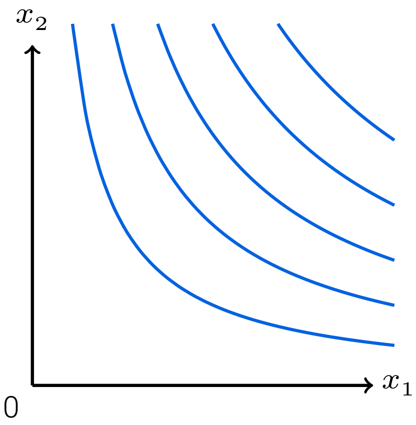
Função Utilidade Cobb-Douglas

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

- Preferências estritamente convexas e fortemente monotônicas.
- Frequentemente aplicaremos a seguinte transformação monotônica à Cobb-Douglas.

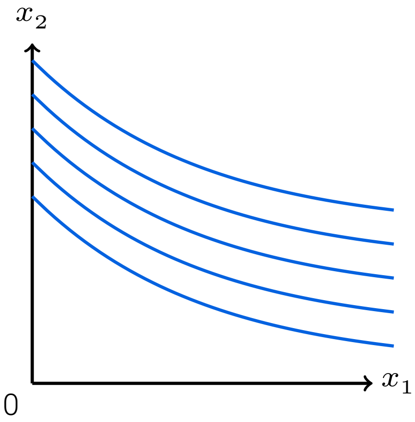
$$\begin{aligned} v(x_1, x_2) &= \log\Big(u(x_1, x_2)\Big) \\ &= \log\Big(x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}\Big) \\ &= \alpha \log x_1 + (1-\alpha) \log x_2 \end{aligned}$$



Preferências Quase-Lineares

$$u(x_1, x_2) = x_1 + v(x_2)$$

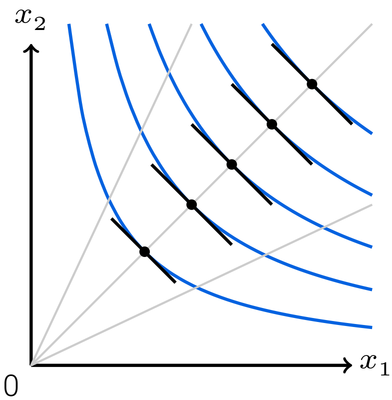
- Curvas de indiferença são paralelas
- TMS depende apenas de x_2



Preferências Homotéticas

Definição: $u(x) \equiv u(x_1, \dots, x_L)$ é homogênea de grau 1 se, para qualquer $\lambda > 0$, $u(\lambda x) = u(\lambda x_1, \dots, \lambda x_L) = \lambda u(x_1, \dots, x_L)$.

- Preferências são homotéticas se podem ser representadas por uma função utilidade homogênea de grau 1.
- De modo equivalente: se $x \succsim y$, etão $\lambda x \succsim \lambda y$ para qualquer $\lambda > 0$.
- TMS constante ao longo de retas saídas da origem.



Elasticidade de Substituição

- Quando variamos em 1% a $\text{TMS}_{1,2}$, em quanto varia (em termos percentuais) a proporção de x_1 em relação a x_2?
- Formalmente:

$$\varepsilon_S \equiv \frac{\dfrac{d(x_1/x_2)}{x_1/x_2}}{\dfrac{d\text{TMS}_{1,2}}{\text{TMS}_{1,2}}} = \frac{d\ln\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)}{d\ln\left(\dfrac{\text{UM}_2}{\text{UM}_1}\right)}$$

- Elasticidade de Substituição nos dá uma medida da curvatura das curvas de indiferença.
- Representa o grau de substituibilidade de um bem pelo outro.

Problema do Consumidor

O processo de escolha como um problema de otimização condicionada

- Função utilidade nos diz o que o consumidor **gostaria de fazer**.
- Restrição orçamentária nos diz o que o consumidor **pode fazer**.
- Problema do consumidor nos diz como o consumidor aloca a sua renda, de modo a consumir bens e serviços que lhe dão maior bem-estar.
- **Podemos representar esse problema como um problema de maximização condicionada**:

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^2_+} \quad & u(x_1, x_2) \\ \text{s.a} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w \end{aligned}$$

Demanda do Consumidor

Demanda como a solução de um problema de otimização condicionada

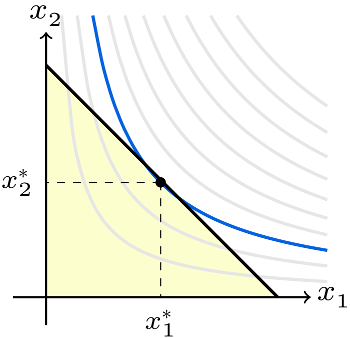
Chamamos a solução desse problema de **demanda marshalliana** (ou walrasiana) e a representamos por $x(p, w)$:

$$x(p, w) = \arg\max\{u(x) : p \cdot x \leq w\}$$

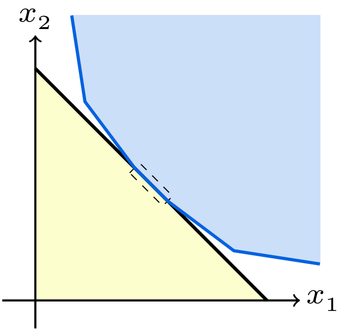
- Note que a demanda marshalliana torna explícito o fato de que a escolha do consumidor depende dos preços e da renda.
- Se u é função contínua, o problema do consumidor tem solução.
- Mas essa solução não precisa ser única!

Demanda do Consumidor

Como sabemos ser a solução do problema do consumidor é única?



Se as preferências são estritamente convexas, solução do problema será única.



Se as preferências são convexas, mas não estritamente convexas, solução pode não ser única.

Otimização Condicionada

- Gostaríamos de encontrar o valor máximo da função diferenciável $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ em um subconjunto do domínio de f que podemos representar por meio de m inequações do tipo $g_i(x) \leq b_i$, para $i \in \{1, \dots, m\}$, em que cada $g_i : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável e cada $b_i \in \mathbb{R}$.
- Queremos encontrar $x^* \in \mathbb{R}^L_+$ que soluciona o problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & g_1(x) \leq b_1 \\ & \vdots \\ & g_m(x) \leq b_m \\ & x_\ell \geq 0 \;\; \text{para} \;\; \ell \in \{1, \dots, L\} \end{aligned}$$

Kuhn-Tucker: Condições Necessárias

- Começamos montando o Lagrangeano com a ajuda dos multiplicadores $\lambda \in \mathbb{R}_{+}^{m}$:

$$\mathcal{L} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - g_i(x) \right]$$

- Se x^* é solução, então satisfaz as condições de Kuhn-Tucker, que são condições necessárias (mas não suficientes).

  1. Para $\ell \in \{1, \ldots, L\}$, precisamos ter:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\ell} = \frac{\partial f}{\partial x_\ell} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_\ell} \leq 0 \text{ com igualdade se } x_\ell^* > 0 \tag{1}$$

  2. Para cada restrição $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$\lambda_m [g_m(x^*) - b_m] = 0 \text{ com } \lambda_m > 0 \text{ se } g_m(x^*) - b_m = 0 \tag{2}$$

Kuhn-Tucker: Condições Suficientes

- Para que as condições necessárias sejam também suficientes, precisamos ter:
  3. f é função côncava em $\mathbb{R}^L_+$
  4. Cada g_i que compõe uma restrição do problema é função convexa em $\mathbb{R}^L_+$.

  Satisfeitas as condições (3) a (4) acima, um x^* que satisfaça as condições (1) e (2) do slide anterior é um ponto de máximo do problema.

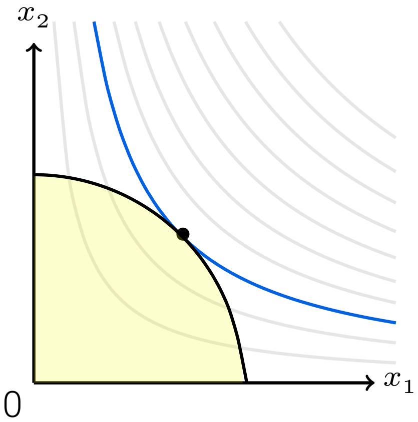
Teorema de Kuhn-Tucker: Intuição (1)

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^2_+} \quad & x_1 x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq b \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

As matrizes hessianas de $f(x) = x_1 x_2$ e $g(x) = x_1^2 + x_2^2$ são dadas por:

$$D^2 f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

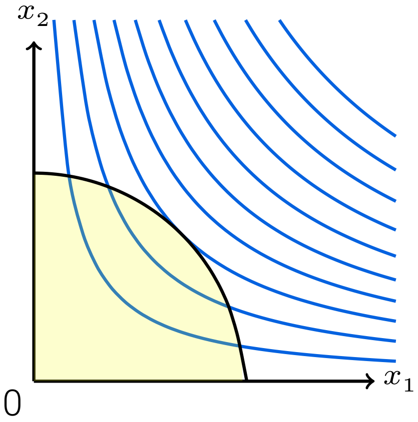
$$D^2 g = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



f é função côncava e g convexa.

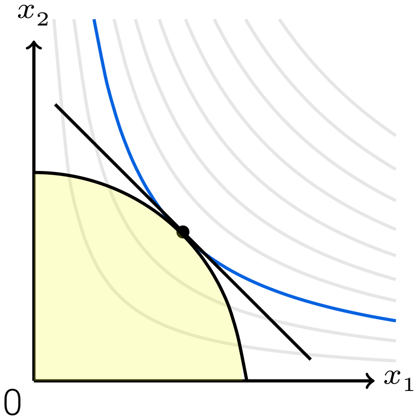
Teorema de Kuhn-Tucker: Intuição (2)

- Uma das curvas de contorno tem a propriedade particular de tangenciar a curva que nos dá a fronteira do conjunto delimitado pela restrição.
- Esta é a curva de contorno mais alta que é possível atingir no conjunto de restrição.



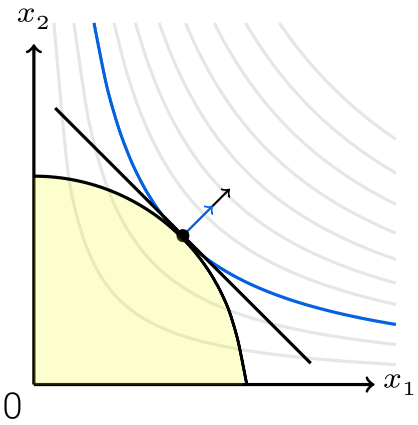
Teorema de Kuhn-Tucker: Intuição (3)

- Esse ponto de tangência é o ponto de máximo que queremos caracterizar.
- Como as duas curvas de nível se tangenciam, elas irão compartilhar a mesma reta tangente neste ponto.



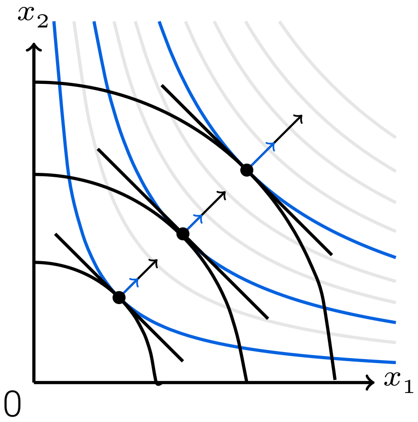
Teorema de Kuhn-Tucker: Intuição (4)

- Como ambas as curvas compartilham a mesma reta tangente neste ponto, haverá uma relação entre seus vetores normais.
- Os gradientes ∇f e ∇g são normais às suas respectivas curvas de nível.
- Mas nesse ponto em particular, ambos os gradientes são normais à mesma reta tangente.



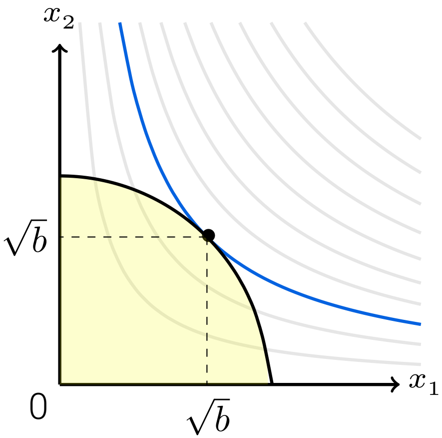
Teorema de Kuhn-Tucker: Intuição (5)

- Primeira condição de Kuhn-Tucker não é suficiente para termos um sistema determinado de equações.
- Note que qualquer um dos pontos indicados na figura acima satisfaz as Condições de Primeira Ordem.



Teorema de Kuhn-Tucker: Intuição (6)

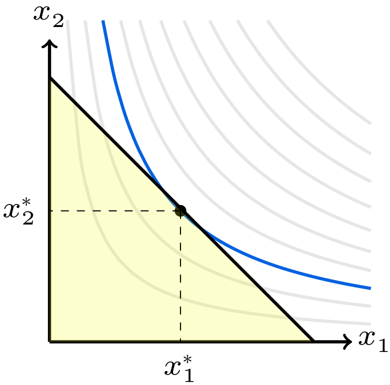
- Para identificar a solução do problema, como sabemos que $\lambda > 0$, adicionamos também a equação dada pela restrição como condição que a solução precisa satisfazer.
- Temos, então, a solução do problema!



Solução do Problema do Consumidor

Usando as condições de Kuhn-Tucker para achar a demanda marshalliana

$$\max \quad u(x_1, x_2)$$
$$\text{s.a} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$



Lagrangeano: $\mathcal{L} = u(x_1, x_2) + \lambda[w - p_1 x_1 - p_2 x_2]$

Solução do Problema do Consumidor

Usando as condições de Kuhn-Tucker para achar a demanda marshalliana

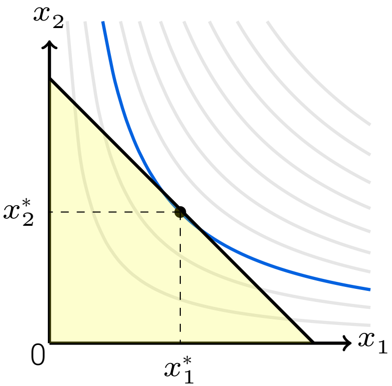
$$\begin{aligned} \max \quad & u(x_1, x_2) \\ \text{s.a} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Condições de Kuhn-Tucker:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\ell} = \frac{\partial u}{\partial x_\ell} - \lambda p_\ell \leq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_\ell} - \lambda p_\ell = 0 \text{ se } x_\ell^* > 0$$

$$\lambda [w - p_1 x_1 - p_2 x_2] = 0$$



Solução Interior do Problema do Consumidor

Usando as condições de Kuhn-Tucker para achar a demanda marshalliana

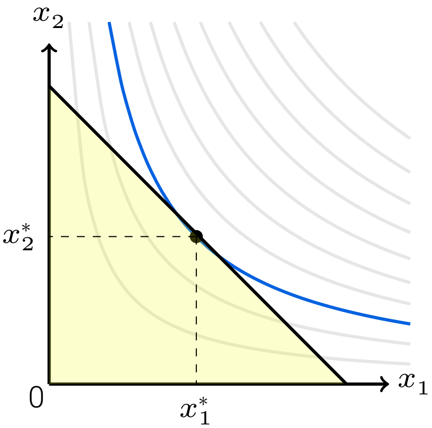
Se $x_1^* > 0$ e $x_2^* > 0$, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \lambda p_1 \;\text{ e }\; \frac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda p_2$$

$$\text{TMS}(x^*) = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}} = \frac{p_2}{p_1}$$

Como $\lambda > 0$, temos:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$$



Com essas duas equações, geralmente conseguimos achar x_1^* e x_2^*.

Problema do Consumidor com Utilidade Cobb-Douglas

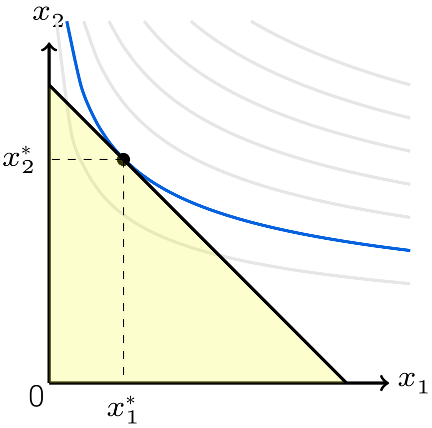
Transformação monotônica torna o problema mais fácil de resolver

Queremos solucionar:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2_+} \; x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}}$$
$$\text{s.a} \;\; p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w$$

Ou, de modo equivalente:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2_+} \; \frac{1}{4}\log x_1 + \frac{3}{4}\log x_2$$
$$\text{s.a} \;\; p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w$$



Problema do Consumidor com Utilidade Cobb-Douglas

Transformação monotônica torna o problema mais fácil de resolver

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\log(x_1) + \frac{3}{4}\log(x_2) + \lambda[w - p_1 x_1 - p_2 x_2]$$

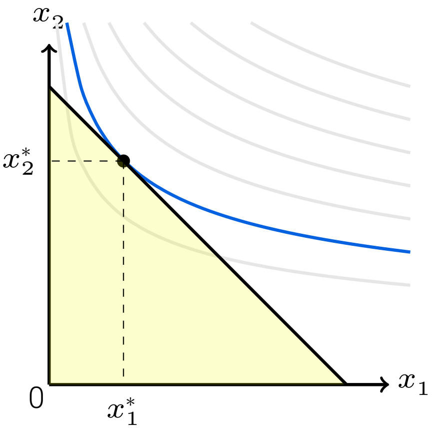
CPO para $x_\ell^* > 0$:

$$\frac{1}{4}\frac{1}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \ \text{ e } \ \frac{3}{4}\frac{1}{x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$4x_1 p_1 = \frac{4}{3} x_2 p_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$3x_1 p_1 = x_2 p_2$$

Note também que $\lambda > 0$



Problema do Consumidor com Utilidade Cobb-Douglas

Transformação monotônica torna o problema mais fácil de resolver

$$3x_1^* p_1 = x_2^* p_2 \;\; \text{e} \;\; \lambda > 0$$

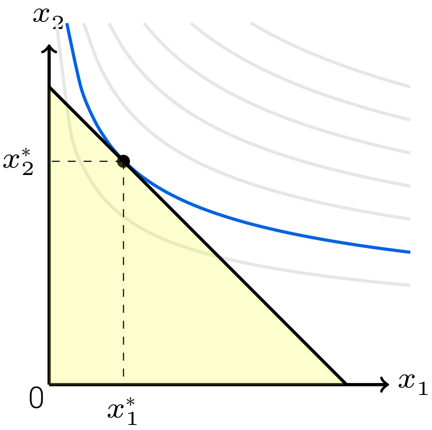
$$\lambda[w - p_1 x_1^* - p_2 x_2^*] = 0$$

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = w \;\; \Leftrightarrow$$

$$p_1 x_1^* + 3p_1 x_1^* = w \;\; \Leftrightarrow$$

$$4p_1 x_1^* = w \;\; \Leftrightarrow \;\; x_1^* = \frac{w}{4p_1}$$

$$x_2^* = \frac{3w}{4p_2}$$



Problema do Consumidor com Utilidade Cobb-Douglas

Expoentes indicam percentual da renda gasto com cada bem

- Neste exemplo, $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}}$ e

$$x_1^* = \frac{1}{4}\frac{w}{p_1} \quad \text{e} \quad x_2^* = \frac{3}{4}\frac{w}{p_2}$$

- Segue que $p_1 x_1^* = \frac{1}{4}w$ e $p_2 x_2^* = \frac{3}{4}w$
- De modo geral, se $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, então $p_1 x_1^* = \alpha w$ e $p_2 x_2^* = (1-\alpha)w$
- Com utilidade Cobb-Douglas, percentual da renda gasto com cada bem é dado pelos seus respectivos expoentes da função utilidade, desde que somem 1.

Substitutos Perfeitos

Neste caso, teremos solução de canto ou demanda indeterminada

- Curva de Indiferença é a equação de uma reta: $x_2 = \frac{u}{a} - \frac{b}{a}x_1$
- TMS é constante: $\mathrm{TMS}_{x_1,x_2} = \frac{\mathrm{UM}_1}{\mathrm{UM}_2} = \frac{a}{b}$
- Solução do Problema do Consumidor dependerá da TMS e dos preços relativos (da inclinação da reta orçamentária)

$$\begin{aligned} \max \quad & ax_1 + bx_2 \\ \text{sujeito a} \quad & p_1x_1 + p_2x_2 \leq w \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

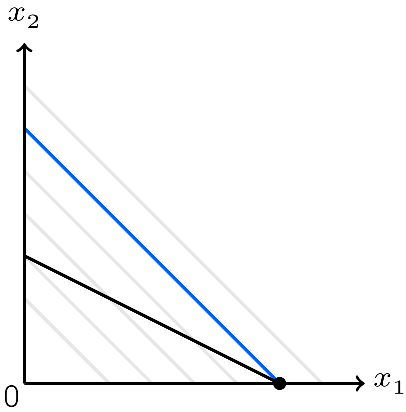
Substitutos Perfeitos: Exemplo 1

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

$$\frac{\text{UM}_1}{p_1} = \frac{a}{p_1} > \frac{b}{p_2} = \frac{\text{UM}_2}{p_2}$$

$$\frac{a}{b} > \frac{p_1}{p_2}$$

- Solução de canto
- **Consumidor gasta toda a sua renda no bem 1.**



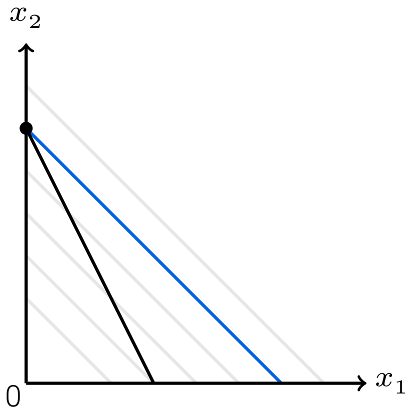
Substitutos Perfeitos: Exemplo 2

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

$$\frac{\text{UM}_1}{p_1} = \frac{a}{p_1} < \frac{b}{p_2} = \frac{\text{UM}_2}{p_2}$$

$$\frac{a}{b} < \frac{p_1}{p_2}$$

- Solução de canto
- **Consumidor gasta toda a sua renda no bem 2.**

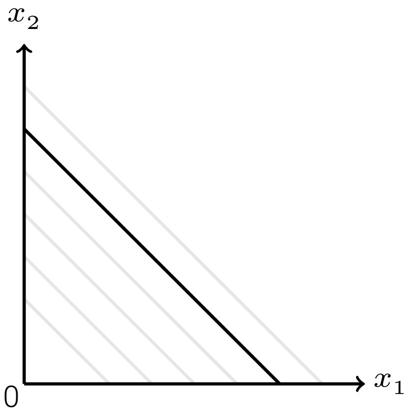


Substitutos Perfeitos: Exemplo 3

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

$$\frac{\text{UM}_1}{p_1} = \frac{a}{p_1} = \frac{b}{p_2} = \frac{\text{UM}_2}{p_2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{p_1}{p_2}$$



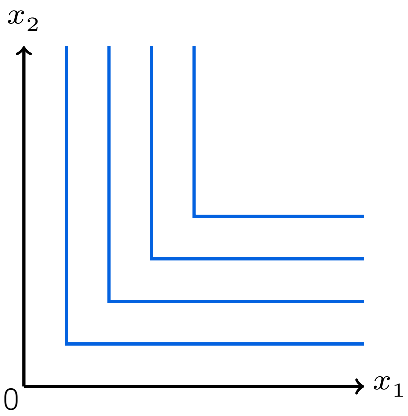
- Soluções múltiplas
- **Qualquer cesta na reta orçamentária é solução.**

Complementares Perfeitos

$$u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$$

- No ótimo, precisamos ter $ax_1 = bx_2$.
- Se $ax_1 > bx_2$ ou $ax_1 < bx_2$, haverá desperdício de recursos.
- Como preferências são fracamente monotônicas, então toda a renda é consumida:

$$p_1x_2 + p_2x_2 = w$$



Complementares Perfeitos

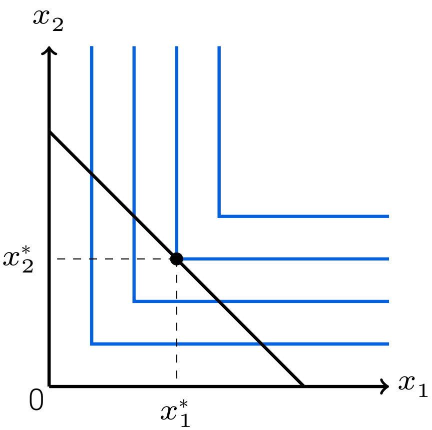
$$u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$$

$$ax_1^* = bx_2^* \quad \Leftrightarrow \quad x_2^* = \frac{ax_1^*}{b}$$

$$p_1 x_1^* + p_2 \left(\frac{ax_1^*}{b}\right) = w$$

$$x_1^* = \frac{w}{p_1 + \frac{a}{b} p_2}$$

$$x_2^* = \frac{w}{p_2 + \frac{b}{a} p_1}$$



Homogeneidade de Grau Zero da Demanda

Demanda marshalliana é homogênea de grau zero

- Dizemos que a função demanda marshalliana $x(p, w)$ é **homogênea de grau zero** se $x(\lambda p, \lambda w) = x(p, w)$ para quaisquer p, w e $\lambda > 0$.
- Note que, para todo escalar $\lambda > 0$, temos:

$$B(\lambda p, \lambda w) \equiv \{x \in \mathrm{R}^L_+ : \lambda p \cdot x \leq \lambda w\} = \{x \in \mathrm{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\} \equiv B(p, w)$$

- Restrição do problema e função objetivo não se alteram quando multiplicamos a restrição orçamentária por $\lambda > 0$.
- Logo, solução permanece a mesma.

Homogeneidade de Grau Zero da Demanda

Duas implicações interessantes:

1. Podemos normalizar os preços, isto é, transformar um dos bens em um *bem numerário*:

$$x(p_1, p_2, w) = x\left(1, \frac{p_2}{p_1}, \frac{w}{p_1}\right)$$

2. Se preços e renda variam ao mesmo tempo e na mesma proporção, escolha do consumidor (e o seu bem-estar) não muda.

Monotonicidade e Demanda

Com preferências monotônicas, restrição orçamentária é ativa

- **Se as preferências do consumidor são fracamente monotônicas, o consumidor irá consumir toda a sua renda.**
- A restrição orçamentária será ativa.
- É o caso das preferências que vimos até agora:
  1. Cobb-Douglas
  2. Substitutos Perfeitos
  3. Complementares Perfeitos
  4. Preferências Quase-lineares
  5. CES

Utilidade Indireta

É a função valor do problema de maximização de utilidade

$$v(p, w) = u(x(p, w)) = \max_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{u(x) \ \text{ s.a. } \ p \cdot x \leq w\}$$

- $v(p, w)$ nos dá a utilidade máxima que o consumidor consegue atingir no conjunto orçamentário determinado por p e w.
- Para encontrar a utilidade indireta, basta substituir a solução do problema do consumidor na função utilidade.
- Se fizermos alguma transformação crescente na função utilidade, alteramos também a utilidade indireta.
- Se ao invés de $u(x)$ usamos $\tilde{u}(x) = g(u(x))$, com g crescente, chegaremos a $\tilde{v}(p, w)$ ao solucionar o problema do consumidor.
- Para achar $v(p, w) = u(x(p, w))$, podemos usar a inversa de g:

$$v(p, w) = g^{-1}(\tilde{v}(p, w))$$

Teorema do Envelope e Utilidade Marginal da Renda

Como varia a utilidade do consumidor se aumentamos a sua renda?

$$\mathcal{L}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = u(x_1^*(p,w), x_2^*(p,w)) + \lambda^*[w - p_1 x_1(p,w) - p_2 x_2^*(p,w))]$$

1. Repare que, no ótimo, temos

$$\lambda^*[w - p_1 x_1(p,w) - p_2 x_2^*(p,w))] = 0$$

2. Logo:

$$\mathcal{L}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, p, w) = u(x_1^*(p,w), x_2^*(p,w)) = v(p,w)$$

3. O que acontece com a utilidade indireta quando sobe a renda?

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial w} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^*}\frac{\partial x_2^*}{\partial w} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda^*}\frac{\partial \lambda^*}{\partial w} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}$$

Teorema do Envelope e Utilidade Marginal da Renda

Como varia a utilidade do consumidor se aumentamos a sua renda?

3. O que acontece com a utilidade indireta quando sobe a renda?

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial w} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^*}\frac{\partial x_2^*}{\partial w} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda^*}\frac{\partial \lambda^*}{\partial w} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}$$

4. Para solução interior e restrição orçamentária ativa, temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^*} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^*} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda^*} = w - p_1 x_1(p,w) - p_2 x_2^*(p,w) = 0$$

5. A derivada em relação a w fica então: A derivada de $\mathcal{L}$ em relação a b fica, então, algo bem mais simples:

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial w} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^*}}_{=0}\frac{\partial x_1^*}{\partial w} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^*}}_{=0}\frac{\partial x_2^*}{\partial w} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda^*}}_{=0}\frac{\partial \lambda^*}{\partial w} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}}_{=\lambda} = \lambda$$

Utilidade Marginal da Renda

Quantas unidades de utilidade consigo se aumentar a renda marginalmente?

- Teorema do Envelope.
- Como $\lambda \geq 0$, a utilidade indireta é crescente na renda do consumidor.

$$\frac{\partial v(p, w)}{\partial w} = \lambda \geq 0$$

- Podemos, assim, reinterpretar a CPO do problema de maximização de utilidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x_\ell} = \lambda p_\ell, \text{ para } x_\ell^* > 0$$

- Benefício marginal de uma unidade de consumo é igual ao custo marginal, medidos em unidades de utilidade.

Utilidade Marginal da Renda

Recuperando a demanda marshalliana a partir da utilidade indireta

- Argumento semelhante nos dá utilidade decrescente no preço:

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_\ell} = -\lambda x_\ell^*(p,w) \leq 0$$

- Perda de utilidade quando se aumenta o preço de um dos bens é proporcional ao quanto se consome daquele bem.
- Juntando os dois resultados, temos a **Identidade de Roy**:

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_\ell} = -\lambda x_\ell^*(p,w) = -\frac{\partial v(p,w)}{\partial w} x_\ell^*(p,w)$$

$$x_\ell^*(p,w) = -\frac{\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_\ell}}{\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}}$$