser escrita na forma $mx''(t)$. Assim, igualando as duas expressões que definem a força total, deduz-se a seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$mx''(t) = -k_1x(t) - k_2x'(t),$$

ou, escrita de forma simplificada, $mx'' = -k_1x - k_2x'$.

A equação da queda livre de um corpo num meio gasoso. Considere-se um corpo de massa m a cair num meio gasoso. A coordenada vertical do corpo no instante t é $y(t)$. A força de gravitação é $F_g = -mg$ e a força de atrito do gás, F_a, é proporcional à velocidade do corpo, com o coeficiente de proporcionalidade k, e tem a direção contrária à velocidade, ou seja, $F_a = -k\,y'(t)$. A força total aplicada ao corpo é, por um lado, $F = F_g + F_a$ e, por outro lado, de acordo com a segunda lei de Newton, é dada por $F = my''(t)$, donde a coordenada $y(t)$ satisfaz a equação diferencial de segunda ordem

$$my''(t) = -mg - k\,y'(t),$$

ou, simplificando, $y'' = -g - \frac{k}{m}\,y'$.

A família das curvas definidas pelo declive das suas retas tangentes.

(i) As curvas cujas retas tangentes, em cada ponto (x, y), têm declive igual a y satisfazem a equação diferencial de primeira ordem

$$y'(x) = y(x),$$

ou, na sua forma mais curta, $y' = y$.
A solução geral desta equação diferencial determina a família de todas as curvas que satisfazem aquela propriedade. Curvas desta família são ilustradas na Figura 1.4.

(ii) As curvas cujas retas tangentes, em cada ponto (x, y), têm declive igual a x^2 são determinadas pela equação diferencial de primeira ordem

$$y'(x) = x^2,$$

ou, na sua forma mais curta, $y' = x^2$.
A solução geral desta equação diferencial determina a família de todas as curvas que satisfazem aquela propriedade (Figura **??**).

A família das curvas definidas pela interseção das suas retas tangentes com o eixo das ordenadas. Considere-se a família de curvas para as quais, em cada ponto (x, y), a

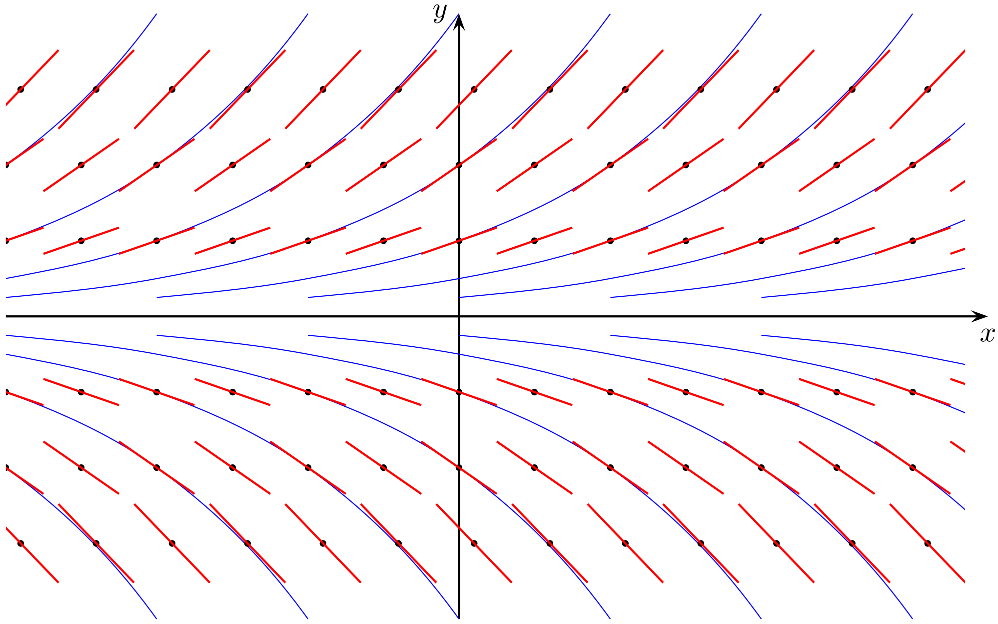


Figura 1.4: Curvas cujas retas tangentes, em cada ponto (x, y), têm declive y. Ilustram-se também retas tangentes em diversos pontos de cada curva.

reta tangente correspondente intersecta o eixo OY no ponto cuja ordenada é o valor simétrico à ordenada do ponto de tangência, ou seja, $-y$.
Uma reta tangente à curva $y = y(x)$ contém o ponto de tangência $(x, y(x))$ e, de acordo com o pretendido, o seu ponto de intersecção com o eixo das ordenadas será da forma $(0, -y(x))$. Se $x \neq 0$, o declive desta reta tangente será $2y(x)/x$ e este declive é igual a derivada da função y no ponto x, donde

$$\frac{2y(x)}{x} = y'(x).$$

Multiplicando ambos os membros desta equação por x (que é assumido ser diferente de zero) obtém-se a equação diferencial pretendida, ou seja, $xy' = 2y$.

A taxa relativa de variação. Em várias situações fala-se em taxa relativa de variação. Por exemplo, quando se diz que uma dada população cresce a uma taxa de 2% por ano, tal significa que a função $P = P(t)$, que determina o tamanho da população em função de tempo, satisfaz a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = 0.02,$$

ou, de modo equivalente, $P'(t) = 0.02P(t)$.

O peso de uma substância ao desintegrar-se. É sabido que a velocidade com que uma substância radioativa se desintegra é diretamente proporcional à sua massa inicial sendo o coeficiente de desintegração $k \geq 0$. Sabendo que, no instante de tempo t_0, o peso da substância era R_0, qual será o peso R da substância no instante de tempo $t \geq t_0$?
Este problema reduz-se à determinação da solução da equação diferencial de primeira ordem

$$R'(t) = -kR(t),$$

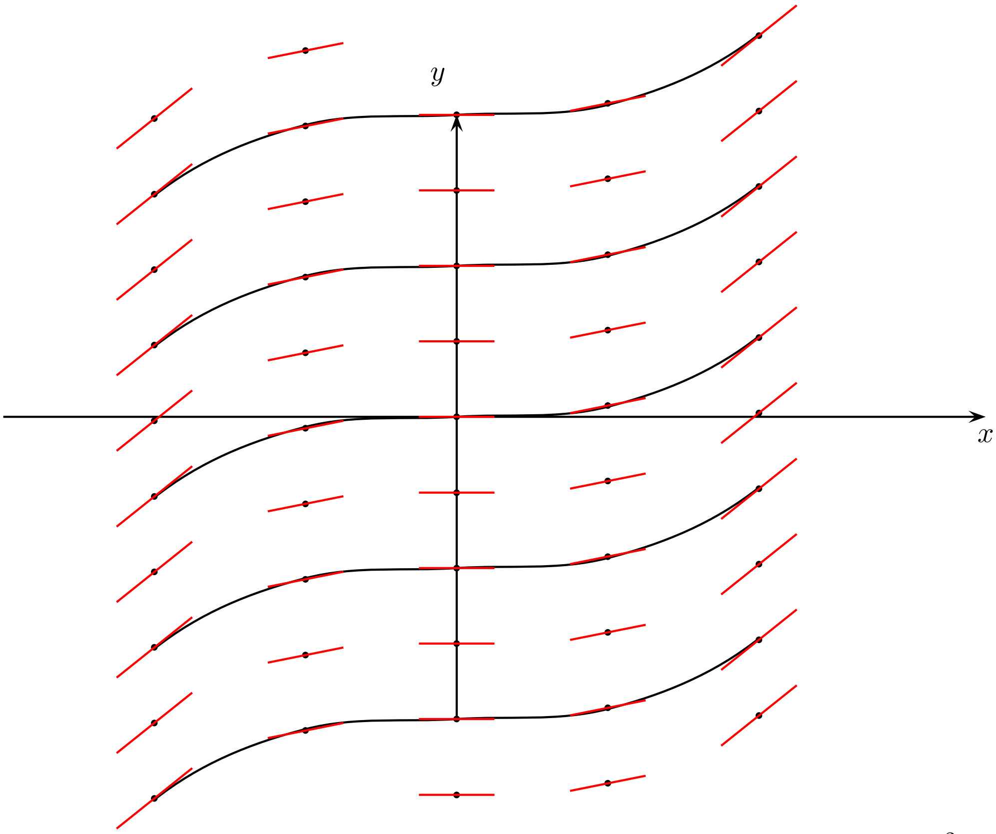


Figura 1.5: Curvas cujas retas tangentes, em cada ponto (x, y), têm declive x^2. Ilustram-se também retas tangentes em diversos pontos de cada curva.

tal que, no instante de tempo inicial $t = t_0$, o peso toma o valor R_0. Este tipo de problema é chamado *problema de Cauchy*, e corresponde à resolução de uma equação diferencial sujeita a condições iniciais.[5]

A evolução de uma espécie biológica. Considere-se a população de uma dada espécie biológica numa dada região. Sabe-se que (i) a quantidade total de indivíduos dessa espécie na população no instante t é $x(t)$, (ii) a velocidade com que a população aumenta devido à natalidade é diretamente proporcional à quantidade $x(t)$, (iii) a taxa de natalidade é $a > 0$, (iv) a mortalidade é proporcional ao quadrado da quantidade de indivíduos da população, $x^2(t)$,[6] e (v) a taxa de mortalidade é $b > 0$. Desta forma, a dinâmica da população pode ser descrita pela equação diferencial de primeira ordem

$$x'(t) = a\,x(t) - b\,x(t)^2,$$

ou, na sua forma mais curta, $x' = ax - bx^2$.

1.3 Equação diferencial correspondente a uma família de curvas

Em geral, dada uma equação diferencial, o objetivo é resolvê-la, ou seja, encontrar a sua solução geral. Em outras situações, o objetivo é resolver o problema inverso: encontrar uma equação

[5] Sobre a resolução de problemas de Cauchy, veja-se o capítulo seguinte.

[6] Tal ocorre, por exemplo, quando há falta de comida tornando-se mais acentuada essa falta à medida que a população aumenta.

diferencial de ordem n cujo integral geral é uma dada família de curvas, definida por (1.2) ou (1.3). Neste último caso procede-se do seguinte modo:

1. Deriva-se n vezes a equação[7] (1.2) ou (1.3) que define a família de curvas, supondo que y é função de x;

2. Resolve-se o sistema das n equações assim obtidas em ordem às constantes arbitrárias $C_1, C_2, ..., C_n$;

3. Substituem-se, na equação inicial que define a família as curvas, as expressões obtidas para as constantes $C_1, C_2, ..., C_n$.

Deste modo, obtém-se uma equação da forma (1.1), i.e., obtém-se uma equação diferencial, como se pretendia.

Exemplo 1.3.1 (Encontrar a equação diferencial cuja solução é dada) *Pretende-se identificar a equação diferencial cuja solução é a família de curvas dadas por*

$$C_1x + (y - C_2)^2 = 0, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

Uma vez que a equação (1.15) contém duas constantes arbitrárias, C_1 e C_2, para construir a equação diferencial cujo integral geral é dado por (1.15), é preciso resolver duas equações em ordem a essas constantes. Derive-se, então, (1.15) duas vezes em ordem a x, supondo $y = y(x)$. Obtém-se o sistema

$$\begin{cases} C_1 & + & 2(y - C_2)y' & = & 0 \\ 2(y')^2 & + & 2(y - C_2)y'' & = & 0 \end{cases},$$

cuja solução é

$$\begin{cases} C_2 & = & y + \frac{(y')^2}{y''} \\ C_1 & = & 2\frac{(y')^3}{y''} \end{cases}. \tag{1.16}$$

Substituindo, na equação inicial (1.15), as constantes C_1 e C_2 pelas expressões (1.16) e simplificando, resulta a equação diferencial pretendida

$$2y''x + y' = 0.$$

Observação. Por vezes é conveniente escrever a equação diferencial usando *diferenciais*[8]. Para uma função $y = y(x)$ diferenciável, por definição, tem-se

$$dy = y'dx,$$

onde dx representa o diferencial da variável independente x e dy o diferencial da variável dependente $y = y(x)$.

Exemplo 1.3.2 (Encontrar a equação diferencial cuja solução é dada) *Pretende-se averiguar se existe alguma equação diferencial que determina a família de todas as retas que passam*

[7] Por abuso de linguagem, é dito apenas "derivar a equação" para dizer "derivar ambos os membros da equação".
[8] Para mais detalhes consultar Anexo I.

pela origem do referencial.
As equações das retas que passam pela origem são da forma

$$y = Cx,\ C \in \mathbb{R} \qquad (\textit{retas não verticais}) \tag{1.17}$$

ou

$$x = 0 \qquad (\textit{reta vertical}). \tag{1.18}$$

Derivando ambos os membros de (1.17) em ordem a x*, obtém-se*

$$y' = C.$$

Substituindo, na equação (1.17), a constante C *por* y' *obtém-se a equação diferencial*

$$y = y'x. \tag{1.19}$$

Portanto, as curvas integrais dadas pelas retas não verticais (1.17) satisfazem esta equação. A reta vertical, de equação (1.18), não é solução da equação diferencial obtida (1.19) já que, se se substituísse x *por 0 em (1.19), se teria* $y = 0$*, o que corresponderia a ter apenas o ponto (0,0) e não o conjunto de todos os pontos da reta* $x = 0$*.*
Porém, a equação diferencial (1.19) pode ser reescrita usando diferenciais. De facto, multiplicando ambos os membros de (1.19) por dx *e tendo em conta que* $y'dx = dy$*, obtém-se*

$$x\ dy - y\ dx = 0. \tag{1.20}$$

A equação diferencial assim escrita tem como solução a função $y = Cx$*, para todo o* $C \in \mathbb{R}$*, e também a reta* $x = 0$*, como se verifica por substituição em (1.20)*[9]*. Assim, (1.20) é a equação diferencial procurada.*

Exemplo 1.3.3 (Encontrar a equação diferencial cuja solução é dada) *Pretende-se determinar a equação diferencial correspondente à família de circunferências que passam pela origem do referencial e cujos centros estão situados na reta* $x = y$ *(ver Figura 2.6).*
Qualquer ponto da reta $x = y$ *é da forma* (C, C)*, com* $CinR$*, sendo que a distância deste ponto à origem é* $r = \sqrt{C^2 + C^2} = \sqrt{2}|C|$*. Assim, a equação da circunferência com centro no ponto* (C, C) *e que passa pela origem é*

$$(x - C)^2 + (y - C)^2 = 2C^2,$$

ou, simplificando,

$$x^2 + y^2 - 2C(x + y) = 0. \tag{1.21}$$

Derivando esta equação em ordem a x*, vem*

$$2x + 2yy' - 2C(1 + y') = 0,$$

donde

$$C = \frac{x + yy'}{1 + y'}.$$

Substituindo esta expressão na equação (1.21) *e simplificando, obtém-se a equação diferencial pretendida*

$$(x^2 + y^2)(1 + y')^2 = 2(x + y)(x + yy')^2.$$

[9]Neste caso, a reta $x = 0$ tem que ser considerada como gráfico da função $x = x(y) = 0$. Por isso,

$$dx = x'dy = 0dy = 0\,.$$

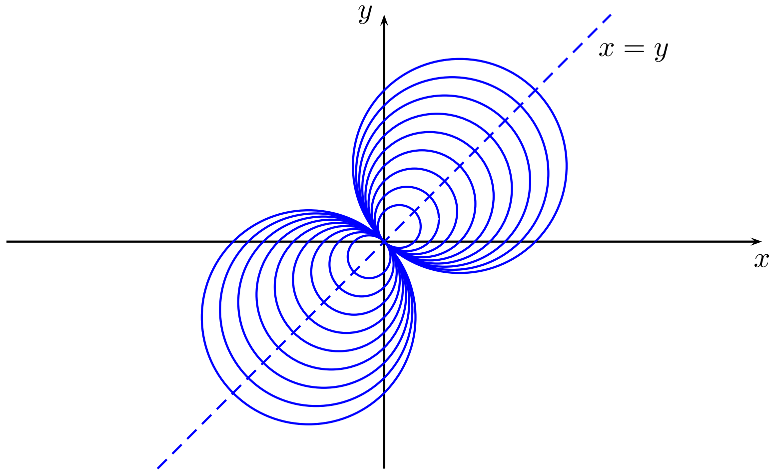


Figura 1.6: Curvas de circunferências que satisfazem a equação diferencial obtida no Exemplo 1.3.3.

1.4 Exercícios resolvidos

1. Para cada caso seguinte, mostre que a função $y = \phi(x)$ dada é solução da equação diferencial indicada.

   (a) Função $\phi(x) = \ln(\cos x)$; equação diferencial $y' = -\tan x$.
   Resolução. Derivando a função $\phi(x)$ em ordem a x, obtém-se

   $$y' = \phi'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

   Substituindo $\phi(x)$ por y, resulta

   $$y' = -\tan x.$$

   (b) Função $y = \phi(x)$ tal que $x^2 + 2x\phi(x) = C$; equação diferencial $x + y + xy' = 0$.
   Resolução. Derivando ambos os membros da equação $x^2 + 2x\phi(x) = C$ em ordem a x, obtém-se

   $$2x + 2\phi(x) + 2x\phi'(x) = 0.$$

   Substituindo $\phi(x)$ por y e dividindo ambos os membros desta equação por 2, vem

   $$x + y + xy' = 0.$$

   (c) Função $y = \phi(x)$ tal que $\phi(x) - x = C \exp(\phi(x))$; equação diferencial $(x - y + 1)y' = 1$.
   Resolução. Partindo da equação $\phi(x) - x = C \exp(\phi(x))$ e multiplicando ambos os membros por $\exp(-\phi(x))$, vem

   $$\exp(-\phi(x))\,(\phi(x) - x) = C.$$

   Derivando esta equação, tem-se

   $$\exp(-\phi(x))\,(-\phi'(x))\,(\phi(x) - x) + \exp(-\phi(x))\,\big(\phi'(x) - 1\big) = 0,$$

e dividindo ambos os membros por $\exp(-\phi(x))$, vem

$$-\phi'(x)\phi(x) + \phi'(x)x + \phi'(x) - 1 = 0,$$

ou seja,

$$\phi'(x)(-\phi(x) + x + 1) = 1.$$

Substituindo $\phi(x)$ por y, obtém-se a equação diferencial pretendida $(x - y + 1)y' = 1$.

(d) Função $\phi(x) = -\frac{2}{x^2}$; equação diferencial $xy^2dx - dy = 0$.

Resolução. Atendendo a que $dy = y'dx$ e $dx \neq 0$, a equação diferencial pode ser escrita de outra forma pois

$$xy^2dx - dy = 0 \Leftrightarrow (xy^2 - y')dx = 0 \Leftrightarrow y' = xy^2.$$

Por outro lado, derivando em ordem a x a função $y = \phi(x)$, obtém-se

$$y' = \frac{4}{x^3}.$$

Substituindo, na equação diferencial, as expressões para a função y e y', observa-se que

$$\frac{4}{x^3} = x\left(-\frac{2}{x^2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{4}{x^3} = \frac{4}{x^3},$$

pelo que $y = -\frac{2}{x^2}$ é solução da equação diferencial $xy^2dx - dy = 0$.

2. Diga quais das seguintes funções $y = \phi_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, onde

$$\phi_1(x) = e^{x+2}, \quad \phi_2(x) = 3e^{x/3}, \quad \phi_3(x) = \cos x, \quad \phi_4(x) = 5,$$

são soluções, em $\mathbb{R}$, da equação diferencial

$$y''' - y' = 0.$$

Resolução. Considere-se, em primeiro lugar, a função $\phi_1(x)$. Substituindo $y = e^{x+2}$ na equação diferencial dada, tem-se

$$y''' - y' = (e^{x+2})''' - (e^{x+2})' = 0.$$

Como $(e^{x+2})''' = (e^{x+2})' = e^{x+2}$, a equação diferencial é trivialmente satisfeita pela função $y = e^{x+2}$.

Considere-se, seguidamente, a segunda função dada: $y = 3e^{x/3}$. Procedendo de forma análoga ao caso anterior, para esta função $\phi_2(x)$ observa-se que

$$y''' - y' = (3e^{x/3})''' - (3e^{x/3})' = \frac{1}{9}e^{x/3} - e^{x/3} \neq 0.$$

Portanto, $y = 3e^{x/3}$ não é solução da equação dada.

Considere-se agora a função $\phi_3(x)$. Verifica-se que a função $y = \cos x$ também não é solução da equação diferencial dada já que

$$y''' - y' = (\cos x)''' - (\cos x)' = \sin x + \sin x \neq 0.$$

Finalmente, para a função $y = 5$ verifica-se trivialmente que $5''' = 5' = 0$ e, portanto, $y = 5$ é solução da equação diferencial $y''' - y' = 0$.

Conclusão: Apenas as funções $y = e^{x+2}$ e $y = 5$ são soluções da equação diferencial dada.

3. Mostre que a equação $x^2 - xy + y^2 = C,\ C \in \mathbb{R}$, é solução geral da equação diferencial $(x-2y)y' - 2x + y = 0$.

   Resolução. Derivando ambos os membros da equação $x^2 - xy + y^2 = C$, supondo y função de x, tem-se

$$2x - (y + xy') + 2yy' = 0 \Leftrightarrow 2x - y - xy' + 2yy' = 0 \Leftrightarrow (2x - y) - y'(x - 2y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)y' - 2x + y = 0\,,$$

   sendo esta última a equação diferencial pedida.

4. Determine a equação diferencial da família de curvas $y = C \ln x,\ x > 0,\ C \in \mathbb{R}$ (Curvas desta família são ilustradas na Figura 2.7).

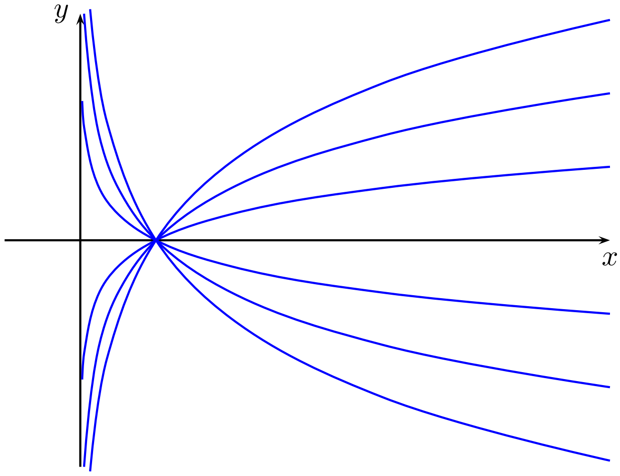


Figura 1.7: Curvas $y = C \ln x$, para alguns valores reais da constante C.

   Resolução. Assumindo que $y = y(x)$ e derivando a expressão $y = C \ln x$ em ordem a x, obtém-se

$$y' = \frac{C}{x},$$

   pelo que $C = xy'$. Substituindo na expressão dada, resulta a equação diferencial pretendida $y = y' x \ln x$.

5. Determine a equação diferencial da família de curvas $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

   Resolução. Assumindo que $y = y(x)$ e obtendo a primeira e segunda derivadas em ordem a x da expressão dada, obtém-se o seguinte sistema linear nas constantes C_1 e C_2

$$\begin{cases} y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \\ y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x \end{cases}.$$

   Resolvendo este sistema em ordem às constantes C_1 e C_2, obtém-se

$$\begin{cases} C_1 = -y' \sin x - y'' \cos x \\ C_2 = y' \cos x - y'' \sin x \end{cases}.$$

Substituindo na expressão inicial dada, vem:

$$\begin{aligned} y &= (-y' \sin x - y'' \cos x) \cos x + (y' \cos x - y'' \sin x) \sin x \\ &= -y' \sin x \cos x - y'' \cos^2 x + y' \cos x \sin x - y'' \sin^2 x \\ &= -y'' \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) \\ &= -y'' , \end{aligned}$$

donde resulta a equação diferencial pretendida $y'' + y = 0$.

1.5 Exercícios

1. Classifique, quanto à sua ordem, as seguintes equações diferenciais.

   (a) $dy + (xy - \cos\ x)dx = 0$;
   (b) $L\frac{d^2\theta}{dt^2} + R\frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{C} = 0$;
   (c) $y''' + xy'' + 2y(y')^2 + xy = 0$;
   (d) $\frac{d^2v}{dx^2}\frac{dv}{dx} + x\left(\frac{dv}{dx}\right)^4 + v = 0$;
   (e) $e^{y'''} - xy'' + y = 0$;
   (f) $y' + x = (y - xy')^{-3}$;
   (g) $y'' + 3xy = \sin x$;
   (h) $ty'' + t^2y' = \sin t + 1$;
   (i) $y\frac{d^2x}{dy^2} - y^2 = 3$.

2. Mostre que a função $y = \phi(x)$ dada é solução da equação diferencial indicada.

   (a) $\phi(x) = \frac{\sin x}{x}$; $\quad xy' + y = \cos x$.
   (b) $\phi(x) = Cx^3, \quad C \in \mathbb{R}$; $\quad xy' - 3y = 0$.
   (c) $\phi(x) = x(\int_1^x \frac{1}{t}e^t dt + C), \quad C \in \mathbb{R}$; $\quad xy' - y = xe^x$.
   (d) $\phi(x) = x(\ln(x^2) + C), \quad C \in \mathbb{R}$; $\quad xy' - y = 2x$.
   (e) $\phi(x) = \frac{(x+1)^4}{2} + (x+1)^2$; $\quad y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.
   (f) $\phi(x) = Ce^x \sin x, \quad C \in \mathbb{R}$; $\quad y'' - 2y' + 2y = 0$.
   (g) $\phi(x) = C_1 \sin(7x) + C_2 \cos(7x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; $\quad y'' + 49y = 0$.

3. Considere as três seguintes funções: $f(x) = (x + C)e^x$, $g(x) = -\frac{2}{x^2}$, e $y = h(x)$ definida implicitamente pela equação $x^2 - xy + y^2 = C$, onde C é uma constante. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, identifique, entre as três funções dadas, qual é solução, em $\mathbb{R}$, da equação.

   (a) $xy^2dx - dy = 0$;
   (b) $y' - y = e^x$;
   (c) $(x - 2y)y' - 2x + y = 0$.

4. Diga, justificando, qual(s) das seguintes funções, $y = e^{x/2}$, $y = \sin\frac{x}{2}$ e $y = e^x + 2$, é solução, em $\mathbb{R}$, da equação diferencial $2y' - y = 0$.

5. Verifique se a função dada é solução da equação diferencial indicada.

   (a) $y = \frac{1}{3(x+1)}$; $\quad y' = 3y^2$.
   (b) $y = \frac{3}{x} - \frac{x}{2}$; $\quad x + y + xy' = 0$.
   (c) $y = 3 - e^{-x^2}$; $\quad xy' - 2y = e^{-x^2}$.
   (d) $y^2 + x^2 - 2x = 5$; $\quad yy' + x = 1$.

6. Formalize, em termos matemáticos, as seguintes condições utilizando equações diferenciais ordinárias.

   (a) Para uma certa substância, a razão de variação da pressão do vapor (P) em relação à temperatura (T) é proporcional à pressão do vapor e inversamente proporcional ao quadrado da temperatura.
   (b) A taxa de densidade populacional H de uma cidade aumenta (em função do tempo t) proporcionalmente ao produto da densidade populacional pelo desvio dessa densidade do valor de referência 200000.
   (c) A velocidade de arrefecimento de um certo corpo exposto ao ar é proporcional à diferença entre a temperatura T inicial do corpo e a temperatura T_0 do ar.
   (d) *Massa* $\times$ *aceleração* $=$ *força*.

7. Determine a equação diferencial da família de circunferências centradas na origem.

8. Determine a equação diferencial de todas as circunferências situadas no I e III quadrantes do plano $\mathbb{R}^2$ e tangentes, simultaneamente, às retas $x = 0$ e $y = 0$.

9. Determine a equação diferencial correspondente à família de curvas planas definidas pela seguinte condição:

   "as retas tangentes, em cada ponto (x, y), têm declive y' igual ao dobro da soma das coordenadas desse ponto".

10. Exprima, sob a forma de equação diferencial, a distância S percorrida por um corpo durante o tempo t, sabendo que a sua velocidade é proporcional a esta distância.

11. Determine a equação diferencial correspondente a cada uma das seguintes famílias de curvas planas

   (a) $y = Cx^2$, com $C \in \mathbb{R}$;
   (b) $y^2 = -1 + Cx^2$, com $C \in \mathbb{R}$;
   (c) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;
   (d) $y = C_1x + C_2$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;
   (e) $y = e^{cx}$, com $C \in \mathbb{R}$;
   (f) $y = ax^2 + be^x$, com $a, b \in \mathbb{R}$;
   (g) $y = \sin(x + C)$, com $C \in \mathbb{R}$;

1.6 Soluções

1. (a) primeira ordem;
   (b) segunda ordem;
   (c) terceira ordem;
   (d) segunda ordem;
   (e) terceira ordem;
   (f) primeira ordem;
   (g) segunda ordem;
   (h) segunda ordem;
   (i) segunda ordem.

2.

3. (a) função g;
   (b) função f;
   (c) função h.

4. função $y = e^{x/2}$.

5. (a) não.
   (b) sim.
   (c) não.
   (d) sim.

6. (a) $P'(T) = k\frac{P(T)}{T^2}$, onde k é o coeficiente de proporcionalidade.
   (b) $H'(t) = kH(t)(200000 - H(t))$.
   (c) $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$, onde $T = T(t)$.
   (d) $m\frac{dv}{dt} = F$, onde $v = v(t)$ é a velocidade em função do tempo, ou $m\frac{d^2s}{dt^2} = F$, onde $s = s(t)$ é o deslocamento em função do tempo.

7. $x + yy' = 0$.

8. $(y - xy')^2 = 2xy((y')^2 + 1)$.

9. $y' = 2(x + y)$.

10. $\frac{dS}{dt} = kS$, onde k é o coeficiente de proporcionalidade.

11. (a) $y' = 2\frac{y}{x}$;
    (b) $xyy' - y^2 = 1$;
    (c) $y'' + 2y' + y = 0$;
    (d) $y'' = 0$;
    (e) $xy' - y\ln y = 0$;
    (f) $y'(x^2 - 2) - xy''(x - 2) = 2y(x - 1)$;
    (g) $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

Capítulo 2

Equações diferenciais de primeira ordem

2.1 Noções básicas

Uma **equação diferencial ordinária de 1.ª ordem**, na sua forma geral, é dada pela expressão

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.1}$$

onde $y = y(x)$ é uma função desconhecida com derivada $y' = y'(x) = \frac{dy}{dx}$. Esta equação (2.1) poderá também surgir escrita na sua forma *normal*

$$y' = f(x, y). \tag{2.2}$$

No caso de $f(x, y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, para algumas funções $M(x, y)$ e $N(x, y) \neq 0$, a equação (2.2) pode ainda ser reescrita usando *diferenciais*, nomeadamente

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

ou ainda

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{2.3}$$

Note que, nas formas (2.1)-(2.3), as funções F, f, M e N são funções reais de mais do que uma variável real.

Exemplo 2.1.1 (Equações diferenciais ordinárias de 1.ª ordem) *As equações diferenciais de 1.ª ordem*

$$x + y + x^2yy' = 0 \qquad e \qquad y' = x$$

estão escritas na forma geral e na forma normal, respetivamente. Usando diferenciais, aquelas equações ficam na forma:

$$(x + y)dx + x^2ydy = 0 \qquad e \qquad dy - xdx = 0$$

respetivamente.

A **solução geral** de uma equação diferencial de 1.ª ordem é a família uni-paramétrica de funções $y = \phi(x, C)$ (ou, na forma implícita $\Phi(x, y, C) = 0$) que transforma essa equação diferencial numa identidade, sendo $C \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária.

Quando na solução geral de uma equação diferencial da 1.ª ordem se atribui um valor particular à constante C, $C = C_0$, obtém-se uma **solução particular**, $y = \phi(x, C_0)$ (ou, na forma implícita $\Phi(x, y, C_0) = 0$), dessa equação diferencial.

Designa-se por **problema de Cauchy**, de uma equação diferencial de 1ª ordem, ao problema que consiste em encontrar a solução particular $y = \phi(x, C_0)$, dessa equação diferencial, que satisfaz uma **condição inicial** da forma $y(x_0) = y_0$. A condição $y(x_0) = y_0$ também pode ser representada por $y|_{x=x_0} = y_0$.

Exemplo 2.1.2 (Problema de Cauchy) *Sabendo que a família de funções definidas implicitamente por*

$$y(1 - Cx) = 1, \ \ C \in \mathbb{R}\,, \tag{2.4}$$

é a solução geral de uma certa equação diferencial, então para obter a solução particular dessa equação diferencial sujeita à condição inicial $y(2) = \frac{1}{3}$, é necessário obter o valor da constante C de modo que o gráfico da função $y(1 - Cx) = 1$ passe pelo ponto $(x_0, y_0) = \left(2, \frac{1}{3}\right)$. Assim, substituindo $x = x_0 := 2$ e $y = y_0 := \frac{1}{3}$ em (2.4), obtém-se a equação em termos de constante C

$$\frac{1}{3}(1 - 2C) = 1.$$

Desta última equação resulta o valor de constante, $C = -1$. Substituindo este valor em (2.4), obtém-se a solução $y(1 + x) = 1$ do problema de Cauchy dado.

Nota. Geometricamente, o problema de Cauchy, para equações diferenciais de 1.ª ordem, corresponde ao problema de determinação, em $\mathbb{R}^2$, da curva integral, dessa equação diferencial, que passa pelo ponto de coordenadas (x_0, y_0). Assim, no Exemplo 2.1.2, a solução particular $y(1 + x) = 1$ define a curva que passa pelo ponto $(2, \frac{1}{3})$.

Teorema 2.1 (Existência e unicidade de solução do problema de Cauchy) *Seja a equação diferencial na forma normal*

$$y' = f(x, y). \tag{2.5}$$

Se a função f, de duas variáveis, e a sua derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas num domínio $D \subseteq \mathbb{R}^2$, então, para cada ponto $(x_0, y_0) \in D$, existe e é única em D a solução da equação diferencial (2.5) que satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$.[1]

Exemplo 2.1.3 (Interpretação geométrica do problema de Cauchy) *No Exemplo 1.1.4, verificou-se que a família de funções definidas pela equação $y = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$, é a solução geral da equação diferencial $y' = -2y$. Esta solução representa a família de funções exponenciais. A solução do problema de Cauchy*

$$y' = -2y, \quad y(1) = 1,$$

[1]Note-se que o Teorema 2.1 representa uma condição suficiente de existência e unicidade de solução do problema de Cauchy. Outras condições, eventualmente menos restritivas, que também garantem a existência e unicidade de solução, podem ser formuladas.

é $y = e^2e^{-2x} = e^{2(1-x)}$ e corresponde a uma função exponencial cujo gráfico passa pelo ponto $(1,1)$. Esta função é única, o que está de acordo com o Teorema 2.1. Observa-se que a função de duas variáveis $f(x,y) = -2y$ e a sua derivada parcial, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2$, são contínuas em $\mathbb{R}^2$, pelo que as condições do Teorema 2.1 são satisfeitas. Assim, pode-se concluir, pelo Teorema 2.1, que $y(x) = e^{2(1-x)}$ é a única solução do problema de Cauchy dado.

2.2 Equação diferencial de variáveis separadas

Uma equação diferencial ordinária da 1.ª ordem na forma

$$P(x)dx = Q(y)dy \tag{2.6}$$

é chamada **equação diferencial de variáveis separadas**.

Nota. A equação (2.6) é o caso particular de equação (2.3) com $M(x,y) = P(x)$ e $N(x,y) = -Q(y)$. Integrando ambos os membros da equação (2.6) em relação às respetivas variáveis x e y, obtém-se

$$\int P(x)dx = \int Q(y)dy\,. \tag{2.7}$$

Exemplo 2.2.1 (Resolução de uma equação diferencial de variáveis separadas) *Para resolver a equação diferencial de variáveis separadas*

$$y^2dy = e^{-x}dx,$$

começa-se por integrar ambos os membros dessa equação em ordem às respetivas variáveis y e x. Tem-se

$$\int y^2dy = \int e^{-x}dx \;\Leftrightarrow\; \frac{y^3}{3} = -e^{-x} + C,\; C \in \mathbb{R},$$

donde

$$y = \sqrt[3]{3C - 3e^{-x}},\; C \in \mathbb{R}.$$

A constante arbitrária C surge no passo do cálculo dos integrais, nomeadamente, $\int y^2dy$ e $\int e^{-x}dx$, quando estes serem substituídos pelas correspondentes famílias de primitivas. Embora cada uma dessas famílias envolva uma constante arbitrária, ou seja,

$$\int y^2dy = \frac{y^3}{3} + C_1,\; C_1 \in \mathbb{R} \quad e \quad \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C_2,\; C_2 \in \mathbb{R},$$

na equação acima, em vez de se escrever $\frac{y^3}{3} + C_1 = -e^{-x} + C_2$ simplifica-se, como se fez, escrevendo

$$\frac{y^3}{3} = -e^{-x} + C$$

e onde se supõe que $C := C_2 - C_1$.
Mais ainda, sendo C uma constante arbitrária, o valor $C^* := 3C$ continua a ser uma constante

real arbitrária, pelo que a solução geral da equação diferencial pode ser simplesmente escrita na forma

$$y = \sqrt[3]{C^* - 3e^{-x}}\,, \quad C^* \in \mathbb{R},$$

(ver Figura 2.1).

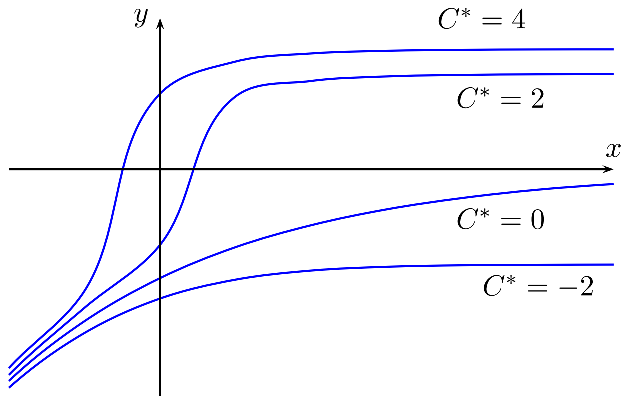


Figura 2.1: Curvas integrais da equação diferencial do Exemplo 2.2.1.

2.3 Equação diferencial de variáveis separáveis

Uma equação diferencial na forma

$$y' = f(x)g(y) \tag{2.8}$$

ou, genericamente, na forma

$$M_1(x)N_1(y)dx = M_2(x)N_2(y)dy, \tag{2.9}$$

é chamada **equação diferencial de variáveis separáveis**.[2]

Para resolver uma equação diferencial de variáveis separáveis na forma (2.9) dividem-se ambos os membros dessa equação por $N_1(y)M_2(x)$, no pressuposto de que $N_1(y)M_2(x) \neq 0$, resultando a equação de variáveis separadas

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy,$$

cujo integral geral é

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy. \tag{2.10}$$

Nota. Após a obtenção do integral geral (2.10) deverá verificar-se se existem outras soluções da equação diferencial de variáveis separáveis (2.9), entre os zeros das funções assumidas como

[2]Note que (2.8) pode ser escrita na forma (2.9) se se assumir $M_1(x) = f(x)$, $M_2(x) = 1$ e $N_1(y) = 1$, $N_2(y) = \frac{1}{g(y)}$.

não nulas no processo de resolução acima indicado. Concretamente, deverá verificar-se se as condições $N_1(y) = 0$ e $M_2(x) = 0$ conduzem a outras soluções da equação diferencial, podendo elas ser ou não da forma (2.10). Às soluções obtidas neste caso que não são de forma (2.10) chamam-se **soluções singulares**.

Exemplo 2.3.1 (Resolução de uma equação diferencial de variáveis separáveis) *Considere a equação diferencial*

$$xydx - (1 + x^2)\ln y\ dy = 0. \tag{2.11}$$

Esta pode ser transformada na forma (2.9) tomando $M_1(x) = x$, $N_1(y) = y$, $M_2(x) = 1 + x^2$, $N_2(y) = \ln y$.
Dado que a equação (2.11) contém a expressão numérica $\ln y$, *a equação (2.11) só tem sentido para funções* $y = y(x)$ *positivas* $(y > 0)$.
Sendo $y \neq 0$ *e* $1 + x^2 \neq 0$, *pode dividir-se ambos os membros de (2.11) por* $y(1 + x^2)$, *resultando uma nova equação*

$$\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\ln y}{y}dy\,.$$

Por integração desta, e simplificando, vem

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{\ln y}{y}dy \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{\ln^2 y}{2} + C$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+x^2) = \ln^2 y + C^*, \quad \text{com } C^* := 2C.$$

Donde, o integral geral da equação diferencial de variáveis separáveis dada é

$$\ln(1+x^2) = \ln^2 y + C^*, \quad C^* \in \mathbb{R}$$

(ver Figura 2.2).

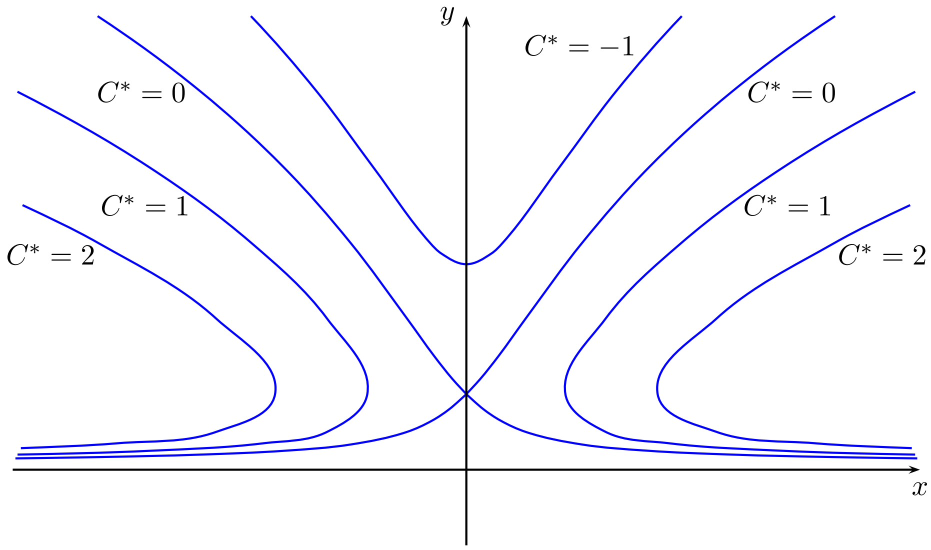


Figura 2.2: Curvas integrais da equação diferencial do Exemplo 2.3.1.

Exemplo 2.3.2 (Resolução de uma equação diferencial de variáveis separáveis) *A equação diferencial*

$$y' = x\cos^2 y \tag{2.12}$$

é uma equação de variáveis separáveis na forma (2.8). Usando diferenciais, (2.12) pode ser escrita na forma

$$dy = x\cos^2 y dx.$$

Se $\cos^2 y \neq 0$*, então esta última equação é equivalente a ter* $\frac{dy}{\cos^2 y} = xdx$*. Integrando, vem* $\int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \int xdx$*, donde o integral geral de (2.12) é*

$$\tan y = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Se $\cos^2 y = 0$ *então,* $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$*, com* $k \in \mathbb{Z}$*. Substituindo, na equação (2.12), y por* $\frac{\pi}{2} + k\pi$*, obtém-se uma identidade. Logo,* $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$*, para qualquer* $k \in \mathbb{Z}$*, é também solução da equação (2.12). Note que as soluções na forma* $y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$*, não fazem parte da solução anteriormente encontrada (2.13) pelo que são soluções singulares. Efetivamente, basta ter em atenção que a função* $\tan y$*, em (2.13), não está definida para* $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$*, qualquer que seja* $k \in \mathbb{Z}$*. Assim, a solução da equação diferencial dada (2.12) é constituída pela família de funções*

$$\tan y = \frac{x^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}, \quad e \quad y = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

(ver Figura 2.3).

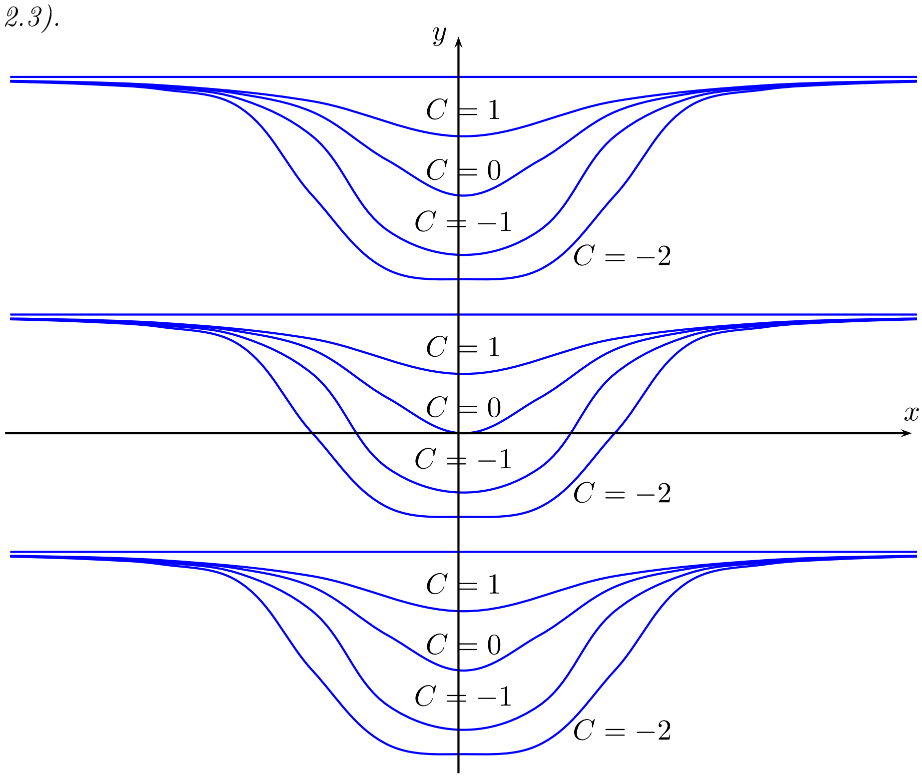


Figura 2.3: Representação gráfica de algumas soluções, incluindo soluções singulares, da equação diferencial do Exemplo 2.3.2.

2.4 Equação diferencial redutível a equação de variáveis separáveis

Uma equação diferencial na forma

$$y' = f(ax + by + c), \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \text{tais que } a, b \neq 0 \;, \tag{2.14}$$

pode ser reduzida a uma equação diferencial de variáveis separáveis através de uma mudança de variável conveniente. De facto, considerando $z = ax + by + c$, sendo z função de x, i.e., $z = z(x)$, tem-se $z' = a + by' = a + bf(z)$. Assim, (2.14) pode ser reduzida à equação de variáveis separáveis

$$dz = (a + bf(z))dx. \tag{2.15}$$

Tendo determinado o integral geral desta última, e substituindo nesse integral z por $ax + by + c$ obtém-se o integral geral de (2.14).

Exemplo 2.4.1 (Resolução de uma equação diferencial redutível a variáveis separáveis) *Considere a equação diferencial*

$$y' = \tan^2(x + y - 6)\,, \tag{2.16}$$

a qual está escrita na forma (2.14) com $f(z) = \tan^2(z)$, $a = b = 1$ *e* $c = -6$. *Para resolvê-la efetua-se a substituição*

$$z = x + y - 6, \tag{2.17}$$

tomando z *como uma função de* x, $z = z(x)$. *Nesse caso,* $z' = 1 + y'$ *e, por (2.16) e (2.17),*

$$z' = 1 + \tan^2(z)\,,$$

que é uma equação de variáveis separáveis com variável independente x *e variável dependente* z. *Para a resolução desta equação, usa-se o procedimento descrito na Secção* ***2.3***. *Ora,*

$$z' = 1 + \tan^2(z) \;\Leftrightarrow\; dz = (1 + \tan^2(z))dx \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dz}{1 + \tan^2(z)} = dx \;(\textit{note-se que } 1 + \tan^2(z) \neq 0 \;\forall z) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(z)dz = dx \Leftrightarrow \int \cos^2(z)dz = \int dx \Leftrightarrow \int \frac{1 + \cos(2z)}{2}dz = \int dx \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(z + \frac{\sin(2z)}{2}\right) = x + C, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Lembrando que, de (2.17), $z = x + y - 6$, *da última igualdade obtém-se o integral geral da equação diferencial (2.16), ou seja,*

$$\frac{1}{2}\left(x + y - 6 + \frac{\sin(2(x + y - 6))}{2}\right) = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Simplificando, tem-se

$$2(x - y) - \sin(2(x + y - 6)) = C^*, \quad C^* \in \mathbb{R},$$

com $C^* := -4C - 12$ *(verifique).*

2.5 Equação diferencial homogénea

Diz-se que uma função $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é **homogénea**, com grau de homogeneidade igual a α, $\alpha \in \mathbb{R}$, se, para todo $(x, y) \in \mathcal{R}$ e todo $t \neq 0$, tal que $(tx, ty) \in \mathcal{R}$, se tem $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$.

Exemplo 2.5.1 (Função homogénea de grau 0) *A função $f(x, y) = \frac{x+2y}{3x-y}$ é uma função homogénea de grau 0 uma vez que para todo $t \neq 0$, se tem*

$$f(tx, ty) = \frac{tx + 2ty}{3tx - ty} = \frac{t(x + 2y)}{t(3x - y)} = \frac{x + 2y}{3x - y} = t^0 f(x, y) = f(x, y).$$

Exemplo 2.5.2 (Função homogénea de grau 1) *A função $\varphi(x, y) = \frac{2x^2+y^2}{x-2y}$ é uma função homogénea de grau 1. De facto, para todo $t \neq 0$, se tem*

$$f(tx, ty) = \frac{2(tx)^2 + (ty)^2}{tx - 2ty} = \frac{t^2(2x^2 + y^2)}{t(x - 2y)} = \frac{t(2x^2 + y^2)}{(x - 2y)} = tf(x, y).$$

Uma equação diferencial na forma

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2.18}$$

onde φ é uma função real de variável real, ou na forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \ , \tag{2.19}$$

onde M e N são funções homogéneas com o mesmo grau de homogeneidade, é chamada **equação diferencial homogénea**.

Nota. A equação (2.19) pode ser sempre reescrita na forma (2.18).

Para resolver uma equação diferencial homogénea efetua-se a mudança de variável $y = ux$, onde $u = u(x)$ é uma função desconhecida. Nesse caso, $y' = u'x + u$ e, portanto, $dy = (u'x + u)dx$. A mudança de variável proposta transforma a equação diferencial homogénea inicial, com função desconhecida y, numa equação diferencial de variáveis separáveis, com função desconhecida u. Resolvendo esta última e substituindo u por y/x na solução obtida, resulta o integral geral da equação diferencial homogénea.

Exemplo 2.5.3 (Resolução de uma equação diferencial homogénea) *Considere a equação diferencial*

$$(y^2 - 2xy)dx - xydy = 0\,. \tag{2.20}$$

Comparando-a com (2.19), tome-se $M(x, y) = y^2 - 2xy$ e $N(x, y) = -xy$. Para todo o $t > 0$, observa-se que

$$M(tx, ty) = (ty)^2 - 2txty = t^2y^2 - 2t^2xy = t^2M(x, y)$$

e

$$N(tx, ty) = -txty = t^2(-xy) = t^2N(x, y)\,.$$

Logo, M e N são duas funções homogéneas, com grau de homogeneidade $\alpha = 2$. A equação (2.20) é então uma equação diferencial homogénea. Para resolvê-la considera-se a substituição $y = ux$, com $u = u(x)$. Assim, $y' = u'x + u$ e $dy = (u'x + u)dx$. Substituindo, em (2.20), y e dy pelas respetivas expressões em termos de u, vem

$$((ux)^2 - 2ux^2)dx - ux^2(u'x + u)dx = 0,$$

ou, de modo equivalente,

$$-(2 + u'x)ux^2dx = 0. \tag{2.21}$$

Se $u \neq 0$ e $x \neq 0$, (2.21) é equivalente à equação diferencial

$$2 + u'x = 0.$$

Resolvendo esta última, obtém-se

$$2 + u'x = 0 \;\Leftrightarrow xdu = -2dx \;\Leftrightarrow\; du = -2\frac{1}{x}dx \;\Leftrightarrow\; \int du = -2\int \frac{1}{x}dx \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u = -2\ln|x| + C\,.$$

Logo,

$$y = ux = -2x\ln|x| + Cx\,, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

Se $y = 0$ ou $x = 0$, a equação diferencial (2.20) transforma-se numa identidade, pelo que $y = 0$ e $x = 0$ são também soluções desta equação, sendo que ambas não pertencem ao conjunto das soluções definidas por (2.22). Assim, a solução de (2.20) é

$$y = -2x\ln|x| + Cx,\; C \in \mathbb{R}, \qquad y = 0 \quad e \quad x = 0\,,$$

(ver Figura 2.4).

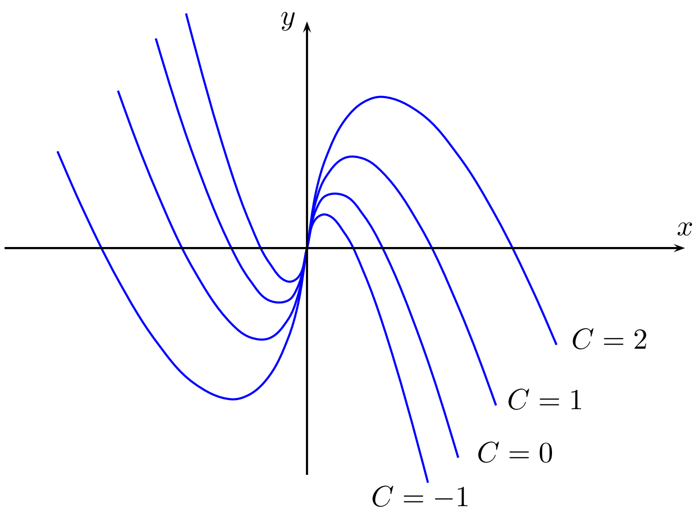


Figura 2.4: Curvas integrais da equação diferencial do Exemplo 2.5.3.

Exemplo 2.5.4 (Resolução de uma equação diferencial homogénea) *Considere a equação diferencial*

$$xy' = y + x\sin\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.23}$$

Trata-se de uma equação diferencial homogénea uma vez que a equação dada pode ser reescrita na forma

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right),$$

ou seja, $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ *com* $\phi(u) = u + \sin u$.
Efetuando a substituição $u = u(x) := \frac{y}{x}$, *onde* $y = ux$, $y' = u'x + u$, *obtém-se uma equação diferencial em termos da função* $u = u(x)$ *dada por*

$$u'x + u = u + \sin u,$$

ou, de forma equivalente,

$$u'x = \sin u.$$

Separando as variáveis na última equação diferencial, resulta (verifique!)

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x},$$

pelo que integrando ambos os membros vem

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x}.$$

Uma vez que[3]

$$\int \frac{du}{\sin u} = \ln|\tan(\frac{u}{2})| + K,\ K \in \mathbb{R},$$

e

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \bar{K},\ \bar{K} \in \mathbb{R},$$

concluí-se que

$$\ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right| = \ln|x| + \ln|C|,\ \textit{com}\ \ln|C| := \bar{K} - K,$$

donde

$$\tan\left(\frac{u}{2}\right) = Cx,\ C \in \mathbb{R},$$

e, regressando à variável y, *resulta a solução geral da equação diferencial (2.23)*

$$\tan\left(\frac{y}{2x}\right) = Cx,\ C \in \mathbb{R}.$$

[3] Para calcular o integral $\int \frac{du}{\sin u}$, efetue a substituição $t = \tan(\frac{u}{2})$; nesse caso, $u = 2\arctan t$, $du = \frac{2}{1+t^2}dt$ e $\sin u = \frac{2\tan(\frac{u}{2})}{1+\tan^2(\frac{u}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}$. Logo, $\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + K = \ln|\tan(\frac{u}{2})| + K$, $K \in \mathbb{R}$.

2.6 Equação diferencial redutível a homogénea ou a de variáveis separáveis

Considere a equação diferencial na forma

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) , \tag{2.24}$$

com $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2,$ e com c_1, c_2 não simultaneamente nulos.

Se $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, a equação (2.24) pode ser reduzida a uma equação diferencial homogénea através da mudança de variáveis $x = \xi + h,\ y = \eta + k$. Aqui, ξ e η serão novas variáveis e as constantes h e k resultam como solução do seguinte sistema de duas equações

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_1h & + & b_1k & + & c_1 & = & 0 \\ a_2h & + & b_2k & + & c_2 & = & 0. \end{array}\right. \tag{2.25}$$

Caso $\Delta = 0$, a mudança de variável definida por

$$z = a_1x + b_1y, \tag{2.26}$$

com $z = z(x)$, reduz a equação (2.24) a uma equação de variáveis separáveis.

Exemplo 2.6.1 (Resolução de uma equação redutível a uma equação de variáveis separáveis) *A equação diferencial*

$$(y + 2)dx - (2x + y - 4)dy = 0 \tag{2.27}$$

pode ser escrita na forma

$$y' = \frac{y + 2}{2x + y - 4}, \tag{2.28}$$

se se admitir que $2x + y - 4 \neq 0$.
A equação (2.28) é da forma (2.24) com $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. *Consequentemente, para resolver a equação (2.28) efetua-se a mudança de variáveis* $x = \xi + h,\ y = \eta + k$, *com* h *e* k *soluções do sistema (2.25). Para a equação (2.28), o sistema (2.25) é dado por*

$$\left\{\begin{array}{lcl} k + 2 & = & 0 \\ 2h + k - 4 & = & 0. \end{array}\right.$$

Resolvendo este sistema, tem-se $h = 3$ *e* $k = -2$. *Deste modo, para resolver a equação diferencial (2.28) efetuam-se as mudanças de variáveis*

$$x = \xi + 3, \quad y = \eta - 2. \tag{2.29}$$

Nesse caso, é evidente que $x' = \xi'$ *e* $y' = \eta'$, *pelo que (2.28) pode ser reescrita na forma*

$$\eta' = \frac{\eta - 2 + 2}{2(\xi + 3) + \eta - 2 - 4},$$

i.e.,

$$\eta' = \frac{\eta}{2\xi + \eta}\,. \tag{2.30}$$

Suponha-se que $\eta \neq 0$. Dividindo por η, o numerador e o denominador do segundo membro de (2.30), obtém-se

$$\eta' = \frac{1}{2\xi/\eta + 1}. \tag{2.31}$$

Esta última equação é uma equação diferencial homogénea já que é da forma $\eta' = \varphi(\frac{\eta}{\xi})$. As variáveis em (2.31) são ξ (variável independente) e $\eta = \eta(\xi)$ (variável dependente). De acordo com o exposto na Secção ***2.5***, *para resolver a equação (2.31) considera-se uma nova mudança de variável,*

$$\eta = t\xi, \tag{2.32}$$

com $t = t(\xi)$ (aqui $\eta \neq 0$, logo $t \neq 0$ e $\xi \neq 0$). Assim, $\eta' = t'\xi + t$ e, substituindo em (2.31), tem-se

$$t'\xi + t = \frac{1}{2/t + 1} \;\Leftrightarrow \tag{2.33}$$

$$\Leftrightarrow\; t'\xi = \frac{t}{2+t} - t \;\Leftrightarrow\; \xi t' = \frac{-t - t^2}{2+t}$$

$$\Leftrightarrow \xi dt = -\frac{t(1+t)}{2+t}d\xi \quad \Big(\textit{eq. dif. de variáveis separáveis}\Big). \tag{2.34}$$

Anteriormente concluiu-se que $t \neq 0$. Se, ainda, se supor que $t \neq -1$, a última equação será equivalente à equação de variáveis separadas

$$-\frac{2+t}{t(1+t)}dt = \frac{d\xi}{\xi}.$$

Utilizando técnicas de primitivação de funções racionais, tem-se $\int \frac{2+t}{t(1+t)}dt = \ln\frac{|t+1|}{t^2} + C$, com $C \in \mathbb{R}$, (verifique). Consequentemente,

$$-\int \frac{2+t}{t(1+t)}dt = \int \frac{d\xi}{\xi} \;\Leftrightarrow\; \ln|\frac{t+1}{t^2}| = \ln|\xi| + \ln|C_1| \;\Leftrightarrow\; \ln|\frac{t+1}{t^2}| = \ln|\xi C_1| \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{t+1}{t^2} = \xi C_1\,, \quad \textit{com } C_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{2.35}$$

Note que, por razões de simplicidade, durante o processo de integração apresentado em cima, foi usada a constante arbitrária na forma $\ln|C_1|$. A condição $C_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ é uma restrição natural que é necessaria para definir o logaritmo. Por outro lado, verifica-se que se $C_1 = 0$, em (2.35) ter-se-ia $t = -1$. Por substituição em (2.34), verifica-se que $t = -1$ é também uma solução da equação (2.34) e, portanto, de (2.33). Logo, o integral geral da equação (2.33) pode ser escrito na forma

$$\frac{t+1}{t^2} = \xi C_1\,, \quad \textit{com } C_1 \in \mathbb{R}.$$

De (2.32), tem-se $t = \eta/\xi$, com $\xi \neq 0$, e, consequentemente, da última fórmula, vem

$$\frac{t+1}{t^2} = \xi C_1 \;\Leftrightarrow\; \frac{\eta/\xi + 1}{(\eta/\xi)^2} = \xi C_1 \;\Leftrightarrow \frac{\eta+\xi}{\eta^2} = C_1\,,$$

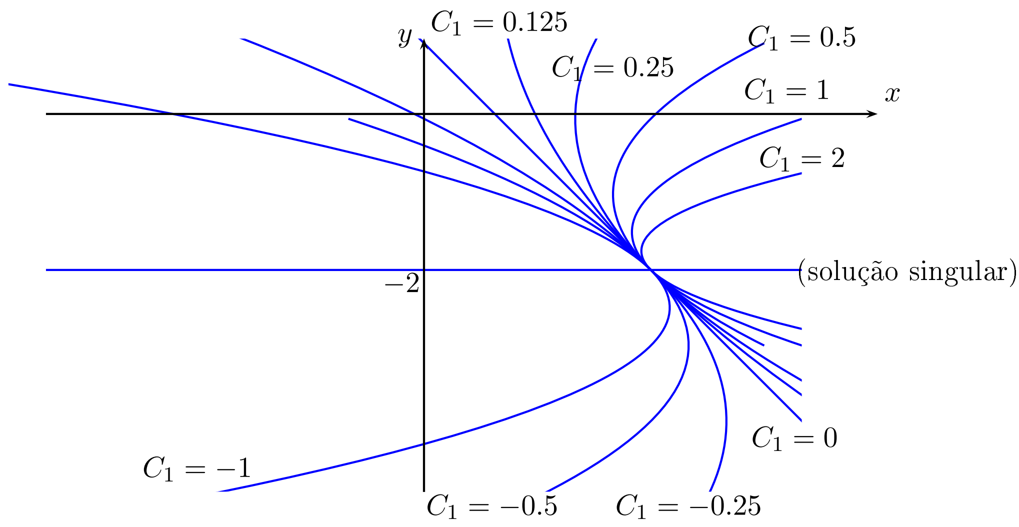


Figura 2.5: Representação gráfica de algumas soluções, incluindo a solução singular, da equação diferencial do Exemplo 2.6.1.

Tomando em conta (2.29), obtém-se

$$\frac{(y+2)+(x-3)}{(y+2)^2} = C_1,$$

ou seja,

$$x + y - 1 = C_1(y+2)^2, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \tag{2.36}$$

que é solução da equação diferencial (2.28) e, portanto, da equação inicial (2.27).

Recordar que a solução (2.36) foi obtida de (2.30) no pressuposto de que $\eta \neq 0$.
Suponha-se agora que $\eta = 0$. *Tomando em conta que* $\eta = y + 2$ *(da segunda fórmula de (2.29)), obtém-se* $y = -2$. *Por substituição, na equação diferencial (2.27), verifica-se que* $y = -2$ *é uma sua solução. Esta solução é singular, uma vez que não pode ser representada na forma (2.36).*

Note também que se $2x + y - 4 = 0$ *em (2.27), então* $y = 4 - 2x$ *e, por substituição desta função em (2.27), obtém-se* $(2-2x)dx = 0$, *que não é uma identidade; logo,* $y = 4 - 2x$ *não é solução de (2.27).*

Concluindo, a solução da equação (2.27) é

$$x = C_1(y+2)^2 - y + 1, \; C_1 \in \mathbb{R}, \quad e \quad y = -2$$

(ver Figura 2.5)

Exemplo 2.6.2 (Resolução de uma equação redutível a uma equação de variáveis separáveis) *Considere a equação diferencial*

$$(x - 2y + 3)dx + (x - 2y + 1)dy = 0\,. \tag{2.37}$$

Admitindo que $x-2y+1\neq 0$, *a equação (2.37) pode ser reescrita na forma*

$$y' = \frac{-x+2y-3}{x-2y+1}. \tag{2.38}$$

Uma vez que $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, *a equação (2.38) resolve-se efetuando a mudança de variável dada por (2.26) , i.e.,*

$$z = -x+2y, \tag{2.39}$$

com $z=z(x)$. *Assim sendo,* $z' = -1+2y'$, *pelo que, de (2.38),*

$$z' = -1 + \frac{2(z-3)}{-z+1}. \tag{2.40}$$

Ora,

$$z' = -1+\frac{2(z-3)}{-z+1} \;\Leftrightarrow\; z' = \frac{z-1+2z-6}{-z+1} \;\Leftrightarrow z' = \frac{3z-7}{1-z}.$$

Se $3z-7\neq 0$, *a última equação será uma equação de variáveis separáveis. Separando as variáveis, ainda se obtém*

$$\frac{1-z}{3z-7}dz = dx \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1-z}{3z-7}dz = \int dx \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{3}\int \frac{3z-3}{3z-7}dz = \int dx \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -\frac{1}{3}\int\left(1+\frac{4}{3z-7}\right)dz = \int dx \quad\Leftrightarrow\; -\frac{1}{3}\left[\int dz + \frac{4}{3}\int\frac{dz}{z-\frac{7}{3}}\right] = \int dx \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -\frac{1}{3}\left(z+\frac{4}{3}\ln\frac{|3z-7|}{3}\right) = x + C\,, \quad C\in\mathbb{R}\,. \tag{2.41}$$

Assim, tendo em conta (2.39), a solução geral de (2.38) é

$$-\frac{1}{3}\left(-x+2y+\frac{4}{3}(\ln|-3x+6y-7| - \ln 3)\right) = x + C,$$

ou seja,

$$-\frac{1}{3}\left(-x+2y+\frac{4}{3}\ln|-3x+6y-7|\right) = x+K,\ \text{com } K := C-\frac{4}{9}\ln 3,\ K\in\mathbb{R}.$$

ou, simplificando,

$$6(x+y)+\ln(-3x+6y-7)^4 = \tilde{K},\ \ \tilde{K} := -9K,\ \tilde{K}\in\mathbb{R}. \tag{2.42}$$

Quando $3z-7=0$, *tomando em conta (2.39), obtém-se*

$$-3x+6y-7=0,$$

donde

$$y = \frac{3x+7}{6}, \tag{2.43}$$

e, portanto,

$$y' = \frac{1}{2}. \tag{2.44}$$

Substituindo (2.43) e (2.44) em (2.38), obtém-se uma identidade, logo (2.43) é uma solução de (2.38). Esta solução é singular, uma vez que o logaritmo em (2.42) não está definido quando y satisfaz (2.43).
Considere seguidamente a situação $x - 2y + 1 = 0$. Nesse caso, $y = \frac{x+1}{2}$ e, por substituição em (2.37), verifica-se que esta função y não é uma solução.

Do exposto conclui-se, finalmente, que a solução da equação diferencial (2.37) é a família de funções

$$6(x+y) + \ln(-3x+6y-7)^4 = \tilde{K},\ \tilde{K} \in \mathbb{R}, \quad e \quad y = \frac{3x+7}{6}.$$

2.7 Equação diferencial linear de 1.ª ordem

Uma equação diferencial na forma

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.45}$$

é chamada **equação diferencial linear de 1.ª ordem**.

A solução geral da equação diferencial linear (2.45) pode ser procurada usando diversos métodos. Nesta secção, dois métodos são apresentados: o método de substituição (de Bernoulli) e o método de variação das constantes[4].

2.7.1 Método de substituição (de Bernoulli)

Neste método, conhecido por alguns como método de Bernoulli, a solução geral y é procurada na forma[5]

$$y = u(x) \cdot v(x), \tag{2.46}$$

onde $u(x)$ e $v(x)$ são funções desconhecidas a determinar seguindo o procedimento que a seguir se descreve.
Derivando (2.46), tem-se

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \tag{2.47}$$

Substituindo (2.46) e (2.47) na equação diferencial (2.45) obtém-se

$$u'(x)v(x) \ + u(x)[v'(x) \ + p(x)v(x)] = q(x). \tag{2.48}$$

É evidente que se se admitir que

$$v'(x) \ + \ p(x)\ v(x) \ = \ 0, \tag{2.49}$$

e se se encontrar, desta última equação, uma função v, então a equação diferencial (2.48) transforma-se numa equação de variáveis separáveis, em termos de uma única função desconhecida $u(x)$ e dada por

$$v(x)u'(x) = q(x), \tag{2.50}$$

[4]Um outro método de resolução de equações diferenciais lineares, *método de Lagrange*, é apresentado na Secção 3.3.2 o qual engloba uma metodologia geral de resolução de equações diferenciais lineares de ordem n, $n \in \mathbb{N}$, com coeficientes constantes.

[5]Habitualmente, na prática, escreve-se simplesmente: $y = uv$.

a qual é fácil de resolver. Por sua vez, (2.49) é também uma equação diferencial de variáveis separáveis:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v(x) \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx.$$

Uma solução (solução particular) de (2.49) é dada por

$$v(x) = e^{-P(x)}, \tag{2.51}$$

onde $P(x)$ é uma primitiva de função $p(x)$[6]. Encontrada a função v, a função u é determinada da equação diferencial de variáveis separáveis (2.50), a qual pode ser reescrita na forma

$$u(x) = \int \frac{q(x)}{v(x)} dx\,. \tag{2.52}$$

Exemplo 2.7.1 (Resolução de uma equação diferencial linear em y pelo método de substituição) *A equação diferencial*

$$y' + y\cos x = \cos x \tag{2.53}$$

é linear de primeira ordem. De acordo com o método de substituição de Bernoulli, procura-se a sua solução geral na forma $y = uv$ onde $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções a determinar.
Se $y = uv$ então $y' = u'v + uv'$. Por substituição em (2.53), resulta

$$u'v + uv' + uv\cos x = \cos x \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ u'v + u(v' + v\cos x) = \cos x. \tag{2.54}$$

Pretende-se que a função desconhecida $v = v(x)$, a encontrar, seja da forma de uma solução particular não nula da equação diferencial

$$v' + v\cos x = 0. \tag{2.55}$$

Ora,

$$v' + v\cos x = 0 \ \Leftrightarrow \ v' = -v\cos x \ \Leftrightarrow \ dv = -v\cos x\,dx \ \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\cos x\,dx \quad (\textit{pois } v \neq 0) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \int \frac{dv}{v} = -\int \cos x\,dx \ \Leftrightarrow \ \ln|v| = -\sin x + C_1 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ v = e^{-\sin x + C_1}, \quad C_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Uma vez que se procura uma solução particular de (2.55), suponha-se na última fórmula, por exemplo, $C_1 = 0$. Portanto,

$$v = e^{-\sin x}\,. \tag{2.56}$$

Substituindo esta função em (2.54), obtém-se uma equação diferencial em termos da função $u = u(x)$ e dada por

$$u'e^{-\sin x} = \cos x.$$

[6]Por vezes, em vez de se escrever $v(x) = e^{-P(x)}$, é habitual escrever-se $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$, considerando que o integral nesta fórmula designa uma só das primitivas da função $p(x)$.

Resolva-se agora esta nova equação diferencial. Concretamente, tem-se

$$u'e^{-\sin x} = \cos x \;\Leftrightarrow\; e^{-\sin x}du = \cos x\, dx \;\Leftrightarrow\; du = e^{\sin x}\cos x\, dx \;\Leftrightarrow\; \int du = \int e^{\sin x}\cos x\, dx.$$

Integrando, vem

$$u = e^{\sin x} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \tag{2.57}$$

Uma vez que a solução geral, que se está à procura, é da forma $y = uv$, substituindo nesta expressão as funções (2.57) e (2.56), tem-se

$$y = e^{-\sin x}(e^{\sin x} + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Simplificando a última expressão, conclui-se que a família de funções

$$y = 1 + Ce^{-\sin x}\,, \quad C \in \mathbb{R},$$

é a solução geral da equação diferencial (2.53) (ver Figura 2.6).

Observação. *Algumas equações diferenciais não lineares em ordem à função $y = y(x)$ passam a ser lineares se forem consideradas como equações diferenciais em ordem a $x = x(y)$, onde y passa a ser considerada como a variável independente e x uma função de y.*

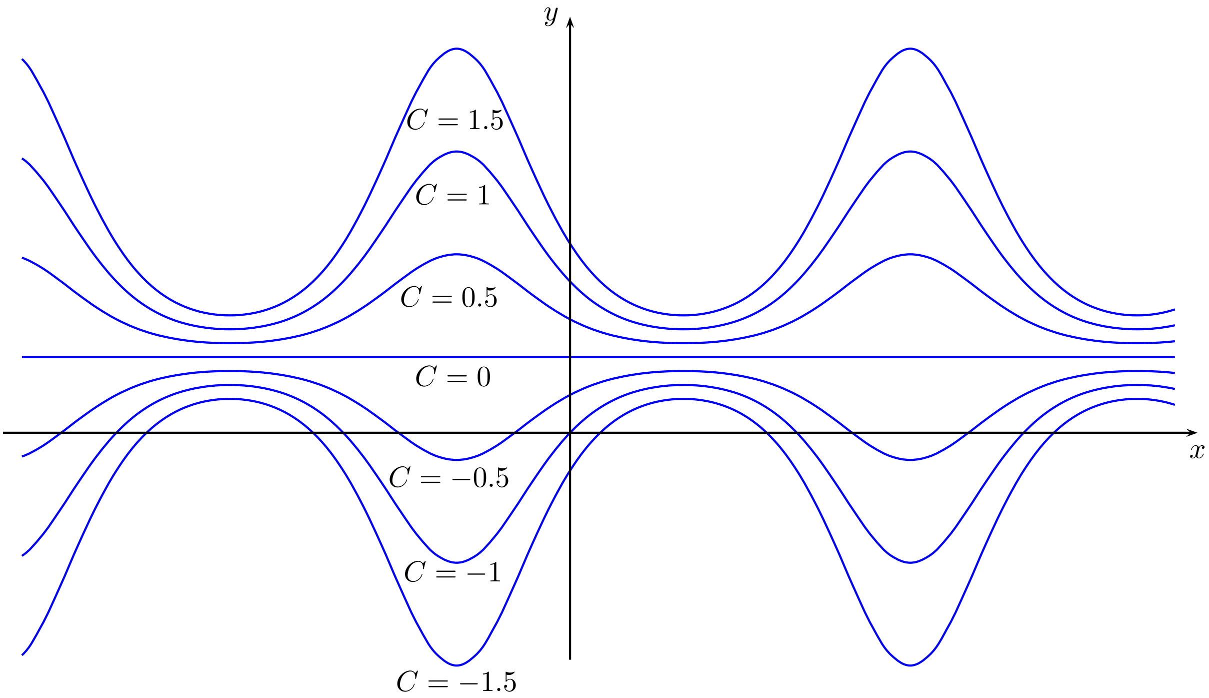


Figura 2.6: Curvas integrais da equação diferencial do Exemplo 2.7.1.

Exemplo 2.7.2 (Resolução de uma equação diferencial linear em x pelo método de substituição) *A equação diferencial*

$$y = (2x + y^3)y', \tag{2.58}$$

em ordem à função $y = y(x)$, não é linear em y (porquê?). Reescrevendo essa equação usando diferenciais, vem

$$ydx - (2x + y^3)dy = 0\ .$$

Tomando $x = x(y)$, novamente por definição de diferencial ($dx = x'dy$), a equação diferencial dada pode ser escrita na forma

$$yx' - (2x + y^3) = 0.$$

Dividindo todos os termos do primeiro membro desta equação por y, sob a condição de $y \neq 0$, obtém-se uma equação diferencial linear em ordem à função $x = x(y)$,

$$x' - \frac{2}{y}\,x = y^2\ . \tag{2.59}$$

Para resolver esta última equação pelo método de substituição (de Bernoulli), efetua-se a substituição $x = uv$, onde $u = u(y)$ e $v = v(y)$. Tomando em consideração que $x' = u'v + uv'$, obtém-se

$$u'v + u(v' - \frac{2}{y}v) = y^2. \tag{2.60}$$

É evidente que da equação (2.60) resulta ser $v \neq 0$ (porquê?). Da condição $v' - \frac{2}{y}v = 0$ tem-se $\frac{dv}{v} = \frac{2}{y}dy$, donde $\ln|v| = 2\ln|y| + C = \ln y^2 + C$. Supondo $C = 0$, vem

$$v = y^2. \tag{2.61}$$

Substituindo este resultado em (2.60), obtém-se $u'y^2 = y^2$ ou, de forma equivalente, $u' = 1$. Porque, por definição, $du = u'dy$, então $du = dy$, donde

$$u = y + K,\ \ K \in \mathbb{R}, \tag{2.62}$$

será a solução geral da equação (2.60).
Finalmente, lembrando que $x = uv$, com (2.61) e (2.62), resulta que a solução geral da equação diferencial linear (2.59) é

$$x = (y + K)y^2,\ \ K \in \mathbb{R}. \tag{2.63}$$

Note que esta solução (2.63) de (2.58) foi obtida sob a condição $y \neq 0$. É fácil verificar que se em (2.63) se tomar $y = 0$ então resultará $x = 0$ mas o ponto (0,0) satisfaz (2.58). Logo, a solução geral da equação dada é a família de funções indicada em (2.63).

2.7.2 Método de variação das constantes

O procedimento deste método de resolução de equações diferenciais lineares da 1.ª ordem na forma (2.45) consiste essencialmente em dois passos:

Passo 1 Determinar a solução geral y_H da equação homogénea associada à equação linear completa (2.45). Para tal resolve-se a equação homogénea associada dada por

$$y' + p(x)y = 0\,. \tag{2.64}$$

Esta pode ser transformada numa equação diferencial de variáveis separadas:

$$y' + p(x)y = 0\ \Leftrightarrow\ \frac{dy}{dx} = -p(x)y\ \Leftrightarrow\ \frac{dy}{y} = -p(x)dx\ \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \ \Leftrightarrow\ \ln|y| = -P(x) + C\ ,\ C \in \mathbb{R},$$

onde $P(x)$ é uma primitiva da função $p(x)$. Assim, a solução geral da equação homogénea (2.64) tem a forma

$$y_H = e^{-P(x)+C}\ ,\ C \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja,

$$y_H = Ke^{P(x)}\,,\ \text{com } K = e^C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Passo 2 Procurar a solução geral y_C da equação completa (2.45) na forma

$$y_C = K(x)e^{-P(x)}, \tag{2.65}$$

onde agora $K(x)$ é uma função (ou seja, K varia em função da variável x).
Assim, substituindo (2.65) em (2.45), obtém-se

$$\left(K(x)e^{-P(x)}\right)' + p(x)\left(K(x)e^{-P(x)}\right) = q(x) \Leftrightarrow$$

$$K'(x)e^{-P(x)} + K(x)\left(-p(x)e^{-P(x)}\right) + p(x)\left(K(x)e^{-P(x)}\right) = q(x).$$

Simplificando, resulta

$$K'(x)e^{-P(x)} = q(x).$$

Integrando esta última equação, vem

$$K(x) = Q(x) + C,\ C \in \mathbb{R}\,,$$

onde $Q(x)$ é uma primitiva de $q(x)e^{P(x)}$.
Substituindo finalmente em (2.65), obtém-se a solução geral pretendida

$$y_C = \left(Q(x) + C\right)e^{-P(x)},\ C \in \mathbb{R}. \tag{2.66}$$

Exemplo 2.7.3 (Resolução de uma equação diferencial linear pelo método de variação das constantes) *Seja a equação diferencial $xy' + 3y = x^2$. Para confirmar que esta equação é linear da primeira ordem, observe que esta pode ser reescrita na forma*

$$y' + \frac{3}{x}y = x. \tag{2.67}$$

A equação diferencial homogénea correspondente tem a forma $y' + \frac{3}{x}y = 0$. Separando as variáveis, tem-se $\frac{dy}{y} = -\frac{3}{x}dx$, e integrando esta equação, obtém-se

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{3}{x}dx\,,$$

donde resulta

$$\ln|y| = -3\ln|x| + \ln|K|,\ K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Aplicando exponencial a ambos os membros, resulta

$$yx^3 = K,\ K \in \mathbb{R}. \tag{2.68}$$

Note que quando $K = 0$ em (2.68) resulta $y = 0$, a qual é solução da equação diferencial (2.67) fazendo parte da solução encontrada (2.68). Assim, a solução da equação homogénea é

$$y_H = \frac{K}{x^3},\ K \in \mathbb{R}. \tag{2.69}$$

Para obter a solução da equação diferencial completa (2.67) aplicar-se-á o método de variação das constantes. Assim, suponha-se que a constante K é agora uma função da variável x, ou seja, $K = K(x)$. Substituindo a solução geral, a qual é da forma $y_C = \frac{K(x)}{x^3}$, em (2.67) resulta

$$\left(\frac{K(x)}{x^3}\right)' + \frac{3}{x}\left(\frac{K(x)}{x^3}\right) = x,$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{K'(x)x^3 - 3x^2K(x)}{x^6} + \frac{3K(x)}{x^4} = x.$$

Simplificando a primeira fracção, tem-se

$$\frac{K'(x)}{x^3} - \frac{3K(x)}{x^4} + \frac{3K(x)}{x^4} = x.$$

Consequentemente, após cálculos algébricos simples, vem $K'(x) = x^4$, ou seja, $K(x) = x^5/5 + C,\ C \in \mathbb{R}$. Substituindo $K(x)$ encontrado na fórmula (2.69), obtém-se

$$y_C = \frac{x^2}{5} + \frac{C}{x^3},\ C \in \mathbb{R}.$$

Note que esta mesma solução poderia ser obtida diretamente da fórmula (2.66) com $P(x) = 3\ln|x|$ (uma primitiva da função $p(x) = \frac{3}{x}$) e $Q(x) = \frac{x^5}{5}$ (uma primitiva da função $q(x)e^{P(x)} = x^4$).

2.8 Equação de Bernoulli

Uma equação diferencial na forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \quad m \in \mathbb{R}, \tag{2.70}$$

é chamada **equação diferencial de Bernoulli**.
Nos casos $m = 0$ e $m = 1$, a equação (2.70) é uma equação diferencial linear cuja solução geral pode ser obtida por um dos métodos descritos na Secção 2.7.
Nos casos $m \neq 0$ e $m \neq 1$, dois métodos de resolução da equação (2.70) serão apresentados: o método geral e um método alternativo que consiste em transformar a equação de Bernoulli dada numa equação linear aplicando, por exemplo, o método de substituição de Bernoulli.

2.8.1 Método geral

Qualquer que seja $m \in \mathbb{R}$, a equação (2.70) pode ser resolvida efetuando a substituição

$$y(x) = u(x)v(x),$$

onde a função $v = v(x)$ é uma solução particular da equação diferencial

$$v'(x) + p(x)v(x) = 0$$

e a função $u = u(x)$ é a solução geral da equação diferencial

$$u'(x) = q(x)(v(x))^{m-1}(u(x))^m.$$

Exemplo 2.8.1 (Resolução de uma equação de Bernoulli usando o método geral)
Considere a equação diferencial

$$y' - x^2y = x^2y^2\,. \tag{2.71}$$

Trata-se de uma equação de Bernoulli na forma (2.70) com $m = 2$.
Faça $y = uv$, *com* $u = u(x)$ *e* $v = v(x)$. *Assim,* $y' = u'v + uv'$. *Substituindo, em (2.71),* y *e* y' *pelas expressões encontradas, tem-se* $u'v + uv' - x^2uv = x^2u^2v^2$, *i.e.,*

$$u'v + u(v' - x^2v) = x^2u^2v^2\,. \tag{2.72}$$

Determine agora uma solução particular não nula v *da equação* $v' - x^2v = 0$. *Ora,*

$$v' - x^2v = 0 \;\Leftrightarrow dv = x^2vdx \;\Leftrightarrow\; \frac{dv}{v} = x^2dx \;\Leftrightarrow\; \int\frac{dv}{v} = \int x^2dx \;\Leftrightarrow\; \ln|v| = \frac{x^3}{3} + C,\;\; C \in \mathbb{R}.$$

Assim, é evidente que uma solução particular $v \neq 0$ *é dada por*

$$v = e^{x^3/3}. \tag{2.73}$$

Substituindo, em (2.72), v *pela expressão (2.73) encontrada, obtém-se uma nova equação diferencial, em termos de* u *e* x, *dada por*

$$u'e^{x^3/3} = x^2u^2e^{2x^3/3}\,,$$

a qual é equivalente a

$$u' = x^2u^2e^{x^3/3}.$$

Se $u \neq 0$ *então as variáveis podem ser separadas nesta última equação, nomeadamente,*

$$\frac{1}{u^2}du = x^2e^{x^3/3}dx,$$

donde

$$\int\frac{1}{u^2}du = \int x^2e^{x^3/3}dx \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{u} = e^{x^3/3} + C \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{-1}{e^{x^3/3} + C}\,,\quad C \in \mathbb{R}\,. \tag{2.74}$$

Uma vez que $y = uv$, tomando em consideração (2.73) e (2.74), obtém-se a solução geral na forma

$$y = \frac{-e^{x^3/3}}{e^{x^3/3} + C}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.75}$$

A equação inicial (2.71) admite também uma solução singular. Na verdade, se $u = 0$ obtém-se $y = 0$ e é evidente que esta função $y = 0$ não pertence ao conjunto de soluções (2.75) mas é uma solução (singular) de (2.71).
Consequentemente, a solução de (2.71) é

$$y = \frac{-e^{x^3/3}}{e^{x^3/3} + C}, \; C \in \mathbb{R}, \quad e \quad y = 0.$$

2.8.2 Transformação da equação de Bernoulli numa equação linear

A equação de Bernoulli (2.70) pode também ser resolvida sendo transformada numa equação diferencial linear usando a seguinte mudança de variável

$$z = z(x) = y^{1-m}.$$

Esta mudança de variável permite que a equação de Bernoulli (2.70), nas variáveis x e $y = y(x)$, seja transformada numa equação diferencial, nas variáveis x e $z = z(x)$, linear em z. De facto, dividindo ambos os membros da equação (2.70) por y^m, obtém-se

$$y' y^{-m} + p(x) y^{1-m} = q(x).$$

Agora, efetuando a mudança de variável $z = y^{1-m}$ e tendo em consideração que $z' = (1 - m) y^{-m} y'$, resulta

$$\frac{z'}{1-m} + p(x) z = q(x),$$

a qual é equivalente à equação diferencial

$$z' + (1-m) p(x) z = (1-m) q(x).$$

Esta última equação diferencial é linear da primeira ordem em $z = z(x)$ e pode ser resolvida por qualquer um dos métodos descritos na Secção 2.7.

Exemplo 2.8.2 (Resolução de uma equação diferencial de Bernoulli usando a transformação) *Seja a equação*

$$xy' + y = y^2 \ln x. \tag{2.76}$$

Esta equação é de Bernoulli com $m = 2$. Tome-se então a mudança de variável $z = y^{1-m} = y^{-1}$. Logo, $z = \frac{1}{y}$ e, portanto, $y = \frac{1}{z}$. Derivando ambos os membros da equação $y = \frac{1}{z}$, tomando em consideração que $z = z(x)$, obtém-se uma expressão para a derivada de y dada por

$$y' = -\frac{z'}{z^2}.$$

Substituindo esta expressão de y' na equação (2.76), vem

$$x\left(-\frac{z'}{z^2}\right) + \frac{1}{z} = \frac{1}{z^2} \ln x.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $(-z^2)$*, obtém-se*

$$xz' - z = -\ln x.$$

Dividindo ambos os membros desta equação por x*, resulta a equação diferencial linear*

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}, \tag{2.77}$$

onde $z = z(x)$*. Esta última equação será resolvida pelo método de substituição de Bernoulli (Secção 2.7.1), pelo que a sua solução geral será procurada na forma* $z = uv$*.*
Se $z = uv$*, então* $z' = u'v + uv'$*. Por substituição em (2.77), resulta*

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = -\frac{\ln x}{x},$$

a qual é equivalente a

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = -\frac{\ln x}{x}. \tag{2.78}$$

Tome uma solução particular não nula v *de modo que*

$$v' - \frac{1}{x}v = 0. \tag{2.79}$$

Reescrevendo (2.79) na forma

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

e, após integração, obtém-se

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; \ln|v| = \ln|x| + C,\; C \in \mathbb{R}.$$

Tomando $C = 0$*, obtém-se uma solução particular* $v \neq 0$ *dada por* $\ln|v| = \ln|x|$*, ou seja,*

$$v = x \tag{2.80}$$

Substituindo, em (2.78), a função v *pela solução particular (2.80) resulta uma nova equação diferencial*

$$u'x = -\frac{\ln x}{x},$$

a qual é de variáveis separáveis. Separando as variáveis, obtém-se

$$x\frac{du}{dx} = -\frac{\ln x}{x} \;\Leftrightarrow\; du = -\frac{\ln x}{x^2}dx \;\Leftrightarrow\; \int du = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx\,. \tag{2.81}$$

Aplicando o método de integração por partes no integral do segundo membro, vem

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} - C,\; C \in \mathbb{R}.$$

Logo, em (2.81), obtém-se

$$u = \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + C,\; C \in \mathbb{R}.$$

Uma vez que a solução geral da equação (2.77) é da forma $z = uv$, tem-se

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + C\right)x \\ &= \ln x + 1 + Cx, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Regressando à variável inicial y, sendo $z = \frac{1}{y}$, obtém-se a solução geral da equação diferencial (2.76) na forma (explícita)

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + xC}$$

ou, na forma implícita,

$$y(1 + \ln x + xC) = 1, \ C \in \mathbb{R}.$$

Por forma a comparar os procedimentos associados aos dois métodos apresentados nesta secção, no seguinte exemplo resolve-se a equação diferencial (2.71), considerada no exemplo 2.8.1, transformando-a agora numa equação diferencial linear.

Exemplo 2.8.3 (Resolução de uma equação de Bernoulli usando a transformação) *A equação diferencial*

$$y' - x^2y = x^2y^2$$

é uma equação de Bernoulli na forma (2.70) com $m = 2$.
Introduz-se uma nova variável $z = z(x)$ dada por $z = y^{-1}$. Logo, $y = z^{-1}$. Da substituição de $y = z^{-1}$ e da sua derivada, $y' = -\frac{z'}{z^2}$, na equação diferencial inicial, resulta

$$-\frac{z'}{z^2} - \frac{x^2}{z} = x^2\frac{1}{z^2}.$$

Multiplicando ambos os membros desta equação por $-z^2$, obtém-se

$$z' + x^2z = -x^2. \tag{2.82}$$

Esta última equação é linear de primeira ordem em relação à variável $z = z(x)$. Resolve-se esta equação supondo $z = uv$ onde $u = u(x)$ e $v = v(x)$. Nesse caso, $z' = u'v + uv'$. Da substituição de z e z', definidas por estas últimas expressões, na equação (2.82), resulta

$$u'v + uv' + ux^2v = -x^2\,,$$

donde

$$u'v + u(v' + x^2v) = -x^2.$$

Procure agora $v = v(x)$ tal que $v' + x^2v = 0$. Ora,

$$v' + x^2v = 0 \ \Leftrightarrow \ dv + x^2vdx = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{dv}{v} = -x^2dx \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|v| = -\frac{x^3}{3} + K, \ K \in \mathbb{R}.$$

Uma solução particular resulta tomando $K = 0$, ou seja, virá $v = e^{-\frac{x^3}{3}}$.
Seguidamente, dado v, procure a função $u = u(x)$ tal que $u'e^{-\frac{x^3}{3}} = -x^2$ (porquê?). Resolvendo esta última equação diferencial em termos da função u obtém-se

$$u'e^{-\frac{x^3}{3}} = -x^2 \Leftrightarrow du = -x^2 e^{\frac{x^3}{3}} dx \Leftrightarrow u = -\int x^2 e^{\frac{x^3}{3}} dx.$$

Usando integração imediata, é fácil de verificar (verifique!) que $u = -e^{\frac{x^3}{3}} + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$. Logo, a solução z da equação diferencial linear (2.82) é

$$z = e^{-\frac{x^3}{3}}(-e^{\frac{x^3}{3}} + C_1) = -\frac{e^{\frac{x^3}{3}} - C_1}{e^{\frac{x^3}{3}}},\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial y, dada por $y = z^{-1}$, obtém-se a solução geral da equação diferencial dada

$$y = -\frac{e^{\frac{x^3}{3}}}{e^{\frac{x^3}{3}} - C_1},\ C_1 \in \mathbb{R}. \tag{2.83}$$

Nota. Em jeito de confirmação, constata-se que tomando $C_1 = -C$, na solução (2.83) encontrada no Exemplo 2.8.3, esta coincide com a solução encontrada no Exemplo 2.8.1 onde foi usado o método geral.

2.9 Equação diferencial exata

Uma equação diferencial na forma

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{2.84}$$

cujo primeiro membro é o diferencial total[7] de uma função desconhecida de duas variáveis, $U = U(x,y)$, i.e., tal que

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y), \tag{2.85}$$

é chamada **equação diferencial exata**.

2.9.1 Um processo de resolução

Se a equação diferencial (2.84) é exata, então um processo de resolução corresponde a encontrar uma função $U = U(x,y)$ tal que (2.84) possa ser escrita na forma

$$dU(x,y) = 0,$$

onde $dU(x,y)$ é o diferencial total da função de duas variáveis $U = U(x,y)$ (Apêndice 2). Tomando em consideração que o diferencial total da função U tem a forma

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

[7]Veja-se Apêndice B para maior detalhe

e comparando com (2.85), conclui-se que a função $U(x,y)$ pode ser encontrada a partir do sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \\ \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \end{cases}. \tag{2.86}$$

O integral geral da equação diferencial exata (2.84) é dado na forma implícita por

$$U(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.9.2 Condição necessária e suficiente de uma equação exata

Para verificar que uma equação diferencial na forma (2.84) é exata pode recorrer-se ao seguinte resultado teórico [11].

Propriedade 2.1 *Seja a equação diferencial (2.84). Se o domínio das funções P e Q é simplesmente conexo*[8]*, então a igualdade de funções*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \tag{2.87}$$

é uma condição necessária e suficiente para que a equação (2.84) seja uma equação diferencial exata.

Exemplo 2.9.1 (Resolução de uma equação diferencial exata) *A equação diferencial*

$$\frac{y}{x}dx + (3y^2 + \ln x)dy = 0 \tag{2.88}$$

é exata já que satisfaz as condições da Propriedade 2.1. Na realidade, comparando (2.88) e (2.84), considera-se $P(x,y) = \frac{y}{x}$ e $Q(x,y) = 3y^2 + \ln x$ sendo que para estas funções se tem

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x} \; = \; \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,.$$

Estabelecido que a equação (2.88) é a equação diferencial exata, procura-se o seu integral geral na forma $U(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}$. Ora, sendo

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = \frac{y}{x}dx + (3y^2 + \ln x)dy,$$

resulta evidente que

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{x} \\ \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 3y^2 + \ln x \end{cases}. \tag{2.89}$$

[8] A uma região $D \subseteq \mathbb{R}^2$ chama-se simplesmente conexa se qualquer curva fechada e simples (sem autointersecções) totalmente contida em D circunda apenas pontos de D.

Integrando a primeira equação do sistema (2.89) em ordem de x *obtém-se*

$$U(x,y) = \int \frac{y}{x} dx.$$

Uma vez que a integração é realizada em ordem à variável x, *a constante de integração* C *que aparecerá depois do cálculo do integral, pode ser efetivamente uma constante (designada por* C, *por exemplo) ou, no caso mais geral, uma função que não depende de* x *mas sim de* y $(C(y))$.
No presente exercício se terá[9]

$$U(x,y) = y \ln x + C(y)\,, \tag{2.90}$$

onde $C(y)$ *é uma constante arbitrária, para cada valor possível de* y, *ou seja,* C *é uma função real na variável* y.
De (2.90), por derivação em ordem a y, *obtém-se*

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y \ln x + C(y)),$$

ou, de modo equivalente,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \ln x + C'(y), \tag{2.91}$$

onde $C'(y)$ *é a função derivada de função* $C(y)$ *introduzida anteriormente.*
Porém, a partir da segunda equação do sistema (2.89), tem-se

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) = 3y^2 + \ln x. \tag{2.92}$$

Comparando (2.91) e (2.92), conclui-se que $\ln x + C'(y) = 3y^2 + \ln x$, *ou seja,*

$$C'(y) = 3y^2.$$

Integrando esta função em ordem a y, *vem*

$$C(y) = y^3 + K, \;\; K \in \mathbb{R}.$$

Substituindo, em (2.90), a expressão obtida para $C(y)$, *obtém-se*

$$U(x,y) = y \ln x + y^3 + K.$$

Uma vez que $U(x,y) = C$, *o integral geral da equação (2.88) é*

$$y \ln x + y^3 + K = C, \quad C, K \in \mathbb{R}.$$

Note que, na última fórmula, C *e* K *são constantes arbitrárias que podem tomar quaisquer valores em* $\mathbb{R}$. *Sendo assim, tomando* $\tilde{C} := C - K$, *a expressão do integral geral da equação (2.88) pode ser escrita na forma*

$$y \ln x + y^3 = \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

[9] Note que aqui não é necessário colocar o símbolo de módulo no argumento da função logaritmo uma vez que, na equação inicial (2.88), está presente a função $\ln x$, a qual deve tal bem definida; a equação é resolvida no domínio dessa função, ou seja, para $x \in \mathbb{R}^+$.

Exemplo 2.9.2 (Resolução de uma equação diferencial exata) *Considere a equação diferencial*

$$(x+y)dx + (x-y)dy = 0. \tag{2.93}$$

Designando $P(x,y) = x+y$ *e* $Q(x,y) = x-y$*, tem-se que*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1 \;=\; \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,,$$

pelo que a equação diferencial (2.93) satisfaz a condição (2.87) e, portanto, é exata. Assim sendo, procura-se o seu integral geral na forma $U(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}$*, com* $U(x,y)$ *satisfazendo (2.86), ou seja,*

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} = x+y \\ \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x-y \end{array}\right. . \tag{2.94}$$

Da primeira equação do sistema (2.94), obtém-se

$$U(x,y) = \int (x+y)dx\ ,$$

ou seja,

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + C(y), \tag{2.95}$$

onde $C(y)$ *é uma função real na variável* y*, a qual é determinada tendo em conta as condições (2.95) e (2.94). Para encontrar a função* $C(y)$ *deriva-se a equação (2.95) em ordem a* y*. Dai resulta que*

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + xy + C(y)\right) = x + C'(y). \tag{2.96}$$

Confrontando os resultados para $\frac{\partial U}{\partial y}$*, obtidos em (2.96) e na segunda equação do sistema (2.94), conclui-se que*

$$x - y = x + C'(y)\,,$$

ou seja,

$$C'(y) = -y.$$

Assim, a função $C(y)$ *resulta por integração em ordem a* y*, nomeadamente*

$$C(y) = -\frac{y^2}{2} + K,\ \ K \in \mathbb{R}.$$

Substituindo, em (2.95), a expressão obtida para $C(y)$*, obtém-se*

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + K,\ \ K \in \mathbb{R},$$

pelo que o integral geral da equação diferencial dada (2.93) é

$$\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + K = C, \quad C, K \in \mathbb{R}.$$

Supondo $\tilde{C} := C - K$*, o integral geral reescreve-se na forma*

$$\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

2.10 Equação diferencial com fator integrante

Uma equação diferencial na forma (2.84) é chamada **equação diferencial com fator integrante** se o primeiro membro da equação (2.84) não é o diferencial total de uma função de duas variáveis, mas existe uma função $\mu = \mu(x, y) \neq 0$ tal que a equação diferencial obtida, após a multiplicação de (2.84) pela função μ, i.e.,

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy \;=\; 0\,, \tag{2.97}$$

é uma equação diferencial exata.
Nestas circunstâncias, diz-se que a função $\mu = \mu(x, y)$ é um **fator integrante** da equação diferencial (2.84).
Sendo (2.97) uma equação diferencial exata nas condições da Propriedade 2.1, deve ser satisfeita a seguinte condição

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x, y)P(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x, y)Q(x, y)\right).$$

Em resumo, resolver uma equação diferencial da forma (2.84), a qual admite um fator integrante $\mu = \mu(x, y)$, equivale a resolver a equação diferencial exata (2.97).
Em geral, não é fácil de encontrar, caso exista, o fator integrante de uma equação diferencial, mas existem situações onde o processo de determinação de μ é bastante simples como o descreve o seguinte resultado teórico (condição suficiente de existência de fator integrante).

Propriedade 2.2 *Se*

(a)

$$\frac{1}{Q(x, y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\right) = f(x),$$

onde f é uma função apenas de x, então o fator integrante, denotado por μ, da equação (2.84) existe e depende somente de x, i.e., $\mu = \mu(x)$, sendo dado por

$$\mu(x) = e^{F(x)},$$

onde $F(x)$ é uma primitiva da função $f(x)$.

(b) *Se*

$$\frac{1}{P(x, y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\right) = g(y),$$

onde g é uma função apenas de y, então o fator integrante μ da equação (2.84) existe e depende somente de y, i.e., $\mu = \mu(y)$, sendo dado por

$$\mu(y) = e^{-G(y)},$$

onde $G(y)$ é uma primitiva da função $g(y)$.

Exemplo 2.10.1 (Resolução de um equação diferencial com fator integrante) *Considere a equação diferencial*

$$(e^y + \sin x)dx + \cos x dy = 0\,. \tag{2.98}$$

De acordo com a notação utilizada, $P(x,y) = e^y + \sin x$ *e* $Q(x,y) = \cos x$.
Uma vez que $\frac{\partial P}{\partial y} = e^y$ *e* $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin x$*, a equação (2.98) não é uma equação diferencial exata. Seguidamente será averiguado que se alguma das condições suficientes descritas na Propriedade 2.2 é satisfeita pela equação diferencial dada.*
Como

$$\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{e^y + \sin x}{\cos x} \quad \text{não é função só de } x,$$

então a condição (a) da Propriedade 2.2 não é satisfeita.
Mas, como

$$\frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{1}{e^y + \sin x}(-\sin x - e^y) = 1 \quad \begin{array}{c}\text{pode ser considerada}\\ \text{como função de } y,\end{array}$$

então a condição (b) da Propriedade 2.2 é verificada com $g(y) = 1$.
Consequentemente, a equação (2.98) admite fator integrante e este fator pode ser dado por $\mu(y) = e^{-G(y)} = e^{-y}$*, onde* $G(y) = y$ *é uma primitiva da função* $g(y) = 1$*. Tal significa que a equação diferencial que se obtém multiplicando ambos os membros da equação (2.98) por* $\mu(y) = e^{-y}$ *é exata e é equivalente à equação diferencial inicial (2.98), pelo que ambas as equações possuem a mesma solução geral.*

Multiplicando todos termos da equação (2.98) por e^{-y}*, obtém-se a equação diferencial exata*

$$e^{-y}(e^y + \sin x)dx + e^{-y}\cos x dy = 0,$$

cuja solução geral é procurada na forma $U(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$*. A função* U *determina-se de modo a que* $dU(x,y) = 0$*, ou seja,*

$$dU(x,y) = e^{-y}(e^y + \sin x)dx + e^{-y}\cos x dy.$$

Por conseguinte, de acordo com o sistema (2.86), se terá que

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} = e^{-y}(e^y + \sin x) = 1 + e^{-y}\sin x \\ \\ \frac{\partial U}{\partial y} = e^{-y}\cos x \end{array}\right. . \tag{2.99}$$

Integrando a primeira equação deste último sistema em ordem de x*, obtém-se*

$$U(x,y) = \int (1 + e^{-y}\sin x)dx + C(y) = x - e^{-y}\cos x + C(y) \quad \text{(verifique).}$$

Por derivação em ordem a y *desta última equação, tem-se*

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^{-y}\cos x + C'(y).$$

Igualando os segundos membros da última equação e da segunda equação do sistema (2.99), vem

$$e^{-y}\cos x = e^{-y}\cos x + C'(y)\,,$$

donde $C'(y) = 0$ e, portanto, $C(y) = K$, com K constante real arbitrária.

Do exposto conclui-se que a solução geral da equação diferencial (2.98) é

$$x - e^{-y}\cos x + K = 0\,, \quad K \in \mathbb{R}.$$

2.11 Exercícios resolvidos

1. Resolva a equação diferencial de variáveis separadas

$$cos(2y)dy = \frac{dx}{1+x^2}\,.$$

Resolução. Integrando ambos os membros da equação diferencial dada,

$$\int \cos(2y)dy = \int \frac{dx}{1+x^2}\,,$$

obtém-se imediatamente a solução geral

$$\frac{\sin(2y)}{2} = \arctan(x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Note que esta função representa uma solução cuja expressão está na forma implícita.

2. Resolva a equação diferencial $(x + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0$.
Resolução. Observe que se trata de uma equação diferencial de variáveis separáveis já que a equação dada se reescreve, de forma equivalente, da seguinte forma

$$\frac{y}{1+y^2}dy = -\frac{x}{1+x^2}dx\,.$$

De facto,

$$(x+xy^2)dx+(y+yx^2)dy = 0 \;\Leftrightarrow\; x(1+y^2)dx = -y(1+x^2)dy \Leftrightarrow y(1+x^2)dy = -x(1+y^2)dx.$$

Uma vez que os valores $1 + x^2$ e $1 + y^2$ são sempre diferentes de zero, dividindo ambos os membros da última equação por $(1 + x^2)(1 + y^2)$, obtém-se

$$\frac{y}{1+y^2}dy = -\frac{x}{1+x^2}dx.$$

Integram-se ambos os membros da última equação,

$$\int \frac{y}{1+y^2}dy = -\int \frac{x}{1+x^2}dx\,,$$

obtendo-se

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}(\ln(1+x^2) + \ln(1+y^2)) = C \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\ln\big((1+y^2)(1+x^2)\big)=C\ \Leftrightarrow\ \ln\big((1+y^2)(1+x^2)\big)=2C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Donde, usando propriedades da função logaritmo, se conclui que a solução geral (na sua forma implícita) da equação diferencial dada é

$$\ln\big((1+y^2)(1+x^2)\big)=K,\ K\in\mathbb{R}.$$

Note que a constante K, introduzida só para simplificação da expressão final, tem forma $K=2C$ e, na mesma forma que C, toma qualquer valor real.

3. Resolva a seguinte equação redutível a variáveis separáveis.

$$y'=\frac{1}{\sin(2x+y+3)}-2.$$

Resolução. Considerando a função $z=2x+y+3$, onde $z=z(x)$, resulta $z'=2+y'$. Substituindo na equação diferencial dada, tem-se

$$z'-2=\frac{1}{\sin z}-2\,,$$

a qual é equivalente à equação diferencial de variáveis separadas

$$\sin z dz=dx\,,$$

donde, integrando, resulta

$$\int\sin z dz=\int dx\Leftrightarrow\ -\cos z=x+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Lembrando que $z=2x+y+3$, da última igualdade, obtém-se a solução geral da equação diferencial dada, ou seja,

$$x+\cos(2x+y+3)+C=0,\ C\in\mathbb{R}\,.$$

4. Resolva o problema de Cauchy

$$yy'-x=0,\quad y(0)=1\,.$$

Resolução. Em primeiro lugar, resolve-se a equação diferencial dada que é uma equação de variáveis separáveis. Separando as variáveis, tem-se

$$yy'-x=0\ \Leftrightarrow\ y\frac{dy}{dx}=x\ \Leftrightarrow\ ydy=xdx.$$

Integrando ambos os membros da última equação, obtém-se

$$\int ydy=\int xdx+K\ \Leftrightarrow\ \frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+K\ \Leftrightarrow\ y^2=x^2+C\,,\ C=2K\in\mathbb{R}.$$

Em seguida, recorre-se à condição inicial $y(0)=1$ com vista a determinar a constante C:

$$y^2=x^2+C\ ,\ x=0\ ,\ y=1\ \Rightarrow 1=C.$$

Logo, a solução do problema de Cauchy é $y^2-x^2=1$.

5. Resolva as seguintes as equações diferenciais homogéneas.

   (a) $(y^2 + xy)dx - x^2dy = 0$;

   (b) $y' = \frac{xy+y^2}{2x^2+xy}$;

   (c) $xy' = y \ln \frac{y}{x}$;

   (d) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$.

   Resolução.

   (a) Pretende-se encontrar a solução da equação diferencial

$$(y^2 + xy)dx - x^2dy = 0.$$

Comparando com (2.19), tome-se $M(x,y) = y^2 + xy$ e $N(x,y) = -x^2$. Para todo o $t > 0$, observa-se que

$$M(tx, ty) = (ty)^2 + txty = t^2(y^2 + xy) = t^2M(x, y)$$

e

$$N(tx, ty) = -(tx)^2 = -t^2x^2 = t^2N(x, y)\,.$$

Logo, M e N são duas funções homogéneas, ambas com grau de homogeneidade $\alpha = 2$. A equação diferencial dada é então uma equação diferencial homogénea. Para resolvê-la considera-se a substituição

$$y = ux, \text{ com } u = u(x).$$

Assim,

$$y' = u'x + u \quad \text{e} \quad dy = xdu + udx.$$

Substituindo, na equação diferencial dada, y e dy por estas últimas expressões, vem

$$((ux)^2 + x^2u)dx - x^2(xdu + udx) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x^2u^2 + x^2u)dx - x^3du - x^2udx = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x^2u^2dx - x^3du = 0. \tag{2.100}$$

Se $x \neq 0$, a equação em (2.100) é equivalente à equação

$$u^2dx - xdu = 0.$$

Resolvendo esta equação de variáveis separáveis, vem

$$\frac{dx}{x} - \frac{du}{u^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u^2} \;\Leftrightarrow\; \ln|x| = -\frac{1}{u} + C,\; C \in \mathbb{R}.$$

Uma vez que $u = y/x$, substituindo, vem $\ln|x| = -\frac{x}{y} + C$, ou seja, a solução geral da equação diferencial é

$$y \ln|x| + x = Cy,\;\; C \in \mathbb{R}. \tag{2.101}$$

Se $x = 0$, a equação diferencial (2.100) transforma-se numa identidade, pelo que $x = 0$ é também solução dessa equação. Esta solução, $x = 0$, é uma solução singular uma vez que não pertence ao conjunto das soluções definidas (implicitamente) por (2.101). Assim, conclui-se que a solução da equação diferencial dada é

$$(C - \ln|x|)\, y = x,\;\; C \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad x = 0.$$

(b) Pretende-se encontrar a solução da equação diferencial

$$y' = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy}.$$

Dividindo o numerador e o denominador da fração do segundo membro por x^2 (note que a equação diferencial dada não está definida para $x = 0$), verifica-se que

$$\frac{xy + y^2}{2x^2 + xy} = \frac{\frac{1}{x^2}(xy + y^2)}{\frac{1}{x^2}(2x^2 + xy)} = \frac{\frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2}{2 + \frac{y}{x}}$$

Logo, a equação diferencial dada pode ser reescrita na forma

$$y' = \frac{\frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2}{2 + \frac{y}{x}}. \tag{2.102}$$

Portanto, a equação dada é do tipo $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$, com $\phi(u) = \frac{u+u^2}{2+u}$ e $u = \frac{y}{x}$. Assim, introduz-se a função auxiliar $u = u(x) = \frac{y}{x}$.
Sendo $y = ux$, a sua derivada terá a forma $y' = u'x + u$ e, portanto, em termos da função auxiliar u, a equação diferencial (2.102) terá a forma

$$u'x + u = \frac{u + u^2}{2 + u}.$$

Ora,

$$u'x + u = \frac{u + u^2}{2 + u} \Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u + u^2}{2 + u} - u \Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = -\frac{u}{2 + u},$$

donde as variáveis x e u, se $u \neq 0$, podem ser separadas ficando

$$-\frac{2 + u}{u}du = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{u} - 1\right) du = \frac{dx}{x}.$$

Integrando ambos os membros da última equação diferencial, vem

$$-\int \frac{2}{u}du - \int du = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow -2\ln|u| - u = \ln|x| + C \Leftrightarrow \ln|x| + 2\ln|u| + u = -C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Recordando que $u = \frac{y}{x}$, se $u \neq 0$, tem-se

$$\ln|x| + 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{y}{x} = -C,$$

donde, aplicando as propriedades dos logaritmos, se deduz que

$$2\ln|y| + \frac{y}{x} = \ln|x| - C,\ C \in \mathbb{R}. \tag{2.103}$$

Aplicando a função exponencial a ambos os membros, vem

$$e^{2\ln|y| + \frac{y}{x}} = e^{\ln|x| - C} \Leftrightarrow y^2 e^{\frac{y}{x}} = \frac{e^{\ln|x|}}{e^C} \Leftrightarrow y^2 e^{\frac{y}{x}} = |x|e^{-C} \Leftrightarrow y^2 e^{\frac{y}{x}} = |Kx|.$$

com $K = e^{-C} \in \mathbb{R}$.
Observe que a última expressão, ao contrário de (2.103), inclui a solução particular $y = 0$ da equação diferencial dada $y' = \frac{xy+y^2}{2x^2+xy}$ (verifique!). Logo, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y^2 e^{\frac{y}{x}} = |xK|,\ K \in \mathbb{R}.$$

(c) Pretende-se encontrar a solução da equação diferencial

$$xy' = y \ln \frac{y}{x} \ .$$

Dividindo ambos os membros desta equação por x, obtém-se a equação diferencial

$$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} \, ,$$

a qual é da forma (2.18), com $\varphi(u) = u \ln u$, $u = \frac{y}{x}$. Assim, para resolvê-la considere a substituição $y = ux$, com $u = u(x)$, e, portanto, $y' = u + xu'$, resultando a equação diferencial na forma

$$u + xu' = u \ln u \, .$$

Ora,

$$u + xu' = u \ln u \ \Leftrightarrow \ x\frac{du}{dx} = u(\ln u - 1) \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{u(\ln u - 1)}du = \frac{1}{x}dx.$$

Integrando ambos os membros da última equação, vem

$$\int \frac{1}{u(\ln u - 1)}du = \int \frac{1}{x}dx \ \Leftrightarrow \ \int (\ln u - 1)' \frac{1}{\ln u - 1}du = \int \frac{1}{x}dx \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \ln |\ln u - 1| = \ln |x| + \ln |C|, \ C \neq 0.$$

Usando propriedades dos logaritmos, tem-se

$$\ln |\ln u - 1| = \ln |xC| \ \Leftrightarrow \ \ln u - 1 = xC \ \Leftrightarrow \ \ln u = xC + 1 \ \Leftrightarrow \ u = e^{xC+1} \ .$$

Uma vez que $u = \frac{y}{x}$, então a última equação pode escrever-se, de forma equivalente, na forma

$$\frac{y}{x} = e^{xC+1}$$

ou seja,

$$y = xe^{xC+1}, \quad \text{com } C \neq 0 \, .$$

No caso de $C = 0$, tem-se a solução $y = xe$, a qual é também solução da equação diferencial inicial dada. Logo, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = xe^{xC+1}, \ C \in \mathbb{R} \, .$$

(d) A equação dada $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$ é equivalente a

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Considerando a substituição $u = \frac{y}{x}$, com $u = u(x)$, donde $y = ux$ e $y' = u'x + u$, tem-se que

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ \Leftrightarrow \ xu' + u = \frac{1}{u} + u \ \Leftrightarrow \ xu' = \frac{1}{u} \ \Leftrightarrow \ x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \ \Leftrightarrow \ udu = \frac{1}{x}dx \ .$$

Integrando ambos os membros da última equação, vem

$$\int udu = \int \frac{1}{x}dx \ \Leftrightarrow \ \frac{u^2}{2} = \ln |x| + \ln |C| \ \Leftrightarrow u^2 = 2 \ln |Cx| \ \Leftrightarrow u^2 = \ln (Cx)^2 \ , C \neq 0.$$

Como $u = \frac{y}{x}$, a última equação pode escrever-se, de forma equivalente, na forma

$$\frac{y^2}{x^2} = \ln(Cx)^2.$$

Assim, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y^2 = x^2 \ln(Cx)^2 \ , \ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \, .$$

6. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem.

   (a) $y' - \frac{1}{\sin x} y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$;

   (b) $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$;

   (c) $y'x^2 + (1 - 2x)y = x^2$.

   Resolução.

   (a) A equação diferencial dada é da forma (2.45), i.e.,

   $$y' + p(x)y = q(x).$$

   Usando a mudança de variável do método de substituição de Bernouli, $y = uv$, e como $y' = u'v + v'u$, resulta

   $$\big(u'v + v'u\big) - \frac{1}{\sin x} uv = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \ ,$$

   que é equivalente a

   $$u'v + u\left(v' - \frac{v}{\sin x}\right) = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \ . \tag{2.104}$$

   Tome uma função $v = v(x)$ não nula de modo que

   $$v' - \frac{v}{\sin x} = 0. \tag{2.105}$$

   e determine uma solução particular desta equação diferencial de variáveis separáveis. Ora,

   $$v' - \frac{v}{\sin x} = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{dv}{dx} = \frac{v}{\sin x} \ \Leftrightarrow \ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{\sin x} \quad (v \neq 0) \ .$$

   Integrando, obtém-se

   $$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{\sin x}. \tag{2.106}$$

   O integral da função $\frac{1}{v}$ é imediato. Para calcular o integral da função trigonométrica $\frac{1}{\sin x}$ recorre-se à mudança de variável $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Em termos da nova variável t tem-se

   $$\sin x = \frac{2t}{1+t} \ \text{ e } \ dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

   Logo,

   $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C, \ C \in \mathbb{R} \ .$$

Voltando à variável inicial x, conclui-se que

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C,\ C \in \mathbb{R}\ .$$

Consequentemente, em (2.106) fica

$$\ln|v| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + K,\ K \in \mathbb{R}\,.$$

Uma vez que se procura uma solução particular da equação (2.105), considere, por exemplo, $K = 0$. Portanto, $v = \tan(x/2)$. Substituindo, em (2.104), a função v pela solução particular encontrada, e tomando em consideração (2.105), resulta a seguinte equação diferencial de variáveis separáveis

$$u' \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{\sin x}\ ,$$

a qual pode ser escrita, de modo equivalente, na forma

$$du = \frac{1-\cos x}{\sin x \tan\left(\frac{x}{2}\right)} dx\ .$$

Recordando que $1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ e $\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, a fração do segundo membro da equação diferencial anterior simplifica-se:

$$\frac{1-\cos x}{\sin x \tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = 1\,,$$

assim como também se simplifica a equação diferencial ficando apenas

$$du = dx\ .$$

Integrando ambos os membros desta última equação vem

$$\int du = \int dx\ \Leftrightarrow\ u = x + \tilde{C},\ \tilde{C} \in \mathbb{R}\ .$$

Sendo a solução geral que se procura da forma $y = uv$, conclui-se que a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = (x+\tilde{C})\tan\left(\frac{x}{2}\right),\ \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

(b) Pretende-se encontrar a solução da equação diferencial

$$(y^2 - 6x)y' + 2y = 0. \tag{2.107}$$

Comece por verificar que esta equação não é possível de ser escrita na forma (2.45), o que significa que ela não é linear em y. Contudo, esta equação pode ser transformada numa equação diferencial em $x = x(y)$ que é linear. De facto, atendendo à definição de diferencial, tem-se

$$(y^2-6x)y' + 2y = 0\ \Leftrightarrow\ (y^2-6x)y'dx + 2ydx = 0\ \Leftrightarrow\ (y^2-6x)dy + 2ydx = 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (y^2-6x)dy+2yx'dy=0\ \Leftrightarrow (y^2-6x)+2yx'=0\ .$$

Se $y\neq 0$, tem-se a equação diferencial linear em x

$$x'-\frac{3x}{y}=-\frac{y}{2}\ .$$

Para resolver esta equação irá ser usado o método de variação das constantes. Assim, em primeiro lugar é determinada a solução x_H da equação homogénea associada

$$x'-\frac{3}{y}x=0,$$

ou seja, da equação

$$\frac{dx}{x}=3\frac{3y}{y}.$$

Integrando-a, tem-se

$$\int\frac{dx}{x}=3\int\frac{dy}{y}\ \Leftrightarrow\ \ln|x|=3\ln|y|+\ln|C|,\ C\neq 0.$$

Logo, a solução geral da equação homogénea é $x_H=Cy^3$, com $C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Em segundo lugar, determine a solução geral $x_C=x_C(y)$ da equação completa a qual é procurada na forma

$$x_C=C(y)y^3\ .$$

Substituindo a última expressão na equação completa $x'-\frac{3x}{y}=-\frac{y}{2}$, obtém-se

$$\left(C(y)y^3\right)'-\frac{3C(y)y^3}{y}=-\frac{y}{2}\ \Leftrightarrow\ \left(C(y)y^3\right)'=-\frac{y}{2}\ \Leftrightarrow\ C'(y)=-\frac{1}{2y^2}\ .$$

Integrando, tem-se

$$C(y)=-\int\frac{1}{2y^2}dy\ \Leftrightarrow\ C(y)=\frac{1}{2y}+K,\ K\in\mathbb{R}\ .$$

Logo, a solução geral x_C pretendida é $x_C=\left(\frac{1}{2y}+K\right)y^3\,, K\in\mathbb{R}$. Simplificando, obtém-se

$$x_C=\frac{y^2}{2}+Ky^3,\ K\in\mathbb{R}. \tag{2.108}$$

Note que para a equação original (2.107) em termos de y,

$$(y^2-6x)y'+2y=0,$$

a função $y=0$ é uma solução particular que não está definida por (2.108). Logo, a solução da equação diferencial dada (2.107) é

$$x=\frac{y^2}{2}+Ky^3,\ K\in\mathbb{R}\quad \text{e}\quad y=0$$

(ver Figura 2.7)

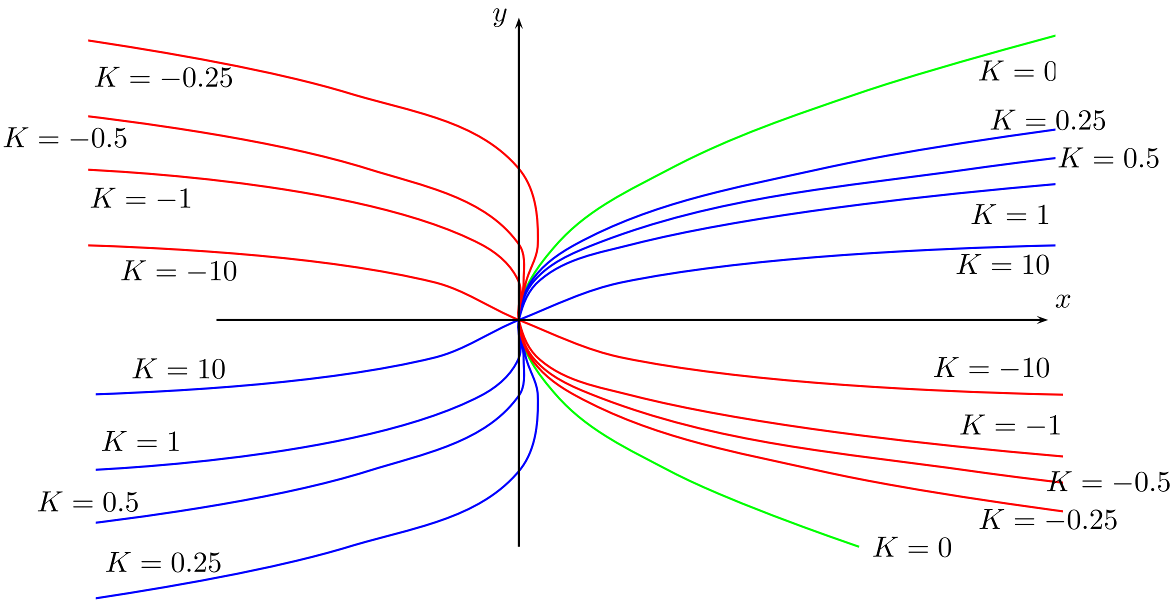


Figura 2.7: Curvas integrais da equação diferencial (2.107).

(c) A equação diferencial dada,

$$y'x^2 + (1-2x)y = x^2\,,$$

pode ser transformada na forma (2.45), se se dividir ambos os membros por x^2. De facto, resulta

$$y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1\,.$$

Para resolver esta equação irá ser usado o método de variação das constantes. Assim, o primeiro passo consiste em determinar a solução y_H da equação homogénea associada

$$y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0,$$

a qual, na condição de $y \neq 0$, é equivalente a ter

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x-1}{x^2}dx.$$

Integrando, vem

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x-1}{x^2}dx \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = 2\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x^2}dx \;\Leftrightarrow$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + \frac{1}{x} + \ln|C_1|.$$

Logo, a solução geral da equação homogénea dada é $y_H = C_1 x^2 e^{1/x}$, com $C_1 \in \mathbb{R}$, (verifique!).
Seguidamente, determina-se a solução geral da equação completa y_C na forma

$$y_C = C_1(x)x^2e^{1/x}\,. \tag{2.109}$$

Substituindo y por y_C na equação completa, resulta $C_1'(x)x^2e^{1/x} = 1$, ou seja,

$$C_1'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}\,.$$

Integrando, vem

$$C_1(x) = \int \frac{1}{x^2}e^{-1/x}dx \;\Leftrightarrow\; C_1(x) = e^{-1/x} + C,\; C \in \mathbb{R}.$$

Assim, de (2.109), a solução geral é

$$y = x^2e^{1/x}\left(e^{-1/x} + C\right)\,.$$

Simplificando resulta que a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = x^2 + Cx^2e^{-1/x},\; C \in \mathbb{R}\,.$$

7. Resolva o seguinte problema de Cauchy

$$y' + y\cos x = \sin x\cos x,\; y(0) = 1\,.$$

Resolução.
Para resolver o problema de Cauchy, em primeiro lugar deve ser determinada a solução geral da equação diferencial. Observe que a equação é linear de primeira ordem. Será resolvida pelo método de variação das constantes. Assim, o primeiro passo é resolver a equação diferencial homogénea, $y' + y\cos x = 0$, associada à equação completa dada. A equação homogénea é de variáveis separáveis. Dividindo por y, sob a condição $y \neq 0$, obtém-se

$$\frac{dy}{y} = \cos x dx\,.$$

Integrando, tem-se

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cos x dx\,,$$

ou seja,

$$\ln|y| = -\sin x + \ln|C_1|,\; C_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,,$$

ou, ainda,

$$y = e^{-\sin x}C_1,\; C_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

A seguir, determina-se a solução geral y_C, da equação completa, na forma

$$y_C = e^{-\sin x}C_1(x), \tag{2.110}$$

onde $C_1(x)$ é uma função de x. Para determinar $C_2(x)$ substitui-se y_C, dada por (2.110), na equação completa, obtendo-se

$$\left(e^{-\sin x}C_1(x)\right)' + e^{-\sin x}C_1(x)\cos x = \sin x\cos x \;\Leftrightarrow\; C_1'(x)e^{-\sin x} = \sin x\cos x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; C_1'(x) = e^{\sin x}\sin x\cos x\,.$$

Integrando, obtém-se

$$C_1(x) = \int e^{\sin x} \sin x \cos x dx = (\sin x - 1)e^{\sin x} + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Substituindo C_1 na equação (2.110), obtém-se

$$y_C = e^{-\sin x}\left((\sin x - 1)e^{\sin x} + C\right)\,,$$

ou seja, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y_C = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x},\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Resta encontrar a solução particular pretendida para concluir a resolução do problema de Cauchy dado. Pretende-se determinar a solução particular que satisfaça a condição inicial $y(0) = 1$. Substituindo os valores $x = 0$ e $y = y_C = 1$ na solução geral encontrada, obtém-se

$$1 = \sin 0 - 1 + Ce^{-\sin 0} \ \Leftrightarrow\ 1 = -1 + C \Leftrightarrow\ C = 2\,.$$

Logo, a solução do problema de Cauchy é

$$y = \sin x - 1 + 2e^{-\sin x}\,.$$

8. Verifique que as seguintes equações diferenciais são exatas e resolva-as.

   (a) $(x^3 + xy^2 + y)dx + (x^2y + y^3 + x)dy = 0$;

   (b) $xdx + ydy + \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0$.

Resolução.

(a) Pretende-se encontrar a solução da equação diferencial

$$(x^3 + xy^2 + y)dx + (x^2y + y^3 + x)dy = 0\,.$$

Pela Propriedade 2.1 esta equação é exata pois, de acordo com a notação usada, se tem $P(x,y) = x^3 + xy^2 + y$ e $Q(x,y) = x^2y + y^3 + x$; neste caso, a condição (2.87) é verdadeira pois

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2xy + 1\,.$$

Assim, o integral geral da equação diferencial dada é procurado na forma $U(x,y) = C,\ C \in \mathbb{R}$, sendo

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = x^3 + xy^2 + y \\ \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2y + y^3 + x \end{cases}\,,$$

de acordo com (2.86).
Da primeira equação deste sistema resulta que

$$U(x,y) = \int (x^3 + xy^2 + y)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + xy + C(y)\,, \tag{2.111}$$

onde $C(y)$ é uma função real na variável y. Derivando, em ordem a y, esta última expressão, conclui-se que

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + xy + C(y)\right) = \frac{\partial U}{\partial y} = x^2y + x + C'(y)\,.$$

Logo, tendo em conta a segunda equação do sistema acima, $\frac{\partial U}{\partial y} = x^2y+y^3+x$, resulta que

$$x^2y + x + C'(y) = x^2y + y^3 + x\,,$$

e, portanto,

$$C'(y) = y^3\,.$$

Integrando em ordem a y, resulta

$$C(y) = \frac{y^4}{4} + K,\ \ K \in \mathbb{R}\,.$$

Consequentemente, substituindo a expressão obtida para $C(y)$ em (2.111), vem

$$U(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + xy + \frac{y^4}{4} + K\,.$$

Lembrando que $U(x,y) = C$, então a solução geral da equação diferencial inicial é

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + xy + \frac{y^4}{4} = \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

(b) Pretende-se resolver a equação diferencial

$$xdx + ydy + \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0\,.$$

Comece por observar que esta equação pode ser reescrita na forma

$$\left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0\,.$$

Designando $P(x,y) = x - \frac{y}{x^2+y^2}$ e $Q(x,y) = y + \frac{x}{x^2+y^2}$, verifica-se que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \ = \ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Logo, pela Propriedade 2.1, a equação diferencial dada é exata. Deste modo, a seguir, procure o seu integral geral na forma $U(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$, onde, de acordo com (2.86),

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2+y^2} \\[2ex] \frac{\partial U}{\partial y} = y + \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}.$$

Da primeira equação deste sistema resulta que

$$U(x,y) = \int \left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \arctan\frac{x}{y} + C(y)\,, \tag{2.112}$$

onde $C(y)$ é uma função real na variável y. Derivando em ordem a y esta última expressão, obtém-se

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} - \arctan\frac{x}{y} + C(y)\right) = -\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) + C'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} + C'(y)\,.$$

Como $\frac{\partial U}{\partial y} = y + \frac{x}{x^2+y^2}$ (segunda equação do sistema acima), então pode escrever-se

$$\frac{x}{x^2+y^2} + C'(y) = y + \frac{x}{x^2+y^2}\,,$$

e, portanto,

$$C'(y) = y\,,$$

donde, integrando em ordem a y, resulta

$$C(y) = \frac{y^2}{2} + K,\;\; K \in \mathbb{R}\,.$$

Substituindo, em (2.112), a expressão obtida para $C(y)$, tem-se

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} - \arctan\frac{x}{y} + \frac{y^2}{2} + K\,.$$

Sendo $U(x,y) = C$, então a solução geral da equação diferencial dada é

$$\frac{x^2}{2} - \arctan\frac{x}{y} + \frac{y^2}{2} = \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

9. Resolva o seguinte problema de Cauchy

$$e^x + y + \sin y + y'(e^y + x + x\cos x) = 0, \quad y(\ln 2) = 0\,.$$

Resolução.
Comece por reescrever a equação diferencial dada na forma

$$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)\,dy = 0\,.$$

Designe $P(x,y) = (e^x + y + \sin y)$ e $Q(x,y) = e^y + x + x\cos y$. Nestas circunstâncias, note que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x + y + \sin y\right) = 1 + \cos y = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Logo, pela Propriedade 2.1, a equação diferencial dada é exata. Deste modo, é procurado o integral geral da equação diferencial dada na forma $U(x,y) = C,\; C \in \mathbb{R}$, sendo

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = \left(e^x + y + \sin y\right)dx + \left(e^y + x + x\cos y\right)dy.$$

Assim,

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = e^x + y + \sin y \\ \\ \frac{\partial U}{\partial y} = e^y + x + x\cos x \end{cases}.$$

Integrando, em ordem a x, a primeira equação do sistema acima, resulta que

$$U(x,y) = \int (e^x + y + \sin y)\, dx = e^x + xy + x \sin y + C(y)\,, \tag{2.113}$$

onde $C(y)$ é uma função real na variável y. Derivando, em ordem a y, esta última expressão, obtém-se

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x + yx + x\sin y + C(y)\right) = x + x\cos y + C'(y)\,.$$

Tomando ainda em consideração a segunda equação do sistema acima, conclui-se que

$$x + x\cos y + C'(y) = e^y + x + x\cos y$$

e, consequentemente,

$$C'(y) = e^y\,.$$

Integrando em ordem a y, vem

$$C(y) = e^y + K,\ \ K \in \mathbb{R}\,.$$

Substituindo a expressão obtida para $C(y)$ em (2.113), conclui-se que

$$U(x,y) = e^x + yx + x\sin y + e^y + K\,.$$

Sabendo que $U(x,y) = C$, a solução geral da equação diferencial dada é

$$e^x + yx + x\sin y + e^y = \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}\,.$$

Encontrada a solução geral da equação diferencial dada, a solução do problema de Cauchy corresponde à solução particular que satisfaz a condição inicial $y(\ln 2) = 0$. Tomando $y_0 = 0$ e $x_0 = \ln 2$, vem que $e^{\ln 2} + e^0 = \tilde{C}$, donde $\tilde{C} = 3$.
Concluindo, a solução do problema de Cauchy dado é

$$e^x + yx + x\sin y + e^y = 3\,.$$

10. Resolva as seguintes equações diferenciais redutíveis a exatas identificando, para cada uma, um fator integrante.

    (a) $\left(\frac{\ln y}{y} + 6x\right) dx + \left(\frac{x}{y^2} + \frac{3x^2}{y}\right) dy = 0$;

    (b) $2y^2 dx + \left(x + e^{1/y}\right) dy = 0$.

    Resolução.

    (a) Observe que na equação diferencial dada, $\left(\frac{\ln y}{y} + 6x\right) dx + \left(\frac{x}{y^2} + \frac{3x^2}{y}\right) dy = 0$, a função y só tomar valores positivos. (porquê?). Além disso, esta equação é da forma (2.84) com

    $$P(x,y) = \frac{\ln y}{y} + 6x \quad \text{e} \quad Q(x,y) = \frac{x}{y^2} + \frac{3x^2}{y}\,.$$

    Contudo, como as suas derivadas parciais, dadas por

    $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1 - \ln y}{y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1 + 6xy}{y^2},$$

respetivamente, não são iguais, a equação diferencial dada não é exata. Para determinar o fator integrante, recorre-se à Propriedade 2.2. Uma vez que

$$\frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{y}{\ln y+6xy}\left(\frac{-\ln y-6xy}{y^2}\right)=-\frac{1}{y}=g(y)$$

é uma função só de y conclui-se que a condição indicada na alínea (b) da Propriedade 2.2 é verificada. Consequentemente, a equação dada admite fator integrante dado por

$$\mu(y)=e^{-G(y)}\,,$$

onde $G(y)$ é uma primitiva de $g(y)=-\frac{1}{y}$. Repare que, tomando em consideração que $y>0$, obtém-se

$$-\int\frac{1}{y}dy=-\ln|y|+C=-\ln y+C\,.$$

Seja $C=0$. Nesse caso, a primitiva de $g(y)$ é $G(y)=-\ln y$ e, portanto, se terá

$$\mu(y)=e^{\ln y}=y\,.$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial dada por este fator integrante resulta uma equação diferencial que é exata, dada por

$$y\left(\frac{\ln y}{y}+6x\right)dx+y\left(\frac{x}{y^2}+\frac{3x^2}{y}\right)dy=0,$$

ou, simplificando,

$$(\ln y+6xy)\,dx+\left(\frac{x}{y}+3x^2\right)dy=0.$$

Esta última equação tem solução geral da forma $U(x,y)=C$, $C\in\mathbb{R}$, com

$$\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial x}=\ln y+6xy\\[2ex]\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{x}{y}+3x^2\end{cases}.$$

Integrando em ordem a y a segunda equação deste sistema, resulta

$$U(x,y)=\int\left(\frac{x}{y}+3x^2\right)dy=x\ln y+3x^2y+C(x).$$

Derivando em ordem a x esta última equação, conclui-se que

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\ln y+6xy+C'(x)\,.$$

Desta última equação, e tomando em consideração a primeira equação do sistema acima, vem

$$\ln y+6xy=\ln y+6xy+C'(x)\,,$$

donde $C'(x)=0$ e, portanto, $C(x)=K$, com $K\in\mathbb{R}$. Assim, finalmente, a solução geral da equação diferencial dada é

$$x\ln y+3x^2y+K=0\,,\quad K\in\mathbb{R}.$$

(b) A equação diferencial dada, $2y^2dx + \left(x + e^{1/y}\right) dy = 0$, é da forma (2.84) com

$$P(x, y) = 2y^2 \quad \text{e} \quad Q(x, y) = x + e^{1/y}\,.$$

Uma vez que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

não são iguais, a equação diferencial dada não é exata. Para determinar um fator integrante recorre-se à Propriedade 2.2. Ora,

$$\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{1}{x + e^{1/y}}(4y-1)$$

não é função só de x, mas

$$\frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{1}{2y^2}(4y-1) = \frac{2}{y} - \frac{1}{2y^2}$$

é uma função só de y, pelo que a condição descrita na alínea (b) da Propriedade 2.2 está verificada. Consequentemente, a equação dada admite um fator integrante dado por

$$\mu(y) = e^{-G(y)},$$

onde $G(y)$ é uma primitiva de $g(y) = \frac{2}{y} - \frac{1}{2y^2}$. Assim sendo, a função

$$\mu(y) = \frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{2y}}$$

pode ser tomada como fator integrante da equação diferencial dada (verifique!). Multiplicando ambos os membros da equação diferencial dada pelo fator integrante encontrado resulta uma equação diferencial exata na forma

$$\frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{2y}}\left(2y^2dx + \left(x + e^{1/y}\right)dy\right) = 0\,.$$

ou, de forma equivalente após simplificações algébricas,

$$2e^{-\frac{1}{2y}}dx + \left(\frac{x}{y^2}e^{-\frac{1}{2y}} + \frac{1}{y^2}e^{\frac{1}{2y}}\right)dy = 0\,.$$

Esta última equação tem solução geral da forma $U(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$, tal que

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} = 2e^{-\frac{1}{2y}} \\ \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{y^2}e^{-\frac{1}{2y}} + \frac{1}{y^2}e^{\frac{1}{2y}} \end{array}\right. . \tag{2.114}$$

Partindo da primeira equação deste último sistema, conclui-se que

$$U(x,y) = \int \left(2e^{-\frac{1}{2y}}\right)dx = 2xe^{-\frac{1}{2y}} + C(y).$$

Derivando em ordem a y esta última equação, tem-se

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{y^2}e^{-\frac{1}{2y}} + C'(y)\,.$$

Tomando finalmente em consideração a segunda equação do sistema acima, vem

$$\frac{x}{y^2}e^{-\frac{1}{2y}} + \frac{1}{y^2}e^{\frac{1}{2y}} = \frac{x}{y^2}e^{-\frac{1}{2y}} + C'(y)\,,$$

ou seja,

$$C'(y) = \frac{1}{y^2}e^{\frac{1}{2y}}\,.$$

Integrando, vem

$$C(y) = \int \frac{1}{y^2}e^{\frac{1}{2y}}\,dy = -2e^{\frac{1}{2y}} + K\,,\ K \in \mathbb{R}\,.$$

Do exposto conclui-se que a solução geral da equação diferencial dada é

$$2xe^{-\frac{1}{2y}} - 2e^{\frac{1}{2y}} + K = 0\,, \quad K \in \mathbb{R}.$$

2.12 Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais de variáveis separáveis.

   (a) $y' = \frac{x}{y}$;
   (b) $y^2y' + x^2 - 1 = 0$;
   (c) $y' = y\tan x$;
   (d) $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$;
   (e) $y' = e^{x+y}$;
   (f) $y' + \frac{x\sin x}{y\cos y} = 0$;
   (g) $(1+y^2)xdx + (1+x^2)dy = 0$;
   (h) $(1+y)(e^x dx - e^{2y}dy) - (1+y^2)dy = 0$;
   (i) $(x+3)dy - (y+3)dx = 0$;
   (j) $y' = \frac{4}{x^2-4}$;
   (k) $(xy^2+x)dx + (y+x^2y)dy = 0$;
   (l) $y' = y^2\cos x$;
   (m) $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$;
   (n) $xyy' = 1 - x^2$;
   (o) $e^x(1+y') = 1$;
   (p) $y'(1+y) = xy\sin x$.

2. Determine a solução particular que satisfaz a condição inicial indicada e esboce a curva integral correspondente.

   (a) $y' = 4x^3, \qquad y(0) = 0$;
   (b) $xy' = \frac{y}{\ln x}, \qquad y(e) = 1$;
   (c) $y'\tan x - y = 1, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = -1$;

(d) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $x \neq 0$, $y(2) = 3$;

(e) $y' = y^2$, $y(-1) = 1$;

(f) $(x^2+4)y' - 2xy = 0$, $y(1) = 5$;

(g) $y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(0) = 1$;

(h) $(1+y^2)dx - xydy = 0$, $y(1) = 0$.

3. Resolva as seguintes equações diferenciais redutíveis a equações diferenciais de variáveis separáveis.

(a) $y' = (4x+y+1)^2$;

(b) $y' = \sin(y-x-1)$;

(c) $y' + 2y = 3x + 5$;

(d) $y' = \sqrt[3]{(4x-y+1)^2}$.

4. Mostre que a equação $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ tem uma infinidade de soluções da forma $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$, que satisfazem a condição inicial $y|_{x=0} = 0$. Mostre, também, que se a condição inicial for $y|_{x=0} = y_0$, com $y_0 \neq 0$, a mesma equação não tem nenhuma solução. Construa as curvas integrais da equação diferencial dada.

5. Mostre que o problema de Cauchy $\frac{dy}{dx} = y^\alpha$, $y|_{x=0} = 0$, tem, pelo menos, duas soluções se $0 < \alpha < 1$ e apenas uma no caso de $\alpha = 1$. Construa as curvas integrais nos casos de $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\alpha = 1$.

6. Verifique que as seguintes funções são homogéneas de grau 0.

(a) $g(x,y) = \frac{x}{y} - 3$;

(b) $h(x,y) = \frac{2x^2}{y^2} - \frac{x}{y}$.

7. Mostre que as funções

(a) $\phi(x,y) = 5x - 3y$ e $\psi(x,y) = (3x+y)\sin(\frac{x}{y})$ são ambas homogéneas de grau 1;

(b) $\rho(x,y) = x^2 + xy + y^2$ e $\sigma(x,y) = (x^2 - 3xy - y^2)e^{\frac{x}{y}}$ são ambas homogéneas de grau 2.

8. Resolva as seguintes equações diferenciais após verificar que se tratam de equações diferenciais homogéneas.

(a) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$;

(b) $y' = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right)$;

(c) $(x-y)dx + xdy = 0$;

(d) $y' = \frac{x-y}{x+y}$;

(e) $x\left(y' + e^{\frac{y}{x}}\right) = y$;

(f) $xy' = y + x\tan\left(\frac{y}{x}\right)$;

(g) $y^2 - 4xy + 4x^2y' = 0$;

(h) $(x^2+y^2)dx - 2x^2dy = 0$;

(i) $3x^4y^2dy = (4x^6 - y^6)dx$;

(j) $\left(y\prime - \frac{y}{x}\right) \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 1$;

(k) $xy' - y = (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{x}\right)$;

(l) $\sqrt{y}(2\sqrt{x} - \sqrt{y})dx + xdy = 0$;

(m) $y' \cos\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0$;

(n) $xy' - y(\ln y - \ln x) = 0$;

(o) $y\left(x^2 + y^2\right) dx - x^3dy = 0$;

9. Resolva as seguintes equações diferenciais redutíveis a homogéneas.

(a) $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$;

(b) $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$;

(c) $y' \ln\left(\frac{y+x}{x+3}\right) = \frac{y+x}{x+3} - \ln\left(\frac{y+x}{x+3}\right)$;

(d) $(2x + 8)dx + (3y - 5x - 11)dy = 0$;

(e) $3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)y'$;

(f) $(2x - 2)dy = (x + 2y - 3)dx$;

(g) $y' = \frac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$;

(h) $y' = \frac{x+y-2}{3x-y-2}$;

(i) $(y + 1)dx - (x + y + 6)dy = 0$.

10. Determine a equação que define as curvas que satisfazem a seguinte propriedade:

"a ordenada na origem da recta normal a cada curva, em cada ponto pelo qual ela passa, é igual à distância desse ponto à origem das coordenadas".

11. Verifique que as seguintes equações são equações diferenciais exatas e, a seguir, resolva-as.

(a) $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0$;

(b) $(3x^2 - 2xy)dx + (2y - x^2)dy = 0$;

(c) $(x - y + 1)dy - (x - y - 1)dx = 0$;

(d) $\frac{y}{x}dx + (3y^2 + \ln x)dy = 0$;

(e) $(2x - y)dx - xdy = 0$;

(f) $e^{-y}dx + (2 - xe^{-y})dy = 0$;

(g) $(3x - 5x^2y^2)dx + (3y^2 - \frac{10}{3}x^3y)dy = 0$;

(h) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$;

(i) $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2y)dy = 0$;

(j) $(x\cos(2y) - 3)dx - x^2\sin(2y)dy = 0$;

(k) $\sin(x + y) + x\cos(x + y) + xy'\cos(x + y) = 0$;

(l) $(3x^2y + \sin x)dx - (\cos y - x^3)dy = 0$;

(m) $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right) dx = \left(2y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$;

(n) $\frac{1}{x^2+y^2}\left((x - y)dx + (x + y)dy\right) = 0$;

(o) $\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$;

(p) $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xdy-ydx}{x^2} = 0$.

12. Resolva o seguinte problema de Cauchy $(2x + ye^{xy})dx + (xe^{xy} - 3)dy = 0,\ y(0) = 1$.

13. Determine uma função $M = M(x, y)$ tal que $M(x, y)dx + (xe^x + 2xy + 1)dy = 0$ seja uma equação diferencial exata.

14. Prove que $ydx + (y - x)dy = 0$ não é uma equação diferencial exata, mas que admite o fator integrante $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$. Resolva a equação $\mu(y)\,(ydx + (y - x)dy) = 0$.

15. Verifique que a equação $y(y - 4)dx = x(2 - y)dy$ não é uma equação diferencial exata. Prove que admite um fator integrante $\mu(x, y) = \mu(x)$ a determinar. Resolva a equação diferencial exata resultante.

16. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares de 1.ª ordem.

(a) $y' = y\ \cot\ x + \sin x$;

(b) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

(c) $y' = \frac{3y}{x} + x$;

(d) $(1 + x^2)y' = 2xy + (1 + x^2)^2$;

(e) $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1$.

17. Verifique que as seguintes equações diferenciais são lineares de 1.ª ordem na variável y ou na variável x e, a seguir, resolva-as.

(a) $y' = \dfrac{y}{x + y^3}$;

(b) $xy' = e^x + xy$;

(c) $y - y' = y^2 + xy'$;

(d) $y' - \dfrac{xy}{x^2 + 1} = x$;

(e) $y'\cos x + y\sin x = 1$;

(f) $xy' + x^2 + xy = y$;

(g) $y'\sin x - y = 1 - \cos x$;

(h) $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$;

(i) $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$.

18. Resolva os seguintes problemas de Cauchy

(a) $x(x - 1)y' + y = x^2(2x - 1), \quad y(2) = 4$;

(b) $y' + y\cos x = \sin x\cos x, \quad y(0) = 1$.

19. Se R é a resistência de um circuito eléctrico e L a auto-indução, a relação entre a intensidade I e a força electromotriz E é dada pela equação $E = RI + L\frac{dI}{dt}$, onde R e L são constantes. Se considerar E como uma função do tempo t, tem-se uma equação linear não homogénea, cuja incógnita é I: $\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = \frac{E(t)}{L}$. Sabendo que E_0 e I_0 são constantes, determine a intensidade de corrente $I(t)$ no caso de

(a) $E(t) = E_0$ e $I(0) = I_0$;

(b) $E(t) = E_0 sin(2\pi nt)\, e\, I(0) = I_0$.

20. Mostre que toda a equação linear preserva a propriedade de linearidade após a substituição da variável independente $x = \varphi(t)$, onde φ é uma função diferenciável.

21. Mostre que toda a equação linear preserva a propriedade de linearidade após qualquer transformação linear da função incógnita $y = \alpha(x)z + \beta(x)z$, onde α e β são funções diferenciáveis arbitrárias, sabendo que $\alpha(x) \neq 0$ no intervalo considerado.

22. Verifique que as seguintes equações diferenciais são equações de Bernoulli, com variável dependente $y = y(x)$ ou com variável dependente $x = x(y)$, e, a seguir, resolva-as.

    (a) $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$;

    (b) $dy = (y^2e^x - y)dx$;

    (c) $x' + yx = y\sqrt{x}$;

    (d) $3y^2y' - 2y^3 = x + 1$;

    (e) $y' + 2xy = 2x^3y^3$;

    (f) $\left(xy + x^2y^3\right)y' = 1$;

    (g) $dx + \left(x + y^2\right)dy = 0$.

23. Resolva as seguintes equações diferenciais redutíveis a exatas identificando o seu fator integrante.

    (a) $y^2dx + (xy - 1)dy = 0$;

    (b) $(1 + 3x^2 \sin y)dx - x \cot y dy = 0$;

    (c) $ydx - (x + y^2)dy = 0$;

    (d) $(x^2 + 3y^2)dx - 2xydy = 0$;

    (e) $(2x^3 - x^2 - y)dx - (2x^2y - x)dy = 0$;

    (f) $2xydx + 3x^2dy = 0$;

    (g) $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$.

24. Identifique o tipo de cada uma das seguintes equações diferenciais. A seguir, resolva-as.

    (a) $y' + xy = x^3$;

    (b) $(x - y)dy - ydx = 0$;

    (c) $y' = y \tan x - y^2 \cos x$;

    (d) $y' = \dfrac{1 - 2x}{y^2}$;

    (e) $\left(xye^{\frac{x}{y}} + y^2\right)dx = x^2e^{\frac{x}{y}}dy$;

    (f) $xy' + y = y^2 \ln x$;

    (g) $3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0$;

    (h) $y' = \frac{x+y}{x-y}$;

    (i) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$;

(j) $y' = \dfrac{1}{xy + x^2y^3}$;

(k) $\left(x - y\sin\frac{y}{x}\right)dx + x\sin\frac{y}{x}dy = 0$;

(l) $(2xe^y + y^4)y' = ye^y$;

(m) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\sin^2 x}$.

25. Resolva os seguintes problemas de Cauchy.

(a) $xy' = y\ln\frac{y}{x}\,, \qquad y(1) = 1$;

(b) $(y + 2x)dx + (x - 2y)dy = 0\,, \qquad y(2) = 1$;

(c) $3y' = -(1 + 3y^3)y\sin x\,, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 1$;

(d) $ydx + (x - \frac{1}{2}x^3y)dy = 0\,, \qquad y(\frac{1}{2}) = 1$;

(e) $x' = \frac{x+y}{y}\,, \qquad x(1) = 1$;

(f) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}\,, \qquad y(1) = 1$;

(g) $e^x + y + \sin y + y'(e^y + x + x\cos y) = 0\,, \qquad y(\ln 2) = 0$;

(h) $(2x + ye^{xy})dx + (xe^{xy} - 3)dy = 0\,, \qquad y(0) = 1$.

2.13 Soluções

1. (a) $y^2 - x^2 = C,\ C \in \mathbb{R}$;

(b) $y^3 + x^3 - 3x = C,\ C \in \mathbb{R}$;

(c) $y = C\ \sec x,\ C \in \mathbb{R}$;

(d) $\arctan y - \arcsin x = C,\ C \in \mathbb{R}$;

(e) $e^x + e^{-y} = C,\ C \in \mathbb{R}$;

(f) $y\ \sin y + \cos y - x\ \cos x + \sin x = C,\ C \in \mathbb{R}$;

(g) $\arctan y + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) = C,\ C \in \mathbb{R}$;

(h) $e^x - \frac{1}{2}e^{2y} - 2\ln|1 + y| - \frac{(y-1)^2}{2} = C,\ C \in \mathbb{R}$, e $y = -1$;

(i) $y = (x + 3)C - 3,\ C \in \mathbb{R}$;

(j) $y = \ln\mid\frac{x-2}{x+2}\mid + C,\ C \in \mathbb{R}$;

(k) $y^2 + 1 = \frac{C}{1+x^2},\ C \in \mathbb{R}$;

(l) $y = -\frac{1}{\sin\ x + C},\ C \in \mathbb{R}$;

(m) $\sqrt{1 - y^2} = \arcsin x + C,\ C \in \mathbb{R}$;

(n) $x^2 + y^2 = \ln x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$;

(o) $y = C - e^{-x} - x,\ C \in \mathbb{R}$;

(p) $y + \ln|y| = \sin x - x\cos x + C,\ y = 0\,,\ C \in \mathbb{R}$.

2. (a) $y = x^4$;

(b) $y = \ln\ x$;

(c) $y = -1$;

(d) $y=\frac{6}{x}$;

(e) $y=-\frac{1}{x}$;

(f) $y=x^2+4$;

(g) $y=2-\sqrt{1-x^2}$;

(h) $x^2-y^2=1$.

3. (a) $y=2\tan(2x+C)-4x-1,\ C\in\mathbb{R}$;

(b) $(2x+C)(\tan(\frac{1}{2}(y-x-1)-1))=1,\ C\in\mathbb{R}$, e $y=\frac{\pi}{2}+x+1+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$;

(c) $4y-6x-7=Ce^{-2x},\ C\in\mathbb{R}$;

(d) $3\ln\ |\ \frac{\sqrt[3]{4x-y+1}+2}{\sqrt[3]{4x-y+1}-2}\ |=3\sqrt[3]{4x-y+1}+x+C,\ C\in\mathbb{R}$, e $y=4x+9$ e $y=4x-7$.

4.

5.

6.

7.

8. (a) $y^2=x^2(2\ln|x|+C),\ C\in\mathbb{R}$;

(b) $\cos\frac{y}{x}-1=x^2C(\cos\frac{y}{x}+1),\ C\in\mathbb{R}$, e $y=(2k+1)\pi x,\ k\in\mathbb{Z}$;

(c) $y=x(-\ln|x|+C),\ C\in\mathbb{R}$, e $x=0$;

(d) $y^2+2xy-x^2=C,\ C\in\mathbb{R}$;

(e) $-e^{-\frac{y}{x}}=\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}$;

(f) $y=x\arcsin(Cx),\ C\in\mathbb{R}$, e $y=k\pi x,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$;

(g) $4x=y(\ln|x|+C),\ C\in\mathbb{R}$;

(h) $2x=(x-y)(\ln|x|+C),\ C\in\mathbb{R}$ e $y=x$;

(i) $y^3+4x^3=Cx^5(x^3-y^3),\ C\in\mathbb{R}$, e $y=x$;

(j) $\frac{y}{x}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=C,\ C\in\mathbb{R}$;

(k) $\ln\left(\frac{x+y}{x}\right)=Cx,\ C\in\mathbb{R}$;

(l) $\frac{1}{x}e^{-\sqrt{\frac{y}{x}}}=C,\ C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $y=0$;

(m) $\sin\left(\frac{y}{x}\right)+\ln|x|=C,\ C\in\mathbb{R}$;

(n) $y=xe^{Cx+1},\ C\in\mathbb{R}$;

(o) $xe^{\frac{x^2}{2y^2}}=C,\ C\in\mathbb{R}$ e $y=0$.

9. (a) $x^2+y^2+x-y-xy+C=0,\ C\in\mathbb{R}$;

(b) $x+2y+3\ln|2-x-y|=C,\ C\in\mathbb{R}$;

(c) $(x+y)(1-\ln\left|\frac{x+y}{x+3}\right|)=C,\ C\in\mathbb{R}$;

(d) $(y-x-1)^2=C(3y-2x+1)^3,\ C\in\mathbb{R}$;

(e) $(y-x+1)^2(y+x-1)^5=C,\ C\in\mathbb{R}$;

(f) $y=1+\frac{x-1}{2}\ln|C(x-1)|\,,\ C\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, e $x=1$;

(g) $x - y - \ln|3x - 4y + 1| = C,\ C \in \mathbb{R};$

(h) $(y - x)e^{\frac{2x-2}{y-x}} = C,\ C \in \mathbb{R}, \quad$ e $\quad y = x;$

(i) $\frac{x+5}{y+1} - \ln|y + 1| = C,\ C \in \mathbb{R}, \quad$ e $\quad y = -1.$

10. $y = \frac{1}{2}(Cx^2 - \frac{1}{C}),\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

11. (a) $x^2y^3 + C = 0,\ C \in \mathbb{R};$

(b) $x^3 - x^2y + y^2 + C = 0,\ C \in \mathbb{R};$

(c) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - x - y - xy = C,\ C \in \mathbb{R};$

(d) $y \ln x + y^3 = C,\ C \in \mathbb{R};$

(e) $x^2 - xy = C,\ C \in \mathbb{R};$

(f) $xe^{-y} + 2y = C,\ C \in \mathbb{R};$

(g) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3y^2 + y^3 = C,\ C \in \mathbb{R};$

(h) $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C,\ C \in \mathbb{R};$

(i) $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = C,\ C \in \mathbb{R};$

(j) $\frac{x^2}{2}\cos(2y) - 3x = C,\ C \in \mathbb{R};$

(k) $x \sin(x + y) = C,\ C \in \mathbb{R};$

(l) $x^3y - \cos x - \sin y = C,\ C \in \mathbb{R};$

(m) $x^2 - x + \frac{y}{x} - y^2 = C,\ C \in \mathbb{R};$

(n) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = C,\ C \in \mathbb{R};$

(o) $x \sin y - y \cos x + \ln(xy) = C,\ C \in \mathbb{R};$

(p) $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C,\ C \in \mathbb{R}.$

12. $x^2 + e^{xy} - 3y + 2 = 0.$

13. Por exemplo, $M(x, y) = (e^x + xe^x)y + y^2 + e^x.$

14. $\frac{x}{y} + \ln|y| + C = 0,\ C \in \mathbb{R}.$

15. $\mu(x) = x;\ \ x^2y(y - 4) = C,\ C \in \mathbb{R}.$

16. (a) $y = (x + C)\sin\ x,\ C \in \mathbb{R};$

(b) $y = e^{-x^2}(C + \frac{x^2}{2}),\ C \in \mathbb{R};$

(c) $y = Cx^3 - x^2,\ C \in \mathbb{R};$

(d) $y = (x + C)(1 + x^2),\ C \in \mathbb{R};$

(e) $y = x \ln x + \frac{C}{x},\ C \in \mathbb{R}.$

17. (a) $x = Cy + \frac{1}{2}y^3,\ C \in \mathbb{R}, \quad$ e $\quad y = 0;$

(b) $y = e^x(C + \ln|x|),\ C \in \mathbb{R};$

(c) $y = \frac{x+1}{x+C},\ C \in \mathbb{R}, \quad$ e $\quad y = 0;$

(d) $y = x^2 + 1 + C\sqrt{x^2 + 1},\ C \in \mathbb{R};$

(e) $y = \sin\ x + C \cos\ x,\ C \in \mathbb{R};$

(f) $y = x(Ce^{-x} - 1),\ C \in \mathbb{R}$;

(g) $y = (x + C)\tan\frac{x}{2},\ C \in \mathbb{R}$;

(h) $y^2 - 2x = Cy^3,\ C \in \mathbb{R}$;

(i) $x = y^2\left(1 + Ce^{\frac{1}{y}}\right),\ C \in \mathbb{R}$.

18. (a) $y = x^2$;

(b) $y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1$.

19. (a) $I(t) = \frac{E_0}{R} + (I_0 - \frac{E_0}{R})e^{-\frac{R}{L}t}$;

(b) $I(t) = \frac{E_0}{R^2+(2n\pi L)^2}[R\sin(2n\pi t) + 2n\pi L(e^{-\frac{Rt}{L}} - \cos(2n\pi t)))] + I_0e^{-\frac{Rt}{L}}$.

20.

21.

22. (a) $y = e^{-2x^2}(C + \frac{1}{2}x^2)^2,\ C \in \mathbb{R}$, e $y = 0$;

(b) $y = \frac{e^{-x}}{C-x},\ C \in \mathbb{R}$, e $y = 0$;

(c) $x = (1 + Ce^{-y^2/4})^2,\ C \in \mathbb{R}$ e $x = 0$;

(d) $4y^3 = Ce^{2x} - 2x - 3,\ C \in \mathbb{R}$;

(e) $y^2 + 2x^2y^2 + Cy^2e^{2x^2} = 2,\ C \in \mathbb{R}$ e $y = 0$;

(f) $\left(2 - y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}\right)x = 1,\ C \in \mathbb{R}$;

(g) $x = Ce^{-y} - y^2 + 2y - 2,\ C \in \mathbb{R}$.

23. (a) $xy - \ln y = C,\ C \in \mathbb{R}$ (fator integrante $\mu(y) = \frac{1}{y}$);

(b) $\frac{x}{\sin y} + x^3 = C,\ C \in \mathbb{R}$ (fator integrante $\mu(y) = \frac{1}{\sin y}$);

(c) $x - y^2 = Cy,\ C \in \mathbb{R}$ (fator integrante $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$);

(d) $x^2 + y^2 = Cx^3,\ C \in \mathbb{R}$ (fator integrante $\mu(y) = \frac{1}{x^4}$);

(e) $x^2 - x + \frac{y}{x} - y^2 = C,\ C \in \mathbb{R}$ (fator integrante $\mu(y) = \frac{1}{x^2}$);

(f) $3x^{2/3}y = C,\ C \in \mathbb{R}$ (fator integrante $\mu(x) = x^{-4/3}$);

(g) $x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| = C,\ C \in \mathbb{R}$, e $y = 0$ (fator integrante $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$).

24. (a) Equação diferencial linear de 1.ª ordem; $y = x^2 - 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}},\ C \in \mathbb{R}$;

(b) Equação diferencial homogénea de 1.ª ordem; $\ln|y| + \frac{x}{y} = C,\ C \in \mathbb{R}$, e $y = 0$;

(c) Equação diferencial de Bernoulli ; $y = \frac{1}{(x+C)\ \cos x},\ C \in \mathbb{R}$, e $y = 0$;

(d) Equação diferencial de variáveis separáveis; $y^3 = C + 3x - 3x^2,\ C \in \mathbb{R}$;

(e) Equação diferencial homogénea de 1.ª ordem; $\ln|x| + e^{\frac{x}{y}} = C,\ C \in \mathbb{R}$, e $x = 0$;

(f) Equação diferencial de Bernoulli; $y = \frac{1}{1+\ln x+Cx},\ C \in \mathbb{R}$, e $y = 0$;

(g) Equação diferencial exata; $(3x + 2y - 1)(x - 1) = C,\ C \in \mathbb{R}$;

(h) Equação diferencial exata ou homogénea de 1.ª ordem; $\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + C,\ C \in \mathbb{R}$;

(i) Equação diferencial linear de 1.ª ordem; $2y\ \cos x + \cos(2x) = C,\ C \in \mathbb{R}$;

(j) Equação diferencial de Bernoulli; $x = \frac{1}{Ce^{-\frac{y^2}{2}}+2-y^2},\ C \in \mathbb{R}$;

(k) Equação diferencial homogénea de 1.ª ordem; $\ln|x| - \cos\frac{y}{x} = C,\ C \in \mathbb{R}$;

(l) Equação diferencial linear de 1.ª ordem; $x = Cy^2 - y^2(y+1)e^{-y},\ C \in \mathbb{R}$, e $y = 0$;

(m) Equação diferencial de Bernoulli; $y = \left(\frac{C+\ln|\sin x|}{x} - \cot x\right)^2,\ C \in \mathbb{R}$, e $y = 0$.

25. (a) $y = xe^{1-x}$;

(b) $x^2 + xy - y^2 = 5$;

(c) $y^3 = \frac{1}{(3-2e^{\cos\ x})}$;

(d) $x^2 = \frac{1}{(y+3y^2)}$;

(e) $\ln|y| + 1 = \frac{x}{y}$;

(f) $\sqrt{y} = \frac{x^2}{2}(\ln|x| + 2)$;

(g) $e^x + xy + x\sin y + e^y = 3$;

(h) $x^2 + e^{xy} - 3y = -2$.

Capítulo 3

Equações diferenciais de ordem superior à primeira

3.1 Noções básicas

Uma **equação diferencial de ordem** n, com $n \geq 1$, pode ser apresentada na sua forma *normal* (i.e., resolvida em relação à derivada de maior ordem $y^{(n)}$)

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{3.1}$$

onde

$$\begin{array}{rccc} f: & D_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, y', ..., y^{(n-1)}) & \longmapsto & f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \end{array} \tag{3.2}$$

ou, na sua forma *geral*

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{3.3}$$

No caso de $n > 1$, a equação na forma (3.1), ou (3.3), é genericamente conhecida por **equação diferencial de ordem superior à primeira**.

O **problema de Cauchy para uma equação diferencial de ordem** n, na forma (3.1) ou (3.3), consiste em encontrar a solução particular dessa equação que satisfaz n *condições iniciais* na forma

$$\begin{aligned} y|_{x=x_0} &:= y(x_0) = y_0, \\ y'|_{x=x_0} &:= y'(x_0) = y'_0, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} &:= y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde $x_0,\ y_0,\ y'_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$ são números reais.

Teorema 3.1 (Existência e unicidade de solução do problema de Cauchy) [1] *Seja f uma definida como em (3.2). Uma equação diferencial de ordem n escrita na forma normal (3.1) ad-*

[1]Note que o Teorema 3.1 representa sómente uma condição suficiente de existência e unicidade de solução do problema de Cauchy. Outras condições (eventualmente, menos restritivas) podem ser formuladas.

mite, numa vizinhança de $x_0 \in \mathbb{R}$ (i.e., para $x_0 - h < x < x_0 + h$, para algum $h > 0$), uma única solução $y = y(x)$ satisfazendo as condições iniciais (4.2) desde que[2]

1º) f seja contínua numa certa vizinhança $D \subset D_f$ com $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$; e

2º) as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ existam[3] *e sejam contínuas em D.*

Exemplo 3.1.1 (Unicidade do problema de Cauchy) *Considere o problema de Cauchy*

$$y'' - xy' + 1 = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$$

A equação diferencial $y'' - xy' + 1 = 0$ pode ser escrita na forma normal (3.1),

$$y'' = xy' - 1,$$

i.e., $y'' = f(x, y, y')$, com

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, y') & \to & f(x, y, y') = xy' - 1. \end{array}$$

A função f e as suas derivadas parciais, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y'} = x$, são funções contínuas em $\mathbb{R}^3$ e, portanto, são contínuas em qualquer vizinhança D do ponto $(x_0, y_0, y_0') = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$. Do Teorema 3.1 conclui-se que o problema de Cauchy dado admite uma única solução $y = y(x)$ na vizinhança $]-h, h[$ do ponto $x_0 = 0$, para algum $h > 0$.

3.2 Redução da ordem em equações diferenciais de ordem superior à primeira

3.2.1 Equação diferencial contendo somente a variável independente e a derivada de maior ordem da função desconhecida

A equação diferencial de ordem n na forma

$$y^{(n)} = f(x), \tag{3.5}$$

resolve-se integrando-a n vezes.
De facto, se $n = 1$, a equação $y' = f(x)$ tem solução geral na forma $y = \int f(x)dx + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Se $n = 2$, para resolver a equação da segunda ordem $y'' = f(x)$, integra-se esta equação duas vezes. Depois da primeira integração, obtém-se $y' = \int f(x)dx + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Integrando a última equação diferencial de primeira ordem, resulta

$$y = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx\,,$$

[2]Para noções de derivadas parciais e continuidade funções reais de várias variáveis reais, veja-se um breve resumo no Apêndice B.

[3]Aqui as derivadas parciais de $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ calculam-se como sendo $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ variáveis independentes entre si.

ou seja,

$$y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2, \text{ com } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

No caso geral (i.e., $n \in \mathbb{N}$), o integral geral da equação (3.5) é

$$y = \underbrace{\int \Big(\ldots \Big(\int \Big(\int}_{n \text{ vezes}} f(x)dx)dx \Big) \ldots \Big) dx + C_1 \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{(n-2)}}{(n-2)!} + \cdots + C_{n-1}x + C_n \ ,$$

com $C_1, C_2, \ldots, C_n$ constantes arbitrárias reais.

Nota. Este tipo de resolução equivale ao seguinte processo iterativo de mudança de variável. Primeiro considera-se $z_1 = y^{(n-1)}$ e resolve-se a equação resultante $z_1' = f(x)$. Seja $z_1 = \phi_1(x)$ essa solução. Tem-se então $y^{(n-1)} = \phi_1(x)$, que é da forma (3.5). Procede-se a nova mudança de variável $z_2 = y^{(n-2)}$ e resolve-se a equação resultante $z_2' = \phi_1(x)$. Seja $z_2 = \phi_2(x)$ essa solução. Tem-se então $y^{(n-2)} = \phi_2(x)$, que é da forma (3.5). Procede-se assim sucessivamente n vezes até obter a solução da equação resultante $z_n' = \phi_{n-1}(x)$.

Exemplo 3.2.1 (Resolução de uma equação diferencial na forma (3.5)) *Considere a equação diferencial*

$$x^2 y''' = 3x + \ln x \ . \tag{3.6}$$

Dividindo ambos os membros por x^2, obtém-se a equação

$$y''' = \frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \ . \tag{3.7}$$

Repare que a equação (3.6) só tem sentido para valores positivos de x (domínio de $\ln x$), logo a divisão por x^2 é permitida.
Integrando ambos os membros de (3.7), obtém-se

$$\begin{aligned} y'' &= \int \left(\frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \right) dx + C_1 = \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{\ln x}{x^2} dx + C_1 \\ &= 3\ln x - \frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx + C_1 \quad \textit{(aplicando primitivação por partes),} \end{aligned}$$

donde

$$y'' = 3\ln x - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1. \tag{3.8}$$

Integrando agora ambos os membros de (3.8), vem

$$\begin{aligned} y' &= 3 \int \ln x dx - \int \frac{\ln x}{x} dx - \int \frac{1}{x} dx + \int C_1 dx + C_2 \\ &= 3 \Big(x \ln x - \int \frac{1}{x} dx \Big) - \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x + C_1 x + C_2 \\ &= 3x \ln x - 3 \ln x - \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x + C_1 x + C_2 \ , \end{aligned}$$

ou seja,

$$y' = 3x \ln x - 4 \ln x - \frac{\ln^2 x}{2} + C_1 x + C_2 \ . \tag{3.9}$$

Integrando ambos os membros de (3.9), resulta

$$y = 3\int x\ln x dx - 4\int \ln x dx - \frac{1}{2}\int \ln^2 x dx + C_1\int x dx + \int C_2 dx.$$

Uma vez que $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$, $\int x\ln x dx = x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + K$, *e* $\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x + 2\int \ln x + Q$, *tomando* $C_3 := K + C + Q$, *na última equação resulta*

$$y = \frac{3}{2}\left(x^2\ln x - \frac{x^2}{2}\right) - 4(x\ln x - x) - \frac{1}{2}x\ln^2 x + x\ln x - x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

donde, simplificando, obtém-se o integral geral (ou solução geral) da equação diferencial (3.6)

$$y = \frac{3}{2}x^2\ln x - 3x\ln x - \frac{1}{2}x\ln^2 x + \tilde{C}_1 x^2 + \tilde{C}_2 x + C_3\,, \quad \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, C_3 \in \mathbb{R}\,. \tag{3.10}$$

3.2.2 Equação diferencial não contendo a função desconhecida

Seja a equação diferencial de ordem n na forma

$$F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{3.11}$$

Esta equação pode ser resolvida efetuando a mudança de variável $y' = p$, com $p = p(x)$. Dada essa mudança de variável, as restantes derivadas de y, em (3.11), podem ser substituídas por $y'' = p'$, $y''' = p'', \ldots,$ $y^{(n)} = p^{(n-1)}$, e a equação (3.11) transforma-se na equação diferencial de ordem $n-1$, em ordem à nova variável dependente p,

$$F(x, p, p', \cdots, p^{(n-1)}) = 0.$$

Seja $p = \phi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1})$ o integral geral desta última equação. Integrando ambos os membros, obtém-se o integral geral da equação (3.11)

$$y = \int \phi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1})dx + C_n\ , \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.2.2 (Resolução de uma equação diferencial na forma (3.11)) *A equação diferencial de segunda ordem*

$$(x+1)y'' = y' - 1 \tag{3.12}$$

é da forma (3.11) com $n = 2$. *Para resolvê-la considere a mudança de variável* $y' = p$, *com* $p = p(x)$. *Assim,* $y'' = p'$, *ficando (3.12) reduzida à equação diferencial*

$$(x+1)p' = p - 1\,, \tag{3.13}$$

a qual é de 1.ª ordem nas variáveis x *(independente) e* $p = p(x)$ *(dependente).*
Se $p \neq 1$, *resolve-se a equação diferencial de variáveis separáveis (3.13) obtendo-se*

$$\frac{dp}{p-1} = \frac{dx}{x+1} \Leftrightarrow \ln|p-1| = \ln|x+1| + \ln|C_1| \Rightarrow p - 1 = C_1(x+1),\ C_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

ou seja,

$$p = C_1(x+1) + 1, \quad C_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Caso $C_1 = 0$, na última fórmula ter-se-ia $p = 1$, a qual também é uma solução (solução particular) de (3.13) (verifique).
Assim, a solução geral da equação (3.13) é

$$p = C_1(x+1) + 1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Regressando à variável y, observe que como $y' = p$ então $y' = C_1(x+1)+1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Integrando, vem

$$\begin{aligned} y &= C_1 \int (x+1)dx + \int dx \\ &= C_1 \frac{(x+1)^2}{2} + x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou, de modo equivalente,

$$y = \tilde{C}_1(x+1)^2 + x + C_2, \quad \tilde{C}_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

com $\tilde{C}_1 := \frac{C_1}{2}$.

3.2.3 Equação diferencial não contendo a função desconhecida, nem as suas derivadas até à ordem $k-1$ inclusivamente

Agora considere-se a equação diferencial de ordem n na forma geral

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{3.15}$$

Esta equação resolve-se efetuando a substituição

$$y^{(k)} = p, \tag{3.16}$$

da qual resulta $y^{(k+1)} = p', \cdots, y^{(n)} = p^{(n-k)}$, pelo que a equação (3.15) pode ser reduzida à seguinte equação diferencial de ordem $n-k$:

$$F(x, p, p', \cdots, p^{(n-k)}) = 0. \tag{3.17}$$

Assuma que o integral geral de (3.17) é $p = \phi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k})$. Assim, por (3.16), tem-se

$$y^{(k)} = \phi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k}).$$

Esta última é uma equação diferencial na forma (3.5), a qual se resolve integrando k vezes e assim resultando o integral geral da equação (3.15).

Nota. A equação (3.11) é um caso particular da equação (3.15) para $k = 1$.

Exemplo 3.2.3 (Resolução de uma equação diferencial na forma (3.15)) *A equação diferencial de 3.ª ordem*

$$xy''' \ln x = y'' \tag{3.18}$$

é da forma (3.15), com $k = 2$ e $n = 3$. Para resolvê-la considere a mudança de variável

$$y'' = p, \tag{3.19}$$

com $p = p(x)$. Assim, $y''' = p'$ e, por substituição em (3.18), vem

$$xp' \ln x = p\,. \tag{3.20}$$

Proceda agora à resolução da equação diferencial (3.20).
Se $p \neq 0$, então tem-se

$$xp' \ln x = p \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x \ln x} \Leftrightarrow \ln|p| = \ln|\ln x| + \ln|C_1|$$

e, finalmente,

$$p = C_1 \ln x, \quad C_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Se $C_1 = 0$, ter-se-ia $p = 0$, transformando a equação (3.20) numa identidade, o que significa que $p = 0$ é uma solução particular de (3.20). Logo,

$$p = C_1 \ln x, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

é a solução geral de (3.20).
Regressando à variável y, tomando em conta a substituição (3.19) efetuada, deduz-se a solução geral de (3.18). Tem-se

$$\begin{aligned} y'' = p \Leftrightarrow y'' = C_1 \ln x \Leftrightarrow y' = C_1 \int \ln x dx + C_2 \Leftrightarrow y' = C_1(x \ln x - x) + C_2 \\ \Leftrightarrow y = C_1\Big(\int x \ln x dx - \int x dx\Big) + C_2 \int dx + C_3 \\ \Leftrightarrow y = C_1\Big(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\Big) + C_2 x + C_3\,. \end{aligned}$$

Simplificando, vem

$$y = C_1\Big(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4}\Big) + C_2 x + C_3\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

3.2.4 Equação diferencial não contendo a variável independente

Seja a equação diferencial na forma geral

$$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{3.21}$$

Para resolver esta equação efetue a substituição

$$y' = p,$$

ou, de modo equivalente, $p = \frac{dy}{dx}$, com $p = p(y)$. Tendo em conta que esta é uma função composta, $p(y(x))$, todas as derivadas $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ se podem exprimir à custa de derivadas, em ordem a y, da nova função p. Por exemplo, denotando $p' = \frac{dp}{dy}$ e $p'' = \frac{d^2p}{dy^2}$ as derivadas de primeira e de segunda ordem de p, respetivamente, vem

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}p(y(x)) = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p = p'p, \\ y''' &= \frac{d}{dx}y'' = \frac{d}{dx}(\frac{dp}{dy}p) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right)p + \frac{dp}{dy}\left(\frac{d}{dx}p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx}p + \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy} \\ &= p\frac{d^2p}{dy^2}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = p^2\frac{d^2p}{dy^2}p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = p^2p'' + p(p')^2. \end{aligned}$$

De modo similar resulta para as restantes derivadas, até à derivada de ordem n, $y^{(n)}$. Substituindo as expressões assim obtidas na equação (3.21), obtém-se uma equação diferencial de ordem $n-1$,

$$F(y, p, p', \ldots, p^{(n-1)}) = 0,$$

a qual é da forma (3.3), se se considerar aqui que y é a variável independente e $p = p(y)$.

Exemplo 3.2.4 (Resolução de uma equação diferencial na forma (3.21)) *Considere a equação diferencial de segunda ordem*

$$(y')^2 + yy'' = 0. \tag{3.22}$$

Nesta equação, a variável independente não está presente explicitamente, logo esta equação diferencial tem a forma (3.21).
Efetue a substituição $y' = p(y)$. Logo, $y'' = p'p$. Assim, a equação diferencial inicial transforma-se na equação $p^2 + ypp' = 0$, ou, de modo equivalente,

$$p(p + yp') = 0.$$

Duas situações distintas podem ocorrer aqui: $p = 0$ ou $p + yp' = 0$ (com $p \neq 0$).
Se $p = 0$, então $y' = 0$ e, portanto, $y = K,\ K \in \mathbb{R}$, é solução da equação diferencial (3.22).
Se $p + yp' = 0$ (com $p \neq 0$), resolva-se esta equação. Trata-se de uma equação diferencial de variáveis separáveis, com o pressuposto de se ter $p \neq 0$.
Ora,

$$p + yp' = 0 \iff y\frac{dp}{dy} = -p \iff \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y} \iff \ln|p| = -\ln|Cy| \iff$$

$$\iff p = \frac{C_1}{y}, \quad C_1 = \frac{1}{C},\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Lembrando que $p = y'$, obtém-se

$$y' = \frac{C_1}{y} \iff ydy = C_1 dx \iff \frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2.$$

Logo, a solução geral da equação diferencial inicial é

$$y^2 = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2, \quad \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.23}$$

É evidente que a solução geral obtida (3.23) contém a solução particular $y = K,\ K \in \mathbb{R}$; basta tomar $\tilde{C}_1 = 0,\ \tilde{C}_2 = K^2$.

3.3 Equação diferencial linear de ordem n

Uma equação diferencial na forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \tag{3.24}$$

chama-se equação diferencial **linear** de ordem n, sendo $a_1(x), \cdots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ os seus **coeficientes**.

Se $f(x) \equiv 0$, a equação (3.24) diz-se uma equação diferencial **linear homogénea**; caso contrário, diz-se uma equação diferencial **linear não homogénea** (ou completa).

Propriedade 3.1 (Princípio da sobreposição) *[15] Se $y = y_{p_1}$ e $y = y_{p_2}$ são duas soluções particulares de uma equação diferencial linear homogénea, então, para todo $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, a função $y = C_1 y_{p_1} + C_2 y_{p_2}$ é também uma solução particular dessa equação.*

Exemplo 3.3.1 (Aplicação do Princípio da sobreposição) *Considere a equação diferencial linear homogénea*

$$y'' - y' - 2y = 0. \tag{3.25}$$

A função $y_1 = e^{-x}$ é uma solução particular de (3.25) já que, substituindo em (3.25) y por e^{-x}, vem

$$(e^{-x})'' - (e^{-x})' - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} + e^{-x} - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0,$$

ou seja, obtém-se uma identidade.
É fácil, também, verificar que $y_2 = e^{2x}$ é uma outra solução particular de (3.25). Assim, sendo y_1 e y_2 duas soluções particulares de (3.25), pelo Princípio da sobreposição, a função $y_3 = 5e^{-x} - e^{2x}$ é, também, uma solução particular de (3.25).

Propriedade 3.2 *A solução geral de uma equação diferencial linear não homogénea da forma (3.24) é dada por*

$$y = y_p + y_H \ ,$$

onde y_p é uma solução particular da equação linear não homogénea (3.24) e y_H é a solução geral da equação linear homogénea associada $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$.

Exemplo 3.3.2 (Aplicação Propriedade 3.2) *Considere a equação diferencial linear não homogénea*

$$y'' + 3y' = 10 \cos x \, . \tag{3.26}$$

Sabendo que $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, é a solução geral da equação diferencial homogénea $y'' + 3y' = 0$ e que a função $y_p = 3 \sin x - \cos x$ é uma solução particular de (3.26), pela Propriedade 3.2, conclui-se que a solução geral de (3.26) é

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + 3 \sin x - \cos x \, , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3.3.1 Equação diferencial linear homogénea com coeficientes constantes

A equação diferencial na forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

chama-se **equação diferencial linear homogénea com coeficientes constantes**.

Para resolver uma equação diferencial na forma (3.27), comece por construir a sua **equação característica**[4],

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \, , \tag{3.28}$$

[4] A equação característica da equação diferencial (3.27) é uma equação na incógnita λ que resulta de (3.27) quando se substitui a derivada $y^{(i)}$ por λ^i, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. (Note que $y^{(0)} := y$, pelo que a y em (3.27) corresponde $\lambda^0 = 1$ na equação característica.)

e por encontrar todas as raízes (reais e/ou complexas) dessa equação característica construída.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ as raízes de (3.28). Pode ser demonstrado[12] que a solução geral da equação (3.27) é dada pela soma de termos correspondentes às raízes distintas $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, $k \leq n$, do seguinte modo:

- a cada *raiz real simples* λ_i corresponde um termo na forma
$$C_i e^{\lambda_i x};$$
- a cada *raiz real* λ_l *de multiplicidade* m, $m > 1$, corresponde uma soma de m termos na forma
$$(C_{l_1} + C_{l_2}x + C_{l_3}x^2 + \cdots + C_{l_m}x^{m-1})\ e^{\lambda_l x};$$
- a cada par de *raízes complexas conjugadas simples*, $\lambda_s^+ = \alpha_s + i\beta_s$ e $\lambda_s^- = \alpha_s - i\beta_s$, corresponde uma soma de dois termos na forma
$$C_{s_1} e^{\alpha_s x}\cos(\beta_s x) + C_{s_2} e^{\alpha_s x}\sin(\beta_s x);$$
- a cada par de *raízes complexas conjugadas de multiplicidade* m, $m > 1$, $\lambda_t^+ = \alpha_t + i\beta_t$ e $\lambda_t^- = \alpha_t - i\beta_t$, corresponde uma soma de $2m$ termos na forma
$$(A_{t_1} + A_{t_2}x + \cdots + A_{t_m}x^{m-1})e^{\alpha_t x}\cos(\beta_t x) + (B_{t_1} + B_{t_2}x + \cdots + B_{t_m}x^{m-1})e^{\alpha_t x}\sin(\beta_t x)\ .$$

As constantes $C_i, C_{l_j}, C_{s_1}, C_{s_2}, A_{t_j}, B_{t_j} \in \mathbb{R}$, com $i = 1, ..., k$ e $j = 1, 2, ..., m$, são as possíveis constantes arbitrárias que devem estar presentes, em número total de n, na solução geral da equação diferencial linear homogénea de ordem n.

Exemplo 3.3.3 (Resolução de uma equação diferencial na forma (3.27) com equação característica com raízes reais simples) *A equação diferencial*

$$3y'' + y' - 2y = 0 \tag{3.29}$$

é uma equação diferencial linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes. A sua equação característica é
$$3\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Resolvendo-a, tem-se

$$3\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm 5}{6},$$

donde as raízes da equação característica (reais simples) são

$$\lambda_1 = -1 \quad e \quad \lambda_2 = \frac{2}{3}\,.$$

De acordo com o procedimento descrito acima, à raiz $\lambda_1 = -1$ *corresponde o termo* $C_1 e^{-x}$ *e à raiz* $\lambda_2 = \frac{2}{3}$ *corresponde o termo* $C_2 e^{\frac{2}{3}x}$. *Consequentemente, a solução geral da equação diferencial (3.29) é*
$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2/3x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.3.4 (Resolução de uma equação diferencial na forma (3.27) com equação característica com raízes reais de multiplicidade $m > 1$**)** *A equação diferencial*

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0$$

é uma equação diferencial linear homogénea com coeficientes constantes cuja equação característica é

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0.$$

Resolva-se esta equação de terceiro grau. Como,

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda(\lambda - 2)^2 = 0,$$

facilmente se deduz que as raízes dessa equação característica são

$$\lambda_1 = 0 \textit{ (raiz simples) } \text{ e } \lambda_2 = 2 \textit{ (raiz dupla).}$$

À raiz simples $\lambda_1 = 0$ *corresponde o termo* $C_1 e^{0\cdot x} = C_1$ *e à raiz dupla* $\lambda_2 = 2$ *corresponde a soma de dois termos* $C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}$*. Assim, a solução geral da equação diferencial dada é*

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.3.5 (Resolução de uma equação diferencial na forma (3.27) com equação característica com raízes complexas conjugadas simples) *Considere a equação diferencial linear homogénea*

$$y'' + 4y' + 29y = 0. \tag{3.30}$$

A sua equação característica, $\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0$*, tem duas raízes complexas conjugadas simples,* $\lambda_1^+ = -2 + 5i$ *e* $\lambda_1^- = -2 - 5i$*. Logo, a solução geral de (3.30) é*

$$y = C_1 e^{-2x}\cos(5x) + C_2 e^{-2x}\sin(5x)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.3.6 (Resolução de uma equação diferencial na forma (3.27) com equação característica com raízes reais e complexas conjugadas) *A equação diferencial linear homogénea*

$$y^{(4)} + y'' = 0 \tag{3.31}$$

tem como equação característica associada $\lambda^4 + \lambda^2 = 0$*. Uma vez que* $\lambda^4 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 + 1)$*, conclui-se que as raízes desta equação característica são*

$$\lambda_1 = 0 \textit{ (raiz dupla)}\,, \quad \lambda_2^{\pm} = \pm i \textit{ (duas raízes complexas conjugadas).}$$

À raiz dupla real $\lambda_1 = 0$ *corresponde o termo* $C_1 + C_2 x$ *e ao par de raízes complexas simples* $\lambda_2^{\pm}$ *corresponde a soma de dois termos* $C_3 \cos x + C_4 \sin x$*. Consequentemente, a solução geral da equação diferencial dada (3.31) é*

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

3.3.2 Equação diferencial linear não homogénea com coeficientes constantes

Uma equação diferencial na forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{3.32}$$

com f função não nula, chama-se equação diferencial linear não homogénea com coeficientes constantes.
Para resolver (3.32) pode ser aplicado o chamado **método de Lagrange**, também conhecido por *método de variação das constantes arbitrárias* [18].

Método de Lagrange
Primeiro, resolve-se a equação diferencial linear homogénea associada à equação (3.32) e dada por

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \ .$$

Seja $y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$ a sua solução geral.
A seguir, admita que as n constantes arbitrárias, $C_1, C_2, \ldots, C_n$, são funções de x, i.e., $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, $\ldots, C_n = C_n(x)$. Procure, agora, a solução geral da equação diferencial não homogénea (3.32) na forma

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \cdots + C_n(x) y_n \ . \tag{3.33}$$

De acordo com método de Lagrange, as funções $C_i(x), i = 1, 2, ..., n$, são procuradas de modo que as suas derivadas satisfaçam o seguinte sistema de n equações lineares nas n incógnitas $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} C_1'(x) y_1 & + & ... & + & C_n'(x) y_n & = & 0 \\ C_1'(x) y_1' & + & ... & + & C_n'(x) y_n' & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)} & + & ... & + & C_n'(x) y_n^{(n-2)} & = & 0 \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} & + & ... & + & C_n'(x) y_n^{(n-1)} & = & f(x) \ . \end{array} \right.$$

Resolvendo este sistema[5] e integrando as soluções encontradas $C_i'(x), i = 1, 2, ..., n$, obtêm-se as expressões

$$C_i(x) = \int C_i'(x) dx + \tilde{C}_i \ , \quad \tilde{C}_i \in \mathbb{R} \ , \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Por substituição, em (3.33), das expressões obtidas, resulta a solução geral da equação linear não homogénea (3.32)

$$y = \left(\int C_1'(x) dx + \tilde{C}_1 \right) y_1 + \left(\int C_2'(x) dx + \tilde{C}_2 \right) y_2 + \ldots + \left(\int C_n'(x) dx + \tilde{C}_n \right) y_n. \tag{3.34}$$

Nota. A solução geral (3.34) pode ser escrita na forma

$$y \ = \ \underbrace{\tilde{C}_1(x) y_1 + \tilde{C}_2(x) y_2 + \ldots + \tilde{C}_n(x) y_n}_{y_P} + \underbrace{\tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + \ldots + \tilde{C}_n y_n}_{y_H} , \tag{3.35}$$

[5]Para resolver o sistema de equações lineares utiliza-se qualquer um dos métodos conhecidos da Álgebra Linear como, por exemplo, o método de eliminação de Gauss, o método de Crámer, etc. [ver bibliografia específica].

onde $\tilde{C}_i(x)$ designa uma primitiva de $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Observe, também, que em (3.35)

$$y_p = \tilde{C}_1(x)y_1 + \tilde{C}_2(x)y_2 + \ldots + \tilde{C}_n(x)y_n$$

é uma solução particular da equação linear não homogénea (3.32) da forma (3.33) e

$$y_H = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + \ldots + \tilde{C}_n y_n$$

é a solução geral da equação linear homogénea associada à equação (3.32). Assim, a solução geral na forma (3.35) está de acordo com a Propriedade 3.2.

Exemplo 3.3.7 (Resolução de uma equação diferencial da forma (3.32)) *A equação diferencial*

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x} \tag{3.36}$$

é linear não homogénea com coeficientes constantes. Para resolvê-la determine-se, em primeiro lugar, a solução geral da equação diferencial linear homogénea associada

$$y'' - 6y' + 9y = 0\,. \tag{3.37}$$

A equação característica correspondente a esta última equação, $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, tem uma raiz dupla, $\lambda_1 = 3$, donde, a solução geral de (3.37) é

$$y = (C_1 + xC_2)e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Determine agora a solução geral de (3.36) pelo método de Lagrange. Tome, então,

$$y = C_1(x)e^{3x} + xC_2(x)e^{3x}\,,$$

com $C_1 = C_1(x)$ e $C_2 = C_2(x)$ funções a determinar de modo que

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{3x} + xC_2'(x)e^{3x} = 0 \\ C_1'(x)3e^{3x} + C_2'(x)(e^{3x} + 3xe^{3x}) = \frac{e^{3x}}{x}. \end{cases} \tag{3.38}$$

Resolvendo o sistema (3.38) resulta

$$\begin{cases} C_1'(x) + xC_2'(x) = 0 \\ 3C_1'(x) + C_2'(x) + 3xC_2'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -xC_2'(x) \\ C_2'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -1 \\ C_2'(x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Por conseguinte,

$$\begin{cases} C_1(x) = -x + K_1 \\ C_2(x) = \ln|x| + K_2\,, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Do exposto conclui-se que a solução geral da equação diferencial não homogénea (3.36) é

$$y = e^{3x}(-x + K_1 + x(\ln|x| + K_2))\,, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R},$$

ou, expressa doutro modo,

$$y = \underbrace{e^{3x}K_1 + xe^{3x}K_2}_{\substack{\textit{sol. geral da} \\ \textit{eq. homog. } (3.37)}} \; \underbrace{-xe^{3x} + xe^{3x}\ln|x|}_{\substack{\textit{uma sol.} \\ \textit{part. de } (3.36)}}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}\,.$$

3.3.3 Equação de Euler

Uma equação diferencial na forma

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \ , \tag{3.39}$$

onde todos os coeficientes $a_i, i = 1, 2, ..., n$, são constantes, chama-se **equação de Euler**.

Para resolver este tipo de equações diferenciais, efetue a mudança de variável $t = \ln |x|$. Daqui tem-se $x = e^t$, se $x > 0$, ou $x = -e^t$, se $x < 0$.
Seja $x > 0$. Nesse caso, $\frac{dx}{dt} = e^t$ e

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, & (3.40) \\ y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(e^{-t}\frac{dy}{dt})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{-t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})}{e^t} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right), & (3.41) \\ \cdots & , \end{aligned}$$

donde a equação (3.39) pode ser reduzida a uma equação linear homogénea com coeficientes constantes, em ordem à função desconhecida $y_t = y(t)$ e às suas derivadas $y_t' = \frac{dy}{dt}$, na forma

$$b_0 y_t^{(n)} + b_1 y_t^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} y_t' + b_n y = 0. \tag{3.42}$$

Se $x < 0$, o resultado da substituição vai conduzir novamente à equação (3.42).
Resolvendo esta equação e voltando à variável inicial através da substituição $t = \ln |x|$, obtém-se a solução geral da equação (3.39).

Exemplo 3.3.8 (Resolução de uma equação de Euler) *Considere $x > 0$. A equação*

$$x^3 y''' - x y' - 3y = 0 \tag{3.43}$$

é da forma (3.39) com $n = 3$ e $a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = -1$ e $a_3 = -3$.
Efetuando a mudança de variável $t = \ln x$, resulta

$$\begin{aligned} y' &= e^{-t}\frac{dy}{dt}, \\ y'' &= e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right), \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}))}{e^t} = \frac{-2e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) + e^{-2t}(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2})}{e^t} \\ &= -2e^{-3t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2}\right) = e^{-3t}\left(-2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + \frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2}\right) \\ &= e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) . \end{aligned}$$

Substituindo as expressões obtidas para as derivadas na equação inicial, obtém-se:

$$x^3 e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) - x e^{-t}\frac{dy}{dt} - 3y = 0.$$

Tome $t = \ln x$. Consequentemente, $e^{-t} = \frac{1}{x}$ e $e^{-3t} = \frac{1}{x^3}$. Passando à função desconhecida y_t, que é a função y anterior mas agora em função de t, i.e., $y_t = y(t)$, pode reescrever-se a última equação diferencial na forma

$$y_t''' - 3y_t'' + y_t' - 3y_t = 0,$$

que é uma equação diferencial linear homogénea de terceira ordem com coeficientes constantes. Resolvendo esta equação, obtém-se (verifique)

$$y_t = C_1 e^{3t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t,\ \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável x, $x = e^t$ (ou seja, $t = \ln x$), obtém-se a solução geral da equação diferencial inicial

$$y = C_1 x^3 + C_2 \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x),\ \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.3.9 (Resolução de uma equação de Euler) *A equação*

$$x^2 y'' + xy' = 0 \tag{3.44}$$

é da forma (3.39) com $n = 2$ e $a_2 = 0$. Logo, $x = 0$ é uma solução de (3.44).
Tendo em conta (3.40) e (3.41), a mudança de variável $x = e^t$ em (3.44) resulta

$$e^{2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t} + e^t\frac{dy}{dt}e^{-t} = 0\,.$$

Simplificando obtém-se a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Resolvendo esta equação, vem

$$y_t'' = 0 \Leftrightarrow y_t' = C_1 \Leftrightarrow y_t = C_1 t + C_2,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável x ($t = \ln|x|$), obtém-se a solução de (3.44)

$$y = C_1 \ln|x| + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad e \quad x = 0.$$

3.4 Exercícios

1. Integre as seguintes equações diferenciais.

   (a) $y'' = \frac{1}{1+x^2}$

   (b) $y'' = x + \sin x$;

   (c) $xy^{(4)} = 1$;

   (d) $x^2 y'' = (y')^2$;

   (e) $y'' + y' \tan x = \sin 2x$;

   (f) $xy'' - y' = e^x x^2$;

(g) $xy'' - y' - x\sin\left(\frac{y'}{x}\right) = 0$;

(h) $(1+e^x)y'' + y' = 0$;

(i) $x^2 y''' = (y'')^2$;

(j) $xy''' + y'' - x - 1 = 0$.

2. Resolva os seguintes problemas de Cauchy.

(a) $y'' = xe^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;

(b) $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 2$.

3. Encontre a equação diferencial linear de 2.ª ordem com coeficientes constantes que tem como soluções particulares as seguintes funções:

(a) $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-x}$;

(b) $y_1 = e^{-x/2}\cos x$ e $y_2 = e^{-x/2}\sin x$.

4. Construa uma equação diferencial linear homogénea com coeficientes constantes e escreva a sua solução geral, sabendo que as raízes λ_i, da equação característica associada à equação diferencial, são:

(a) $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -2$;

(b) $\lambda_1 = 1$ raiz dupla;

(c) $\lambda_1 = 3+2i, \quad \lambda_2 = 3-2i$;

(d) $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 4$ raiz dupla;

(e) $\lambda_1 = 2$ raiz tripla.

5. Escreva a equação diferencial linear homogénea cuja solução geral é a família de curvas dada.

(a) $y = Ce^{3x}$;

(b) $y = C_1 + C_2 e^x + C_3\cos(5x) + C_4\sin(5x)$;

(c) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$;

(d) $y = e^{2x}\left(C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)\right)$.

6. Encontre o integral geral da equação diferencial dada.

(a) $y'' - 2y' - 2y = 0$;

(b) $y'' + 6y' + 13y = 0$;

(c) $3y'' - 2y' - 8y = 0$;

(d) $4y'' + 4y' + y = 0$;

(e) $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$;

(f) $y^{(4)} - y'' = 0$;

(g) $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0$;

(h) $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$.

7. Determine a solução particular da equação linear homogénea que satisfaz as condições iniciais dadas.

   (a) $y'' - 5y' + 4y = 0$, $\quad y(0) = y'(0) = 1$;
   (b) $y'' - 2y' + y = 0$, $\quad y(2) = 1,\ y'(2) = -2$;
   (c) $y''' - y' = 0$, $\quad y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1$.

8. Calcule, pelo método de variação das constantes, a solução geral das seguintes equações diferenciais lineares não homogéneas.

   (a) $y'' - 5y' + 6y = 13\sin(3x)$;
   (b) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$;
   (c) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$;
   (d) $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$;
   (e) $y'' - y = e^{-x}$;
   (f) $y'' - 7y' = x - 1$.

9. Resolva o problema de Cauchy dado.

   (a) $y'' - 2y' = 2e^x$; $\quad y(1) = -1$; $y'(1) = 0$;
   (b) $y'' + 4y = x$; $\quad y(0) = 1$; $y'(0) = \frac{\pi}{2}$;
   (c) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$; $\quad y(\pi) = \pi e^\pi$; $y'(\pi) = e^\pi$.

10. Resolva as seguintes equações de Euler.

    (a) $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$;
    (b) $x^2y'' + xy' + y = 0$;
    (c) $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$;
    (d) $x^2y'' - 6y = 12\ln x$;
    (e) $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$;
    (f) $x^2y''' - 2y' = 0$.

3.5 Soluções

1. (a) $y = C_1x + x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} + C_2$, $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;
   (b) $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2$, $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;
   (c) $y = \frac{x^3}{6}\ln|x| + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$, $\quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$;
   (d) $C_1^2 y = C_1x - \ln|C_1x + 1| + C_2$, $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, e $y = C$, $\quad C \in \mathbb{R}$;
   (e) $y = C_1\sin x + C_2 + x + \frac{1}{2}\sin(2x)$, $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;
   (f) $y = C_1x^2 + C_2 + e^x(x-1)$, $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;
   (g) $C_1^2 y = (C_1^2x^2 + 1)\arctan(C_1x) - C_1x + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, e $y = \frac{k\pi x^2}{2} + C$, $k \in \mathbb{Z}, C \in \mathbb{R}$;
   (h) $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$, $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

(i) $y = \frac{C_1}{2}x^2 - C_1^2(x + C_1)\ln|x + C_1| + C_2x + C_3\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$;

(j) $y = \frac{1}{12}(x^3 + 6x^2) + C_1\ x\ \ln|x| + C_2x + C_3\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

2. (a) $y = (x-2)e^x + x + 3$;

   (b) $y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$.

3. (a) $y'' - y = 0$;

   (b) $4y'' + 4y' + 5y = 0$.

4. (a) $y'' - y' - 6y = 0,\ y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

   (b) $y'' - 2y' + y = 0,\ y = C_1e^x + xC_2e^x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

   (c) $y'' - 6y' + 13y = 0,\ y = e^{3x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x))\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

   (d) $y''' - 8y'' + 16y' = 0,\ y = C_1 + C_2e^{4x} + xC_3e^{4x}\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$;

   (e) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0,\ y = e^{2x}(C_1 + xC_2 + x^2C_3)\,, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

5. (a) $y' - 3y = 0$;

   (b) $y^{(4)} - y''' + 25y'' - 25y' = 0$;

   (c) $y'' - 4y' + 4y = 0$;

   (d) $y'' - 4y' + 13y = 0$.

6. (a) $y = e^x(C_1\cos(\sqrt{3}x) + C_2\sin(\sqrt{3}x))\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

   (b) $y = e^{-3x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x))\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

   (c) $y = C_1e^{-\frac{4}{3}x} + C_2e^{2x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

   (d) $y = e^{-x/2}(C_1 + C_2x)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

   (e) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos(\sqrt{3}x) + C_4\sin(\sqrt{3}x)\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$;

   (f) $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$;

   (g) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + (C_4 + C_5x)e^{3x}\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}$;

   (h) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6x)\,, \quad C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \in \mathbb{R}$.

7. (a) $y = e^x$;

   (b) $y = (4 - 3x)e^{x-2}$;

   (c) $y = 2 + e^{-x}$.

8. (a) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{6}\sin(3x) + \frac{5}{6}\cos(3x)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

   (b) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^{3x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

   (c) $y = -\cos(2x)\ln|\sin x| + \cos^2 x - x\sin(2x) + C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

   (d) $y = C_1 + C_2e^{4x} - \frac{1}{160}\sin(8x) - \frac{1}{80}\cos(8x) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

   (e) $y = C_1e^{-x} + C_2e^x - \frac{1}{2}xe^{-x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

   (f) $y = C_1 + C_2e^{7x} - \frac{1}{14}x^2 + \frac{6}{49}x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

9. (a) $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$;

   (b) $y = \frac{x}{4} + \cos(2x) + (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8})\ \sin(2x)$;

   (c) $y = e^x((2x - \pi - 1)\sin x - \pi\ \cos x)$.

10. (a) $y = x^2(C_1 \cos(\ln|x|) + C_2 \sin(\ln|x|) + 3), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$

(b) $y = C_1 \cos(\ln|x|) + C_2 \sin(\ln|x|), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$

(c) $y = C_1 \cos(2\ln|x|) + C_2 \sin(2\ln|x|) + 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$

(d) $y = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2\ln x + \frac{1}{3}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$

(e) $y = C_1 + C_2 x^2 + C_3 x^4, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R};$

(f) $y = C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 x^3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Capítulo 4

Sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes

4.1 Noções básicas

Um **sistema de n equações diferenciais lineares de 1.ª ordem com coeficientes constantes** é um sistema constituído por n equações diferenciais na forma[1]

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} y_1' & = & a_{11}\,y_1 & + & a_{12}\,y_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,y_n & + & f_1(x) \\ y_2' & = & a_{21}\,y_1 & + & a_{22}\,y_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\,y_n & + & f_2(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ y_n' & = & a_{n1}\,y_1 & + & a_{n2}\,y_2 & + & \cdots & + & a_{nn}\,y_n & + & f_n(x)\ , \end{array}\right. \tag{4.1}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$, são os coeficientes do sistema, x é a variável real independente, f_i, $i = 1, \ldots, n$, são n funções reais de variável x, e $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $\ldots$, $y_n = y_n(x)$ são funções desconhecidas com derivadas $y_1' = \frac{dy_1}{dx}$, $y_2' = \frac{dy_2}{dx}$, $\ldots$, $y_n' = \frac{dy_n}{dx}$, respetivamente.

Se $f_k \equiv 0$, para todo o $k = 1, 2, \ldots, n$, o sistema (4.1) diz-se **homogéneo**; caso contrário, diz-se **não homogéneo** (ou completo).

Uma **solução** do sistema (4.1) é formada por n funções,

$$\left\{\begin{array}{ccc} y_1 & = & y_1(x) \\ y_2 & = & y_2(x) \\ & \vdots & \\ y_n & = & y_n(x)\ , \end{array}\right.$$

que, quando substituídas conjuntamente com as suas derivadas em (4.1), transformam todas as n equações do sistema em identidades.

[1] Aqui apenas são considerados os sistemas de n equações diferenciais com n funções desconhecidas.

O **integral geral** do sistema (4.1) é a família das soluções deste sistema na forma

$$\begin{cases} y_1 &= \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ \vdots & \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \ , \end{cases}$$

sendo $C_1, C_2, \ldots, C_n$ constantes reais arbitrárias.

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, o **problema de Cauchy** para o sistema (4.1) de n equações diferenciais lineares de 1.ª ordem consiste em encontrar a solução deste sistema que satisfaz n *condições iniciais* da forma

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0, \quad \cdots, \quad y_n(x_0) = y_n^0, \tag{4.2}$$

onde $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ são números reais.

4.2 Alguns métodos de resolução de sistemas de equações diferenciais

Existem vários métodos de resolução de sistemas de equações diferenciais homogéneos e não homogéneos. Aqui serão descritos apenas os métodos mais simples: *resolução imediata* e *método por eliminação.* [2]

4.2.1 Resolução imediata

Quando as equações do sistema (4.1) são independentes entre si, i.e., cada uma delas é uma equação diferencial em termos de uma só função desconhecida, distinta de equação para equação, a solução geral do sistema encontra-se integrando separadamente cada uma das equações do sistema.

Exemplo 4.2.1 *Seja o sistema*

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \cos x \\ \frac{dy_2}{dx} = y_2 \ . \end{cases}$$

As duas equações que constituem o sistema são independentes entre si, sendo a primeira equação na variável dependente $y_1 = y_1(x)$ e a segunda na variável dependente $y_2 = y_2(x)$; x é a variável independente. Resolvendo separadamente cada uma dessas duas equações diferenciais, obtém-se a solução geral do sistema

$$\begin{cases} y_1 &= \sin x + C_1 \\ y_2 &= C_2 e^x \end{cases} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

[2] Para estudo de outros métodos de resolução de sistemas de equações diferenciais, consulte, por exemplo, [8].

4.2.2 Método por eliminação

A ideia base do método por eliminação, para resolver um sistema de equações diferenciais lineares do tipo (4.1), com $n \geq 2$, consiste em reduzir o sistema a uma única equação diferencial linear de ordem n, em relação a uma das funções desconhecidas. Tal equação constrói-se derivando $n-1$ vezes uma das equações do sistema (4.1) e eliminando, sucessivamente, as restantes $n-1$ funções desconhecidas e as suas derivadas na equação diferencial em construção.[3]

A. Método por eliminação: sistema 2×2

Na resolução de sistemas 2×2, o método consiste em reduzir o sistema a uma única equação diferencial linear de segunda ordem dependente apenas de uma função desconhecida.
Seja o sistema na forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & a_{11}\, y + a_{12}\, z + f_1(x) \\ z' & = & a_{21}\, y + a_{22}\, z + f_2(x)\ , \end{array} \right. \tag{4.3}$$

com $y = y(x)$ e $z = z(x)$.
Para resolver este sistema, pelo método por eliminação, comece por referenciar, por exemplo, a primeira[4] equação do sistema (4.3),

$$y' = a_{11}\; y + a_{12}\; z + f_1(x). \qquad (eq1)$$

Derivando a equação (eq1) em ordem a x, obtém-se $y'' = a_{11}\; y' + a_{12}\; z' + f_1'(x)$. Substituindo, na equação obtida, a derivada z' pela sua expressão dada na segunda equação do sistema (4.3), vem

$$y'' = a_{11}y' + a_{12}a_{21}y + a_{12}a_{22}z + a_{12}f_2(x) + f_1'(x). \qquad (eq2)$$

Da equação (eq1) resulta $z = \frac{1}{a_{12}}(y' - a_{11}y - f_1(x))$, pelo que substituíndo na equação (eq2) se obtém

$$y'' \;=\; (a_{11} + a_{22})y' + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})y - a_{22}f_1(x) + a_{12}f_2(x) + f_1'(x),$$

que é uma equação diferencial linear de segunda ordem, em termos da função desconhecida $y = y(x)$. Resolvendo esta equação resulta a expressão geral da função y, $y = \varphi_1(x, C_1, C_2)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Substituindo a função encontrada, y, e a sua derivada na equação (eq1), vem a expressão geral da segunda função desconhecida, z, na forma $z = \varphi_2(x, C_1, C_2)$.
A solução geral do sistema (4.3) é

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \varphi_1(x, C_1, C_2) \\ z & = & \varphi_2(x, C_1, C_2)\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Exemplo 4.2.2 (Resolução de um sistema 2×2) *Considere o sistema de equações diferenciais lineares homogéneas*

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = z \\ z' = -y\ . \end{array} \right.$$

[3] Este método é aplicável sempre que for possível construir tal equação diferencial linear de ordem n.

[4] É evidente que a ordem das equações no sistema é arbitrária.

Trata-se de um sistema de duas equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e em termos de duas funções desconhecidas $y = y(x)$ e $z = z(x)$.
A primeira equação do sistema é

$$y' = z. \qquad (eq1)$$

Derivando (eq1), em ordem a x, vem

$$y'' = z'.$$

Tendo em conta a segunda equação do sistema inicial, vem

$$y'' = -y, \qquad (eq2)$$

a qual já é uma equação diferencial linear homogénea de 2.ª ordem em y. A sua solução geral é $y = C_1 \ \cos x + C_2 \ \sin x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (verifique), donde $y' = -C_1 \ \sin x + C_2 \ \cos x$. Substituindo a expressão obtida para y' na equação (eq1), obtém-se $z = -C_1 \ \sin x + C_2 \ \cos x$.
Assim, a solução geral do sistema inicial é

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & C_1 \ \cos x + C_2 \ \sin x \\ z & = & -C_1 \ \sin x + C_2 \ \cos x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Exemplo 4.2.3 (Resolução de um sistema 2×2) *Considere o sistema de duas equações diferenciais lineares não homogéneas*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = -9x + 6y + t. \end{array} \right.$$

Aqui as funções desconhecidas são $y = y(t)$ e $x = x(t)$ e a variável independente é t.
A primeira equação do sistema é

$$x' = y. \qquad (eq1)$$

Derivando (eq1) em ordem a t, obtém-se $x'' = y'$. Substituindo, nesta equação, a expressão de y' dada pela segunda equação do sistema inicial, vem uma equação diferencial linear não homogénea de 2.ª ordem

$$x'' - 6x' + 9x = t. \qquad (eq2)$$

A sua solução geral é $x = e^{3t}(C_1 + tC_2) + \frac{1}{9}t + \frac{2}{27}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (verifique), donde $x' = e^{3t}(3C_1 + C_2(3t+1)) + \frac{1}{9}$ e, tendo em conta a equação (eq1), também se obtém y.
Assim, a solução geral do sistema inicial é

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & e^{3t}(C_1 + tC_2) + \frac{1}{9}t + \frac{2}{27} \\ y & = & e^{3t}(3C_1 + C_2(3t+1)) + \frac{1}{9}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Exemplo 4.2.4 (Resolução de um sistema 2×2) *Considere o sistema de duas equações diferenciais lineares não homogéneas*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y - 5\cos t \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{array} \right.$$

Neste sistema a variável independente é t e as funções desconhecidas são $x = x(t)$ e $y = y(t)$. O sistema dada pode ser reescrito, de forma equivalente, trocando a ordem das equações do sistema ficando na forma

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2x + y \\ \frac{dx}{dt} = y - 5\cos t. \end{cases} \tag{4.4}$$

Da primeira equação do último sistema, obtém-se $2x = \frac{dy}{dt} - y$, i.e.,

$$x = \frac{1}{2}\frac{dy}{dt} - \frac{y}{2}. \qquad (eq1)$$

Substituindo a derivada $\frac{dx}{dt}$ obtida da (eq1) na segunda equação do sistema (4.4), obtém-se a seguinte sequência de equivalências

$$\frac{dx}{dt} = y - 5\cos t \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{dy}{dt} - \frac{y}{2}\right) = y - 5\cos t \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{dy}{dt} = y - 5\cos t \;\Leftrightarrow\; \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = 2y - 10\cos t \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; y'' - y' - 2y = -10\cos t. \qquad (eq2)$$

A equação (eq 2) é uma equação diferencial não homogénea da segunda ordem, a qual é pode ser resolvida usando um dos métodos descritos no Capítulo 2.

Resolução da equação (eq 2).
Passo 1. *Resolver equação homogénea correspondente a (eq1):*

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

A equação característica correspondente a esta equação homogénea é

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

As suas raízes são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Logo, a solução da equação diferencial homogénea é dada por

$$y_H = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t},\; C_1,\; C_2 \in \mathbb{R}.$$

Passo 2. *Procurar a solução particular da equação completa (eq2) na forma*

$$y_p = A\cos t + B\sin t.$$

Derivando a última expressão, obtém-se

$$y_p' = (A\cos t + B\sin t)' = -A\sin t + B\cos t;$$

$$y_p'' = (-A\sin t + B\cos t)' = -A\cos t - B\sin t.$$

Substituindo em (eq2) as expressões obtidas para y_p e as suas derivadas, obtém-se

$$(-A\cos t - B\sin t) - (-A\sin t + B\cos t) - 2(A\cos t + B\sin t) = -10\cos t,$$

ou, de forma equivalente,

$$(-3A - B)\cos t + (A - 3B)\sin t = -10\cos t.$$

Igualando os coeficientes das funções trigonométricas $\sin t$ *e* $\cos t$ *m ambos os membros da equação obtida, obtém-se o seguinte sistema em termos das incógnitas* A *e* B*:*

$$\begin{cases} -3A - B = -10 \\ A - 3B = 0\,. \end{cases}$$

Resolvendo-o resulta que $A = 3$ *e* $B = 1$.
Assim, a solução particular da equação (eq2) é

$$y_p = 3\cos t + \sin t.$$

Passo 3. *Uma vez que a solução geral duma equação linear não homogénea é a soma da solução geral da equação homogénea correspondente e de uma solução particular, conclui-se que a solução da equação (eq2) é*

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 3\cos t + \sin,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tendo sido encontrada a solução y *do sistema (4.4), resta determinar a solução* x*. Ora, da primeira equação do sistema (4.4), é evidente que*

$$x = \frac{1}{2}y' - y.$$

Assim, substituindo nesta equação a função encontrada y *e a sua derivada, dada por*

$$y' = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - 3\sin t + \cos t,$$

resulta que

$$x = \frac{1}{2}(-C_1 e^{-1} + 2C_2 e^{2t} - 3\sin t + \cos t) - \frac{1}{2}(C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 3\cos t + \sin t).$$

Simplificando, vem

$$x = \frac{1}{2}(-2C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - 4\sin t - 2\cos t) = -C_1 e^{-t} + \frac{1}{2}C_2 e^{2t} - 2\sin t - \cos t.$$

Assim, a solução do sistema (4.4) consiste de duas funções

$$x = -C_1 e^{-t} + \frac{1}{2}C_2 e^{2t} - 2\sin t - \cos t,\ \ y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 3\cos t + \sin t,\ \ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

B. Método por eliminação: caso geral

No caso geral, para reduzir o sistema (4.1) a uma equação diferencial linear de ordem n, em relação à função desconhecida y_1, executam-se os seguintes passos.

- Escolha-se uma das equações do sistema (4.1), por exemplo, a primeira. Esta será referenciada por (eq1),

$$y_1' = a_{11}\ y_1 + a_{12}\ y_2 + \cdots + a_{1n}\ y_n + f_1(x). \qquad (eq1)$$

- Derive-se (eq1) obtendo-se a equação $y_1'' = a_{11}\ y_1' + a_{12}\ y_2' + \cdots + a_{in}\ y_n' + f_1'(x)$. Substituindo nesta as derivadas $y_2', \cdots, y_n'$ pelas suas expressões dadas nas $n-1$ restantes equações do sistema (4.1), obtém-se uma nova equação

$$y_1'' = h_2(x, y_1, y_1', y_2, y_3, \ldots, y_n). \qquad (eq2)$$

- A seguir deriva-se a equação (eq2). Eliminam-se $y_2', \cdots, y_n'$, utilizando as $n-1$ últimas equações do sistema inicial, donde resulta

$$y_1''' = h_3(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_3, \ldots, y_n). \qquad (eq3)$$

- Repete-se este último procedimento sucesivamente até se derivarem n as equações diferenciais:

$$\text{(eq1), (eq2),..., (eq}n\text{)}$$

onde a equação (eq$i$) é da forma

$$y_1^{(i)} = h_i(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(i-1)}, y_2, y_3, \ldots, y_n). \qquad (eq\mathrm{i})$$

À custa das $n-1$ primeiras equações, (eq1), (eq2),...,(eq($n-1$)), determinam-se as expressões para $y_2, \cdots, y_n$ em termos de $y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$. Substituindo estas expressões na equação (eq$n$), eliminam-se $y_2, \cdots, y_n$ obtendo-se uma equação diferencial linear de ordem n em termos apenas da função desconhecida y_1. Resolvendo essa equação encontra-se a expressão geral para a função y_1. Conhecida a expressão para y_1 e, consequentemente, as expressões para as suas derivadas $y_1', y_1'', \cdots, y_1^{(n)}$, consegue-se obter as restantes funções desconhecidas $y_2, \cdots, y_n$, concluindo a resolução do sistema (4.1).

Exemplo 4.2.5 (Resolução de um sistema 3×3) *Considere o sistema de três equações diferenciais lineares homogéneas*

$$\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y. \end{cases} \qquad (4.5)$$

Neste sistema a variável independente é t e as funções desconhecidas são $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$.
Escolha-se a primeira equação do sistema,

$$x' = x - y + z. \qquad (eq1)$$

Por derivação, em ordem à variável t, desta equação e tendo em conta as duas últimas equações em (4.5), resulta

$$\begin{aligned} x'' = x' - y' + z' \quad &\Leftrightarrow \quad x'' = x' - (x + y - z) + (2x - y) \\ &\Leftrightarrow \quad x'' = x' + x - 2y + z. \qquad (eq2) \end{aligned}$$

A seguir, derivando a equação (eq2) e tendo em conta, novamente, as duas últimas equações do sistema (4.5), obtém-se

$$\begin{aligned} x''' = x'' + x' - 2y' + z' \quad &\Leftrightarrow \quad x''' = x'' + x' - 2(x+y-z) + (2x-y) \\ &\Leftrightarrow \quad x''' = x'' + x' - 3y + 2z. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Com base nas (eq1) e (eq2) determinam-se y e z em termos de x, x' e x'' do seguinte modo:

$$\left\{\begin{array}{l} (eq1) \\ (eq2) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x' = x - y + z \\ x'' = x' + x - 2y + z \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} z = x' - x + y \\ x'' = x' + x - 2y + x' - x + y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} z = x' - x + y \\ x'' = 2x' - y \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} z = x' - x + 2x' - x'' \\ y = 2x' - x'' \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} z = 3x' - x - x'' \\ y = 2x' - x''. \end{array}\right. \tag{4.7}$$

Substituindo, em (4.6), y e z pelas expressões encontradas em (4.7), obtém-se uma equação diferencial linear homogénea de 3.ª ordem com coeficientes constantes,

$$x''' = x'' + x' - 3(2x' - x'') + 2(3x' - x - x'').$$

Simplificando, tem-se

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = 0.$$

A solução geral da última equação diferencial é

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}\ , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \quad \textit{(verifique)}.$$

Calculando a primeira e a segunda derivadas da função x encontrada, e tendo em conta (4.7), pode, finalmente, escrever-se a solução geral do sistema inicial (4.5)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} \\ y &=& C_1 e^t - 3C_2 e^{-t} \\ z &=& C_1 e^t - 5C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}\ , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

4.3 Problema de Cauchy para sistemas de equações diferenciais lineares de 1.ª ordem

Seja um sistema de equações diferenciais lineares da 1.ª ordem na forma (4.1) com coeficientes constantes. Pode formular-se a seguinte condição suficiente de existência e unicidade de solução do problema de Cauchy para este sistema sujeito às condições iniciais (4.2) [11].

Teorema 4.1 (Existência e unicidade de solução do problema de Cauchy) *Seja o sistema de equações diferenciais lineares (4.1), sujeito às condições iniciais (4.2), e com as funções f_i, $i = 1, \ldots, n$, definidas num certo domínio $D \subset \mathbb{R}$ que contém o ponto x_0. Se existe $h > 0$ tal que, para todo $x \in]x_0 - h, x_0 + h[\subset D$, as funções f_i e as suas derivadas f_i' são contínuas então, em $]x_0 - h, x_0 + h[$, existe uma única solução do problema de Cauchy (4.1), (4.2).*

Para resolver um sistema de equações diferenciais lineares de 1.ª ordem com condições iniciais, resolve-se, primeiro, o sistema e, a seguir, substituem-se as condições iniciais na solução geral, calculando os valores particulares das constantes arbitrárias. A solução do problema de Cauchy obtém-se, substituindo, na solução geral do sistema, as constantes arbitrárias pelos seus valores então encontrados.

Exemplo 4.3.1 (Resolução de um problema de Cauchy) *Considere o seguinte problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y + 4z \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 5z\ , \qquad y(0) = 2\ ,\ z(0) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

O sistema dado consiste de duas equações diferenciais lineares homogéneas, com funções desconhecidas $y = y(x)$ e $z = z(x)$, sujeitas às condições iniciais $y = 2$ e $z = 0$, quando $x = 0$. De acordo com a notação considerada em (4.1), neste exemplo as funções são $f_1(x) = f_2(x) = 0$ e o sistema é homogéneo. As condições do Teorema 4.1 estão satisfeitas em qualquer vizinhança do ponto $x = 0$ e, portanto, numa vizinhança desse ponto, existirá uma única solução do problema de Cauchy.

Para resolver o problema de Cauchy (4.8), comece por derivar a primeira equação do sistema em ordem a x, resultando $\frac{d^2y}{dx} = 5\frac{dy}{dx} + 4\frac{dz}{dx}$. Substituindo, nesta última equação, as expressões para $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ do sistema (4.8), obtém-se

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5\frac{dy}{dx} + 4\frac{dz}{dx} = 5(5y + 4z) + 4(4y + 5z),$$

donde

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 41y + 40z. \tag{4.9}$$

Da primeira equação do sistema (4.8) resulta a seguinte expressão para z

$$z = \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx} - 5y\right). \tag{4.10}$$

Substituindo (4.10) na equação (4.9), vem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 41y + 10\left(\frac{dy}{dx} - 5y\right),$$

ou, de modo equivalente,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 9y = 0.$$

Esta última é uma equação diferencial linear homogénea de 2.ª ordem com coeficientes constantes. A sua solução é

$$y = C_1e^x + 9C_2e^{9x}\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \qquad \textit{(verifique).}$$

Substituindo a função y obtida e a sua derivada $\frac{dy}{dx} = C_1e^x + 9C_2e^{9x}$ na fórmula (4.10), obtém-se a expressão para a função desconhecida z,

$$z = \frac{1}{4}[C_1e^x + 9C_2e^{9x} - 5(C_1e^x + C_2e^{9x})] = -C_1e^x + C_2e^{9x}.$$

Assim, a solução geral do sistema é

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{9x} \\ z = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.11}$$

Para encontrar a solução do problema de Cauchy (4.8), procura-se a solução particular que satisfaz as condições iniciais desse problema. Tomando $x = 0,\ y = 2,\ z = 0$ *na solução geral (4.11) obtida, resulta*

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 0 = -C_1 + C_2, \end{cases}$$

donde $C_1 = 1$ *e* $C_2 = 1$.
Assim, a solução particular associada ao problema de Cauchy dado é

$$\begin{cases} y = e^x + e^{9x} \\ z = -e^x + e^{9x}\ . \end{cases}$$

Exemplo 4.3.2 (Resolução de um problema de Cauchy) *Considere o seguinte problema de Cauchy para o sistema de equações diferenciais lineares não homogéneas*

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + e^t\ , \qquad x(0) = 0,\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{4.12}$$

Neste sistema a variável independente é t *e as funções desconhecidas são* $x = x(t)$ *e* $y = y(t)$. *Aqui as condições iniciais são* $x = 0,\ y = 1$, *quando* $t = 0$, *e, de acordo com a notação introduzida, as funções são* $f_1(t) = 0,\ f_2(t) = e^t$. *É evidente que as condições do Teorema 4.1 estão satisfeitas em qualquer vizinhança de* $t = 0$, *pelo que a solução do problema de Cauchy (4.12) existe e é única.*
Para resolver o sistema dado, encontre primeiro a função y *da* $1.^a$ *equação do sistema, i.e., de*

$$y = x - x', \qquad (eq1)$$

Derivando esta expressão, resulta $y' = x' - x''$. *Substituindo, na segunda equação do sistema,* y *e* y' *pelas expressões obtidas, obtém-se a seguinte equação diferencial de segunda ordem relativamente à variável* $x = x(t)$

$$x'' - 2x' + 2x = -e^t.$$

A solução desta equação diferencial é

$$x = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t - 1) \qquad (verifique). \tag{4.13}$$

Por substituição da função x *encontrada e da sua derivada,* $x' = e^t(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\sin t + \cos t) - 1)$, *na equação (eq1), resulta*

$$y = e^t(C_1 \sin t - C_2 \cos t). \tag{4.14}$$

O sistema de equações (4.13) e (4.14) determina a solução geral do sistema inicial.
Substituindo as condições iniciais nesta solução geral, obtém-se

$$\begin{cases} 1 = -C_2 \\ 0 = C_1 - 1\ , \end{cases}$$

donde $C_1 = 1$ *e* $C_2 = -1$.
Assim, a solução do problema de Cauchy (4.12) é

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t - \sin t - 1) \\ y = e^t(\sin t + \cos t) \ . \end{cases}$$

4.4 Exercícios

1. (a) Mostre que o sistema de funções

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} \\ x_2(t) = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

constitui a solução geral do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - 4x_1 \ . \end{cases}$$

   (b) Partindo do sistema de equações diferenciais e da sua solução geral, dados na alínea anterior, determine a solução particular desse sistema que satisfaz as condições iniciais $x_1(0) = 0, \ x_2(0) = -4$.

2. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais homogéneas dado.

   (a) $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \\ \frac{dx}{dt} = -2x \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 2y \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} y'(t) = -x \\ x'(t) = y \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x'(t) = 8y - x \\ y'(t) = x + y \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = z - y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = z - x \end{cases}$

   (f) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 9x + y \end{cases}$

   (g) $\begin{cases} x'' = 2x - 3y \\ y'' = x - 2y \end{cases}$

   (h) $\begin{cases} x'' = 3x + 4y \\ y'' = -x - y \end{cases}$

   (i) $\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = 3x + 2y \\ z' = 2x + 3y + 4z \end{cases}$

(j) $\begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = -x + y + z \\ z' = x - z \end{cases}$

3. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais não homogéneas dado.

(a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x'(t) = 3x + y + e^t \\ y'(t) = x + 3y - e^t \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'(t) = 2x + 4y - 8 \\ y'(t) = 3x + 6y \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} = y + 1 \\ \frac{dy}{dt} = x \\ \frac{dz}{dt} = x \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = -y + t^2 \\ y' = x + e^t \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x' = 3x - 2y + t \\ y' = 3x - 4y \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 2e^t \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$

(h) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 2t \end{cases}$

4. Resolva os seguintes problemas de Cauchy.

(a) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} - y = 0 \\ \frac{dz}{dx} + z = 0 \quad , \quad y(1) = z(1) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 3y + z = 0 \\ \frac{dz}{dx} - y + z = 0 \quad , \quad y(0) = z(0) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 7x - y = 0 \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0 \quad , \quad x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = 1 \quad , \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 3 \quad , \quad x(\pi) = 1,\ y(\pi) = 2 \end{cases}$

5. Uma substância decompõe-se em duas substâncias X e Y, sendo a velocidade de formação de cada uma deles proporcional à quantidade de substância não decomposta. Deduza a lei de variação das quantidades x e y das substâncias X e Y, em função do tempo t, sabendo que no início do processo se tem a quantidade a da substância inicial, que quando $t = 0$ se tem $x = y = 0$ e que no fim de uma hora se tem $x = \frac{a}{8},\ y = \frac{3a}{8}$.

6. Considere dois vasos de capacidades V_1 e V_2, respetivamente, cheios de gás. No instante inicial, a pressão do gás é igual a P_1, no primeiro vaso, e a P_2, no segundo. Os vasos estão unidos por um tubo, através do qual o gás pode passar de um vaso para o outro. Considerando que a quantidade de gás que passa de um vaso para o outro, durante um segundo, é proporcional à diferença entre os quadrados das pressões, sendo o coeficiente de proporcionalidade a, determine as pressões p_1 e p_2, nos vasos, no instante t.

4.5 Soluções

1. (a)

   (b) $\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & -e^{-t}+e^{3t} \\ x_2(t) & = & -2e^{-t}-2e^{3t} \end{array}\right.$

2. (a) $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & C_2e^{-2t} \\ y(t) & = & C_1e^{t}\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

   (b) $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & C_1+C_2e^{2t} \\ y(t) & = & 2C_2e^{2t}\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

   (c) $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & C_1\cos t + C_2 \sin t \\ y(t) & = & -C_1 \sin t + C_2 \cos t\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

   (d) $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & -4C_1e^{-3t}+2C_2e^{3t} \\ y(t) & = & C_1e^{-3t}+C_2e^{3t}\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

   (e) $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & C_2(\sin t+\cos t)+C_3(-\cos t-\sin t) \\ y(t) & = & C_1e^{t}+C_2\sin t - C_3\cos t \\ z(t) & = & C_1e^{t}+C_2\cos t+C_3\sin t\ , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

   (f) $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & C_1e^{-2t}+C_2e^{4t} \\ y(t) & = & -3C_1e^{-2t}+3C_2e^{4t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

   (g) $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 3C_1e^{-t}+3C_2e^{t}+C_3\cos t+C_4\sin t \\ y(t) & = & C_1e^{-t}+C_2e^{t}+C_2\cos t+C_4\sin t, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

   (h) $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 2(e^{-t}(C_2-C_1-tC_2)-e^{t}(C_3+C_4+tC_4)) \\ y(t) & = & e^{-t}(C_1+tC_2)+e^{t}(C_3+tC_4), \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

   (i) $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 3C_1e^{t}+C_3e^{5t} \\ y(t) & = & -9C_1e^{t}+C_3e^{5t} \\ z(t) & = & 7C_1e^{t}+C_2e^{4t}+5C_3e^{5t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

(j) $\begin{cases} x(t) &= C_1 + 3C_2e^{2t} \\ y(t) &= -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t} \\ z(t) &= C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

3. (a) $\begin{cases} x(t) &= e^{-t}(C_1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}) + e^t(C_2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}) \\ y(t) &= e^{-t}(-C_1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}) + e^t(C_2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x(t) &= C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - e^t \\ y(t) &= -C_1e^{2t} + C_2e^{4t} + e^t\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x(t) &= \frac{2}{3}C_1e^{8t} - 2C_2 + \frac{1}{4} - 6t \\ y(t) &= C_1e^{8t} + C_2 + \frac{3}{8} + 3t\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x(t) &= C_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} + C_2e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} \\ y(t) &= \sqrt{2}C_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} - \sqrt{2}C_2e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} - 1 \\ z(t) &= \sqrt{2}C_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} - \sqrt{2}C_2e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} + C_3\ , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2t - \frac{1}{2}e^t \\ y(t) &= t^2 + C_1 \sin t - C_2 \cos t - 2 + \frac{1}{2}e^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{3}(C_1e^{-3t} + 6C_2e^{2t} - 2t - \frac{5}{6}) \\ y(t) &= C_1e^{-3t} + C_2e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{12}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x(t) &= (C_1 + t)e^t + C_2e^{-t} \\ y(t) &= (C_1 + t - 1)e^t - C_2e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x(t) &= e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2) + t + 1 \\ y(t) &= e^t[-C_1(\cos t + \sin t) + C_2(\cos t - \sin t) - 4] - 2t - 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

4. (a) $\begin{cases} y(x) &= 0 \\ z(x) &= 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y(x) &= e^{-2x}(1 - 2x) \\ z(x) &= e^{-2x}(1 + 2x) \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x(t) &= e^{-6t} \cos t \\ z(t) &= e^{-6t}(\cos t - \sin t) \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x(t) &= \frac{t^3}{6} \\ y(t) &= \frac{t^2}{2} \\ z(t) &= t \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x &= 2\cos t - 2\sin t + 3 \\ y &= -2\sin t - 2\cos t \end{cases}$

5. $x = \frac{a}{4}(1-2^t),\ y = \frac{3a}{4}(1-2^t).$

6. $V_1p_1 + V_2p_2 = P_1V_1 + P_2V_2,\ \frac{p_1+p_2}{p_1-p_2} = \frac{P_1+P_2}{P_1-P_2}e^{2kt}$, onde $k = \frac{a(V_1p_1+V_2p_2)}{V_1V_2}$.

Capítulo 5

Exercícios de autoavaliação

Grupo I: Assinale com uma cruz (X) a resposta correta sabendo que apenas uma das respostas propostas é verdadeira.

1. Se y_1 e y_2 são duas soluções particulares (diferentes e não identicamente nulas) da equação diferencial $y'' + e^x y' = 0$ então:

   (a) y_1 e y_2 são necessariamente duas funções linearmente independentes ☐

   (b) y_1 e y_2 são soluções da equação algébrica $\lambda^2 + e^x \lambda = 0$ ☐

   (c) $y_1 - y_2$ é uma solução da equação diferencial $y'' + e^x y' = 0$ ☐

   (d) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ é a solução geral da equação $y'' + e^x y' = 0$ ☐

2. A equação diferencial $(y^2 - xy)dx + x^2 dy = 0$

   (a) tem como solução particular a função $y = \frac{x}{lnx}$ ☐

   (b) é uma equação diferencial de 2.ª ordem ☐

   (c) tem como solução particular a função $y = 1$ ☐

   (d) tem como solução particular a função $y = x$ ☐

3. A solução do problema de Cauchy $y' = (x + y + 2)^2,\ y(0) = -1,$ é

   (a) $y = -1$ ☐

   (b) $x + y + 2 = \sqrt{y + 2}$ ☐

   (c) $\ln(x + y + 2) = x$ ☐

   (d) $\arctan(x + y + 2) = x + \frac{\pi}{4}$ ☐

4. A equação diferencial $(x^2 + \frac{\ln y}{x})dx + \frac{1}{y}dy = 0$

   (a) admite fator integrante da forma $\mu(y) = y$ ☐

   (b) é uma equação diferencial exata ☐

   (c) tem integral geral igual a $C_1 y \ln x + \frac{y^4}{4} + C_2 = 0,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

   (d) admite fator integrante da forma $\mu(x) = x$ ☐

5. A equação $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$

(a) admite fator integrante da forma $\mu(x, y) = \frac{1}{xy}$ ☐

(b) admite fator integrante da forma $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ ☐

(c) admite fator integrante da forma $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$ ☐

(d) é uma equação diferencial exata ☐

6. Se $\lambda = 1$ é uma raiz dupla da equação característica associada a uma equação diferencial linear homogénea de 2.ª ordem, então a solução geral dessa equação diferencial é

(a) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

(b) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

(c) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

(d) $y = C_1 x \sin x + C_2 x \cos x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

7. A equação diferencial associada à família de curvas planas dadas por $y = C_1 e^x + C_2 x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, é

(a) $y''(1-x) = y - y'$ ☐

(b) $y = y'x$ ☐

(c) $y' = y'' + C_2$ ☐

(d) $y''(1-x) + y'x = y$ ☐

8. Se $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ são raízes da equação característica associada a uma equação diferencial linear homogénea de 2.ª ordem, então a solução geral dessa equação diferencial é

(a) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

(b) $y = C_1 \sin x - C_2 \cos x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

(c) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

(d) $y = C_1 e^x + C_2 x e^{-x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

9. A solução geral da equação $y''' = x$

(a) é constituída pela família de todas as funções reais polinomiais de 4.º grau ☐

(b) é constituída pela família de todas as funções reais polinomiais de 3.º grau. ☐

(c) coincide com a solução geral da equação diferencial $y^{(4)} = 1$ ☐

(d) é a família de todas as soluções particulares da equação diferencial $y^{(4)} = 1$ com $y'''(0) = 0$ ☐

10. Se e^x e e^{-x} são soluções linearmente independentes de uma equação diferencial linear homogénea de 2.ª ordem, então a solução particular y_p , da equação diferencial, que satisfaz as condições iniciais $y(0) = y'(0) = 1$ é

(a) $y_p = e^x$ ☐

(b) $y_p = e^{-x}$ ☐

(c) $y_p = e^x - e^{-x}$ ☐

(d) $y_p = e^x + e^{-x}$ ☐

11. A função $y = e^{kx}$ é solução da equação diferencial

(a) $y'' + 2y' + y = 0$, desde que k seja solução da equação $k^2 + 2k + 1 = 0$ ☐

(b) $y'' + 2y' + 1 = 0$, qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R}$ ☐

(c) $y'' + 2y' + 1 = 0$, se $k = -1$ ☐

(d) $y'' + 2y' + y = 0$, se $k = 0$ ☐

12. A equação $(xy - 1)dx + x^2dy = 0$

(a) é uma equação diferencial de segunda ordem ☐

(b) admite fator integrante da forma $\mu(x) = \frac{1}{x}$ ☐

(c) admite fator integrante da forma $\mu(y) = y$ ☐

(d) admite como solução particular a função $y = \frac{1}{x}$ ☐

13. A equação diferencial $y^2dx - x^2dy = 0$

(a) é uma equação diferencial exata ☐

(b) é uma equação diferencial de 2.ª ordem ☐

(c) é uma equação diferencial linear ☐

(d) admite a função $y = x$ como solução particular ☐

14. Se e^x e e^{-x} são soluções linearmente independentes de uma equação diferencial linear homogénea de 2.ª ordem, então a solução particular y_p , da equação diferencial, que satisfaz as condições iniciais $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ é

(a) $y_p = \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ ☐

(b) $y_p = 2e^x + e^{-x}$ ☐

(c) $y_p = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$ ☐

(d) $y_p = e^x + e^{-x}$ ☐

15. A equação $y(x - y)dx - x^2dy = 0$ é uma equação diferencial

(a) homogénea de 1.ª ordem ☐

(b) linear de 1.ª ordem ☐

(c) exata ☐

(d) de variáveis separáveis ☐

16. A solução geral da equação $y'' = x + 1$

(a) é constituída pela família de todas as funções reais polinomiais de 2.º grau ☐

(b) é constituída pela família de todas as funções reais polinomiais d 3.º grau. ☐

(c) coincide com a solução geral da equação diferencial $y''' = 1$ ☐

(d) é a família de todas as soluções particulares da equação diferencial $y''' = 1$ com $y''(0) = 1$ ☐

17. A equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tem solução geral $y = \phi(x,C),\ C \in \mathbb{R}$, sendo M e N duas funções reais não nulas tais que

$$x\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right) = N(x,y).$$

Nessas condições, a equação diferencial $xM(x,y)dx + xN(x,y)dy = 0$

(a) é uma equação diferencial exata ☐

(b) tem solução geral $y = x\phi(x,C),\ C \in \mathbb{R}$ ☐

(c) tem integral geral $xy = \phi(x,C),\ C \in \mathbb{R}$ ☐

(d) admite um fator integrante da forma $\mu(x) = x$ ☐

18. A equação $(x-y)dx - x^2dy = 0$ é uma equação diferencial

(a) homogénea de 1.ª ordem ☐

(b) linear de 1.ª ordem ☐

(c) exata ☐

(d) de variáveis separáveis ☐

19. Considere as seguintes afirmações:

(A) "A equação $y'' + xy = 0$ é uma equação diferencial linear de 2.ª ordem. "

(B) "Se y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes da equação $y'' + xy = 0$, então $y_1 - y_2$ é também uma solução dessa equação diferencial."

Relativamente às afirmações dadas tem-se

(a) ambas são verdadeiras ☐

(b) (A) é verdadeira e (B) é falsa ☐

(c) (A) é falsa e (B) é verdadeira ☐

(d) ambas são falsas ☐

20. A equação diferencial $y' = 2(y-x)^2$

(a) só admite como soluções funções $y = y(x)$ monótonas estritamente crescentes ☐

(b) é uma equação diferencial de 2.ª ordem ☐

(c) é uma equação diferencial linear ☐

(d) só admite como soluções funções $y = y(x)$ positivas ☐

21. A função $y = e^{kt}$ é solução da equação diferencial $y'' + y' - 3y = 0$,

(a) se $k = -\frac{1+\sqrt{2}i}{2}$ ☐

(b) para todo o $k \in \mathbb{R}$ ☐

(c) se k satisfaz a equação $k^2 + k - 3 = 0$ ☐

(d) se $k = -\frac{1}{2}$ ☐

22. Seja $y_1 = y_1(x)$ uma solução da equação diferencial $y''' - xy = 0$. Então, a função $y_2 = y_1(x) + x$ é solução da equação diferencial

   (a) $y''' - xy = x^2$ ☐
   (b) $y''' + x - xy = 0$ ☐
   (c) $y''' - xy = -x^2$ ☐
   (d) $y''' - xy = 0$ ☐

23. A equação diferencial associada à família de curvas planas dadas por $y = C_1x^2 + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, é:

   (a) $y'' = 2x$ ☐
   (b) $dy = 2xdx$ ☐
   (c) $y''x - y' = 0$ ☐
   (d) $y'' = 2C_1 + C_2$ ☐

24. A função $y = x^2 + 1$ é a solução do problema de Cauchy

   (a) $y''x - y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ ☐
   (b) $y''x - y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ ☐
   (c) $y''x - y' = 1$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 2$ ☐
   (d) $y''x - y' = 0$, $y(1) = 0$, $y'(0) = 0$ ☐

25. A equação diferencial $x \sin y \; dx + (x^2 + 1) \cos y \; dy = 0$

   (a) admite fator integrante da forma $\mu(x) = \frac{1}{x}$ ☐
   (b) é uma equação diferencial exata ☐
   (c) admite fator integrante da forma $\mu(x, y) = \frac{1}{(x^2+1)\cos y}$ ☐
   (d) admite fator integrante da forma $\mu(y) = \sin y$ ☐

26. Se $\lambda = i$ é uma raiz dupla da equação característica associada a uma equação diferencial linear homogénea de 4.ª ordem, então a solução geral dessa equação diferencial é

   (a) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3xe^x + C_4xe^{-x}$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ ☐
   (b) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3e^x \sin x + C_4e^x \cos x$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ ☐
   (c) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3x \sin x + C_4x \cos x$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ ☐
   (d) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ☐

27. A equação diferencial $y^2dx + x^2dy = 0$

   (a) é uma equação diferencial exata ☐
   (b) é uma equação diferencial de 2.ª ordem ☐
   (c) é uma equação diferencial linear ☐
   (d) admite a função $y = -x$ como sendo uma sua solução particular ☐

28. Considere as seguintes afirmações:

(A) "A equação $y^2 + xy' = 1$ é uma equação diferencial linear de 2.ª ordem. "

(B) "Se y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes da equação $y'' + xy = 1$, então $y_1 - y_2$ é também uma solução dessa equação diferencial."

Relativamente às afirmações dadas tem-se

(a) ambas são verdadeiras ☐
(b) (A) é verdadeira e (B) é falsa ☐
(c) (A) é falsa e (B) é verdadeira ☐
(d) ambas são falsas ☐

29. A solução geral da equação $y' = x + 1$

(a) é a família de todas as funções reais polinomiais de 1.º grau ☐
(b) é a família de todas as funções reais polinomiais de 2.º grau. ☐
(c) coincide com a solução geral da equação diferencial $y'' = 1$ ☐
(d) é a família de todas as soluções particulares da equação diferencial $y'' = 1$ com $y'(0) = 1$ ☐

Grupo II: Identifique a ordem e o tipo das seguintes equações diferenciais assinalando a letra correspondente:

A) Equação diferencial de variáveis separáveis

B) Equação diferencial da forma $y' = f(ax + by + c)$

C) Equação diferencial homogénea de 1ª ordem

D) Equação diferencial exata

E) Equação diferencial linear de 1.ª ordem

F) Equação diferencial de Bernoulli

G) Equação diferencial de ordem superior à primeira da forma $y^{(n)} = f(x)$

H) Equação diferencial de ordem superior à primeira da forma $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(k)}) = 0$.

1. $(ye^{y/x} + x)dx - xe^{y/x}dy = 0$
2. $y' - \frac{\cos x}{\sin x}y = \sin x$
3. $dy = (x + y + 2)^2 dx$
4. $y''' - 8y = 0$
5. $dy = (x + y)^2 dx$

6. $y'' + (y')^2 = 0$
7. $y^2 dx + (2xy + \cos y)dy = 0$
8. $y''' = x$
9. $y^2 dx + (2xy + 3)dy = 0$
10. $y' - \frac{y}{x} = x$
11. $y''' - 4y'' = 0$
12. $y - xy' = 1 + y'$
13. $y'' + x(y')^2 = 0$
14. $y' \cos x + y \sin x = \sin x$
15. $xy'' - y' = x$
16. $dy = (x + y)^2 dx$
17. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
18. $(1 + x)y'' - y' = 0$
19. $y' - \frac{1}{x}y = y^2$
20. $(y' - \frac{y}{x})\ \ln(\frac{y}{x}) = 1$
21. $y''' = 2(y'' - 1)$
22. $y' - \frac{4y}{x} = \sqrt{y}$
23. $xdy - y^2 dx = 0$
24. $y''' - 4y' = 0$
25. $xy' = y - xe^{y/x}$
26. $(x + 3y)dx + (3x - 2y)dy = 0$
27. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$
28. $(x + \sin y)dx + (x \cos y - 2y)dy = 0$
29. $x^2 y'' = (y')^2$

Grupo III: Resolve as seguintes questões justificando convenientemente os passos fundamentais.

1. Resolva as equações diferenciais apresentadas no Grupo II.

2. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.

   (a) $y''' - y' = 0$

   (b) $y^{(3)} - 4y'' = 0$

3. Considere a equação diferencial $y' - xy = xy^2$.

   (a) Mostre que a mudança de variável $z = \frac{1}{y}$, com $z = z(x)$, reduz a equação diferencial dada à equação $z' + xz = -x$.

   (b) Identifique o tipo da equação diferencial indicada na alínea anterior e resolva-a.

   (c) Indique a solução geral da equação diferencial $y' - xy = xy^2$.

4. Determine o integral geral da equação diferencial $y'' = 1 + (y')^2$.

5. Resolva os sistemas de equações diferenciais dados.

   (a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = e^t + x + y \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$

6. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

   (a) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}\,, \quad y(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

   (b) $y' = y^2 + 1\,, \quad y(0) = 2$

   (c) $xyy' = \ln x\,, \quad y(1) = 2$

   (d) $y'' - y' = e^x\,, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$

   (e) $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0, \qquad y(0) = 1$

   (f) $y'' + y = \sin x, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(0) = 0$

7. Seja $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ uma equação diferencial tal que $\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) \neq \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y)$.

   Mostre que se $\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y)\right) = f(x)$ então a equação diferencial dada admite fator integrante da forma $\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$.

8. Mostre que $\mu(x, y) = y$ é um fator integrante da equação diferencial

$$(2x + \frac{\sin x}{y})dx + (\frac{x^2}{y} + \frac{\cos y}{y})dy = 0.$$

9. Determine a solução geral da equação diferencial $y'' - 6y' + 9y = x^2e^{3x}$.

10. Mostre que $\mu(x, y) = xy$ é um factor integrante da equação diferencial

$$(\frac{\cos x}{xy} + 2)dx + \frac{x}{y}dy = 0$$

   e, a seguir, resolva a equação diferencial.

11. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

(a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = y + e^t \ , \qquad x(0) = 1, \ y(0) = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 2y - x \ , \qquad x(0) = 4, \ y(0) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y \\ \frac{dy}{dt} = x \ , \qquad x(0) = 1, \ y(0) = 2 \end{cases}$

Soluções

Grupo I:

1. (c)
2. (a)
3. (d)
4. (d)
5. (c)
6. (a)
7. (c)
8. (c)
9. (d)
10. (a)
11. (a)
12. (b)
13. (d)
14. (a)
15. (a)
16. (d)
17. (a)
18. (b)
19. (a)
20. (a)
21. (c)

22. (a)
23. (c)
24. (a)
25. (d)
26. (c)
27. (d)
28. (c)
29. (d)

Grupo II:

1. (C) e (D)
2. (E)
3. (B)
4. (H)
5. (B)
6. (H)
7. (D)
8. (G)
9. (D)
10. (E)
11. (H)
12. (A)
13. (H)
14. (E)
15. (H)
16. (B)
17. (H)
18. (H)
19. (F)
20. (C)

21. (H)

22. (F)

23. (A)

24. (H)

25. (C)

26. (D)

27. (H)

28. (D)

29. (H)

Grupo III:

1. **1.** $e^{y/x} = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$

   2. $y = (x + C)\sin x, \quad C \in \mathbb{R}$

   3. $x + y + 2 = \tan(x + C), \quad C \in \mathbb{R}$

   4. $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos(\sqrt{3}x) + C_3 \sin(\sqrt{3}x)), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

   5. $x + y = \tan(x + C), \quad C \in \mathbb{R}$

   6. $y = \ln|x + C_1| + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad y = C, \quad C \in \mathbb{R}$

   7. $y^2 x + \sin y + C = 0, \quad C \in \mathbb{R}$

   8. $y = \frac{1}{24}x^4 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

   9. $y^2 x + 3y + C = 0, \quad C \in \mathbb{R}$

   10. $y = x^2 + Cx, \quad C \in \mathbb{R}$

   11. $y = C_1 + xC_2 + C_3 e^{4x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

   12. $y = C(x + 1) + 1, \quad C \in \mathbb{R}$

   13. $y = C_2 - \frac{2}{x}\,, \quad y = \frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{x-C_1}{x+C_1}\right| + C_2\,, \quad y = \frac{2}{C_1}\arctan\frac{x}{C_1} + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

   14. $y = 1 + C\cos x, \quad C \in \mathbb{R}$

   15. $y = \frac{1}{4}x^2(2\ln|x| + C_1 + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

   16. $y = -x + \tan(x + C), \quad C \in \mathbb{R}$

   17. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

   18. $y = (1 + x^2)C_1 + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

   19. $y = \frac{2x}{C-x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$

   20. $\frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} = \ln x + C, \quad C \in \mathbb{R}$

   21. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

   22. $y = \frac{x^4}{4}\left(C + \frac{1}{x}\right)^2, \quad C \in \mathbb{R}, \ \text{e} \ \ y = 0$

   23. $y = \frac{1}{C - ln|x|}, \quad C \in \mathbb{R}, \ \text{e} \ \ y = 0 \ \ \text{e} \ \ x = 0$

24. $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

25. $e^{-y/x} = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$

26. $\frac{x^2}{2} - 3xy - y^2 + C = 0, \quad C \in \mathbb{R}$

27. $y = C_1 e^x + C_2 \cos(2x) + C_3 \sin(2x), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

28. $\frac{x^2}{2} + x \sin y - y^2 + C = 0, \quad C \in \mathbb{R}$

29. $y = \frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2} \ln|1 + C_1 x| + C_2, \quad C_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, C_2 \in \mathbb{R}$ e $y = K, \quad K \in \mathbb{R}$

2. (a) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

   (b) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{4x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

3. (a)

   (b) Equação diferencial linear de 1.ª ordem; $z = -1 + Ce^{-x^2/2}, \quad C \in \mathbb{R}$

   (c) $y = \frac{1}{Ce^{-\frac{x^2}{2}} - 1}, \quad C \in \mathbb{R},$ e $y = 0$

4. $y = -\ln|\cos(x + C_1)| + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

5. (a) $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{2t} - e^t \\ y = -C_1 + C_2 e^{2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 \\ y = C_1 e^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

6. (a) $y = \cos x - \frac{\pi}{2} \sin x + \cos x \ln|\sin x| + x \sin x$

   (b) $\arctan y = x + \arctan 2$

   (c) $y^2 = \ln^2 x + 4$

   (d) $y = 2 - 2e^x + xe^x$

   (e) $\arctan y = -\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{\pi}{4}$

   (f) $y = \frac{\pi}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$

7.

8.

9. $y = e^{3x}(C_1 + xC_2 + \frac{1}{12}x^4), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

10. $x^2 y + \sin x + C = 0, \quad C \in \mathbb{R}$

11. (a) $\begin{cases} x = e^t(1 + t) \\ y = e^t(2 + t) \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} x = e^t(4 - 3t) \\ y = e^t(1 - 3t) \end{cases}$

    (c) $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} e^{-2t} + \frac{5}{2} e^{2t} \\ y = \frac{3}{4} e^{-2t} + \frac{5}{4} e^{2t} \end{cases}$

Bibliografia

[1] T. Apostol (1994) *Cálculo*, Reverté. Barcelona.

[2] F. Ayres Jr. (1959) *Equações Diferenciais*, Colecções Schaum, McGraw-Hill. Brasil.

[3] G. Baranenkov, B. Demidovitch, V. Efimenko, S. Frolov, S. Kogan, G. Luntz, E. Porshneva, R. Shostak, E. Sitcheva, A. Yanpolski (1977) *Problemas e Exercícios de Análise Matemática*, Editora Mir. Moscovo.

[4] R. Bronson (1977) *Moderna Introdução às Equações Diferenciais*, Colecções Schaum, McGraw-Hill. Brasil.

[5] J. Campos Ferreira (1985) *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa.

[6] G. Fichtenholz (1965) *The fundamentals of Mathematical Analysis*, Vol 2, Pergamon. Oxford.

[7] M. F. Ferreira (1995) *Equações diferencias Ordinárias, Um primeiro curso com aplicações*, McGraw-Hill. Portugal.

[8] H. L. Guidorizzi (1988) *Um curso de Cálculo*, Vol. 4, Livros Técnicos e científicos Editora. Rio de Janeiro.

[9] W. Kaplan (1972).*Cálculo Avançado.* Vol. 2. Editora Edgard Blücher. São Paulo.

[10] M. Krasnov, A. Kiselev, G. Makarenko, G., E. Shikin (1990) *Mathematical Analysis for Engineers*, Vol. 2. Editora Mir. Moscovo.

[11] M. Krasnov, A. Kiselev, G. Makarenko (1994) *Equações Diferenciais Ordinárias*, McGraw-Hill.

[12] L. S. Pontryagin (1962) *Ordinary Differential Equations*, Pergamon.

[13] N. Piscounov (1992) *Cálculo Diferencial e Integral*, Vol. 2. Edições Lopes da Silva. Porto.

[14] C. Ray Wylie (1975) *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill. Kogakusha.

[15] J. Stewart(2001) Cálculo, Vol. 2, Thomson Learning.

[16] I. S. Sokolnikoff, R. M. Redheffer (1966) *Mathematics of Phisics and Modern Engineering*, McGraw-Hill. Kogakusha.

[17] E. W. Swokowski (1983) *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol 1. McGraw-Hill. Brasil.

[18] A. N. Tikhonov, A. B. Vasil'eva, A. G. Sveshnikov (1985) *Differential Equations*, (tradutor: A. B. Sossinskij), Springer-Verlag Berlin.

Apêndices

Apêndice A

Diferencial de uma função real de variável real

Noções básicas

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real diferenciável em D_f e seja x_0 um ponto de acumulação de D_f.

Considere uma variação no valor de x_0 dada por Δx e tal que $x_0 + \Delta x \in D_f$. Com a variação no argumento, a função também sofrerá uma variação igual à diferença entre $f(x_0)$ e $f(x_0+\Delta x)$.

Ao valor de Δx chama-se *acréscimo* na variável x e ao valor $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ chama-se *acréscimo* ou *incremento* da função $y = f(x)$.

A fórmula

$$dy = f'(x)dx$$

determina o chamado *diferencial* da função $y = f(x)$.

O diferencial de f é também denotado por $df(x)$ ou, simplesmente, df.

Exemplo. *O diferencial de* $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *é* $dy = f'(x)dx = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

A variação Δx pode ser denotada por dx e considerada como diferencial de x (ou seja, da função $y = x$).[1]

Relação entre diferencial e derivada de uma função diferenciável

Observe que se f é diferenciavél em x_0 então

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)\,.$$

Por outro lado, pela continuidade de f em x_0,

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0.$$

[1]Para mais detalhe, consulte, por exemplo, [5].

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f'(x_0)dx}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \\
&= f'(x_0) - f'(x_0) = 0.
\end{aligned}$$

Intuitivamente, tal significa que, para pequenos valores absolutos de Δx, o diferencial dy e o acréscimo Δy tomam valores muito próximos.

Na prática, o diferencial dy da função $y = y(x)$ pode ser considerado como uma aproximação do acréscimo Δy. Geometricamente, tal aproximação corresponde a substituir a curva $y = f(x)$ pela sua reta tangente no ponto de abcissa x_0, para valores de x próximos de x_0, e assim, em vez de considerar o acréscimo da função y, tomar o acréscimo da função linear que define a reta tangente.

Exemplo (Cálculo de valores aproximados) *Considere a função $y = x^2$. Pretende-se determinar um valor aproximado para o acréscimo dessa função quando o valor de x muda de 1 para 1.1.*
De acordo com a notação utilizada,

$$x_0 = 1 \quad e \quad dx = \Delta x = 1.1 - 1 = 0.1 \ .$$

A função $f(x) = x^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ com $f'(x) = 2x$ e, portanto, $dy = 2xdx$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Sendo assim, o acréscimo na variável y quando x varia de 1 para 1.1 pode ser aproximado por

$$dy = f'(1)dx = 2 \times 0.1 = 0.2 \ .$$

Note que o valor exato do acréscimo Δy é igual a

$$\Delta y = f(1,1) - f(1) = (1.1)^2 - 1 = 0.21.$$

Neste exemplo, a diferença absoluta entre Δy e dy (que é o erro cometido ao substituir Δy por dy) é igual a 0.01.

Diferencial no símbolo de derivada e de integral de uma função

O símbolo de diferencial pode surgir na notação de derivada e na notação de integral (definido ou indefinido) de uma função real.
O símbolo $\frac{dy}{dx}$ representa a derivada de f. Esta notação destaca a derivação da variável dependente $y = f(x)$ em ordem à variável independente x.

Nota.[2] O símbolo $\frac{dy}{dx}$, pode ser interpretado como o quociente dos diferenciais dy e dx, ou como o valor limite de um quociente,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

[2]Veja-se [5], pág. 460.

Utilizando a notação diferencial, pode definir-se o integral indefinido da função f como o conjunto de todas as funções F tais que $dF(x) = f(x)dx$.

Regras de cálculo do diferencial

Sejam $f = f(x)$ e $g = g(x)$ duas funções diferenciáveis num ponto x comum ao domínio de f e de g.

Diferencial da função soma ou da função diferença calcula-se do seguinte modo:

$$d(f \pm g) = (f + g)'(x)dx = f'(x)dx + g'(x)dx = df + dg.$$

Diferencial da função produto é igual a

$$d(fg) = (fg)'(x)dx = (f'(x)g(x) + g'(x)f(x))dx = g(x)f'(x)dx + f(x)g'(x)dx = gdf + fdg.$$

As restantes regras estabelecem-se de modo análogo usando as regras de derivação.

Apêndice B

Função real de duas variáveis reais

Definição

Uma função definida em $D \subset \mathbb{R}^2$ diz-se *função real de duas variáveis reais*, x e y (variáveis independentes), se a cada par $(x, y) \in D$ faz corresponder um e um só valor real $z \in \mathbb{R}$. Nesse caso, escreve-se $z := f(x, y)$, onde

$$\begin{array}{rll} f: & D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto z = f(x, y) \ . \end{array}$$

Continuidade

Seja, por simplicidade, $D = [a, b] \times [c, d]$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ a < b, \ c < d$.

Fixa-se $x_0 \in [a, b]$. Nesse caso, $f_{x_0} = f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ é uma função de uma só variável y,

$$f_{x_0}: \quad [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Seja, agora, $y_0 \in [c, d]$. Nesse caso, $f_{y_0} = f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ é uma função de x,

$$f_{y_0}: \quad [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Uma função f, de duas variáveis reais e definida em $D = [a, b] \times [c, d]$, diz-se ser uma *função contínua* em ordem de x se, para cada $y_0 \in [c, d]$, a função f_{y_0} é uma função contínua em $[a, b]$.

De modo análogo, a função f diz-se ser uma função contínua em ordem de y se, para cada $x_0 \in [a, b]$, a função f_{x_0} é uma função contínua em $[c, d]$.

Derivadas parciais

Chamam-se *derivadas parciais de 1.ª ordem* da função $z = f(x, y)$, em relação a x e em relação a y, às seguintes funções $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, respetivamente, caso os limites que as definem existam e sejam finitos nalgum domínio de $\mathbb{R}^2$:

- derivada parcial de $z = f(x,y)$ em relação a x:

$$\tfrac{\partial z}{\partial x} = \tfrac{\partial f}{\partial x} = \tfrac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f'_x(x,y) := \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x, y) - f(x,y)}{\triangle x} \tag{1}$$

- derivada parcial de $z = f(x,y)$ em relação a y:

$$\tfrac{\partial z}{\partial y} = \tfrac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f'_y(x,y) := \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x,y)}{\triangle y} \tag{2}$$

Regra de cálculo para a determinação das derivadas parciais de uma função de duas variáveis $z = f(x,y)$, caso os limites (1) e (2) sejam finitos.

- f'_x – aplicam-se as regras de derivação na função $f(x,y)$ assumindo y como constante.
- f'_y – aplicam-se as regras de derivação na função $f(x,y)$ assumindo x como constante.

Diferencial total

Sob certas condições (de continuidade das derivadas parciais) a fórmula

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

determina uma nova função real dz (ou $df(x,y)$), de duas variáveis reais, chamada *diferencial total* da função $z = f(x,y)$.

Exemplo. *Dada a função* $f(x,y) = (x^2 + y)e^y$, *verifica-se que* $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y} = e^y(x^2 + y + 1)$. *Logo,* $df(x,y) = 2xe^y dx + e^y(1 + x^2 + y)dy$.

Definições de continuidade e derivadas parciais para funções reais de mais do que duas variáveis reais introduzem-se de modo análogo como para funções reais de duas variáveis reais (veja-se, por exemplo, [1]).