Funções Custo

Funções Custo

- **Custo** é o valor pago ao insumo para mantê-lo empregado no processo produtivo.
- Remuneração que o insumo receberia no melhor uso alternativo.
  - Custo do Trabalho: valor pago em salários
  - Custo do Capital: aluguel do capital.
  - Custo do Talento do Empreendedor

Funções Custo

- Supõe-se que firmas contratam fatores de produção em mercado competitivo.
- w é o preço do trabalho e r é o preço do capital
- O custo total é dado por $CT = rk + w\ell$
- Receita total é dada por $RT = pq = pf(k, \ell)$
- Lucro total é dado por:

$$\pi(k, \ell) = RT - CT = pf(k, \ell) - rk - w\ell$$

- Em que k é a quantidade de capital utilizada, ℓ é a quantidade de trabalho e p é o preço do bem produzido.

Minimização de Custos

- Se uma firma maximiza lucros, ela estará também minimizando custos para produzir a quantidade que oferta.
- **Problema de Minimização de Custos**

$$\begin{aligned} \min_{k,\ell} \quad & rk + w\ell \\ \text{s.a} \quad & f(k,\ell) \geq \bar{q} \end{aligned}$$

- Problema similar ao problema de minimização de despesa.

$$\mathcal{L} = rk + w\ell + \lambda[\bar{q} - f(k,\ell)]$$

CPOs: $$r = \lambda \frac{\partial f}{\partial k} \quad w = \lambda \frac{\partial f}{\partial \ell} \quad \Rightarrow \quad \frac{f_k}{r} = \frac{f_\ell}{w} \;\text{ e }\; \frac{f_k}{f_\ell} = \frac{r}{w}$$

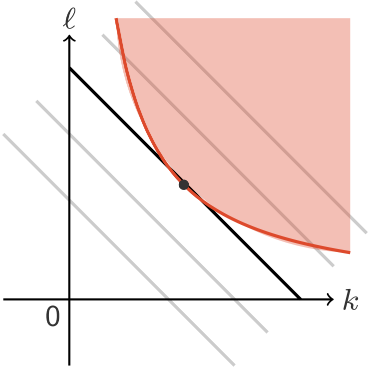
Minimização de Custo

Na margem, unidade monetária gasta com capital deve ter o mesmo retorno que uma unidade monetária gasta com trabalho:

$$\frac{f_k}{r} = \frac{f_\ell}{w}$$

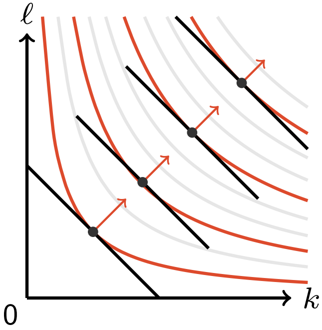
Isoquantas tangenciam isocustos:

$$\frac{f_k}{r} = \frac{f_\ell}{w}$$



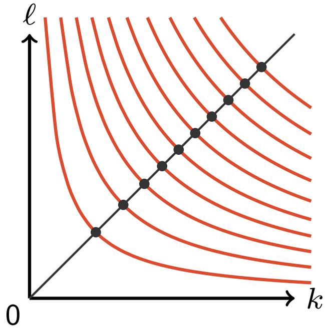
Caminho de Expansão da Produção (1)

- Podemos traçar as combinações de uso de insumos à medida que a produção se expande.
- Obtemos, assim, o **Caminho de Expansão da Produção**.
- Se o uso de um insumo diminui com a produção, chamamos este insumo de **insumo inferior**



Caminho de Expansão da Produção (2)

- Podemos traçar as combinações de uso de insumos à medida que a produção se expande.
- Obtemos, assim, o **Caminho de Expansão da Produção**.
- Se o uso de um insumo diminui com a produção, chamamos este insumo de **insumo inferior**



Função Custo, Custo Médio e Custo Marginal

- A função valor do problema de minimização de custo, dados os preços dos insumos e o nível de produção, é a **função custo**.

$$c(r, w, q) = \min_{k,\ell}\{rk + w\ell \ \text{ s.a. } \ f(k, \ell) \geq q\}$$

- Custo Médio:

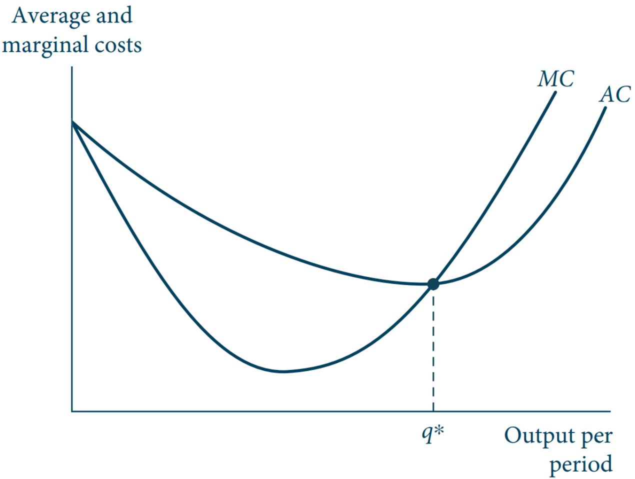
$$\text{CMe}(r, w, q) = \frac{c(r, w, q)}{q}$$

- Custo Marginal:

$$\text{CMg}(r, w, q) = \frac{\partial c(r, w, q)}{\partial q}$$

- Graficamente, curvas de custo marginal e custo médio se cruzam no ponto mínimo da curva de custo médio.

Função Custo, Custo Médio e Custo Marginal



Propriedades da Função Custo

- A função custo tem as mesmas propriedades da função despesa.
  - Homogeneidade de grau zero em relação aos preços:

$$c(\lambda r, \lambda w, q) = \lambda c(r, w, q)$$

  - Não decrescente em r, w e q.
  - Com retornos constantes à escala, $c(r, w, q) = qc(r, w, 1)$.

Função Custo: Exemplos

- Leontief: $f(k,\ell) = \min\{\alpha k, \beta\ell\}$

$$c(r,w,q) = \frac{q}{\alpha}r + \frac{q}{\beta}w \quad \text{CMe}(r,w,q) = \text{CMg}(r,w,q) = \frac{1}{\alpha}r + \frac{1}{\beta}w$$

- Cobb-Douglas: $f(k,\ell) = k^{\alpha}\ell^{\alpha}$

$$c(r,w,q) = q^{1/(\alpha+\beta)}Br^{\alpha/(\alpha+\beta)}w^{\beta/(\alpha+\beta)}$$

$$B = (\alpha+\beta)\alpha^{\alpha/(\alpha+\beta)}\beta^{\beta/(\alpha+\beta)}$$

- CES: $f(k,\ell) = [k^{\rho} + \ell^{\rho}]^{\frac{\gamma}{\rho}}$. $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$

$$c(r,w,q) = q^{1/\gamma}(r^{1-\sigma} + w^{1-\sigma})^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

Função Custo e Progresso Técnico

- Com retornos constantes à escala, progresso técnico, e supondo que fatores produzem 1 no período inicial, i.e., $A(1) = 1$, temos:

$$q_t = A(t) f(k, \ell) = A(t) q_1$$

$$c_1(r, w, q_1) = c_t(r, w, A(t) q_1) = A(t) c_t(r, w, q_1)$$

$$c_t(r, w, q_1) = \frac{c_1(r, w, q_1)}{A(t)}$$

- Função custo descresce com progresso técnico.
- O mesmo ocorre com custo marginal e custo médio.

Demanda contingente por fatores

- Análogo à demanda hicksiana.
- Quanto a firma demandaria de cada fator de produção, para produzir uma quantidade igual a q, ao mínimo custo possível.

$$
\begin{aligned}
(k^c, \ell^c) \in \operatorname*{arg\,min}_{k,\ell} \quad & rk + w\ell \\
\text{s.a} \quad & f(k,\ell) \geq \bar{q}
\end{aligned}
$$

- Soluções do problema: demandas contingentes por fatores.

$$
k^c(r, w, q) \quad \text{e} \quad \ell^c(r, w, q)
$$

Demanda contingente por fatores

- Lagrangeano do problema de minimização:

$$\mathcal{L} = rk + w\ell + \lambda[\bar{q} - f(k, \ell)]$$

- Lema de Sheppard (via Teorema do Envelope):

$$\frac{\partial c(r, w, q)}{\partial r} = k^c(r, w, q) \quad \text{e} \quad \frac{\partial c(r, w, q)}{\partial w} = \ell^c(r, w, q)$$

Substituição entre Fatores

- Mudanças nos preços relativos dos fatores podem induzir a firma a alterar a proporção de uso de seus fatores.
- Elasticidade de substituição permite perceber isso a partir da função de produção.

$$\sigma \equiv \frac{\dfrac{d(k/\ell)}{k/\ell}}{\dfrac{d\text{TMST}_{k,\ell}}{\text{TMST}_{k,\ell}}} = \frac{d\ln\left(\dfrac{k}{\ell}\right)}{d\ln\left(\dfrac{f_\ell}{f_k}\right)}$$

Substituição entre Fatores

- Como no ótimo temos TMST $= w/r$, temos uma nova versão da elasticidade de substituição, **avaliada no ótimo**:

$$s \equiv \frac{\dfrac{d(k/\ell)}{k/\ell}}{\dfrac{d\text{TMST}_{k,\ell}}{\text{TMST}_{k,\ell}}} = \frac{d\ln\left(\dfrac{k}{\ell}\right)}{d\ln\left(\dfrac{f_\ell}{f_k}\right)}$$

- Note: s depende apenas de variáveis facilmente observáveis.

Curto Prazo vs. Longo Prazo

- **Longo prazo**: firma escolhe quantidade de todos os fatores otimamente.
- **Curto prazo**: firma não consegue ajustar pelo menos um dos fatores de produção.
  - Por exemplo, se $k = \bar{k}$, função custo de curto prazo:

$$c(r, w, q, \bar{k}) = \min\{w\ell + r\bar{k} \ \text{ s.a. } \ f(\bar{k}, \ell) = q\}$$

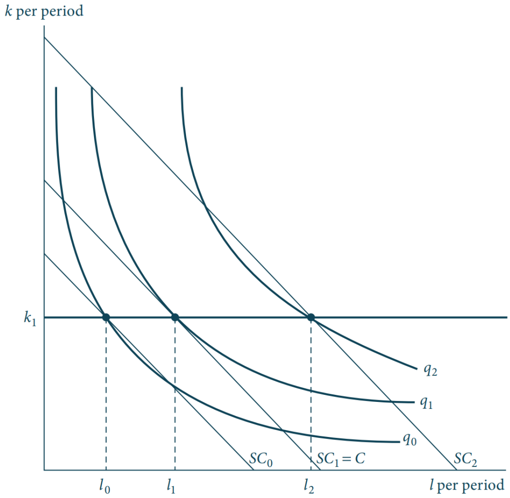
  - Custo Médio de Curto Prazo:

$$\frac{c(r, w, q, \bar{k})}{q}$$

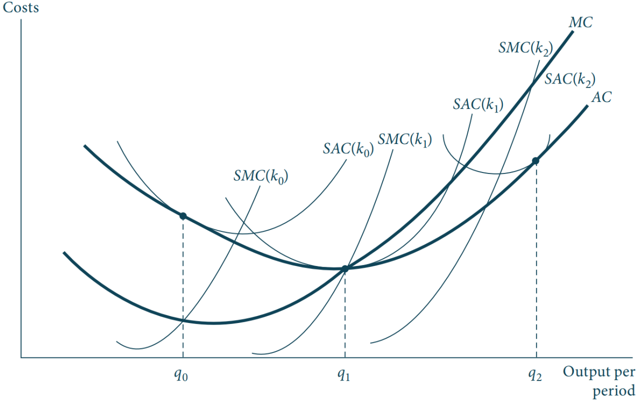
  - Custo Marginal de Curto Prazo:

$$\frac{\partial c(r, w, q, \bar{k})}{\partial q}$$

Função Custo de Curto Prazo



Funções Custo de Curto e Longo Prazos



Curvas de curto prazo estão sempre acima das respectivas curvas de longo prazo.