Microeconomia I

TEORIA DA PRODUÇÃO

Rafael V. X. Ferreira
rafaelferreira@usp.br

Abril de 2020

Universidade de São Paulo (USP)
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade (FEA)
Departamento de Economia

Teoria da Produção

- A teoria da produção se ocupa do lado da oferta da economia;
- A oferta da economia é feita por unidades produtivas que chamamos de "firmas".
- Estamos interessados em construir o arcabouço teórico mais simples possível, que nos permita descrever o comportamento de mercado das firmas.
- Uma firma será, portanto, nada mais que uma "caixa preta" que transforma fatores de produção (insumos) em produtos.
- Não nos interessa, nesse curso, a forma como ela faz essa transformação, como ela é gerida, etc.

Tecnologia

- Produção é o processo de transformar insumos em produtos.
- Tecnologia determina que transformações são possíveis.
- Chamamos de **plano de produção** um vetor $y \equiv (y_1, y_2, \cdots, y_L) \in \mathbb{R}^L$, tal que $y_l > 0$ se l é um produto e $y_l < 0$ se l é um insumo (fator de produção).
- O conjunto de todos os planos de produção possíveis para uma dada tecnologia é representado pelo **conjunto de possibilidades de produção**, que denotamos por Y.
  - $y \in Y$: y é viável
  - $y \notin Y$: y é inviável
- Uma tecnologia é descrita pelas propriedades de Y.

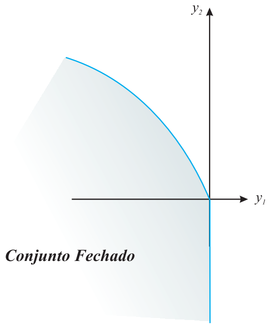
Tecnologia

Propriedades comuns a conjuntos de produção

1. Y fechado
2. Free disposal
3. No free lunch
4. Custos afundados
5. Inação
6. Irreversibilidade
7. Retornos à escala
8. Aditividade
9. Convexidade

Conjunto de produção fechado

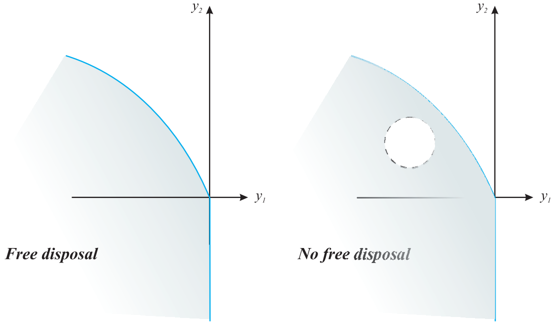
$$\forall \tilde{y}_n \in Y, \ \ n \in \mathbb{N}, \ \ \text{seja} \ \ y = \lim_{n \to \infty} \tilde{y}_n. \ \ \text{Segue que} \ \ y \in Y$$



- O conjunto de produção inclui a sua fronteira.

Livre descarte (free disposal)

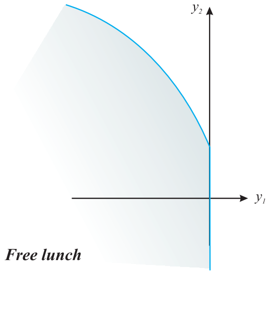
$$\tilde{y} \in Y \;\text{ e }\; \tilde{x} \in \mathbb{R}^L_+ \implies \tilde{y} - \tilde{x} \in Y$$



- É sempre possível usar mais insumos, sem alterar a quantidade produzida.

No free-lunch

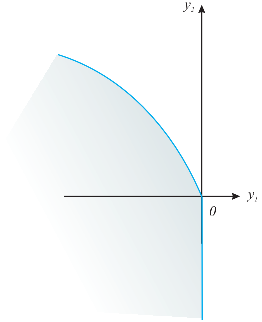
$$Y \cap \mathbb{R}^L_+ \subset \{0\}$$



- Não é possível produzir algo do nada; não há output sem inputs.

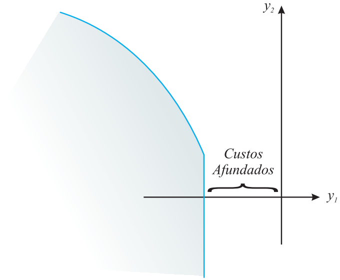
Inação é possível

$$0 \in Y$$



- É possível fechar a firma e não produzir nada, sem incorrer em custos.

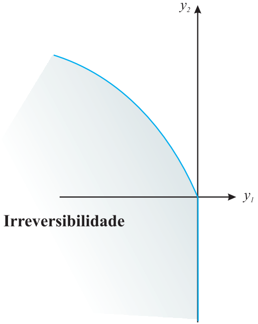
Custos afundados (sunk costs)

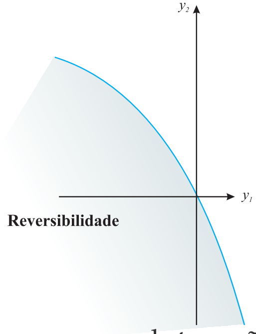


- Inação não é possível.
- Período de tempo considerado afeta a existência de custos afundados.

Irreversibilidade

$$\text{Se} \quad y \in Y \quad \text{e} \quad y \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad -y \notin Y$$

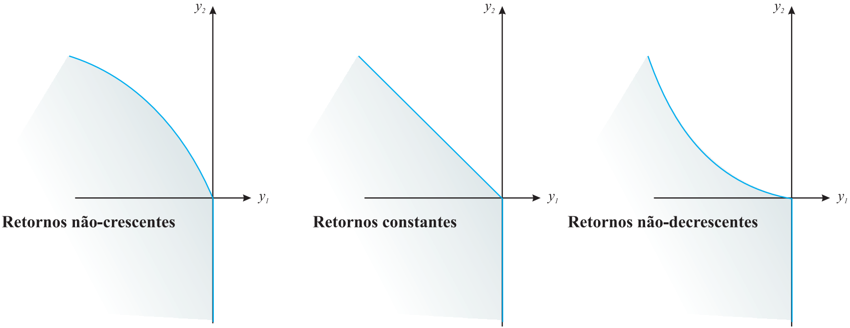




- Uma vez transformados insumos em produtos, não é possível transformar produtos de volta em insumos.

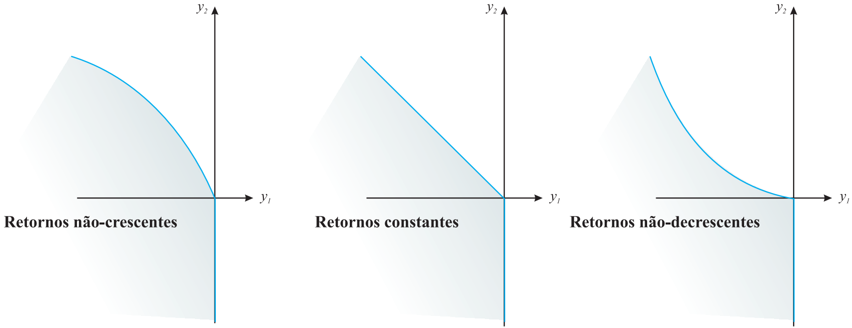
Retornos não-crescentes à escala

$$\text{Se } \; y \in Y \implies \alpha y \in Y, \; \forall \alpha \in [0, 1]$$



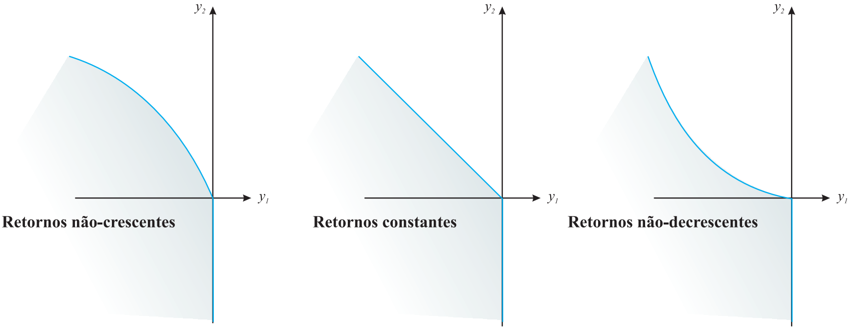
Retornos não-decrescentes à escala

$$\text{Se } y \in Y \implies \alpha y \in Y, \ \forall \alpha \geq 1$$



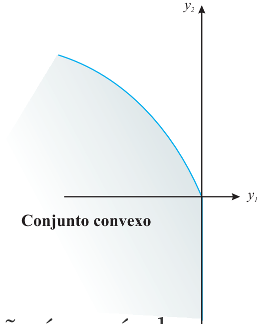
Retornos constantes à escala

$$\text{Se } y \in Y \implies \alpha y \in Y, \ \forall \alpha \geq 0$$



Convexidade

$$y_0 \in Y \ \text{ e } \ y_1 \in Y \implies \lambda y_0 + (1-\lambda) y_1 \in Y, \ \ \forall \lambda \in [0,1]$$



- Se inação é possível, convexidade implica retornos não-crescentes à escala.

Outras propriedades

- **Aditividade**

$$y_0 \in Y \;\text{ e }\; y_1 \in Y \implies y_0 + y_1 \in Y$$

- Conjunto de produção agregado precisa satisfazer aditividade para que **livre-entrada** seja possível.

- **Cone convexo**

$$y_0, y_1 \in Y \;\text{ e }\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \implies \alpha y_0 + \beta y_1 \in Y, \;\; \forall \alpha, \beta \geq 0$$

- Equivale à junção das propriedades de aditividade e retornos constantes à escala.

Função de Transformação

- Uma **função de transformação** F descreve o conjunto de possibilidades de produção.
  1. $\forall y \in Y, F(y) \leq 0.$
  2. $F(\bar{y}) = 0$, para todo $\bar{y}$ na fronteira de Y.
- **Fronteira de transformação**: $\{y \in Y : F(y) = 0\}$
- Se F é diferenciável e $\bar{y}$ está na fronteira de transformação, podemos definir a **taxa marginal de transformação** do bem l para o bem k em $\bar{y}$ como:

$$\text{TMT}_{l,k}(\bar{y}) = \frac{\frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_l}}{\frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_k}}$$

Objetivos da firma

- Firmas não são unidades autônomas. Seus objetivos derivam dos objetivos dos indivíduos que a controlam.
- Em vista disso, **maximização de lucro pode ser vista como um objetivo razoável para a firma?**
- A resposta é: sob certas condições, sim.
- Suponha haver J firmas e I indivíduos. As firmas são de propriedade dos indivíduos, de modo que o indivíduo i possui uma parcela $\theta_j^i \in [0, 1]$ da firma j. E, obviamente:

$$\sum_i \theta_j^i = 1$$

Objetivos da firma

- Se $e^i \in X^i$ é a dotação inicial do indivíduo i, sua restrição orçamentária é dada por:

$$p \cdot x \leq p \cdot e^i + \sum_j \theta_j^i \pi_j(p)$$

- Quanto maior o lucro, maior será a renda dos acionistas, fazendo com que maximização do lucro seja compatível com os objetivos individuais de todos os acionistas.
- Algumas hipóteses são chave:
    1. **Preços são fixos e não dependem da ação da firma**
    2. **Lucros são determinísticos**
    3. **Acionistas administram a firma**

Problema da Firma: Hipóteses

- Firma é maximizadora de lucros
- Firma é tomadora de preços: sua oferta de produtos e sua demanda por insumos não afeta os preços.
- $p \gg 0$ ($p_\ell > 0, \forall \ell$)
- $Y \neq \emptyset$: há ao menos um plano de produção factível.
- Y é fechado
- Vale free-disposal

Atenção: note que não explicamos de onde vêm os preços, nem como ou por quem são eles estabelecidos.

Problema da Firma

- Dado um vetor $p \in \mathbb{R}^L$ de preços, a firma escolhe o plano de produção de modo a maximizar o seu lucro π

$$\pi(p) = \max_{y \in Y} \; p \cdot y$$

- O conjunto dos planos de produção que solucionam o problema da firma é dado por:

$$S(p) = \arg\max\{p \cdot y \;:\; y \in Y\}$$

- Em outras palavras, a firma observa o vetor de preços e escolhe um plano de produção $y^* \in Y$ tal que $p \cdot y^* \geq p \cdot y, \forall y \in Y$.

Função lucro

Proposição

Seja $\pi(\cdot)$ a função lucro associada a um conjunto de produção Y, e seja $y(\cdot)$ a correspondência de oferta associada. Se Y é fechado e satisfaz a propriedade de livre descarte, temos que:

1. **Lema de Hotelling**: se $y(\bar{p})$ é unitário, então $\pi(\cdot)$ é diferenciável em $\bar{p}$ e $\nabla\pi(\bar{p}) = y(\bar{p})$.
2. $\pi(\cdot)$ é homogênea de grau 1;
3. Se Y é convexo, então $Y = \{y \in \mathbb{R}^L : p \cdot y \leq \pi(p), \forall p \gg 0\}$.
4. $y(\cdot)$ é homogênea de grau zero;
5. Se Y é convexo, $y(p)$ é convexo, $\forall p$

Função lucro

Proposição

Seja $\pi(\cdot)$ a função lucro associada a um conjunto de produção Y, e seja $y(\cdot)$ a correspondência de oferta associada. Se Y é fechado e satisfaz a propriedade de livre descarte, temos que:

6. $\pi(\cdot)$ é convexa;
7. Se $y(\cdot)$ é uma função diferenciável em $\bar{p}$, então $Dy(\bar{p}) = D^2\pi(\bar{p})$ é uma matriz positiva semi-definida simétrica, com $Dy(\bar{p})\bar{p} = 0$.

Firmas de produto único

- Nestes casos, podemos representar a tecnologia da firma usando uma **função de produção** $f : \mathbb{R}_+^{L-1} \to \mathbb{R}_+$:
- Uma função de produção associa quantidades de insumos a quantidades do produto.
- Hipóteses comumente feitas sobre a função de produção:
  1. Contínua
  2. Estritamente crescente
  3. Estritamente quase-côncava
  4. $f(0) = 0$
- Similarmente à curva de indiferença na teoria do consumidor, podemos definir uma **isoquanta** como:

$$Q(q) = \{z \in \mathbb{R}_+^{L-1} : f(z) = q\}$$

Condições de Inada

Uma função de produção satisfaz as **condições de Inada** se:

1. $f(0) = 0$
2. f é duas vezes continuamente diferenciável
3. $\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_l} > 0.$
4. $\dfrac{\partial^2 f(z)}{\partial z_l^2} < 0.$
5. $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\partial f(z)}{\partial z_l} = +\infty$
6. $\lim\limits_{z \to +\infty} \dfrac{\partial f(z)}{\partial z_l} = 0$

Taxa Marginal de Substituição Técnica

- Similarmente à taxa marginal de substituição na teoria do consumidor, podemos definir a **taxa marginal de substituição técnica** entre os insumos l e k no ponto z como:

$$\mathrm{TMST}_{l,k}(z) = \frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z_l}}{\frac{\partial f(z)}{\partial z_k}}$$

- Utilidade marginal não tem significado cardinal, mas a produtividade marginal tem.

Firmas de produto único no longo prazo

- Dado um vetor $w \in \mathbb{R}^{L-1}$, de preços de insumos e um preço de produto, $p \in \mathbb{R}$, a firma escolhe um vetor de insumos $z \in \mathbb{R}_+^{L-1}$, incorrendo em um custo de $w \cdot z$.
- Com essa quantidade de insumos, a firma pode produzir qualquer quantidade $q \in [0, f(z)]$, e pode vender essa quantidade de produtos no mercado, obtendo pq.
- **função lucro de longo prazo**:

$$\pi(p, w) = \begin{cases} \max\limits_{q,z} & pq - w \cdot z \\ \text{s.a.} & f(z) \geq q \end{cases}$$

- Se $f(\cdot)$ é estritamente crescente, sabemos que a restrição $f(z) \geq q$ é ativa.

Firmas de produto único no longo prazo

- **Demanda incondicional por insumos**:

$$z^*(p, w) \in \arg\max_z pf(z) - w \cdot z$$

- Se z^* é ótimo e f é diferenciável, precisamos ter:

$$p_l \frac{\partial f(z^*)}{\partial z_l} - w_l \leq 0, \ \ (= 0, \text{ se } z_l^* > 0)$$

- Se Y é convexo, esta CPO é também suficiente.
- E, para quaisquer dois bens l, k, precisamos ter:

$$\text{TMST}_{l,k}(z) = \frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z_l}}{\frac{\partial f(z)}{\partial z_k}} = \frac{w_l}{w_k}$$

Lei da Oferta

Proposição

A oferta da firma $y(p,w) = f(z^*(p,w))$ é positivamente inclinada e a demanda por fatores é negativamente inclinada.

Demonstração:
Sejam dois vetores (p^0, w^0) e (p^1, w^1) e as suas escolhas ótimas $(y^0, -z^0)$ e $(y^1, -z^1)$. Logo, temos que ter:

$$\begin{aligned} p^0 y^0 - w^0 \cdot z^0 \geq p^0 y^1 - w^0 \cdot z^1 \quad &\Longrightarrow \quad p^0(y^0 - y^1) - w^0 \cdot (z^0 - z^1) \geq 0 \\ p^1 y^1 - w^1 \cdot z^1 \geq p^1 y^0 - w^1 \cdot z^0 \quad &\Longrightarrow \quad p^1(y^1 - y^0) - w^1 \cdot (z^1 - z^0) \geq 0 \end{aligned}$$

Segue, pois, que:

$$\left[(p^0, w^0) - (p^1, w^1)\right] \left[\begin{pmatrix} y^0 \\ -z^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^1 \\ -z^1 \end{pmatrix} \right] \geq 0$$

$\square$

Firmas de produto único no curto prazo

- Seja $z \equiv (x, \bar{x})$ um vetor de insumos, em que x é um subvetor de insumos variáveis, e $\bar{x}$ um subvetor de insumos fixos. w e $\bar{w}$ são os respectivos vetores de preços.
- **função lucro de curto prazo**:

$$\pi(p, w, \bar{w}, \bar{x}) = \begin{cases} \max\limits_{q,x} & pq - \bar{w} \cdot \bar{x} - w \cdot x \\ \text{s.a.} & f(x, \bar{x}) \geq q \end{cases}$$

- **demanda por insumos no curto prazo**:

$$z^*(p, w, \bar{w}, \bar{x}) \in \arg\max_x pf(x, \bar{x}) - w \cdot x - \bar{w} \cdot \bar{x}$$

Minimização de custos

- Qual o mínimo que a firma precisa gastar para produzir uma quantidade q?

$$c(w,q) = \min_x \left\{ w \cdot x \ : \ x \in \mathbb{R}_+^{L-1} \text{ e } f(x) \geq q \right\}$$

- A função $c(w,q)$ é chamada de função custo.
- A solução do problema de minimização de custos é chamada de **demanda condicional por fatores**:

$$\bar{z}(w,q) = \arg\min_x \left\{ w \cdot x \ : \ x \in \mathbb{R}_+^{L-1} \text{ e } f(x) \geq q \right\}$$

- **Existência**: se $f(\cdot)$ é contínua (já que a restrição cria um conjunto fechado).
- **Unicidade**: se $f(\cdot)$ é estritamente quase-côncava.

Minimização de custos

- $f(\cdot)$ diferenciável e z^* ótimo implica que, $\forall \ell = 1, \ldots, L-1$ precisamos ter:

$$\frac{\partial \mathscr{L}(z, \lambda)}{\partial z_\ell} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad w_\ell \geq \lambda \frac{\partial f(z^*)}{\partial z_\ell}, \quad \text{com igualdade se } \; z_\ell^* > 0$$

- Ou, em notação matricial:

$$w \geq \lambda \nabla f(z^*) \; \text{ e } \; [w - \lambda \nabla f(z^*)] \cdot z^* = 0$$

- λ é a variação marginal na função objetivo ao se relaxar a restrição $f(z) \geq q$: custo marginal de produção.
- $c(w, q)$, a função valor do problema, é chamada de função custo.

Proposição

Seja $c(w,q)$ função custo de uma firma de produto único com tecnologia Y e função de produção $f(\cdot)$ e seja $z(w,q)$ a correspondência de demanda condicional por fatores associada. Suponha Y fechado e satisfazendo a propriedade de livre descarte.

1. **Lema de Sheppard**: se $z(\bar{w},q)$ consiste de um único ponto e $c(w,q)$ é diferenciável com respeito a w em $\bar{w}$, então:

$$\frac{\partial c(\bar{w},q)}{\partial w_\ell} = z(\bar{w},q)$$

2. $c(\cdot)$ é homogênea de grau um em w e não-decrescente em q.

3. $c(\cdot)$ é côncava em w

Proposição

Seja $c(w, q)$ função custo de uma firma de produto único com tecnologia Y e função de produção $f(\cdot)$ e seja $z(w, q)$ a correspondência de demanda condicional por fatores associada. Suponha Y fechado e satisfazendo a propriedade de livre descarte.

4. $z(\cdot)$ é homogênea de grau zero em w
5. Se $f(\cdot)$ é homogênea de grau um (retornos constantes à escala), então $c(\cdot)$ e $z(\cdot)$ são homogêneas de grau um em q.
6. Se $f(\cdot)$ é côncava, então $c(\cdot)$ é uma função convexa em q (custos marginais não-decrescentes em q).

Equivalência

Proposição

Maximização de lucros implica minimização de custos.

Demonstração:

1. Seja y^* o nível de produto que maximiza o lucro e z^* o vetor de insumos utilizados para produzir y^*.
2. Suponha que exista um outro vetor de insumos $\tilde{z}$ tal que $f(\tilde{z}) \geq y^*$, e $w \cdot \tilde{z} < w \cdot z^*$.
3. Logo, o lucro associado a $\tilde{z}$ é tal que $pf(\tilde{z}) - w \cdot \tilde{z} \geq py^* - w \cdot \tilde{z} > py^* - w \cdot z^*$.
4. Segue, pois, que y^* não é ótimo. Contradição.

$\square$

Problema da firma em 2 estágios

- Equivalência permite dividir o problema da firma em dois estágios:
  1. Para todo q, computamos $c(w, q)$.
  2. Em seguida, resolvemos:

$$\max_{q \in \mathbb{R}_+} pq - c(w, q)$$

- Solução do problema é dada por:

$$p \leq \frac{\partial c(w, q^*)}{\partial q} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 c(w, q)}{\partial q^2} \geq 0$$

- Função custo é convexa em q se Y for convexo.

Problema da firma em 2 estágios

- Equivalência permite dividir o problema da firma em dois estágios:
  1. Para todo q, computamos $c(w, q)$.
  2. Em seguida, resolvemos:

$$\max_{q \in \mathbb{R}_+} pq - c(w, q)$$

- Solução do problema é dada por:

$$p = \frac{\partial c(w, q)}{\partial q} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 c(w, q)}{\partial q^2} \geq 0$$

- Função custo é convexa em q se Y for convexo.

Excedente do Produtor

- O **excedente do produtor** é a diferença entre as receitas e os custos variáveis:

$$\mathrm{CV}(q, w) = \int_0^q \frac{\partial c(s, w)}{\partial s} ds$$

- Como a receita é pq, o excedente é dado por:

$$\mathrm{EP}(q, p, w) = \int_0^q \left(p - \frac{\partial c(s, w)}{\partial s} \right) ds$$

- O lucro será o excedente do produtor menos o custo fixo.

Condição de encerramento de operações

- A firma pode operar no curto prazo mesmo com lucro negativo, mas no longo prazo ela só produz se o lucro for não-negativo.
- Em outras palavras: uma firma nunca produzirá uma quantidade positiva no curto prazo se o preço for menor que o custo variável médio:

$$\mathrm{EP}(q^*, p, w) > 0 \implies pq^* - \mathrm{CV}(q^*, w) > 0$$

$$\left[p - \frac{\mathrm{CV}(q^*, w)}{q^*}\right] q^* > 0$$

Agregação

- Como vimos anteriormente, variações na oferta da firma não possuem efeito análogo ao efeito-renda do consumidor.
- Isso simplifica a agregação no lado da oferta, e as propriedades mais importantes da oferta individual se preservam mediante agregação.
- Seja a correspondência de oferta agregada, $y(p)$ dada por:

$$\begin{aligned} y(p) &= \sum_j y_j(p) \\ &= \{y \in \mathbb{R}^L : y = \sum_j y_j,\ \text{para algum}\ y_j \in y_j(p),\ j = 1, \ldots, J\} \end{aligned}$$

Agregação

Proposição

Para todo $p \gg 0$, temos:

1. $\pi^*(p) = \sum_j \pi^j(p)$
2. $y^*(p) = \sum_j y^j(p) = \left\{ \sum_j y^j : y_j \in y(p) \; \forall j \right\}$.

Agregação

Proposição

Para todo $p \gg 0$, temos:

1. $\pi^*(p) = \sum_j \pi^j(p)$

Demonstração ($\geq$):

1. Tome uma coleção $\{y_j\}_{j=1}^J$, com $y_j \in Y^j$. Então $\sum_j y^j \in Y$.
2. $\pi^*(p)$ é a função lucro associada a Y. Logo:

$$\pi^*(p) \geq p \cdot \sum_j y^j = \sum_j p \cdot y^j$$

3. Em particular, para $y^j = y^j(p)$, temos $\pi^*(p) \geq \sum_j \pi^j(p)$.

Agregação

Proposição

Para todo $p \gg 0$, temos:

1. $\pi^*(p) = \sum_j \pi^j(p)$

Demonstração $(\leq)$:

4. Tome $y \in Y$. Por definição, existe $\{y_j\}_{j=1}^J$, com $y_j \in Y^j$, tal que $\sum_j y_j = y$.
5. Então $p \cdot y = p \cdot \sum_j y_j = \sum_j p \cdot y_j \leq \pi^j(p)$, para todo $y \in Y$.
6. Logo, $\pi^*(p) \leq \sum_j \pi^j(p)$.

Agregação

Proposição

Para todo $p \gg 0$, temos:

2. $y^*(p) = \sum_j y_j(p) = \left\{ \sum_j y_j : y_j \in y(p) \; \forall j \right\}$.

Demonstração:

1. Vamos mostrar primeiro que $\sum_j y_j(p) \subset y^*(p)$.
2. Considere qualquer família $\{y_j\}_{j=1}^J$, com $y_j \in y_j(p)$. Temos que:

$$p \cdot \sum_j y_j = \sum_j p \cdot y_j = \sum_j \pi^j(p) = \pi^*(p)$$

3. A última igualdade segue da parte (1) da proposição.

Agregação

Proposição

Para todo $p \gg 0$, temos:

2. $y^*(p) = \sum_j y_j(p) = \left\{ \sum_j y_j : y_j \in y(p)\ \forall j \right\}$.

Demonstração:

1. Vamos agora mostrar que $y^*(p) \subset \sum_j y_j(p)$.
2. Considere um $y \in y^*(p)$. Então $y = \sum_j y_j$, para alguma família $\{y_j\}_{j=1}^{J}$ com $y_j \in Y^j$.
3. Como $p \cdot \sum_j y_j = \pi^*(p) = \sum_j \pi^j(p)$ e, $\forall j$ temos $p \cdot y_j \leq \pi^j(p)$, segue que $p \cdot y_j = \pi^j(p)$, para todo j.

Agregação

Proposição

Para todo $p \gg 0$, temos:

2. $y^*(p) = \sum_j y_j(p) = \left\{ \sum_j y_j : y_j \in y(p)\ \forall j \right\}$.

Demonstração:

4. Logo, $y_j \in y_j(p)$, para todo j, o que implica que $y \in \sum_j y_j(p)$.
5. Segue, pois, que $y^*(p) \subset \sum_j y(p)$.

Eficiência

- **Eficiência de Pareto** é uma das questões-chave da análise de bem-estar.
- Quando estudarmos equilíbrio geral, eficiência de Pareto e eficiência da produção se confundem. Por ora, contudo, nos concentramos apenas no âmbito da firma.
- No âmbito da produção, dizemos que um plano $y \in Y$ é eficiente se não há nenhum $e \in \mathbb{R}^L_+ \backslash \{0\}$ tal que $y + e \in Y$.

Eficiência

Proposição

Se $y \in Y$ maximiza lucros para algum vetor de preços $p \gg 0$, então y é eficiente.

Demonstração:

1. Suponha que não.
2. Seja $y \in y^*(p)$ e suponha que existe $e \in \mathbb{R}^L_+ \setminus \{0\}$ tal que $y + e \in Y$.
3. Como $p \gg 0$, segue que $p \cdot (y + e) = p \cdot y + p \cdot e > p \cdot y$.
4. Logo, $y \notin y^*(p)$. Contradição.

Eficiência

Proposição

Suponha que Y é convexo. Então para todo y eficiente, existe um vetor de preços $p \geq 0$ para o qual y é a escolha maximizadora de lucro.

Demonstração:

1. Seja y eficiente, e defina o conjunto $P_y = \{\tilde{y} \in \mathbb{R}^L : \tilde{y} \gg y\}$.
2. Como y é eficiente, $Y \cap P_y = \emptyset$.
3. Pelo teorema do hiperplano separador, $\exists p \in \mathbb{R}^L$, $p \neq 0$, tal que $p \cdot \tilde{y} \geq p \cdot \hat{y}, \forall \tilde{y} \in P_y$ e $\forall \hat{y} \in Y$.
4. Logo, precisamos ter $p \geq 0$, ou $p \cdot \tilde{y} < p \cdot \hat{y}$ para valores grandes o suficiente de $\hat{y}_l$, se $p_l < 0$.

Eficiência

Proposição

Suponha que Y é convexo. Então para todo y eficiente, existe um vetor de preços $p \geq 0$ para o qual y é a escolha maximizadora de lucro.

Demonstração (cont.):

5. Em seguida, tome $\hat{y} \in Y$.
6. Então $p \cdot \tilde{y} \geq p \cdot \hat{y}, \forall \tilde{y} \in P_y$.
7. Como y está na fronteira de Y e $\tilde{y}$ pode ser arbitrariamente próximo de y, segue que $p \cdot y \geq p \cdot \hat{y}$, para qualquer $\hat{y} \in Y$.
8. Logo, $y \in y^*(p)$.