Escolha sob Incerteza

- Para alguns problemas, incerteza não é determinante.
- Para outros, é fundamental para a análise.
- Iremos incorporar incerteza ao arcabouço que já estudamos em teoria do consumidor.
- Vimos que X é o conjunto das escolhas possíveis: definição é geral o suficiente para acomodar incerteza.
- Escolhas sob incerteza possuem características específicas, que permitem fazer previsões mais fortes, ao impor restrições adicionais às preferências de indivíduos racionais.

Alternativas arriscadas

- Indivíduo precisa escolher uma dentre várias alternativas arriscadas.
- Cada alternativa pode resultar em um dentre vários resultados possíveis.
- O resultado que irá efetivamente ocorrer é incerto.
- Mas indivíduo conhece as probabilidades objetivas de ocorrência de cada resultado.
- $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ denota os resultados possíveis. Por exemplo:
  1. Cestas de consumo
  2. Payoffs monetários

Loterias simples

- Uma **loteria simples** é uma distribuição de probabilidade sobre esses resultados:

Definição

Uma **loteria simples** é uma lista $L = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$, com $p_n \geq 0, \forall n = 1, \ldots, N$, e $\sum_{n=1}^{N} p_n = 1$, onde p_n pode ser interpretado como a probabilidade de ocorrência do n-ésimo evento.

Loterias simples

- Por exemplo, se $C = (0, 500, 1000)$, duas loterias simples podem ser:
    1. $L_1 = (0, 1, 0)$
    2. $L_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$
- Uma loteria simples pode ser representada como um ponto do simplex de dimensão $(N - 1)$:

$$\Delta = \{p \in \mathbb{R}_+^N : p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1\}$$

Loterias Compostas

- Uma versão mais geral de loterias, que permite que os resultados possíveis sejam, eles próprios, loterias.

Definição

Considere K loterias simples $L^k = (p_1^k, p_2^k, \ldots, p_N^k)$, $k = 1, \ldots, K$ e probabilidades $\alpha_k \geq 0$, com $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$. A opção arriscada que resulta na loteria L_k com probabilidade α_k, para $k = 1, \ldots, K$ é chamada de **loteria composta** e representada por:

$$(L_1, L_2, \ldots, L_K; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K)$$

Loterias Compostas

- Por exemplo, se $C = (0, 500, 1000)$ e temos as duas loterias simples:
  1. $L_1 = (0, 1, 0)$
  2. $L_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$
- A loteria composta que resulta na loteria L_1 com probabilidade $\frac{1}{2}$ e na loteria L_2 com probabilidade $\frac{1}{2}$ pode ser escrita como:

$$\left(L_1, L_2; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Loterias Reduzidas

- Dada uma loteria composta $(L_1, L_2, \ldots, L_K; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K)$, a **loteria reduzida** correspondente é a loteria simples $(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ que gera a mesma distribuição sobre os resultados possíveis.

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} p_1^1 \\ \vdots \\ p_N^1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} p_1^2 \\ \vdots \\ p_N^2 \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_K \begin{bmatrix} p_1^K \\ \vdots \\ p_N^K \end{bmatrix}$$

- $q_n = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_n^k$
- Note que:

$$\sum_{n=1}^{N} q_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_n^k \right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \sum_{n=1}^{N} p_n^k = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$$

Preferências sobre loterias: hipóteses

1. O indivíduo é **"consequencialista"**: para qualquer escolha envolvendo risco, apenas as loterias reduzidas são relevantes.
   - Logo, o indivíduo deve ser indiferente entre duas loterias compostas com a mesma loteria reduzida.
2. **Racionalidade**: preferências completas e transitivas sobre $\mathscr{L}$, o conjunto de todas as loterias simples sobre o conjunto de resultados possíveis C.
3. **Continuidade**: pequenas mudanças nas probabilidades não alteram o ordenamento de preferências entre duas loterias quaisquer.
   - Garante a existência de uma função utilidade $U : \mathscr{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ representando $\succsim$.
4. **Axioma da Independência**: permite-nos representar $\succsim$ por um tipo de função de utilidade particularmente útil.

Preferências sobre loterias: hipóteses

Definição

Uma relação de preferências $\succsim$ sobre $\mathscr{L}$ é dita **contínua** se, para quaisquer $L, L', L'' \in \mathscr{L}$, os dois conjuntos abaixo forem fechados:

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \succsim L''\} \subset [0,1]$$

$$\{\alpha \in [0,1] : L'' \succsim \alpha L + (1-\alpha)L'\} \subset [0,1]$$

Definição

Uma relação de preferências $\succsim$ sobre $\mathscr{L}$ satisfaz o **axioma da independência** se, para todo $L, L'L'' \in \mathscr{L}$ e $\alpha \in (0,1)$, tivermos:

$$L \succsim L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

Axioma da Independência

- Note que o AI não é necessariamente razoável no contexto da teoria do consumidor tradicional.
- Por exemplo: suponha que o consumidor prefere

$$\{2 \text{ chocolates}, 0 \text{ bananas}\} \text{ a } \{0 \text{ chocolates}, 2 \text{ bananas}\}$$

- Não há porque o consumidor preferir

$$\{2 \text{ chocolates}, 1 \text{ bananas}\} \text{ a } \{1 \text{ chocolates}, 2 \text{ bananas}\}$$

mesmo que ambos sejam uma combinação entre as cestas anteriores e a cesta $\{2 \text{ chocolates}, 2 \text{ bananas}\}$.

Utilidade esperada

- Veremos a seguir que o axioma da independência nos permite representar as preferências na forma de utilidade esperada.

Definição

A função de utilidade $U : \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ tem a **forma de utilidade esperada** se existe uma designação de números $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ para os N resultados possíveis, de modo que para cada loteria simples $L = (p_1, p_2, \ldots, p_N) \in \mathscr{L}$, temos:

$$U(L) = p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_n u_N$$

A função de utilidade $U : \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ na forma de utilidade esperada é chamada de utilidade de von Neumann-Morgenstern.

Linearidade da utilidade esperada

- **Note:** $U(L) = \sum_n p_n u_n$ é linear nas probabilidades. Segue que:

Proposição

A função de utilidade $U : \mathscr{L} \to \mathbb{R}$ tem a **forma de utilidade esperada** se, e somente se satisfaz a propriedade:

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k)$$

para quaisquer probabilidades $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K) \geq 0$ K e loterias $L_k \in \mathscr{L}$, $k = 1, \ldots, K$ e $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$.

Linearidade da utilidade esperada

Demonstração ($\Longleftarrow$)

1. Suponhamos que $U(\cdot)$ satisfaz:

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k)$$

2. Sejam $(L^1, \ldots, L^N)$ loterias degeneradas.
3. Podemos escrever $L = \sum_{n=1}^{N} p_n L^n$. Temos então:

$$U(L) = U\left(\sum_{n=1}^{N} p_n L^n\right) = \sum_{n=1}^{N} p_n U(L^n) = \sum_{n=1}^{N} p_n u_n$$

4. Logo, $U(\cdot)$ tem a forma de utilidade esperada.

Linearidade da utilidade esperada

Demonstração ($\Longrightarrow$)

1. Suponhamos que $U(\cdot)$ tem a forma de utilidade esperada.
2. Considere qualquer loteria composta:

$$(L_1, L_2, \ldots, L_K; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K)$$

   em que $L^k = (p_1^k, \ldots, p_N^k)$.
3. A loteria é reduzida é $L' = \sum_k \alpha_h L_k$.
4. Temos, então:

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\right) = \sum_{n=1}^{N} u_n \left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_n^k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \left(\sum_{n=1}^{N} u_n p_n^k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k)$$

Cardinalidade da Utilidade Esperada

- Diferentemente da Teoria do Consumidor que vimos até agora, **apenas transformações afins crescentes preservam ordenamento de preferências representado por utilidade esperada**.

Proposição

Suponha $U : \mathscr{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma utilidade esperada de v.N-M. para a relação de preferências $\succsim$ sobre $\mathscr{L}$. Então $\tilde{U} : \mathscr{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ é outra utilidade esperada de v.N-M. para a relação de preferências $\succsim$ se, e somente se, existem $\alpha, \beta > 0$ tais que $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \alpha$.

Teorema da Utilidade Esperada

- Se preferências sobre loterias são contínuas e satisfazem o Axioma da Independência, então são representáveis por uma função de utilidade com a forma de utilidade esperada.

Proposição

Suponha a relação de preferências $\succsim$ racionais sobre o espaço de loterias $\mathscr{L}$ satisfaz continuidade e o axioma da independência. Então $\succsim$ admite uma representação de utilidade na forma de utilidade esperada. Isto é, podemos designar um número u_n para cada realização $n = 1, \ldots, N$ de tal modo que para quaisquer duas loterias $L = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ e $L' = (p'_1, p'_2, \ldots, p'_N)$, temos:

$$L \succsim L' \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{N} u_n p_n \geq \sum_{n=1}^{N} u_n p'_n$$

Teorema da Utilidade Esperada

Demonstração

- Demonstração se dará em 5 passos:

  1. Se $L \succ L'$ e $\alpha \in (0,1)$, então $L \succ \alpha L + (1-\alpha)L'$.
  2. Sejam $\alpha, \beta \in [0,1]$. Então $\beta \bar{L} + (1-\beta)\underline{L} \succ \alpha \bar{L} + (1-\alpha)\underline{L}$ se, e somente se, $\beta > \alpha$.
  3. $\forall L \in \mathscr{L}$, existe um $\alpha(L)$ tal que $[1-\alpha(L)]\underline{L} + \alpha(L)\bar{L} \sim L$, e este $\alpha(L)$ é único.
  4. A função $U : \mathscr{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ que designa $U(L) = \alpha_L$ para todo $L \in \mathscr{L}$ representa a relação de preferências $\succsim$.
  5. A função utilidade $U : \mathscr{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ que designa $U(L) = \alpha_L$ para todo $L \in \mathscr{L}$ é linear e, portanto, tem a forma de utilidade esperada.

Teorema da Utilidade Esperada

1. Se $L \succ L'$ e $\alpha \in (0, 1)$, então $L \succ \alpha L + (1 - \alpha)L'$.

Demonstração:

- O resultado segue do Axioma da Independência.
- Como $L \succ L'$, temos:

$$L = \alpha L + (1 - \alpha)L \succ \alpha L + (1 - \alpha)L' \succ \alpha L' + (1 - \alpha)L' = L'$$

2. Sejam $\alpha, \beta \in [0,1]$. Então $\beta \bar{L} + (1-\beta)\underline{L} \succ \alpha \bar{L} + (1-\alpha)\underline{L}$ se, e somente se, $\beta > \alpha$.

Demonstração:

- Seja $\beta > \alpha$, sem perda de generalidade. Podemos escrever:

$$\beta \bar{L} + (1-\beta)\underline{L} = \underbrace{\left[\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right]}_{\gamma} \bar{L} + \left[1 - \underbrace{\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}}_{\gamma}\right] \left[\alpha \bar{L} + (1-\alpha)\underline{L}\right]$$

- Do passo anterior, sabemos que $\bar{L} \succ \alpha \bar{L} + (1-\alpha)\underline{L}$. Aplicando o mesmo passo novamente:

$$\gamma \bar{L} + (1-\gamma)[\alpha \bar{L} + (1-\alpha)\underline{L}] \succ \alpha \bar{L} + (1-\alpha)\underline{L}$$

- Segue, pois, que $\beta \bar{L} + (1-\beta)\underline{L} \succ \alpha \bar{L} + (1-\alpha)\underline{L}$.

Teorema da Utilidade Esperada

3. $\forall L \in \mathscr{L}$, existe um $\alpha(L)$ tal que $[1 - \alpha(L)]\underline{L} + \alpha(L)\bar{L} \sim L$, e este $\alpha(L)$ é único.

Demonstração:

- Segue da hipótese de continuidade das preferências, e da escolha de $\bar{L}$ e de $\underline{L}$.

Teorema da Utilidade Esperada

4. A função $U : \mathscr{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ que designa $U(L) = \alpha_L$ para todo $L \in \mathscr{L}$ representa a relação de preferências $\succsim$.

Demonstração:

- Partindo do passo anterior, para quaisquer duas loterias $L, L' \in \mathscr{L}$, temos:

$$L \succsim L' \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_L \bar{L} + (1 - \alpha_L)\underline{L} \succsim \alpha_{L'} \bar{L} + (1 - \alpha_{L'})\underline{L}$$

- Pelo passo 2, isso é verdade se, e somente se, $\alpha_L \geq \alpha_{L'}$.

5. A função utilidade $U : \mathscr{L} \longrightarrow \mathbb{R}$, que designa $U(L) = \alpha_L$ para todo $L \in \mathscr{L}$, é linear e, portanto, tem a forma de utilidade esperada.

Demonstração:

- Queremos mostrar que, $\forall L, L' \in \mathscr{L}$ e $\beta \in [0,1]$, temos $U(\beta L + (1-\beta)L') = \beta U(L) + (1-\beta)U(L')$.
- Por construção temos:

$$L \sim U(L)\bar{L} + [1 - U(L)]\underline{L} \quad \text{e} \quad L' \sim U(L')\bar{L} + [1 - U(L')]\underline{L}$$

- Aplicando o AI, temos:

$$\begin{aligned} \beta L + (1-\beta)L' &\sim \beta[U(L)\bar{L} + [1-U(L)]\underline{L}] + (1-\beta)L' \\ &\sim \beta[U(L)\bar{L} + [1-U(L)]\underline{L}] + (1-\beta)[U(L')\bar{L} + [1-U(L')]\underline{L}] \end{aligned}$$

5. A função utilidade $U : \mathscr{L} \longrightarrow \mathbb{R}$, que designa $U(L) = \alpha_L$ para todo $L \in \mathscr{L}$, é linear e, portanto, tem a forma de utilidade esperada.

Demonstração (cont. 1):

- Note que essa última loteria é equivalente a:

$$[\beta U(L) + (1-\beta)U(L')]\bar{L} + (1 - \beta U(L) - (1-\beta)U(L')]\underline{L}$$

- **As duas loterias compostas abaixo resultam na mesma loteria reduzida:**

$$\begin{cases} U(L)\bar{L} + (1-U(L))\underline{L} & \text{com} \quad \Pr = \beta \\ U(L')\bar{L} + (1-U(L'))\underline{L} & \text{com} \quad \Pr = (1-\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{L} & \text{com} \quad \Pr = \beta U(L) + (1-\beta)U(L') \\ \underline{L} & \text{com} \quad \Pr = [1 - \beta U(L) - (1-\beta)U(L')] \end{cases}$$

Teorema da Utilidade Esperada

5. A função utilidade $U : \mathscr{L} \longrightarrow \mathbb{R}$, que designa $U(L) = \alpha_L$ para todo $L \in \mathscr{L}$, é linear e, portanto, tem a forma de utilidade esperada.

Demonstração (cont. 1):

- Logo:

$$\beta L + (1 - \beta)L' \sim [\beta U(L) + (1 - \beta)U(L')]\bar{L} + (1 - \beta U(L) - (1 - \beta)U(L')]\underline{L}$$

- Segue que $U(\beta L + (1 - \beta)L') = \beta U(L) + (1 - \beta)U(L')$, como consequência do passo anterior.

Loterias Monetárias e Aversão ao Risco

- Formalização da noção de aversão ao risco, no contexto de alternativas arriscadas cujos resultados possíveis são valores expressos em unidades monetárias (loterias monetárias).
- Tratamos o valor monetário como uma variável contínua.
- Representação via utilidade esperada pode ser extendida para o caso de domínio infinito:

Loterias Monetárias e Utilidade Esperada

- Seja X variável aleatória contínua denotando um valor monetário.

Definição

Uma **loteria monetária** é uma função de distribuição acumulada $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$.

- Dado x, $F(x)$ mede a probabilidade de a realização do payoff X ser menor ou igual a x.
- Se $F(\cdot)$ tem uma função de densidade $f(\cdot)$, então:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

Loterias Monetárias e Utilidade Esperada

- Funções de distribuição preservam a estrutura linear das loterias:
- Dada uma loteria composta $(L_1, L_2, \ldots, L_K; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K)$.
- Denotemos por $F_K(\cdot)$ a distribuição de payoffs sob a loteria k.
- **A distribuição do payoff associado à loteria reduzida é dada por:**

$$F(x) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k F_k(x)$$

- Assim, para estudar loterias sobre valores monetários, definimos o espaço de loterias $\mathscr{L}$ como o conjunto de todas as distribuições de probabilidade possíveis, com domínio não-negativo $[a, \infty)$.

Loterias Monetárias e Utilidade Esperada

- **Aplicação do Teorema da Utilidade Esperada**: existe uma designação de valores $u(x)$ tais que $F(\cdot)$ pode ser avaliada como:

$$U(F) = \int u(x)dF(x)$$

  Note: $U(F)$, que tem $\mathscr{L}$ como domínio, é a utilidade esperada de v.N-M.; $u(x)$, que tem como domínio o conjunto de realizações monetárias possíveis, é a utilidade de Bernoulli.

- $\int u(x)dF(x)$ é a esperança matemática de $u(x)$.
  1. A função $u(x)$ substitui os valores $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$.
  2. Se $F(x)$ tem função densidade $f(x)$, então $U(F) = \int u(x)f(x)dx$.
  3. Essa formulação inclui os casos em que um número finito de realizações tem massa positiva.

Atenção

O teorema de utilidade esperada não impõe restrições sobre a função de Bernoulli, $u(x)$.

- A especificação de $u(x)$ é responsável por capturar atributos comportamentais da escolha individual.
- **hipóteses básicas**: $u(\cdot)$ é contínua, estritamente crescente e limitada (acima e abaixo).

Aversão ao Risco

Definição

Um tomador de decisão é dito:

- **avesso ao risco** se, para qualquer loteria $F(\cdot)$, a loteria degenerada que resulta num payoff certo $\int x dF(x)$ é ao menos tão boa quanto a loteria $F(\cdot)$.
- **neutro ao risco** se, para qualquer loteria $F(\cdot)$, ele é indiferente entre a loteria degenerada que resulta num payoff certo $\int x dF(x)$ e a loteria $F(\cdot)$.
- **estritamente avesso ao risco** se indiferença ocorre apenas quando as duas loterias são iguais (i.e., quando $F(\cdot)$ é degenerada).

Aversão ao Risco e Concavidade de $u(\cdot)$

- Da definição de aversão ao risco, segue que um indivíduo é avesso ao risco se, e somente se:

$$\int u(x)dF(x) \leq u\left(\int xdF(x)\right), \quad \text{para todo } F(\cdot)$$

- Essa desigualdade se chama **Desigualdade de Jensen**, e define a concavidade de uma função.
- Logo, aversão ao risco (estrita) é equivalente a concavidade (estrita) de $u(\cdot)$:
  1. utilidade marginal de um dólar adicional é (estritamente) decrescente;
  2. o risco de ganhar ou perder um dólar com probabilidades iguais não compensa.

Equivalente Certeza

Definição

Dada uma função de utilidade de Bernoulli $u(\cdot)$, o **equivalente certeza** de $F(\cdot)$, denotado por $c(F,u)$, é o valor monetário para o qual o indivíduo é indiferente entre a loteria $F(\cdot)$ e um valor sem risco $c(F,u)$.

$$u(c(F,u)) = \int u(x)dF(x)$$

- Para um indivíduo avesso ao risco, $c(F,u)$ é menor que o valor esperado de X: **trade-off entre o retorno esperado e um risco mais baixo**.

$$c(F,u) \leq \int x dF(x)$$

- De fato, a desigualdade acima é equivalente à aversão ao risco.

Prêmio de Risco

Definição

Dada uma função de utilidade de Bernoulli $u(\cdot)$, um valor monetário fixo x e um número positivo ϵ, o prêmio de probabilidade (ou prêmio de risco), denotado por $\pi(x, \epsilon, u)$, é o excesso de probabilidade de sucesso (em relação a probabilidades iguais de sucesso e fracasso) que deixa o indivíduo indiferente entre o resultado sem risco x e a loteria entre dois resultados $x + \epsilon$ e $x - \epsilon$.

$$u(x) = \left(\frac{1}{2} + \pi(x, \epsilon, u)\right) u(x + \epsilon) + \left(\frac{1}{2} - \pi(x, \epsilon, u)\right) u(x - \epsilon)$$

- Geometricamente, é fácil mostrar que aversão ao risco é equivalente a termos $\pi(x, \epsilon, u) \geq 0$, para todo x e todo $\epsilon > 0$.

Aversão ao Risco: caracterização

Proposição

Suponha que o indivíduo é maximizador de uma utilidade esperada, com função de utilidade de Bernoulli $u(\cdot)$ sobre valores monetários. Então, as seguintes propriedades são equivalentes:

1. O indivíduo é avesso ao risco
2. $u(\cdot)$ é côncava
3. $c(F, u) \leq \int x dF(x)$, para todo $F(\cdot)$
4. $\pi(x, \epsilon, u) \geq 0$, para todo $x, \epsilon > 0$

Aversão ao Risco Absoluta

Definição

Dada uma função de utilidade de Bernoulli $u(\cdot)$ sobre valores monetários, duas vezes continuamente diferenciável, o **coeficiente de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt** em x é definido como:

$$r_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

- É uma medida da curvatura de $u(\cdot)$.
- Para um indivíduo avesso ao risco, $r_A(x) \geq 0$.
- **Exemplo**: $u(x) = -e^{-ax}$, para $a > 0$, é chamada de função de utilidade CARA (Constant Absolute Risk Aversion).

Aversão ao risco entre indivíduos

Definição

Dadas funções de utilidade de Bernoulli $u_1(\cdot)$ e $u_2(\cdot)$, dizemos que $u_2(\cdot)$ é mais avesso ao risco que $u_1(\cdot)$ se:

1. $r_A(x, u_2) \geq r_A(x, u_1)$, para todo x.
2. Existe uma função crescente e côncava $\phi(\cdot)$ tal que $u_2(x) = \phi(u_1(x))$ para todo x, i.e., $u_2(\cdot)$ é uma transformação côncava de $u_1(\cdot)$
3. $c(F, u_2) \leq c(F, u_1)$, para qualquer $F(\cdot)$.

Aversão ao risco entre indivíduos (cont.)

Definição (cont.)

Dadas funções de utilidade de Bernoulli $u_1(\cdot)$ e $u_2(\cdot)$, dizemos que $u_2(\cdot)$ é mais avesso ao risco que $u_1(\cdot)$ se:

4. $\pi(x, \epsilon, u_2) \geq \pi(x, \epsilon, u_1)$, para quaisquer x e ϵ.

5. Sempre que $u_2(\cdot)$ achar uma loteria $F(\cdot)$ ao menos tão boa quanto um resultado livre de risco $\bar{x}$, então $u_1(\cdot)$ também acha $F(\cdot)$ ao menos tão boa quanto $\bar{x}$. Ou seja, qualquer risco que $u_2(\cdot)$ aceitar partindo de uma posição sem risco $\bar{x}$ também será aceita por $u_1(\cdot)$. Equivalentemente:

$$\int u_2(x)dF(x) \geq u_2(\bar{x}) \text{ implica } \int u_1(x)dF(x) \geq u_1(\bar{x})$$

Aversão ao risco entre indivíduos

Proposição

As definições (1) a (5) anteriores são equivalentes.

Aversão ao risco entre níveis de renda

- É possível analisar também como relação com o risco varia com níveis de renda.
- A função de utilidade de Bernoulli $u(\cdot)$ exibe **aversão absoluta ao risco decrescente** se $r_A(x, u)$ é uma função decrescente de x.
- Comparar aversão ao risco em diferentes níveis de renda é similar a compará-la para indivíduos diferentes:
  1. Dois níveis de renda iniciais, $x_1 > x_2$.
  2. Seja z a mudança na renda.
  3. O indivíduo avalia risco comparando $u_1(z) \equiv u(x_1 + z)$ a $u_2(z) \equiv u(x_2 + z)$.
  4. $r_A(x_2, u) \geq r_A(x_1, u)$, para $x_1 > x_2$ se, e somente se $r_A(z, u_2) \geq r_A(z, u_1)$, para todo z.

Aversão ao risco entre níveis de renda

Proposição

As seguintes propriedades são equivalentes:

1. $u(\cdot)$ exibe aversão absoluta ao risco decrescente.
2. Sempre que $x_2 < x_1$, $u_2(z) \equiv u(x_2 + z)$ é uma transformação côncava de $u_1(z) = u(x_1 + z)$.
3. Para qualquer risco $F(z)$, o equivalente certeza c_x da loteria formada ao adicionar risco z ao nível de renda x, dado por $u(c_x) = \int u(x+z)dF(z)$, é tal que $(x - c_x)$ é decrescente em x. Isto é, quanto maior for x, menos o indivíduo estará disposto a pagar para se livrar do risco.
4. O prêmio de risco $\pi(x, \epsilon, u)$ é decrescente em x.
5. Para qualquer $F(z)$, se $\int u(x_2 + z)dF(z) \geq u(x_2)$ e $x_2 < x_1$, então $\int u(x_1 + z)dF(z) \geq u(x_1)$.

Aversão relativa ao risco

- O conceito de aversão relativa ao risco nos permite avaliar alternativas arriscadas cujos resultados são ganhos ou perdas **percentuais** da riqueza atual.
- Seja $t > 0$ o acréscimo ou decréscimo percentual da riqueza.
- Um indivíduo com utilidade de Bernoulli $u(\cdot)$ e riqueza inicial w avalia o risco percentual aleatório t usando $\tilde{u}(t) = u(tx)$.
- Um pequeno risco em torno da posição inicial $t = 1$ pode ser avaliado usando:

$$-\frac{\tilde{u}''(1)}{\tilde{u}'(1)} = -\frac{wu''(w)}{u'(w)}$$

Aversão relativa ao risco

Definição

Dada uma utilidade de Bernoulli $u(\cdot)$, o **coeficiente de aversão relativa ao risco** em w é

$$r_R(w, u) = -\frac{wu''(w)}{u'(w)}$$

- Como $r_R(w, u)$ varia com a renda?
- Se $r_R(w, u)$ é decrescente em w, então indivíduos mais ricos são menos avessos ao risco com respeito a loterias sobre percentuais de sua riqueza.
- Atenção: aversão relativa ao risco decrescente $\Longrightarrow$ aversão absoluta ao risco decrescente.

Aversão relativa ao risco

Teorema

As seguintes condições sobre uma utilidade de Bernoulli $u(\cdot)$ são equivalentes:

1. $r_R(w, u)$ é decrescente em w
2. Sempre que $w_2 < w_1$, $\tilde{u}_2(t) = u(tw_2)$ é uma transformação côncava de $\tilde{u}(t)$.
3. Dado qualquer risco $F(t)$ para $t > 0$, o equivalente certeza $\bar{c}_w$ definido por $u(\bar{c}_w) = \int u(tx)dF(t)$ é tal que $w/\bar{c}_w$ é decrescente em w.

Comparando distribuições de payoffs

- Até agora, fixamos uma loteria e comparamos diferentes indivíduos (funções utilidade) em termos de suas aversões ao risco.
- Agora, compararemos loterias (distribuições de payoff) em termos de risco e retorno.
- Quando podemos dizer que uma distribuição $F(\cdot)$
  1. Tem retornos maiores que outra distribuição $G(\cdot)$? (Domonância estocástica de primeira ordem)
  2. É menos arriscada que outra distribuição $G(\cdot)$? (Dominância estocástica de segunda ordem)
- **Observação**: Restringiremo-nos às distribuições $F(\cdot)$ que satisfazem $F(0) = 0$ e $F(x) = 1$ para algum x.

Dominância estocástica de primeira ordem

- Quando podemos dizer que a distribuição $F(\cdot)$ tem retornos maiores que outra distribuição $G(\cdot)$?
- Dois critérios equivalentes:
  1. Se todo agente maximizador de utilidade esperada que prefere mais a menos preferir $F(\cdot)$ a $G(\cdot)$.
  2. Se para qualquer valor monetário x, a probabilidade de receber ao menos x é maior sob a loteria $F(\cdot)$ que sob $G(\cdot)$.

Dominância estocástica de primeira ordem

Definição

Dizemos que a distribuição $F(\cdot)$ **domina estocasticamente em primeira ordem** a distribuição $G(\cdot)$ se, para qualquer função não-decrescente $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tivermos:

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$$

Dominância estocástica de primeira ordem

Proposição

A distribuição de payoffs monetários $F(\cdot)$ domina estocasticamente em primeira ordem a distribuição $G(\cdot)$ se, e somente se, $F(x) \leq G(x)$, $\forall x$.

Dominância estocástica de segunda ordem

- Agora, comparamos distribuições em termos de quão arriscada são (dispersão de payoffs).
- Restringiremo-nos a comparar distribuições com a mesma média.

Definição

Para duas distribuições $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$ com a mesma média, dizemos que $F(\cdot)$ **domina estocasticamente em segunda ordem** (é menos arriscada que) $G(\cdot)$ se, para qualquer função não-decrescente e côncava $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tivermos:

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$$

Dominância estocástica de segunda ordem

- Dominância estocástica de segunda ordem está intimamente relacionada ao conceito de **mean-preserving spreads**.
- Um mean-preserving spread de uma distribuição $F(\cdot)$ é construído da seguinte forma:
  1. Considere uma loteria composta.
  2. O promeiro estágio é a loteria $F(\cdot)$, com realização x.
  3. O segundo estágio toma x como dado, e adiciona aleatorização com um payoff de $x + z$, em que z é distribuído de acordo com $H_x(z)$, com média zero, i.e., $\int z dH_x(z) = 0$
  4. A loteria reduzida, denotada por $G(\cdot)$, é chamada de mean-preserving spread.

Dominância estocástica de segunda ordem

Exemplo

Suponha que $F(\cdot)$ designa iguais probabilidades a 2 e 3 reais, $x \in \{2, 3\}$. Em seguida, se $x = 2$, suponha que com igual probabilidade, o payoff final é 1 ou 3. Se $x = 3$, então com probabilidades iguais o payoff final é 2 ou 4. Então $G(\cdot)$ designa probabilidade $1/4$ aos quatro possíveis resultados 1,2,3,4.

- De forma geral, se $G(\cdot)$ é um mean-preserving spread de $F(\cdot)$, então $F(\cdot)$ domina estocasticamente em segunda ordem $G(\cdot)$. A volta também vale. **Logo, os dois conceitos são equivalentes**.

Dominância estocástica de segunda ordem

Teorema

Considere duas distribuições $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$ com a mesma média. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $F(\cdot)$ domina estocasticamente $G(\cdot)$ em segunda ordem.
2. $G(\cdot)$ é um mean-preserving spread de $F(\cdot)$
3. $\int_0^x G(t)dt \geq \int_0^x F(t)dt$, para todo x.

Incerteza via estados da natureza

- Até agora, os consumidores apenas se importavam com as distribuições dos payoffs, e não com as causas que podem originá-las.
- Estados da natureza:
  1. S é o conjunto finito de possíveis estados.
  2. $s \in S$ é um estado.
  3. $\pi(s)$ ou π_s é a probabilidade (objetiva) de que $s \in S$ ocorra.
- Neste arcabouço, uma possibilidade incerta com retornos monetários (não-negativos) é capturada por uma variável aleatória.

Incerteza via estados da natureza

Definição

Uma **variável aleatória** é uma função $g : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$ que mapeia estados em ocorrências monetárias.

- Uma variável aleatória g gera uma loteria monetária $F(\cdot)$ tal que:

$$F(x) = \sum_{s:g(s)\geq x} \pi(s) \quad \forall x$$

  Note que $F(\cdot)$ não monitora qual estado da natureza resulta em um dado payoff monetário (perda de informação).

- Uma variável aleatória também pode ser representada por um vetor $(x_1, \ldots, x_S)$, em que x_s é o payoff no estado s.

- O conjunto de todas as variáveis aleatórias não-negativas é, então, dado por $\mathbb{R}^S_+$.

Preferências e utilidades contingentes

- Considere uma relação de preferências racional $\succsim$ sobre $\mathbb{R}^S_+$.
- Argumento análogo à teoria do consumidor: $L = S$.
- Mais uma vez, sempre qe possível, gostaríamos de representar $\succsim$ por uma função de utilidade que tem a forma de função de utilidade esperada estendida.

Definição

A relação de preferências $\succsim$ tem a **representação de utilidade estendida** se, para cada $s \in S$, existe uma função $u_s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que para cada $(x_1, \ldots, x_S) \in \mathbb{R}^S_+$,

$$(x_1, \ldots, x_S) \succsim (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_S) \Leftrightarrow \sum_s \pi(s) u_s(x_s) \geq \sum_s \pi(s) u_s(\tilde{x}_s)$$

Críticas à Teoria da Utilidade Esperada

- Decision Theory
- Behavioral Economics
- Indivíduos não enxergam risco de forma objetiva.
- **Veremos – brevemente – aqui:**
  1. Paradoxo de Allais
  2. Paradoxo de Ellsberg

Paradoxo de Allais

Que loteria você escolheria?

- Loteria A:
  - R$ 1 milhão com certeza
- Loteria B:
  - R$ 5 milhões com probabilidade 10%
  - R$ 1 milhão com probabilidade 89%
  - R$ 0 com probabilidade 1%

Paradoxo de Allais

Que loteria você escolheria?

Maioria das pessoas tende a escolher a loteria A

- Loteria A:
  - R$ 1 milhão com certeza
- Loteria B:
  - R$ 5 milhões com probabilidade 10%
  - R$ 1 milhão com probabilidade 89%
  - R$ 0 com probabilidade 1%

$$
\begin{aligned}
u(1) &\geq 0.1 \times u(5) + 0.89 \times u(1) \\
0.11u(1) &\geq 0.1 \times u(5)
\end{aligned}
$$

Paradoxo de Allais

Que loteria você escolheria?

- Loteria C:
  - R$ 1 milhão com probabilidade 11%
  - R$ 0 com probabilidade 89%
- Loteria D:
  - R$ 5 milhões com probabilidade 10%
  - R$ 0 com probabilidade 90%

Paradoxo de Allais

Que loteria você escolheria?

Maioria das pessoas tende a escolher a loteria D

- Loteria C:
  - R$ 1 milhão com probabilidade 11%
  - R$ 0 com probabilidade 89%
- Loteria D:
  - R$ 5 milhões com probabilidade 10%
  - R$ 0 com probabilidade 90%

$$0.1u(5) \quad \geq \quad 0.11 \times u(1)$$

Paradoxo de Allais: Rank-Dependent EU

- Essas escolhas são inconsistentes
- **Indicam que pessoas podem dar peso exagerado à probabilidades de eventos pequenos.**
- Uma forma de acomodar a teoria a esse padrão de comportamento: **Rank-Dependent EU**
  1. Rearranjar resultados de modo crescente em utilidade
  2. Transformação crescente $w : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ à cdf $F(\cdot)$, resultando em uma nova cdf $w \circ F$
  3. Maximiza-se:

$$\int u(x) dw(F(x))$$

Paradoxo de Allais: Rank-Dependent EU

- Voltando ao nosso problema:

$$
\begin{aligned}
U(A) &= u(1) \\
U(B) &= [w(0.9) - w(0.01)]u(1) + [1 - w(0.9)]u(5) \\
U(C) &= [1 - w(0.89)]u(1) \\
U(D) &= [1 - w(0.9)]u(5)
\end{aligned}
$$

- Uma possibilidade (extrema):

$$
\begin{aligned}
w(0) &= 0 \\
w(p) &= 0.5, \quad \text{para } \; p \in (0,1) \\
w(1) &= 1
\end{aligned}
$$

Paradoxo de Allais: Rank-Dependent EU

- Conseguimos racionalizar Allais se:

$$\begin{aligned} U(A) &> U(B) \\ U(D) &> U(C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(1) &> (0.5 - 0.5)u(1) + (1 - 0.5)u(5) \\ (1 - 0.5)u(5) &> (1 - 0.5)u(1) \end{aligned}$$

- Isto é, se $u(1) < u(5) < 2u(1)$.
- Rank-dependent EU também racionaliza comportamento amante ao risco, como compra de bilhetes de loteria.

Paradoxo de Ellsberg

- **Uma urna contém 300 bolas:**
  - 100 bolas vermelhas
  - 200 bolas azuis ou verdes, com distribuição desconhecida.
- Você deve escolher uma cor e então uma bola será sorteada aleatoriamente da urna.
- **Se a bola for da cor que você escolher, você ganha R$ 100.**
  - Que cor você escolheria?
- **Se a bola <u>não</u> for da cor que você escolher, você ganha R$ 100.**
  - Que cor você escolheria?

Paradoxo de Ellsberg

- **Uma urna contém 300 bolas:**
  - 100 bolas vermelhas
  - 200 bolas azuis ou verdes, com distribuição desconhecida.
- Você deve escolher uma cor e então uma bola será sorteada aleatoriamente da urna.
- **Se a bola for da cor que você escolher, você ganha R$ 100.**
  - Que cor você escolheria? Pessoas tendem a escolher vermelho
- **Se a bola não for da cor que você escolher, você ganha R$ 100.**
  - Que cor você escolheria? Pessoas tendem a escolher vermelho

Paradoxo de Ellsberg

- Comportamento inconsistente com teoria da utilidade esperada:
  - Se escolho vermelho quando aposto que cor vai sair, creio que:
    $$p_R > p_B, p_G$$
  - Se escolho vermelho quando aposto que cor não vai sair, creio que:
    $$p_R < p_B, p_G$$
- Uma forma de interpretar esse comportamento

Utilidade esperada maxmin

- Indivíduo tem conjunto de crenças P
- Escolhe ação a^* que maximiza sua utilidade esperada de acordo com a pior crença possível:

$$a^* = \arg\max_{a \in \mathcal{A}} \min_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_p[u(a)]$$

- **Esse comportamento não é racional:** indivíduo se comporta como se suas escolhas afetassem as probabilidades.

Maxmin e Ellsberg

- Seja P conjunto de beliefs possíveis com $p_R = 1/3$ e $p_G, p_B \in \{(x, y) \in [0, 2/3] : x + y = 2/3\}$
- **Se a bola for da cor que você escolher, você ganha R$ 100.**
  - Que cor você escolheria?

$$U(R) = \min_p p_R = \frac{1}{3}$$

$$U(B) = \min_p p_B = 0$$

$$U(G) = \min_p p_G = 0$$

  - Indivíduo escolheria vermelho.

Maxmin e Ellsberg

- Seja P conjunto de beliefs possíveis com $p_R = 1/3$ e $p_G, p_B \in \{(x, y) \in [0, 2/3] : x + y = 2/3\}$
- **Se a bola for da cor que você escolher, você ganha R$ 100.**
  - Que cor você não escolheria?

$$U(R) = \min_p (1 - p_R) = \frac{2}{3}$$

$$U(B) = \min_p (1 - p_B) = \frac{1}{3}$$

$$U(G) = \min_p (1 - p_G) = \frac{1}{3}$$

  - Indivíduo escolheria vermelho.

Maxmin e Ellsberg

- Indivíduo se comporta como se sua escolha afetasse a proporção de bolas verdes e azuis.
- Crenças formadas por probabilidades que não somam 1.
- Aversão à ambiguidade