# Minimização de Despesa

- Ao invés de fixar preços e renda e buscar o nível máximo de utilidade atingível, resolvemos um problema distinto.
- **Qual o menor nível de despesa que o consumidor consegue atingir, fixados um vetor de preços e um nível de utilidade?**
- Fixamos uma curva de indiferença e encontramos a isogasto que a tangencia.

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \quad & p \cdot x \\ \text{s.a} \quad & u(x) \geq u \end{aligned}$$

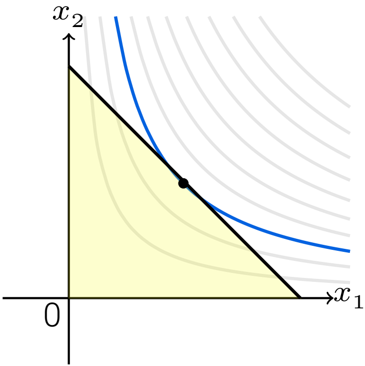
- Função despesa:

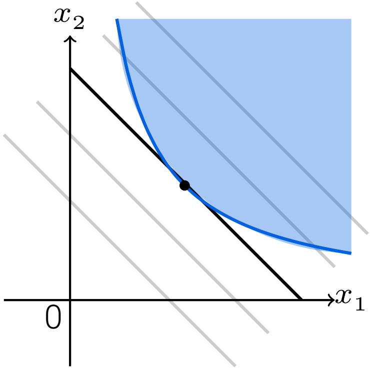
$$e(p,u) = p \cdot h(p,u) = \min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{p \cdot x \ \text{ s.a. } \ u(x) \geq u\}$$

# Minimização de Despesa

Ao invés de fixar preços e renda e buscar o nível máximo de utilidade atingível, resolvemos um problema distinto.

**Qual o menor nível de despesa que o consumidor consegue atingir, fixados um vetor de preços e um nível de utilidade?**



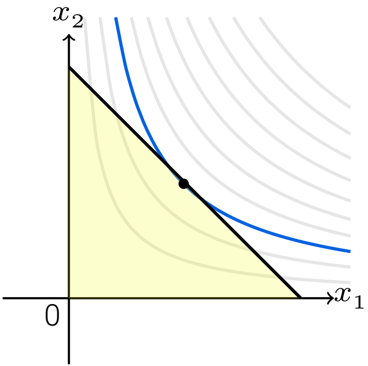
# Minimização de Despesa

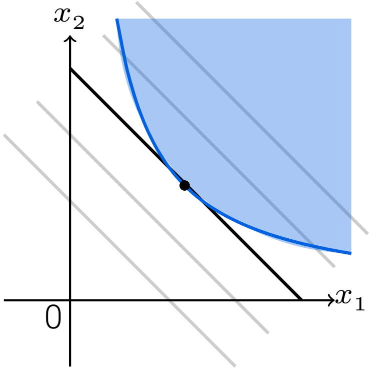
Utilidade Indireta

$$
\begin{aligned}
v(p, w) &= \max_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{u(x) \ \text{ s.a. } \ p \cdot x \leq w\} \\
&= u(x(p, w))
\end{aligned}
$$

Função despesa

$$
\begin{aligned}
e(p, u) &= \min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{p \cdot x \ \text{ s.a. } \ u(x) \geq u\} \\
&= p \cdot h(p, u)
\end{aligned}
$$

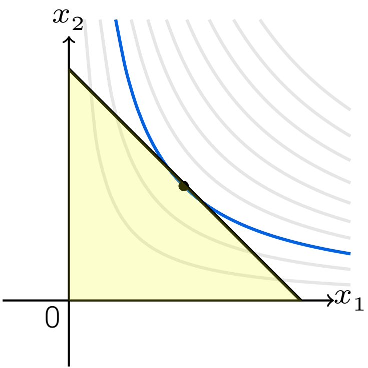


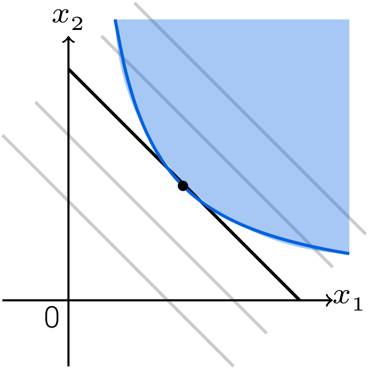



# Minimização de Despesa

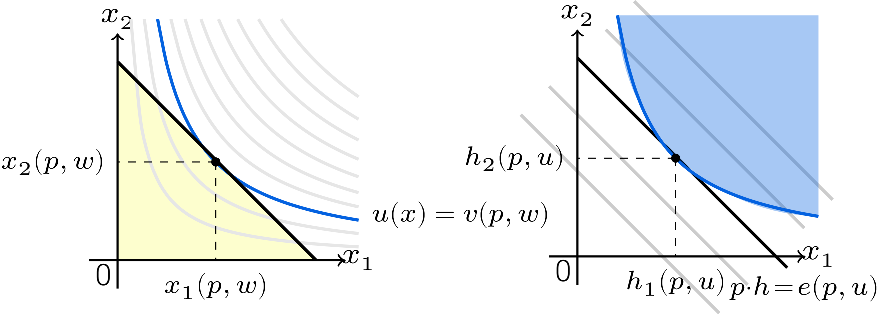
$$v(p,w) = \max_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{u(x) \ \text{ s.a. } \ p \cdot x \leq w\}$$
$$= u(\underbrace{x(p,w)}_{\text{Demanda Marshalliana}})$$

$$e(p,u) = \min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{p \cdot x \ \text{ s.a. } \ u(x) \geq u\}$$
$$= p \cdot \underbrace{h(p,u)}_{\text{Demanda Hicksiana}}$$



# Minimização de Despesa




**Observando os gráficos, é fácil verificar que:**

- $e(p, v(p,w)) = w$
- $v(p, e(p,u)) = u$

# Propriedades

- **Despesa cresce com os preços** (Teorema do Envelope):

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_\ell} = h_\ell(p,u) \geq 0$$

- Para aumentar a utilidade, é preciso aumentar a despesa:

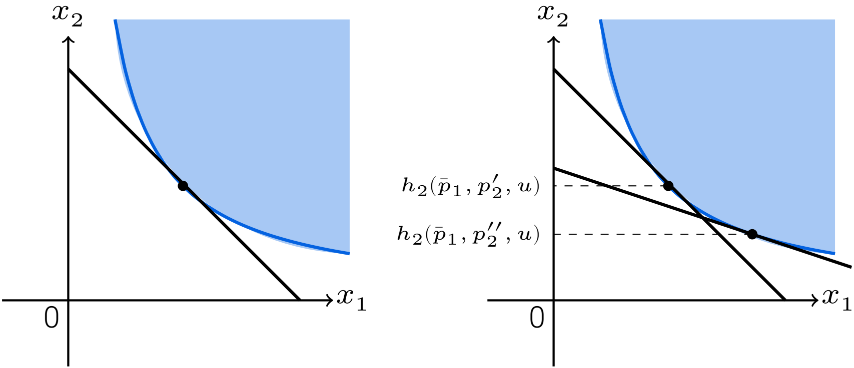
$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial u} = \mu$$

- **Homogeneidade de grau 1** nos preços:

$$e(\lambda p, u) \equiv \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^L_+} & \lambda p \cdot x \\ \text{s.a.} & u(x) \geq u \end{cases} = \begin{cases} \lambda \min\limits_{x \in \mathbb{R}^L_+} & p \cdot x \\ \text{s.a.} & u(x) \geq u \end{cases} \equiv \lambda e(p,u)$$

- **Sem excesso de utilidade:** $u(h(p,u)) = u$

# Demanda Hicksiana e Variações nos Preços




- Um aumento no preço do bem 2 torna o preço do bem 2 mais caro em relação ao bem 1, induzindo a substituição.

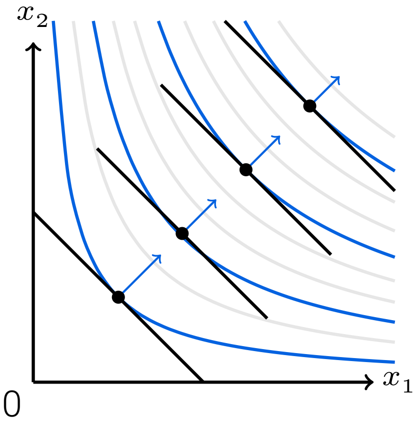
# Efeito-Renda

- Como se comporta a demanda marshalliana quando variamos a renda do consumidor?

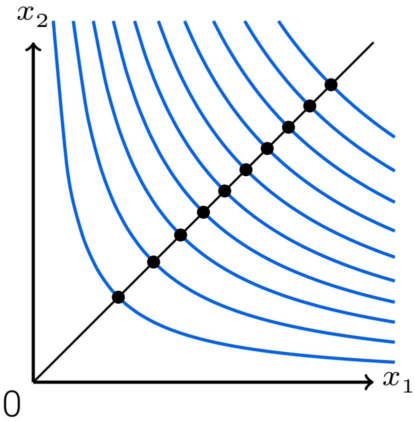
$$\frac{\partial x_\ell(p, w)}{\partial w}$$

- **Chamamos a variação na demanda marshalliana em resposta a uma variação na renda de efeito-renda.**
- Quando fixamos todos os preços em um dado nível $\bar{p}$, a função resultante $x(\bar{p}, w)$ depende apenas da renda do consumidor.
- Chamamos essa função de **Função de Engel**. Seu conjunto imagem em $\mathbb{R}^L_+$, $\{x(\bar{p}, w) : w > 0\}$ é conhecido como caminho de expansão da renda.

# Caminho de Expansão da Renda (1)



# Caminho de Expansão da Renda (2)



# Elasticidade-Renda da Demanda

A partir do efeito-renda, podemos também definir a **elasticidade-renda da demanda** pelo $\ell$-ésimo bem:

$$\varepsilon_{\ell w}(p, w) = \frac{\partial x_\ell(p, w)}{\partial w} \frac{w}{x_\ell(p, w)}$$

# Bens Normais e Bens Inferiores

1. **Bens Normais:** consumo do bem é não decrescente na renda:

$$\varepsilon_{\ell w}(p, w) \geq 0$$

   Bens normais podem ser subclassificados ainda em:

   1.1 **Bens Necessários:** consumo cresce em magnitude <u>menor</u> que a renda:

$$0 < \varepsilon_{\ell w}(p, w) < 1$$

   1.2 **Bens de Luxo:** consumo cresce em magnitude <u>maior</u> que a renda:

$$\varepsilon_{\ell w}(p, w) > 1$$

2. **Bens Inferiores:** consumo decresce com a renda:

$$\varepsilon_{\ell w}(p, w) < 0$$

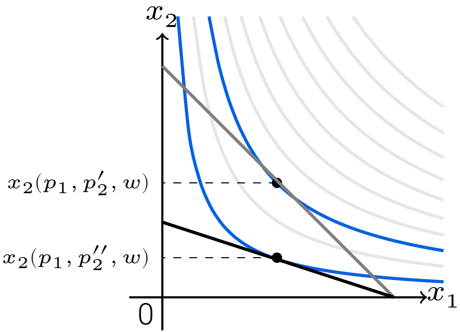
# Efeito-Preço

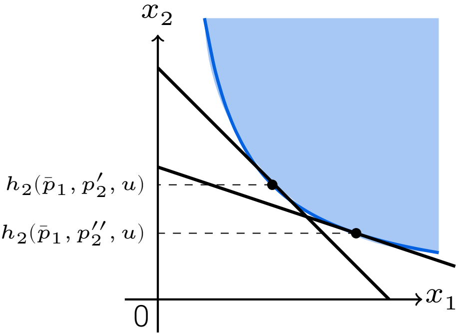
- Como se comporta a demanda marshalliana quando variamos o preço?

$$\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_\ell}$$

- **Chamamos a variação na demanda marshalliana em resposta a uma variação no preço de efeito-preço.**

# Demanda Hicksiana e Variações nos Preços




**Efeito-preço**

$$\frac{\partial x_\ell(p, w)}{\partial p_\ell} \gtreqless 0$$

**Efeito-substituição**

$$\frac{\partial h_\ell(p, u)}{\partial p_\ell} \leq 0$$

# Equação de Slutsky

- Seja $\bar{w} = e(\bar{p}, \bar{u})$. Então $h(p,u) = x(p, e(p,u))$, $\forall (p,u)$. Logo:

$$\frac{\partial h_\ell(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_k} = \frac{\partial x_\ell(\bar{p}, e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial p_k} + \frac{\partial x_\ell(\bar{p}, e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial w} \underbrace{\frac{\partial e(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_k}}_{h_k(\bar{p},\bar{u})}$$

- Como $\bar{w} = e(\bar{p},\bar{u})$ e $h_k(\bar{p},\bar{u}) = x_k(\bar{p}, e(\bar{p},\bar{u})) = x_k(\bar{p},\bar{w})$:

$$\frac{\partial h_\ell(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_k} = \frac{\partial x_\ell(\bar{p},\bar{w})}{\partial p_k} + \frac{\partial x_\ell(\bar{p},\bar{w})}{\partial w} x_k(\bar{p},\bar{w})$$

- Essa equação chamamos de **Equação de Slutsky**.

# Efeito-preço e Equação de Slutsky

$$\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k} = \underbrace{\frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k}}_{\text{efeito-substituição}} - \underbrace{\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial w} x_k(p,w)}_{\text{efeito}-\text{renda}}, \quad \forall \ell, k \in \{1, \dots, L\}$$

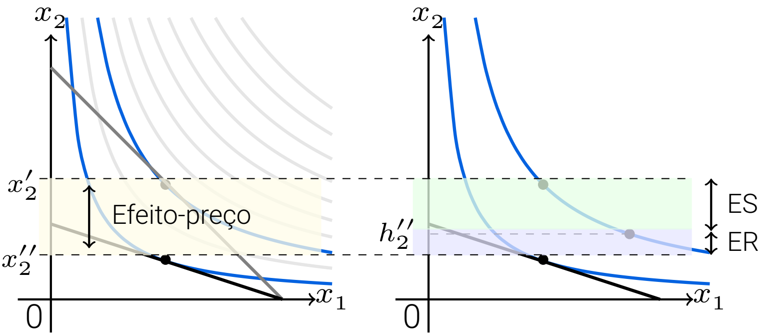
**Intuição:** se $p_k$ muda, dois efeitos sobre a demanda do bem $\ell$:

1. **Efeito-substituição**
   - $\rightarrow$ movimento ao longo da curva de indiferença original
   - $\rightarrow$ é o efeito da mudança nos preços, mantendo-se fixa a utilidade.
2. **Efeito-renda**:
   - $\rightarrow$ movimento de uma curva de indiferença para outra
   - $\rightarrow$ é o efeito da mudança na renda, mantendo-se fixos os preços

# Efeito-preço e Equação de Slutsky

**Intuição:** efeito-preço de $p_k$ sobre demanda walrasiana do bem $\ell$ pode ser decomposto em:

1. **Efeito-substituição**: movimento ao longo da curva de indiferença original
2. **Efeito-renda**: movimento para uma outra curva de indiferença



# Bens Substitutos e Complementares Líquidos

$$\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k} = \frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k} - \frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial w} x_k(p,w), \quad \forall \ell, k \in \{1, \dots, L\}$$

- Substitutos Líquidos:

$$\frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k} > 0$$

- Complementares Líquidos:

$$\frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k} < 0$$

**Teorema de Young:** Sem efeito-renda, teremos sempre:

$$\frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_k \partial p_\ell} = \frac{\partial h_k(p,u)}{\partial p_\ell}$$

# Bens Substitutos e Complementares Brutos

$$\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k} = \frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k} - \frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial w} x_k(p,w), \quad \forall \ell, k \in \{1, \dots, L\}$$

- Substitutos Brutos:

$$\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k} > 0$$

- Complementares Brutos:

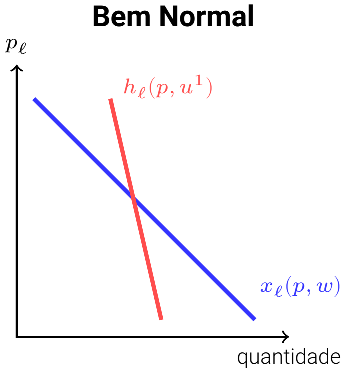
$$\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k} < 0$$

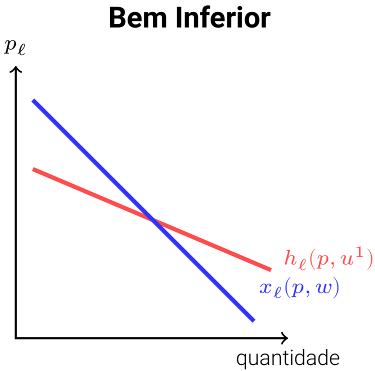
# Efeito-Preço e Efeito-Substituição

$$\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_\ell} = \underbrace{\frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_\ell}}_{\text{efeito-substituição}} - \underbrace{\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial w} x_\ell(p,w)}_{\text{efeito-renda}}, \quad \forall \ell, \ell \in \{1, \dots, L\}$$

- Se os bens são normais, demanda compensada é <u>mais</u> inclinada que a demanda marshalliana.
- Se os bens são inferiores, demanda compensada é <u>menos</u> inclinada que a demanda marshalliana.

# Inclinações das Demanas Marshalliana e Hicksiana



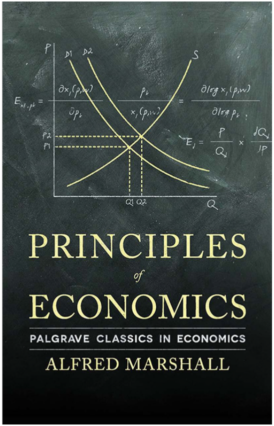
# Efeito-Preço e Efeito-Substituição

$$\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_\ell} = \underbrace{\frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_\ell}}_{\text{efeito-substituição}} - \underbrace{\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial w} x_\ell(p,w)}_{\text{efeito-renda}}, \quad \forall \ell, \ell \in \{1, \dots, L\}$$

- Demanda Hicksiana é sempre negativamente inclinada: efeito-substituição é negativo.
  - $\rightarrow$ Lei da Demanda Compensada
- Em tese, Demanda Marshalliana pode ser positivamente inclinada se o bem for inferior.
  - $\rightarrow$ Efeito-renda compensa efeito-substituição
  - $\rightarrow$ Paradoxo de Giffen

# Paradoxo de Giffen

MARSHALL, Alfred. **Principles of Economics**.




*"As Mr. Giffen has pointed out, a rise in the price of bread makes so large a drain on the resources of the poorer labouring families and raises so much the marginal utility of money to them, that they are forced to curtail their consumption of meat and the more expensive farinaceous foods: and, bread being still the cheapest food which they can get and will take, they consume more, and not less of it."*

# Paradoxo de Giffen: Evidências Empíricas

American Economic Review 2008, 98:4, 1553-1577

## Giffen Behavior and Subsistence Consumption

*By* Robert T. Jensen and Nolan H. Miller*

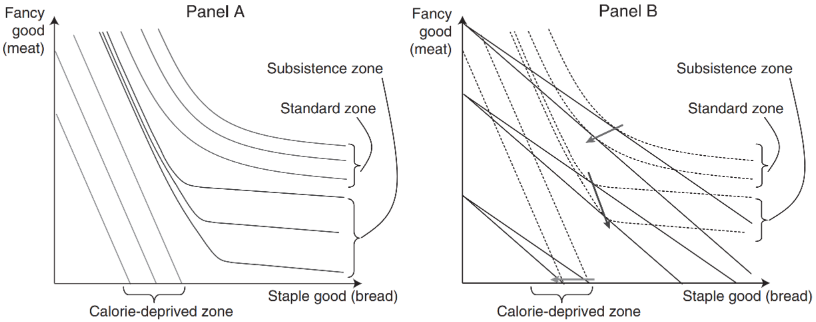
- *Since Marshall's time, a discussion of "Giffen" behavior has found its way into virtually every basic economics course, despite a lack of real-world evidence supporting Marshall's conjecture.*
- *This paper provides the first real-world evidence of Giffen behavior, i.e., upward sloping demand.*

# Paradoxo de Giffen: Evidências Empíricas

American Economic Review 2008, 98:4, 1553-1577

## Giffen Behavior and Subsistence Consumption

*By* ROBERT T. JENSEN AND NOLAN H. MILLER*



# Paradoxo de Giffen: Evidências Empíricas

American Economic Review 2008, 98:4, 1553-1577

## Giffen Behavior and Subsistence Consumption

*By* Robert T. Jensen and Nolan H. Miller*

- *We conducted a field experiment in which, for five months, randomly selected households were given vouchers that subsidized their purchases of their primary dietary staple.*
- *Subsidizing the prices of dietary staples for extremely poor households in two provinces of China, we find strong evidence of Giffen behavior for rice in Hunan, and weaker evidence for wheat in Gansu.*

# Paradoxo de Giffen: Implicações de Política Pública

The Review of Economics and Statistics, 93(4), 1205-1223.

**DO CONSUMER PRICE SUBSIDIES REALLY IMPROVE NUTRITION?**

Robert T. Jensen and Nolan H. Miller*

- Na presença do Paradoxo de Giffen, políticas de redução de preço ao consumidor podem ter efeitos opostos aos esperados.
- *Overall, we find no evidence that the consumer price subsidy improved nutrition, and it may have actually reduced caloric intake in one of our provinces.*
- **Ainda assim, fenômeno com pouca evidência empírica e teoricamente restrito a condições específicas.**

# Elasticidades-Preço da Demanda Marshalliana

- Elasticidade-preço da Demanda Marshalliana

$$\varepsilon_\ell(p, w) = \frac{\partial x_\ell(p, w)}{\partial p_\ell} \frac{p_\ell}{x_\ell(p, w)}$$

  $\rightarrow$ Demanda Inelástica: $|\varepsilon_\ell(p, w)| < 1$

  $\rightarrow$ Demanda Elástica: $|\varepsilon_\ell(p, w)| > 1$

- Elasticidade-preço cruzada da Demanda Marshalliana

$$\varepsilon_{\ell,k}(p, w) = \frac{\partial x_\ell(p, w)}{\partial p_k} \frac{p_k}{x_\ell(p, w)}$$

# Elasticidades-Preço da Demanda Hicksiana

- Elasticidade-preço da Demanda Hicksiana

$$\varepsilon_\ell^h(p,u) = \frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_\ell}\frac{p_\ell}{h_\ell(p,u)}$$

- Elasticidade-preço cruzada da Demanda Hicksiana

$$\varepsilon_{\ell,k}^h(p,u) = \frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k}\frac{p_k}{h_\ell(p,u)}$$

# Agregação de Engel: Efeitos-Renda

- **É possível que todos os bens sejam de luxo? Ou todos inferiores?**
- Resposta: Não se o consumidor consumir toda a sua renda.

$$\frac{\partial}{\partial w}[p \cdot x(p,w)] = \frac{\partial}{\partial w} w \;\Rightarrow\; \sum_{\ell=1}^{L} \left[ \frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial w} p_\ell \right] = 1$$

- A despesa total do consumidor deve variar em valor igual à variação na sua renda.

# Agregação de Engel: Elasticidades

$$\frac{\partial}{\partial w}[p \cdot x(p,w)] = \frac{\partial}{\partial w} w \;\Rightarrow\; \sum_{\ell=1}^{L} \left[ \frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial w} p_\ell \right] = 1$$

- A Agregação de Engel também pode ser escrita usando elasticidades, multiplicando ambos os lados da equação por:

$$\frac{x_\ell(p,w)}{w} \frac{w}{x_\ell(p,w)} \quad \text{para} \quad \ell = 1, \dots, L$$

- Desse modo, chegamos a:

$$\sum_{\ell=1}^{L} s_\ell \varepsilon_{\ell w} = 1 \quad \text{em que} \quad s_\ell = \frac{p_\ell x_\ell(p,w)}{w}$$

- Não podemos ter todos os bens sendo inferiores, nem todos os bens necessários, nem todos os bens de luxo.

# Agregação de Cournot: Efeitos-Preço

- **Qual a relação entre as variações das demandas marshallianas de todos os bens em resposta à variação em um preço qualquer?**
- Se o consumidor sempre consome toda a sua renda, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p_k}[p \cdot x(p,w)] &= \frac{\partial}{\partial p_k} w \\
\frac{\partial}{\partial p_k}\left[\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell x_\ell(p,w)\right] &= 0 \\
\sum_{\ell=1}^{L}\left[\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k} p_\ell + x_k(p,w)\right] &= 0 \quad \forall k = 1, \dots, L
\end{aligned}
$$

# Agregação de Cournot: Elasticidades (1)

$$\sum_{\ell=1}^{L}\left[\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}p_\ell + x_k(p,w)\right] = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, L$$

- Se multiplicarmos ambos os lados da equação por:

$$\frac{1}{w}\frac{p_k}{p_k}\prod_{\ell=1}^{L}\frac{x_\ell(p,w)}{x_\ell(p,w)}$$

- Chegamos, então, a:

$$\sum_{\ell=1}^{L}\left[\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}p_\ell\frac{p_k}{w}\right] + \frac{p_k x_k(p,w)}{w} \quad = \quad 0$$

# Agregação de Cournot: Elasticidades (2)

$$\sum_{\ell=1}^{L}\left[\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}p_\ell\frac{p_k}{w}\right]+\frac{p_k x_k(p,w)}{w} \quad = \quad 0$$

- Multiplicando o $\ell$-ésimo termo do somatório por $x_\ell(p,w)[x_\ell(p,w)]^{-1}$, temos:

$$\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}\frac{p_k}{x_\ell(p,w)}\frac{p_\ell x_\ell(p,w)}{w}+\frac{p_k x_k(p,w)}{w} \quad = \quad 0$$

$$\sum_{\ell=1}^{L}\varepsilon_{\ell k}s_\ell+s_k=0 \;\;\Rightarrow\;\; s_k=-\sum_{\ell=1}^{L}\varepsilon_{\ell k}s_\ell$$

# Agregação de Cournot: Elasticidades (3)

$$s_k = -\sum_{\ell=1}^{L} \varepsilon_{\ell k} s_\ell \qquad (1)$$

- Note que, quando a fração da renda gasta com o $\ell$-ésimo bem é:
  1. **Pequena:** quando o $\ell$-ésimo bem tem muitos substitutos ou quando a fração da renda gasta com esses substitutos é grande.
  2. **Grande:** quando o $\ell$-ésimo bem tem muitos complementares ou quando a fração da renda gasta com esses complementares é grande.

# Elasticidades-Preço da Demanda Marshalliana

- Elasticidade-preço da Demanda Marshalliana

$$\varepsilon_\ell(p,w) = \frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_\ell}\frac{p_\ell}{x_\ell(p,w)}$$

  $\rightarrow$ Demanda Inelástica: $|\varepsilon_\ell(p,w)| < 1$

  $\rightarrow$ Demanda Elástica: $|\varepsilon_\ell(p,w)| > 1$

- Fatores que afetam elasticidade-preço:

  $\rightarrow$ Existência de substitutos

  $\rightarrow$ Tempo transcorrido desde variação no preço

  $\rightarrow$ % da renda gasto com o bem

  $\rightarrow$ Quão necessário o consumidor considera o bem.

# Elasticidades-Preço da Demanda Marshalliana

- Elasticidade-preço cruzada da Demanda Marshalliana

$$\varepsilon_{\ell,k}(p,w) = \frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}\frac{p_k}{x_\ell(p,w)}$$

# Elasticidades-Preço da Demanda Hicksiana

- Elasticidade-preço da Demanda Hicksiana

$$\varepsilon_\ell^h(p,u) = \frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_\ell} \frac{p_\ell}{h_\ell(p,u)}$$

- Elasticidade-preço cruzada da Demanda Hicksiana

$$\varepsilon_{\ell,k}^h(p,u) = \frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k} \frac{p_k}{h_\ell(p,u)}$$

# Agregação de Cournot: Efeitos-Preço

- **Qual a relação entre as variações das demandas marshallianas de todos os bens em resposta à variação em um preço qualquer?**
- Se o consumidor sempre consome toda a sua renda, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p_k}[p \cdot x(p,w)] &= \frac{\partial}{\partial p_k} w \\
\frac{\partial}{\partial p_k}\left[\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell x_\ell(p,w)\right] &= 0 \\
\sum_{\ell=1}^{L}\left[\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k} p_\ell + x_k(p,w)\right] &= 0 \quad \forall k = 1, \dots, L
\end{aligned}
$$

# Agregação de Cournot: Elasticidades (1)

$$\sum_{\ell=1}^{L}\left[\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}p_\ell + x_k(p,w)\right] = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, L$$

- Se multiplicarmos ambos os lados da equação por:

$$\frac{1}{w}\frac{p_k}{p_k}\prod_{\ell=1}^{L}\frac{x_\ell(p,w)}{x_\ell(p,w)}$$

- Chegamos, então, a:

$$\sum_{\ell=1}^{L}\left[\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}p_\ell\frac{p_k}{w}\right] + \frac{p_k x_k(p,w)}{w} \quad = \quad 0$$

# Agregação de Cournot: Elasticidades (2)

$$\sum_{\ell=1}^{L}\left[\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}p_\ell\frac{p_k}{w}\right]+\frac{p_k x_k(p,w)}{w} \quad = \quad 0$$

- Multiplicando o $\ell$-ésimo termo do somatório por $x_\ell(p,w)[x_\ell(p,w)]^{-1}$, temos:

$$\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}\frac{p_k}{x_\ell(p,w)}\frac{p_\ell x_\ell(p,w)}{w}+\frac{p_k x_k(p,w)}{w} \quad = \quad 0$$

$$\sum_{\ell=1}^{L}\varepsilon_{\ell k}s_\ell+s_k=0 \;\;\Rightarrow\;\; s_k=-\sum_{\ell=1}^{L}\varepsilon_{\ell k}s_\ell$$

# Agregação de Cournot: Elasticidades (3)

$$s_k = -\sum_{\ell=1}^{L} \varepsilon_{\ell k} s_\ell \tag{2}$$

- Note que, quando a fração da renda gasta com o $\ell$-ésimo bem é:
  1. **Pequena:** quando o $\ell$-ésimo bem tem muitos substitutos ou quando a fração da renda gasta com esses substitutos é grande.
  2. **Grande:** quando o $\ell$-ésimo bem tem muitos complementares ou quando a fração da renda gasta com esses complementares é grande.