Q1 – Considere a árvore AVL2, que permite que a altura dos filhos se diferenciem no máximo em 2 unidades (|f(h.left) - f(h.right) | <=2). Essa árvore é balanceada($h < k \log_2 n$) ?

R: Temos que o calculo do número de chaves de uma AVL normal é dado por T(h) = T(h-1) + T(h-2) + 1. O cálculo é feita de dessa maneira, pois, a diferença de altura de T(h-1) e T(h-2) é de uma unidade.

Logo, se quisermos calcular a altura da AVL2, podemos fazer da seguinte maneira :

$$T(h) = T(h-1) + T(h-3) + 1$$

Logo, se T(h) = T(h-1) + T(h-3) + 1, então T(h) > T(h-1) + T(h-3).

Como T(h) > T(h-1) + T(h-3), temos que T(h) > T(h-3) + T(h-3), isto é, T(h) > 2 * T(h-3).

Seguindo essa ideia, temos:

$$T(h) > 2 * T(h-3)$$

$$2 * T(h-3) > 2^2 * T(h-6)$$

$$2^2 * T(h-6) > 2^3 * T(h-9)$$

$$2^3 * T(h-9) > 2^4 * T(h-12)$$

Ao observar a sequência podemos notar um padrão:

$$2^{j-1} * T(h - 3*(j-1)) > 2^j * T(h-3j), \text{ no qual } j >= 1.$$

Assim, temos

$$T(h) > 2^j * T(h-3j)$$

Se continuarmos reduzindo $2^j * T(h-3j)$, um momento h-3j será igual a 0. Dessa maneira, h-3j = 0 => j = h/3. Se substituirmos esse valor em $2^j * T(h-3j)$, teremos:

$$T(h) > 2^{h/3} * T(0)$$

$$T(h) > 2^{h/3} * 1$$

$$\log_2 T(h) > h/3$$

$$h < 3 \log_2 T(h)$$

Portanto, como h< 3 $\log_2$ T(h), conclui-se que a AVL2 é balanceada.

Q2 – Seja T(h) o número mínimo de nós necessários para gerar uma árvore AVL com altura h. Mostre que: T(h) = T(h-1) + T(h-2) + 1.

R: Temos que a sequência de T(h) é essa:

h=0, T(0)=1;	h=2, T(2)=4;	h=4, T(4)=12;	...
h=1, T(1)=2;	h=3, T(3)=7;	h=5, T(5)=20;	

Ao observarmos a sequência de Fibonacci, teremos esses valores :

F(0) = 0;	F(2) = 1;	F(4) = 3;	F(6) = 8;	...
F(1) = 1;	F(3) = 2;	F(5) = 5;	F(7) = 13;	

Podemos perceber a partir de T(0) e F(3), a diferença de valores entre T(h) e F(n), é somente de uma unidade. Por exemplo, T(0) = 1 e F(3)=2; T(1) = 2 e F(4)=3.

Dessa forma, temos que T(h) = F(h+3)-1, e que portanto T(h-1) + T(h-2) + 1 = F(h+3)-1. Queremos provar que T(h) = T(h-1) + T(h-2) + 1. Logo, se provarmos que T(h) = F(h+3)-1, então provaremos que T(h) =T(h-1)+ T(h-2)+ 1.

->Prova por Indução

- Base: Para h=0, temos que T(0) = F(0+3) - 1 = 2-1 = 1. Como T(0) = 1, então temos que para esse caso T(h) = F(h+3)-1 é verdade.

  Para h=1, temos que T(1) = F(1+3) - 1 = 3-1 = 2. Como T(1) = 2, então temos que para esse caso T(h) = F(h+3)-1 é verdade.

- Hipótese de Indução: Suponha que para h = j, temos que T(j) = F(j+3)-1é verdade, no qual 1<= j <= k.

- Prova Indutiva: Sabemos que até h = k essa fórmula é valida. Mas queremos demonstrar o mesmo para h = k+1, ou seja, T(k+1) = F(k+4)-1. Para isso, faremos:

  T(k+1) = T(k+1-1)+ T(k+1-2) +1
  T(k+1) = T(k)+ T(k-1) +1

Por H.I., temos que T(k)= F(k+3)-1 e T(k-1) = F(k+2) -1 . Substituindo T(k) e T(k-1), temos:

T(k+1) = F(k+3) -1 + F(k+2) -1 +1
T(k+1) = F(k+3) + F(k+2) -1

A definição de Fibonacci diz que $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$. Portanto, $F(k+3) + F(k+2) = F(k+4)$.

$$T(k+1) = F(k+3) + F(k+2) - 1$$
$$T(k+1) = F(k+4) - 1$$

Portanto, para $h = k+1$, $T(k+1) = F(k+4) - 1$ é verdade.

Logo, como provamos o passo base e o passo indutivo, temos que $T(h) = F(h+3) - 1$, e portanto, $T(h) = T(h-1) + T(h-2) + 1$.