Microeconomia I

Aulas 3 e 4: Problema de Maximização de Utilidade

Prof. Rafael Ferreira

Março de 2020

Otimização Condicionada

Imagine que temos uma função $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ diferenciável e que gostaríamos de encontrar o valor máximo dessa função em um subconjunto do domínio de u que podemos representar por meio de m inequações do tipo $g_i(x) \leq b_i$, para $i \in \{1, \ldots, m\}$, em que cada $g_i : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável e cada $b_i \in \mathbb{R}$. Queremos encontrar $x^* \in \mathbb{R}^L$ que soluciona o problema:

Essa formulação é apropriada para um problema de maximização, mas podemos adaptá-la a problemas de minimização se maximizarmos a função $-f(x)$ ao invés de $f(x)$.

Note também que as restrições de desigualdade podem ser escritas como $-g_i(x) \geq -b_i$, de modo que modificando o sinal dos termos da inequação podemos usar o mesmo método para problemas de otimização para usar inequações deste tipo.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f(x) \\
\text{sujeito a} \quad & g_1(x) \leq b_1 \\
& \vdots \\
& g_m(x) \leq b_m \\
& x_\ell \geq 0 \ \text{ para } \ \ell \in \{1, \ldots, L\}
\end{aligned}
$$

O primeiro passo para solucionar este problema é montarmos o Lagrangeano com a ajuda dos multiplicadores $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$:

$$\mathcal{L} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - g_i(x)\right]$$

Para que x^* seja solução do problema acima, precisa satisfazer as condições de Karush-Kuhn-Tucker, que são condições <u>necessárias</u> (mas não suficientes).

1. Para $\ell \in \{1, \ldots, L\}$, precisamos ter:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\ell} = \frac{\partial f}{\partial x_\ell} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_\ell} \leq 0 \ \text{ com igualdade se } \ x^*_\ell > 0 \qquad (1)$$

2. Para cada restrição $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$\lambda_m [g_m(x^*) - b_m] = 0 \ \text{ com } \ \lambda_m > 0 \ \text{ se } \ g_m(x^*) - b_m = 0 \qquad (2)$$

Para que as condições acima sejam necessárias e suficientes, o problema deve satisfazer também as seguintes condições:

3. f é função côncava em $\mathbb{R}^L_+$, o ortante[1] não-negativo.

4. Cada g_i que compõe uma restrição do problema é função convexa em $\mathbb{R}^L_+$.

[1] Ortante não-negativo é a região do $\mathbb{R}^L$ em que $x_\ell \geq 0$ para todo ℓ.

Satisfeitas as condições (3) a (4) acima, um x^* que satisfaça as condições (1) e (2) é um ponto de máximo do problema.

A intuição por trás das condições de Karush-Kuhn-Tucker é mais fácil de entender se analisamos um exemplo específico, graficamente.

Exemplo

Considere a função $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Suponha que queremos maximizar essa função no subconjunto de $\mathbb{R}^2_+$ dado pela restrição $x_1^2 + x_2^2 \leq b$. Podemos escrever esse problema como:

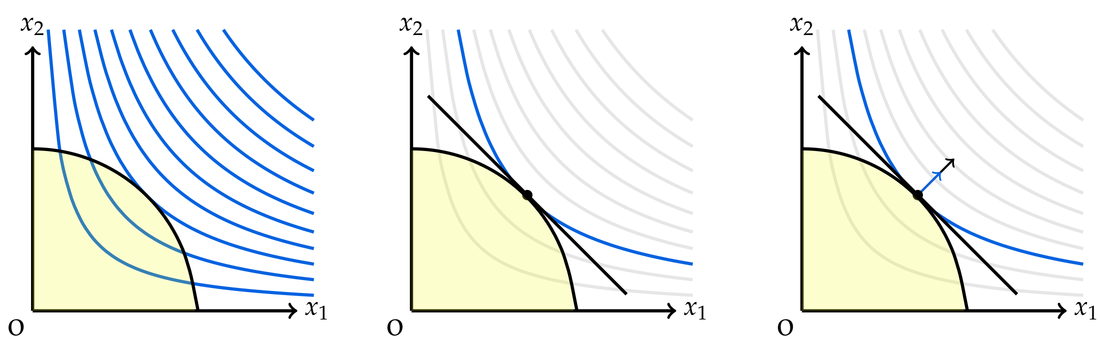
$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq b \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Note que a matrizes hessianas de $f(x) = x_1 x_2$ e $g(x) = x_1^2 + x_2^2$ são dadas por:

$$D^2 f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D^2 g = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Claramente, $D^2 f$ é negativa definida e $D^2 g$ é positiva definida. Consequentemente, f e g são, respectivamente, côncava e convexa, de modo que esse problema satisfaz as condições de suficiência de Karush-Kuhn-Tucker e as condições (1) e (2) são necessárias e suficientes para encontrar um ponto de máximo x^*.

Vamos analisar o problema geometricamente.



(a) **Curvas de contorno** da função f. Note que uma das curvas de contorno tem a propriedade particular de tangenciar a curva que nos dá a fronteira do conjunto delimitado pela restrição. Note que essa é a curva de contorno mais alta que é possível atingir no conjunto de restrição.

(b) Esse ponto de tangência é o ponto de máximo que queremos caracterizar. Note que, como as duas curvas de nível se tangenciam, elas irão compartilhar a mesma reta tangente neste ponto.

(c) Adicionalmente, como ambas as curvas compartilham a mesma reta tangente neste ponto, haverá uma relação entre seus vetores normais. Sabemos que os gradientes ∇f e ∇g são normais às suas respectivas curvas de nível. Mas nesse ponto em particular, ambos os gradientes são normais à mesma reta tangente.

Figura 1: Intepretação geométrica dos multiplicadores de Lagrange

Note, portanto: se ∇f e ∇g são normais à mesma reta tangente então, como mostra a Figura 1, esses vetores serão colineares, i.e., terão a mesma direção. Outra forma de escrever isso é:

Definição 1. Dizemos que dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^L$ são colineares quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x = \lambda y$, isto é, quando os dois vetores tiverem a mesma direção.

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

Ou, de modo equivalente:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \Leftrightarrow \quad x_2^* = 2\lambda x_1^* \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \Leftrightarrow \quad x_1^* = 2\lambda x_2^* \tag{4}$$

Note que essa condição de colinearidade é exatamente a primeira das condições de Karush-Kuhn-Tucker que vimos anteriormente, para o caso em que temos solução interior, i.e., $x_1^* > 0$ e $x_2^* > 0$.

A partir daí, conseguimos encontrar todos os valores de x_1 e x_2 que satisfazem essas duas equações:

$$x_1^* = 2\lambda x_2^* \text{ e } x_2^* = 2\lambda x_1^* \quad \Leftrightarrow \quad x_1^* = x_2^* \text{ e } \lambda = \frac{1}{2}$$

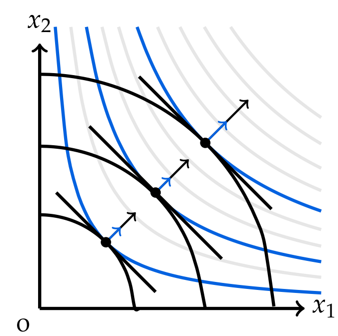


Figura 2: Primeira condição de Karush-Kuhn-Tucker não é suficiente para termos um sistema determinado de equações. Note que qualquer um dos pontos indicados na figura acima satisfaz essa condição de $x_1 = x_2$.

Note que as duas equações (3) e (4) não são suficientes para determinarmos os valores de x_1^* e x_2^* que soluciona o problema. Essas duas equações nos dizem que a solução do problema está na semirreta de 45°, mas não muito mais que isto. Ao diferenciarmos g para obter essas duas equações, perdemos o valor b que nos diz em que curva de nível de g devemos nos restringir, de modo que necessitamos recuperar essa informação de alguma forma para solucionar o problema. A Figura 2 ilustra essa necessidade.

A segunda condição de Karush-Kuhn-Tucker nos permite recuperar essa informação faltante de modo que tenhamos, então, um sistema determinado de equações:

$$\lambda[x_1^2 + x_2^2 - b] = 0$$

Como já sabemos que $\lambda > 0$, sabemos que a restrição do problema vale com igualdade, o que nos prende à curva de nível de $x_1^2 + x_2^2 = b$.

Conseguimos, então, resolver algebricamente o sistema resultante:

$$x_1^* = x_2^* \text{ e } x_1^{*2} + x_2^{*2} = b \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1^{*2} = b \quad \Leftrightarrow \quad x_1^* = x_2^* = \sqrt{b}$$

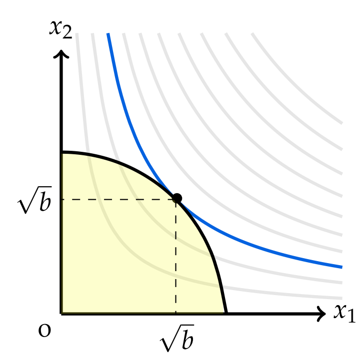


Figura 3: Solução do problema de maximização condicionada.

Outra informação interessante que obtemos ao solucionar esse problema diz respeito ao multiplicador λ. Obviamente, λ é uma constante de proporcionalidade, que nos dá o quão maior ou menor é o vetor gradiente de f em relação ao vetor gradiente de g. Nesse nosso caso em particular, temos que ∇f é, no ótimo, metade de ∇g.

Mas há outra interpretação ainda mais interessante para λ. Vamos olhar para o valor do nosso lagrangeano avaliado na solução do problema que, como vimos, vai depender de b:

$$\mathcal{L}(x_1^*(b), x_2^*(b), \lambda(b), b) = f(x_1^*(b), x_2^*(b)) + \lambda^*[b - g(x_1^*(b), x_2^*(b))]$$

Primeiramente note que, como estamos avaliando essa função em $x^*(b)$, obrigatoriamente teremos $\lambda^*[b - g(x_1^*(b), x_2^*(b))] = 0$, de modo que o Lagrangeano avaliado na solução do problema me dará o valor máximo que f atinge, como função de b:

$$\mathcal{L}(x_1^*(b), x_2^*(b), \lambda(b), b) = f(x_1^*(b), x_2^*(b))$$

E como esse valor máximo de f muda, quando variamos b maginalmente? Vamos olhar para a derivada de L em relação a b:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^*}\frac{\partial x_1^*}{\partial b} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^*}\frac{\partial x_2^*}{\partial b} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda^*}\frac{\partial \lambda^*}{\partial b} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b}$$

A derivada acima parece algo complicado, até que nos lembramos que $\mathcal{L}$, avaliada no máximo, com restrição ativa e solução interior, satisfaz as seguintes condições de Karush-Kuhn-Tucker:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^*} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^*} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda^*} = b - g(x_1^*(b), x_2^*(b)) = 0$$

A derivada de L em relação a b fica, então, algo bem mais simples:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1^*}}_{=0}\frac{\partial x_1^*}{\partial b} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2^*}}_{=0}\frac{\partial x_2^*}{\partial b} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda^*}}_{=0}\frac{\partial \lambda^*}{\partial b} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b}}_{=\lambda} = \lambda$$

Note como esse resultado é interessante: o multiplicador λ nos dá o quanto irá variar a função valor do problema, o valor máximo que a função objetivo atinge, quando relaxamos marginalmente a restrição. Esse resultado é uma aplicação direta do Teorema do Envelope e será bastante útil para nós nas seções seguintes e nas próximas aulas.

Veremos agora como podemos representar o problema do consumidor como um problema de maximização condicionada. Utilizaremos bastante as condições de Karush-Kuhn-Tucker para encontrar a solução desse tipo de problema.

Problema de Maximização de Utilidade

Nas aulas anteriores, foram apresentados três elementos básicos, os building blocks da teoria do consumidor: o conjunto de consumo, o conjunto orçamentário e as preferências. A esses três, adicionamos um quarto, a seguinte **hipótese comportamental**, que nos diz como os usaremos:

Consumidor escolhe a cesta preferida dentre todas as cestas que pode comprar.

Essa hipótese comportamental nos permite escrever o problema do consumidor como um problema de maximização condicionada.

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{s.a} \quad & p \cdot x \leq w \\ & x_\ell \geq 0 \ \text{ para } \ \ell \in \{1, \ldots, L\} \end{aligned}$$

Chamamos a solução desse problema de **demanda walrasiana** e a representamos por $x(p, w)$:

$$x(p, w) = \arg\max\{u(x) : p \cdot x \leq w\}$$

Frequentemente usaremos o método apresentado na seção anterior para encontrar essa demanda. Para que consigamos encontrá-la, no entanto, é necessário que esse problema tenha solução. A proposição a seguir nos garante existência.

Proposição 1. Se $p \in \mathbb{R}^L_{++}$, $w > 0$ e $u(\cdot)$ contínua, então o problema do consumidor tem solução.

Demonstração:
$B(p, w) = \{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\}$ é conjunto fechado e limitado em $\mathbb{R}^L$. Teorema de Heine-Borel nos garante que é, portanto, compacto. $u(\cdot)$ é função contínua. Teorema de Weierstrass nos garante que existe $x \in B(p, w)$ tal que $u(x) \geq u(\tilde{x})$, para todo $\tilde{x} \in B(p, w)$.

Teorema de Heine-Borel
Um conjunto em $\mathbb{R}^L$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.

Teorema de Weierstrass
Seja u função contínua no conjunto compacto $B \subset \mathbb{R}^L$. Então u atinge máximo global e mínimo global em B.

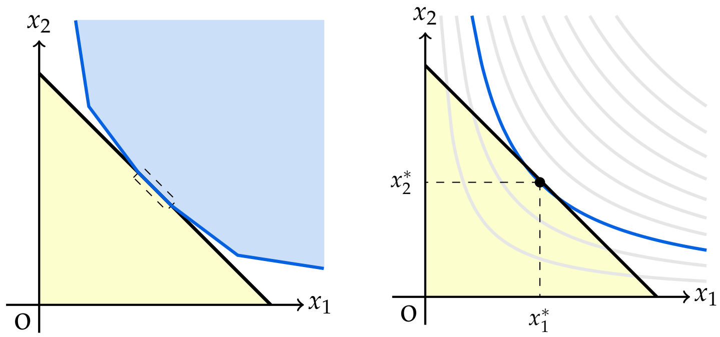
Adicionalmente, gostaríamos também que a solução do problema fosse única. A proposição a seguir nos dá condições suficientes para unicidade.

Proposição 2. Seja $u(\cdot)$ função utilidade contínua e (estritamente) quase-côncava representando relação de preferências $\succsim$ localmente não-saciadas e (estritamente) convexas, definidas sobre o conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Então a correspondência de demanda walrasiana é um conjunto convexo (unitário).

Demonstração:

1. Note que $B(p, w) = \{x \in X : p \cdot x \leq w\}$ é um conjunto convexo, para qualquer $(p, w) \in \mathbb{R}^{L+1}_{++}$.

2. Se as preferências são convexas, então $\succsim (x)$, o conjunto fracamente preferido a x, também é convexo, por definição, para todo $x \in X$.
3. Seja $x^* \in x(p,w)$. Como $\succsim(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^L_+ : x \succsim x^*\}$ e $B(p,w)$ são ambos conjuntos convexos, então a intersecção $x(p,w) = B(p,w) \cap \succsim(x^*)$ será também convexa.



(a) Correspondência de Demanda Walrasiana.

(b) Função de Demanda Walrasiana.

Figura 4: Diferenças entre demanda walrasiana com preferências (não-estritamente) convexas e preferências estritamente convexas. Se preferências são estritamente convexas, então para todo $(p,w) \in \mathbb{R}^{L+1}_{++}$, haverá uma única cesta no conjunto orçamentário resultante que maximizará a utilidade do consumidor.

Quando $x(p,w)$ é um conjunto unitário para todo $p \in \mathbb{R}^L$ e $w > 0$, como na Figura 4(b), podemos definir uma função demanda:

$$x(p,w) = \begin{bmatrix} x_1(p,w) \\ x_2(p,w) \\ \vdots \\ x_L(p,w) \end{bmatrix}$$

Além de compreender sob que condições a solução do problema de maximização de utilidade existe e é única, também gostaríamos de saber que outras propriedades tem essa solução.

Uma das propriedades importantes da demanda walrasiana é a homogeneidade de grau zero. A validade dessa propriedade nos diz que o consumidor só se preocupa com valores reais, não com valores nominais. Isto é, qualquer mudança nos preços e na renda que não altere as cestas que o consumidor pode adquirir, não irá alterar a escolha do consumidor, como vemos na demonstração da proposição a seguir.

Proposição 3. Seja $u(\cdot)$ função utilidade contínua representando relação de preferências $\succsim$ sobre o conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Então a correspondência de demanda walrasiana é homogênea de grau zero em (p,w):

$$x(\alpha p, \alpha w) = x(p,w) \quad \forall (p,w) \ \text{ e } \ \alpha > 0$$

Demonstração:
Note que, para todo escalar $\alpha > 0$, temos:

$$B(\alpha p, \alpha w) \equiv \{x \in \mathbb{R}^L_+ : \alpha p \cdot x \leq \alpha w\} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\} \equiv B(p, w)$$

Como a função objetivo do problema não depende de (p, w) e o conjunto orçamentário não muda se multiplicamos preços e renda pelo mesmo valor, a solução do problema de maximização também não mudará.

Definição 2. Dizemos que a correspondência de demanda walrasiana $x(p, w)$ é **homogênea de grau zero** se $x(\lambda p, \lambda w) = x(p, w)$ para quaisquer p, w e $\lambda > 0$.

Esse resultado é particularmente interessante por nos permitir normalizar todos os preços, representando-os em relação ao preço de uma commodity k arbitrariamente escolhida.

Além da homogeneidade de grau zero, outra propriedade bastante importante é a validade da Lei de Walras, que nos diz que a escolha ótima do consumidor o faz consumir toda a sua renda, desde que as suas preferências sejam localmente não-saciadas. A proposição a seguir formaliza esse resultado:

Definição 3. Dizemos que a correspondência de demanda walrasiana $x(p, w)$ satisfaz a Lei de Walras se para todo $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ e todo $w > 0$ tivermos $p \cdot \tilde{x} = w$ para todo $\tilde{x} \in x(p, w)$.

Proposição 4. Seja u função utilidade contínua representando relação de preferências $\succsim$ localmente não-saciadas definidas sobre o conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Então a correspondência de demanda walrasiana satisfaz a Lei de Walras:

$$p \cdot x = w, \quad \forall x \in x(p, w)$$

Demonstração:
Resultado é consequência direta da não-saciedade local das preferências.

1. Suponha, por contradição, $x^* \in x(p, w)$ e que não vale a Lei de Walras, i.e., $p \cdot x^* < w$.
2. Então podemos escolher um $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente tal que a bola aberta de raio ϵ e centro x^* inteiramente contida em $B(p, w)$.
3. Como preferências são localmente não-saciadas, existe $\tilde{x} \in B(p, w) \cap \succ(x^*)$, i.e., uma cesta factível e preferida a x^*.
4. Segue que $x^* \notin x(p, w)$. Contradição.

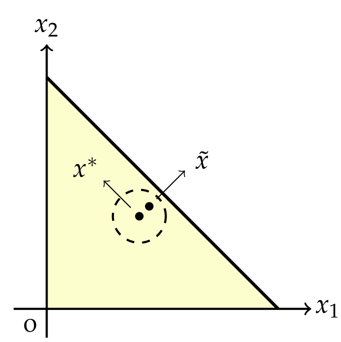


Figura 5: Preferências localmente não-saciadas e validade da Lei de Walras.

Derivadas Parciais da Demanda Walrasiana

Efeito-Renda

Aqui, estamos interessados em saber como se comporta demanda quando variamos a renda do consumidor. Manteremos, então, todos as demais variáveis fixas, todos os preços constantes, para avaliar apenas o efeito de uma variação na renda do consumidor sobre a sua demanda walrasiana.

Quando fixamos todos os preços em um dado nível $\bar{p}$, a função resultante $x(\bar{p}, w)$ depende apenas da renda do consumidor. Chamamos essa função de **Função de Engel**. Seu conjunto imagem em $\mathbb{R}^L_+$, $\{x(\bar{p}, w) : w > 0\}$ é conhecido como caminho de expansão da renda.

A variação marginal no consumo de uma commodity ℓ qualquer em resposta a uma mudança na renda é chamada de **efeito-renda**:

$$\frac{\partial x_\ell(\bar{p}, w)}{\partial w}$$

O efeito renda define uma taxonomia para bens em relação a como sua demada responde a aumentos marginais na renda:

1. **Bens Normais:** consumo do é não decrescente com a renda:

$$\frac{\partial x_\ell(\bar{p}, w)}{\partial w} \geq 0$$

Bens normais podem ser subclassificados ainda em:

(a) **Bens Necessários:** consumo do bem cresce em magnitude <u>menor</u> que a renda:

$$0 < \frac{\partial x_\ell(\bar{p}, w)}{\partial w} < 1$$

(b) **Bens de Luxo:** consumo do bem cresce em magnitude <u>maior</u> que a renda:

$$\frac{\partial x_\ell(\bar{p}, w)}{\partial w} > 1$$

2. **Bens Inferiores:** consumo do bem decresce com a renda:

$$\frac{\partial x_\ell(\bar{p}, w)}{\partial w} < 0$$

A partir do efeito-renda, podemos também definir a **elasticidade-renda da demanda** pelo ℓ-ésimo bem:

$$\varepsilon_{\ell w}(p, w) = \frac{\partial x_\ell(p, w)}{\partial w} \frac{w}{x_\ell(p, w)}$$

A proposição a seguir nos diz o que a validade da Lei de Walras impõe como restrição aos efeitos-renda.

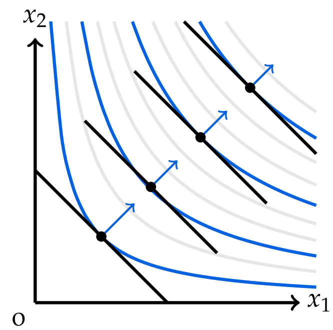


Figura 6: Construção do Caminho de Expansão da Renda para $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. À medida que variamos $w > 0$, deslocamos paralelamente a reta orçamentária, alterando o conjunto orçamentário e a demanda walrasiana.

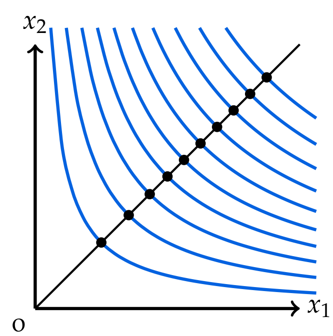


Figura 7: **Caminho de Expansão da Renda**

Proposição 5 (Agregação de Engel)**.** Se a função de demanda Walrasiana $x(p, w)$ satisfaz a Lei de Walras, então para todo $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ e para todo $w > 0$ temos que:

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left[\frac{\partial x_\ell(p, w)}{\partial w} p_\ell \right] = 1 \tag{5}$$

Ou, de modo equivalente: $p \cdot D_w x(p, w) = 1$

Demonstração:
Se $x(p, w)$ satisfaz a Lei de Walras, então para todo p e para todo w temos que:

$$\frac{\partial}{\partial w}[p \cdot x(p, w)] = \frac{\partial}{\partial w} w$$

Segue que:

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left[\frac{\partial x_\ell(p, w)}{\partial w} p_\ell \right] = 1$$

De fato, como é de se esperar, se $x(p, w)$ satisfaz a Lei de Walras, a despesa total do consumidor deve variar em valor igual à variação na sua renda.

A Agregação de Engel também pode ser escrita usando elasticidades, se multiplicarmos ambos os lados da equação (5) por:

$$\frac{x_\ell(p, w)}{w} \frac{w}{x_\ell(p, w)} \quad \text{para} \quad \ell = 1, \dots, L$$

Desse modo, chegamos a:

$$\sum_{\ell=1}^{L} s_\ell \eta_\ell = 1 \quad \text{em que} \quad s_\ell = \frac{p_\ell x_\ell(p, w)}{w} \tag{6}$$

Essa versão da Agregação de Engel impõe uma restrição importante sobre a demanda walrasiana. Note que $s_\ell \in [0, 1]$ para todo ℓ, mas que η_ℓ pode ser negativo ou positivo, maior ou menor que 1. Além disso, sendo válida a Lei de Walras, temos que $\sum_{\ell=1}^{L} s_\ell = 1$.

Assim, para que a equação (6) seja válida, não podemos ter todos os bens sendo inferiores, nem todos os bens necessários, nem todos os bens de luxo.

Efeito-preço

Outro exercício interessante de estática comparativa é olhar como varia a demanda em resposta a variações nos preços. A variação marginal no consumo de uma commodity ℓ qualquer em resposta a uma mudança no preço do k-ésima commodity é o chamado **efeito-preço** de p_k sobre a demanda de ℓ:

$$\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}$$

O efeito-preço também define uma taxonomia importante:

1. **Bens Substitutos:** efeito-preço de p_k sobre $x_\ell(p,w)$ é positivo
2. **Bens Complementares:** efeito-preço de p_k sobre $x_\ell(p,w)$ é negativo;
3. **Bem de Giffen**: efeito-preço de p_ℓ sobre $x_\ell(p,w)$ é negativo.

A proposição a seguir nos diz o que a validade da Lei de Walras nos impõe como restrição aos efeitos-preço.

Proposição 6 (Agregação de Cournot)**.** Se a função demanda walrasiana $x(p,w)$ satisfaz a Lei de Walras, então para todo $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ e para todo $w > 0$ uma variação nos preços não pode afetar a despesa total do consumidor. Isto é, temos que:

$$\sum_{\ell=1}^{L}\left[\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}p_\ell + x_k(p,w)\right] = 0 \qquad \forall k = 1,\dots,L \tag{7}$$

Ou, de modo equivalente: $p \cdot D_p x(p,w) + x(p,w)^T = 0^T$

Demonstração:
Se $x(p,w)$ satisfaz a Lei de Walras, então para todo p e para todo w temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p_k}\left[p \cdot x(p,w)\right] &= \frac{\partial}{\partial p_k}w \\
\frac{\partial}{\partial p_k}\left[\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell x_\ell(p,w)\right] &= 0 \\
\sum_{\ell=1}^{L}\left[\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}p_\ell + x_k(p,w)\right] &= 0 \qquad \forall k = 1,\dots,L
\end{aligned}$$

De fato, faz sentido. *Ceteris paribus*, se variamos o preço de apenas uma das commodities, a mudança na despesa total do consumidor em resposta a essa variação tem que ser zero se o consumidor já está consumindo toda a sua renda e continuará consumindo toda a sua renda.

A Agregação de Cournot também pode ser escrita usando elasticidades, se multiplicarmos ambos os lados da equação (7) por:

$$\frac{1}{w}\frac{p_k}{p_k}\prod_{\ell=1}^{L}\frac{x_\ell(p,w)}{x_\ell(p,w)}$$

Chegamos, então, a:

$$\sum_{\ell=1}^{L}\left[\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}p_\ell\frac{p_k}{w}\right]+\frac{p_k x_k(p,w)}{w} \quad = \quad 0$$

Multiplicando o ℓ-ésimo termo do somatório por $x_\ell(p,w)[x_\ell(p,w)]^{-1}$, temos:

$$\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}\frac{p_k}{x_\ell(p,w)}\frac{p_\ell x_\ell(p,w)}{w}+\frac{p_k x_k(p,w)}{w} \quad = \quad 0$$

$$\sum_{\ell=1}^{L}\varepsilon_{\ell k}s_\ell + s_k = 0 \tag{8}$$

Usando elasticidades é mais fácil capturar a intuição por trás da Agregação de Cournot. Note na equação (8) que, quando a fração da renda gasta com o k-ésimo bem é:

1. **Pequena:** quando o k-ésimo bem tem muitos substitutos ou quando a fração da renda gasta com esses substitutos é grande.
2. **Grande:** quando o k-ésimo bem tem muitos complementares ou quando a fração da renda gasta com esses complementares é grande.

pequena quando esse bem tem muitos substitutos ($\varepsilon_{\ell k} > 0$) e grande quando tem muitos bens complementares ($\varepsilon_{\ell k} < 0$).

Vimos que homogeneidade de grau zero da demanda walrasiana implica que variações percentuais idênticas em todos os preços e na renda não afetam a escolha do consumidor, que só se importa com valores relativos. A proposição a seguir nos diz o que essa propriedade da demanda walrasiana impõe como restrição aos efeitos-preço e ao efeito-renda.

Proposição 7. Se a função de demanda Walrasiana $x(p,w)$ é homogênea de grau zero, então para todo p e w temos que:

$$\sum_{k=1}^{L}\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}p_k+\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial w}w = 0 \quad \text{para} \quad \ell = 1,\ldots,L \tag{9}$$

Demonstração:

Aplicação imediata do Teorema de Euler.

Teorema de Euler
Se $f(x_1,\ldots,x_N)$ é diferenciável e homogênea de grau r, para algum $r \in \mathbb{Z}$, então em qualquer $\tilde{x} = (\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_N)$ no domínio de f temos que:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial f(\lambda\tilde{x}_1,\ldots,\lambda\tilde{x}_N)}{\partial x_n}\tilde{x}_n = rf(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_N)$$

A equação 9 da proposição anterior também pode ser escrita em notação matricial:

$$D_p x(p,w) \cdot p + w D_w x(p,w) = 0$$

em que:

$$D_p x(p,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial p_L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_L(p,w)}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_L(p,w)}{\partial p_L} \end{bmatrix} \text{ e } D_w x(p,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial w} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_L(p,w)}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Multiplicando a equação (9) por $\frac{1}{x_\ell(p,w)}$, chegamos à sua variante, em termos das elasticidades da demanda:

$$\sum_{k=1}^{L} \underbrace{\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k} \frac{p_k}{x_\ell(p,w)}}_{\varepsilon_{\ell k}(p,w)} + \underbrace{\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial w} \frac{w}{x_\ell(p,w)}}_{\varepsilon_{\ell w}(p,w)} = 0$$

em que $\varepsilon_{\ell k}(p,w)$ define a elasticidade-preço da demanda do bem ℓ em relação ao preço p_k do bem k e $\varepsilon_{\ell w}(p,w)$ a elasticidade-renda da demanda.

Utilidade Indireta

Além da solução do problema de maximização de utilidade, outra função importante é a função valor deste problema, que chamamos de utilidade indireta. A **utilidade indireta** $v : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função valor do problema de maximização de utilidade:

$$v(p,w) = u(x(p,w)) = \max_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{u(x) \text{ s.a. } p \cdot x \leq w\}$$

Esta função nos dá o nível de bem-estar que o consumidor obtém quando se depara com um dado conjunto orçamentário. Isto é, nos dá o nível de utilidade referente à curva de indiferença mais alta que o consumidor consegue atingir.

Propriedades da Utilidade Indireta

1. Homogênea de grau zero em (p,w) Como vimos, $x(p,w)$ é homogênea de grau zero. Logo, segue que, para um $\alpha > 0$ qualquer, temos:

$$v(\alpha p, \alpha w) = u(x(\alpha p, \alpha w)) = u(x(p,w)) = v(p,w)$$

2. Contínua em $(p, w) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+$ Se a demanda walrasiana $x(p, w)$ é contínua e u é função utilidade contínua, então $v(p, w) = u(x(p, w))$ é contínua em $(p, w) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+$.

3. Estritamente crescente em w

   Se u e v são diferenciáveis, podemos usar o Teorema do Envelope:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(p,w)}{\partial w} &= \frac{\partial \mathcal{L}(x(p,w),p,w)}{\partial w} = \sum_{k=1}^{L} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k}}_{=0} \frac{\partial x_k}{\partial w} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} \\ &= \lambda > 0\end{aligned}$$

4. Decrescente em p

   Se u e v são diferenciáveis, podemos usar o Teorema do Envelope:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_\ell} &= \frac{\partial \mathcal{L}(x(p,w),p,w)}{\partial p_\ell} = \sum_{k=1}^{L} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k}}_{=0} \frac{\partial x_k}{\partial p_\ell} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_\ell} \\ &= -\lambda x_\ell(p,w) \leq 0\end{aligned}$$

5. Identidade de Roy: trata-se de uma forma de recuperar as demandas walrasianas a partir da função utilidade indireta. A proposição a seguir enuncia esse resultado.

Proposição 8. Seja u função utilidade contínua representando preferências $\succsim$ localmente não-saciadas e estritamente convexas sobre $X = \mathbb{R}^L_+$. Suponha ainda que a função de utilidade indireta é diferenciável em $(p, w) \in \mathbb{R}^{L+1}_{++}$. Então, para todo $\ell = 1, \ldots, L$, temos:

$$x_\ell(p,w) = -\left(\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_\ell}\right) \times \left(\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}\right)^{-1}$$

Demonstração:

Sabemos que, $\forall (p, w) \in \mathbb{R}^{L+1}_{++}$, temos $v(p, w) = u(x(p, w))$. Logo:

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_\ell} = \sum_{j=1}^{L} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j(p,w)}{\partial p_\ell} \tag{10}$$

Sabemos também que v é o valor que u atinge em seu máximo. Logo, deve satisfazer a CPO do problema do consumidor:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \lambda p_j$$

Além disso, sabemos que λ é a utilidade marginal da renda. Logo,

$$\lambda = \frac{\partial v(p,w)}{\partial w} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x_j} = \lambda p_j \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v(p,w)}{\partial w} p_j$$

Substituindo essa última igualdade na equação (10), chegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(p,w)}{\partial p_\ell} &= \sum_{j=1}^{L} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j(p,w)}{\partial p_\ell} \\ &= \lambda \sum_{j=1}^{L} p_j \frac{\partial x_j(p,w)}{\partial p_\ell} \\ &= \frac{\partial v(p,w)}{\partial w} \sum_{j=1}^{L} p_j \frac{\partial x_j(p,w)}{\partial p_\ell} \end{aligned} \tag{11}$$

Usando a Agregação de Cournot, equação (7), chegamos a:

$$x_\ell(p,w) = -\sum_{j=1}^{L} p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_\ell}$$

Que podemos substituir na equação (11) para chegar a:

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_\ell} = -x_\ell(p,w) \frac{\partial v(p,w)}{\partial w} \quad \Rightarrow \quad x_\ell(p,w) = -\frac{\dfrac{\partial v(p,w)}{\partial p_\ell}}{\dfrac{\partial v(p,w)}{\partial w}}$$
