# Escolha sob Incerteza

# Incerteza

- Até aqui, todas as escolhas que estudamos se deram em um contexto **determinístico**.
- Uma vez feita a escolha, não havia incerteza sobre o *payoff*, sobre o que o consumidor de fato iria consumir.
- O mundo real é repleto de situações que envolvem incerteza.
  - Saúde
  - Acidentes de trânsito
  - Perda de emprego
  - Retorno sobre ativos
  - Punição de um crime
  - Vencedor das Eleições 2022
  - Vencedor da Eurocopa 2020
  - (...)

# Como representar incerteza?

- Iremos extender o modelo que vimos até agora para incorporar incerteza. Mas de que forma?
- Incerteza é representada por meio de uma **distribuição de probabilidade**.
- Por exemplo, consumidor pode ter:
  - $15\%$ de chances de perder o seu emprego e receber R$ $800$ reais de seguro-desemprego; e
  - $85\%$ de chances de manter o seu emprego e o seu salário de R$ $2000$
- No contexto de Escolha sob Interteza, chamamos essas distribuições de probabilidade de **loterias**.

# Estados da Natureza

- **Mas distribuições de probabilidade sobre o que? Incerteza em relação a que?**
- Sobre eventos aleatórios que afetam o bem-estar das pessoas.
- Chamamos os diferentes resultados desses eventos aleatórios de **estados da natureza**.
- Por exemplo: conjunto $S$ de estados da natureza pode ser:
  - $S_1 = \{\text{Punição}, \text{Impunidade}\}$ se queremos modelar criminalidade
  - $S_2 = \{\text{Desemprego}, \text{Emprego}\}$ se queremos modelar poupança ou seguro-desemprego.
  - $S_3 = \{\text{Saúde}, \text{Doença}\}$ se queremos modelar demanda por seguro-saúde
  - $S_4 = \mathbb{R}_+$ se queremos modelar demanda pela ação de uma empresa.

# Exemplo: Demanda por Seguros

- Consumidor mora em uma casa, que vale R\$ $500.000$ e tem R\$ $10.000$ de dinheiro no banco.
- Em caso de incêndio, que ocorre com probabilidade $1\%$, este consumidor terá apenas os R\$ $10.000$; caso não ocorra o incêndio, sua riqueza permanecerá R\$ $510.000$.
- **Mercado de seguros permite mudar essa distribuição de probabilidades**.
- Com seguro, consumidor pagará, por exemplo, R\$ $5.000$ de prêmio, mas receberá de volta o valor da sua casa em caso de incêndio.
- Sua riqueza será R\$ $505.000$ com probabilidade 1.

# Incerteza e Preferências

- Mas o que o consumidor fará? Comprará esse seguro, a esse preço? O que acha do preço? Alto? Baixo?
- **Depende das suas preferências**.
- Imagine que o valor segurado não é R\$ $500.000$, e sim $K$, e que o preço do seguro não é R\$ $5.000$, e sim $\gamma K$, para $0 < \gamma < 1$.
- Indivíduos mais conservadores, mais incomodados com a chance de flutuação em sua riqueza, mais **avessos ao risco** estarão dispostos a:
  - Adquirir uma quantidade maior de $K$, dado $\gamma$; ou
  - Adquirir uma quantidade $K$ de seguro a um preço $\gamma K$ maior.
- Precisaremos de uma forma de representar essas preferências sobre distribuições de probabilidade.

# Utilidade Esperada

- Suponha que $X$ é uma variável aleatória que assume os valores $x_1, \ldots, x_S$, em que $S$ é o número de estados da natureza possíveis, com probabilidades dadas pela densidade $f(X)$
- Uma utilidade sobre essa loteria tem a forma de utilidade esperada se:

$$U(f(X)) = \mathbb{E}[u(X)|f(X)] = \sum_{i=1}^{S} f(x_i)u(x_i)$$

  para alguma função $u$.
- Se $X$ for variável aleatória contínua, teríamos:

$$U(f(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)u(x)dx$$

# Utilidade Esperada

$$U(f(X)) = \mathbb{E}[u(X)|f(X)] = \sum_{i=1}^{S} f(x_i)u(x_i)$$

- Utilidade esperada nos permite representar como as pessoas enxergam diferentes loterias, diferentes distribuições de probabilidade.
- Chamamos a função $u$ de Utilidade de von Neuman-Morgenstern, que nos dá a utilidade de ocorrer um dos eventos com probabilidade 1.
- Utilidade de Utilidade de von Neuman-Morgenstern é, na verdade, uma utilidade indireta.
- **Indivíduos maximizadores de utilidade esperada**

# Utilidade Esperada: Exemplo

- Utilidade de Von Neumann-Morgenstern é dada por $u(w) = \sqrt{w}$
- Utilidade esperada é:

$$\mathbb{E}[u(W)] = \sqrt{49} \times 0.25 + \sqrt{100} \times 0.75 = \frac{7}{4} + \frac{30}{4} = \frac{37}{4}$$

- Note que $\mathbb{E}[u(W)]$ não é igual a $\mathbb{E}[W]$:

$$\mathbb{E}[W] = \frac{49}{4} + \frac{3}{4} \times 100 = \frac{349}{4} \neq \frac{7}{4}$$

# Utilidade Esperada vs. Valor Esperado da Loteria

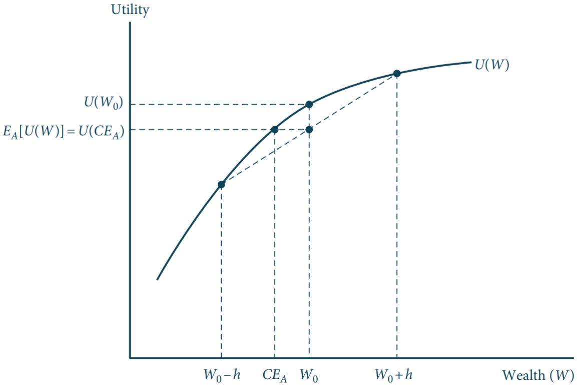
- Por que não usar simplesmente $\mathbb{E}[W]$ para representar as preferências?
- **Paradoxo de St. Petersburg**
  - Suponha $x_i = 2^i$ e $f(x_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i$.

$$\mathbb{E}[X] = 2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{4} + 8\frac{1}{8} + \cdots = 1 + 1 + \cdots = \infty$$

  - Você pagaria um valor muito alto por essa loteria?
- Esperança na maioria das vezes não parece descrever muito bem preferência das pessoas em relação ao risco.
- Outro exemplo: você é indiferente entre R\$ $1.000.000$ com probabilidade $1$ e R\$ $10.000.000$ com probabilidade $0.1$?

# Aversão ao Risco

**Desigualdade de Jensen**: se $u$ é função estritamente côncava, $\mathbb{E}[u(x)] < u(\mathbb{E}[x])$. Neste caso, indivíduos preferem receber um valor certo $\bar{x}$ do que uma loteria que em média produz $\bar{x}$.

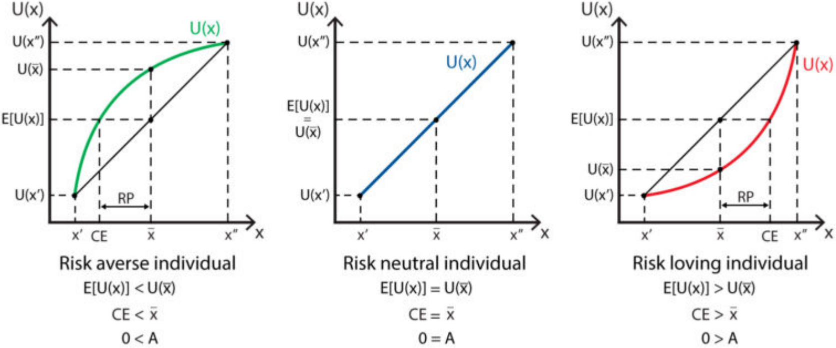


# Aversão ao Risco

**Desigualdade de Jensen**: se $u$ é função estritamente côncava, $\mathbb{E}[u(x)] < u(\mathbb{E}[x])$. Neste caso, indivíduos preferem receber um valor certo $\bar{x}$ do que uma loteria que em média produz $\bar{x}$.

- Quando $u$ é côncava, dizemos que o indivíduo é **avesso ao risco**
- Quando $u$ é convexa, dizemos que o indivíduo é **amante do risco**
- Quando $u$ é linear, dizemos que o indivíduo é **neutro ao risco**

# Aversão, Neutralidade e Amor ao Risco



# Utilidade Esperada e Transformações

- Nem toda utilidade sobre loterias têm o formato de utilidade esperada.
- Dada uma utilidade $U(f)$ com o formato de utilidade esperada, não é qualquer transformação crescente $g$ que mantém o formato de utilidade esperada.
- $g$ tem que ser uma transformação afim:

$$\tilde{U}(f) = \alpha + \beta \mathbb{E}[u(x)]$$

com $\beta > 0$.

# Voltemos ao Exemplo dos Seguros

- Suponha que haja uma probabilidade de $\frac{5}{8}$ de chuva e uma probabilidade de $\frac{3}{8}$ de tempo bom.
- Sob chuva, a produção de um agricultor é 1, e sob bom tempo é 9.
- A utilidade de von Neumann-Morgenstern do agricultor é $u(x) = \sqrt{x}$.
- **Utilidade esperada do agricultor sem seguro:**

$$\frac{5}{8}\sqrt{1} + \frac{3}{8}\sqrt{9} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

# Voltemos ao Exemplo dos Seguros

- Suponha agora que existe uma seguradora que oferece ficar com o risco e oferecer o valor esperado $\mathbb{E}[x]$ ao agricultor em troca de um valor fixo $p$.

$$\mathbb{E}[x]\frac{5}{8}1 + \frac{3}{8}9 = \frac{32}{8} = 4$$

- Se comprar o seguro, o agricultor ficará com $4 - p$ com probabilidade 1.
- Ele comprará o seguro se:

$$\frac{7}{4} \leq U(4-p) \;\Rightarrow\; \frac{7}{4} \leq \sqrt{4-p} \;\Rightarrow\; p \leq 4 - \frac{49}{16} \;\Rightarrow\; p \leq \frac{15}{16}$$

- Chamamos esse valor $p$ de prêmio de risco, **o valor que o agricultor está disposto a pagar para se livrar do risco.**

# Voltemos ao Exemplo dos Seguros

- Suponha agora que existe uma seguradora que oferece ficar com o risco e oferecer o valor esperado $\mathbb{E}[x]$ ao agricultor em troca de um valor fixo $p$.

$$\mathbb{E}[x]\frac{5}{8}1+\frac{3}{8}9=\frac{32}{8}=4$$

- Se comprar o seguro, o agricultor ficará com $4-p$ com probabilidade 1.
- Ele comprará o seguro se:

$$\frac{7}{4}\leq U(4-p) \ \Rightarrow \ \frac{7}{4}\leq\sqrt{4-p} \ \Rightarrow \ p\leq 4-\frac{49}{16} \ \Rightarrow \ p\leq\frac{15}{16}$$

- Chamamos esse valor $p$ de prêmio de risco, **o valor que o agricultor está disposto a pagar para se livrar do risco.**

# É possível medir aversão ao risco?

- Pessoas diferentes apresentam diferentes aversões ao risco.
- A mesma pessoa, com diferentes níveis de renda, também apresenta diferente comportamento em relação ao risco.
- Como representar essas diferenças? **Por meio de medidas de aversão ao risco que:**
  - Possam variar com a renda das pessoas
  - Reflitam o prêmio de risco que se está disposto a pagar para se livrar da incerteza em relação à renda.

# Aversão ao Risco Absoluta

- Dada uma função $u(\cdot)$ sobre valores monetários, duas vezes continuamente diferenciável, o **coeficiente de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt** em $x$ é definido como:

$$r_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

- É uma medida da curvatura de $u(\cdot)$.
- Para um indivíduo avesso ao risco, $r_A(x) \geq 0$.
- **Exemplo**: $u(x) = -e^{-\gamma x}$, para $\gamma > 0$, é chamada de função de utilidade CARA (Constant Absolute Risk Aversion).

$$r_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{-\gamma^2 e^{-\gamma x}}{\gamma e^{-\gamma x}} = \gamma$$

# Aversão Relativa ao Risco

- Faz sentido supor que o coeficiente de aversão absoluta ao risco seja constante? **Provavelmente não**.
- O conceito de aversão relativa ao risco nos permite avaliar alternativas arriscadas cujos resultados são ganhos ou perdas **percentuais** da riqueza atual.
- Seja $t > 0$ o acréscimo ou decréscimo percentual da riqueza.
- Um indivíduo com utilidade de Bernoulli $u(\cdot)$ e riqueza inicial $w$ avalia o risco percentual aleatório $t$ usando $\tilde{u}(t) = u(tx)$.
- Um pequeno risco em torno da posição inicial $t = 1$ pode ser avaliado usando:

$$-\frac{\tilde{u}''(1)}{\tilde{u}'(1)} = -\frac{wu''(w)}{u'(w)}$$

# Aversão Relativa ao Risco

- Dada uma utilidade $u(\cdot)$, o **coeficiente de aversão relativa ao risco** em $w$ é

$$r_R(w, u) = -\frac{wu''(w)}{u'(w)}$$

- Como $r_R(w)$ varia com a renda?
- Se $r_R(w)$ é decrescente em $w$, então indivíduos mais ricos são menos avessos ao risco com respeito a loterias sobre percentuais de sua riqueza.
- **Exemplo**: $u(x) = \frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}$ é chamada de função de utilidade CRRA (Constant Relative Risk Aversion).

$$r_R(x) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)} = -\frac{-x\rho x^{-(\rho+1)}}{x^{-\rho}} = \rho$$

# Outro Exemplo: Mercados Financeiros

- Considere agora o mesmo agricultor, que se depara com as mesmas chances de chuva ou tempo bom.
- Outra opção seria comprar um ativo que paga 1 unidade de consumo em caso de chuva.
- Comprando $q$ unidades a um preço $q$ do ativo, o agricultor paga $pq$ e obtém $q$ unidades do bem de consumo se chover.
- Agricultor terá:
  - $1 + q - pq$ se chover
  - $9 - pq$ se chover
- O agente maximizará sua utilidade esperada:

$$\max_q \mathrm{Pr(sol)} u(9 - pq) + \mathrm{Pr(chuva)} u(1 + q(1 - p))$$

# Outro Exemplo: Mercados Financeiros

- Condição de Primeira Ordem:

$$\text{Pr(sol)}u'(9 - pq)p = \text{Pr(chuva)}u'(1 + q(1 - p))(1 - p)$$

- Preço $p = \text{Pr(chuva)} \times 1$, em que ganho do vendedor é igual ao custo esperado, é chamado de "preço justo" do ativo.
- **Seguro imperfeito**: Se $p > \text{Pr(chuva)}$, consumo sob chuva é menor que consumo sob tempo bom.

$$u'(9 - pq) < u'(1 + q(1 - p))$$

- **Sobre seguro**: Se $p < \text{Pr(chuva)}$, consumo sob chuva é maior que consumo sob tempo bom.

$$u'(9 - pq) > u'(1 + q(1 - p))$$

# Bens contingentes

- Mercado para consumo em cada estado da natureza.
- Consumo sob sol é denotado $x_s$ e consumo sob chuva $x_c$.
- Antes de conhecer o clima, negociam-se direitos de consumo sob chuva e sob sol, a preços $p_s$ e $p_c$, respectivamente.
- Consumidor com renda $w$ e utilidade v.N.-M. $u$, soluciona:

$$\max_{x_s, x_c} \quad u(x_s, x_c)$$
$$\text{s.a} \quad p_s x_s + p_c x_c = w$$

  - Condições de Primeira Ordem:

$$\text{Pr(chuva)}u'(x_c) = \lambda p_c \quad \text{e} \quad [\text{1-Pr(chuva)}]u'(x_s) = \lambda p_s$$

# Bens contingentes

Condições de Primeira Ordem:

$$\text{Pr(chuva)}u'(x_c^*) = \lambda p_c$$

$$\text{1-Pr(chuva)}]u'(x_s^*) = \lambda p_s$$

Se Pr(chuva) $= p_c$ e [1-Pr(chuva)] $= p_s$
(preços são "justos") temos que:

$$u'(x_c^*) = u'(x_s^*) \quad \Rightarrow \quad x_c^* = x_s^*$$