Contrôle continu 1 (rattrapage)

Durée : 20 minutes. La calculatrice de l'Université de Bordeaux est autorisée. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 : DM1 2014 allégé.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right)$ pour $n \geq 0$. **On admet que,** pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

1. Montrer que, pour $n \geq 0, u_{n+1}^2 - 3 = \dfrac{(u_n^2-3)^2}{4u_n^2}$.
2. Montrer que, pour $n \geq 1$, on a $u_n \geq \sqrt{3}$ et que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante à partir du rang $n = 1$.
3. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2. Calculez, si elle existe, la limite des suites de terme général suivant :

$$u_n = n^{(-1)^n} \ (n \geq 1), \quad p_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \ (n \geq 1), \quad x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \ (n \geq 0).$$

Correction du rattrapage du CC 1

Exercice 1 : DM1 2014 allégé.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 - 3 = \dfrac{1}{4}\left(u_n^2 + 6 + \dfrac{9}{u_n^2}\right) - 3 = \dfrac{u_n^4 + 6u_n^2 + 9}{4u_n^2} - \dfrac{12u_n^2}{4u_n^2}$, d'où $\boxed{u_{n+1}^2 - 3 = \dfrac{(u_n^2-3)^2}{4u_n^2}.}$

2) • D'après 1), pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 - 3 = \dfrac{(u_n^2-3)^2}{4u_n^2} \geq 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 \geq 3$. On a admis que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq \sqrt{3}$, donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{3}.}$

• Soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{2u_n} - \dfrac{u_n}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n \leq 0 &\iff \frac{3}{2u_n} - \frac{u_n}{2} \leq 0 \iff \frac{3}{2} \leq \frac{u_n^2}{2} \ (\text{ car } u_n > 0) \\ &\iff 3 \leq u_n^2 \iff \sqrt{3} \leq u_n \ (\text{ car } u_n > 0). \end{aligned}$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{3}$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n \leq 0$ c'est-à-dire, <u>la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1.</u> **NB** : on n'a pas dit dans l'énoncé que $u_0 \geq \sqrt{3}$! !

3) D'après la question 2), $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$, donc <u>$(u_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente</u> et sa limite ℓ vérifie $\ell \geq \sqrt{3}$. Puisque $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente alors la suite extraite $(u_{n+1})_{\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers la même limite ℓ, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right) \iff \ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{3}{\ell}\right) \iff \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{3}{2\ell}$, d'où $\ell^2 = 3$, i.e. $\ell = \pm\sqrt{3}$. Mais $\ell \geq \sqrt{3}$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}.}$

Exercice 2.

1) Si n est pair alors $n = 2p$ et $u_{2p} = 2p$ d'où $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p} = +\infty$. Et si n est impair alors $n = 2p+1$ et $u_{2p} = \frac{1}{2p+1}$ d'où $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p+1} = 0$. Donc $\boxed{(u_n)_{\mathbb{N}} \text{ diverge.}}$

2) Soit $n \geq 1$, on écrit $p_n = \exp(n\ln(1+\frac{2}{n}))$. Comme $n\ln(1+\frac{2}{n}) = \dfrac{\ln(1+\frac{2}{n})}{1/n}$, on utilise la définition de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+2x)$ en 0. En effet $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x} = f'(0) = 2$, où $f'(x) = \frac{2}{1+2x}$. Puis $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\dfrac{2}{n}) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x} = 2$, donc on obtient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = e^2.}$

3) Soit $n \geq 0, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty$ alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0.}$