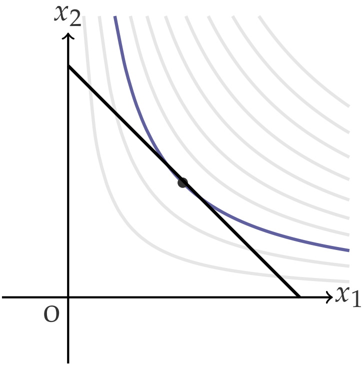
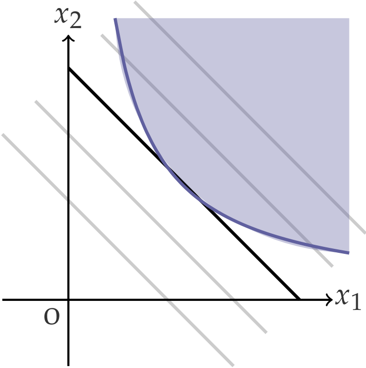
Minimização de Despesa

Ao invés de fixar preços e renda e buscar o nível máximo de utilidade atingível, resolvemos um problema distinto.

Qual o menor nível de despesa que o consumidor consegue atingir, fixados um vetor de preços e um nível de utilidade?

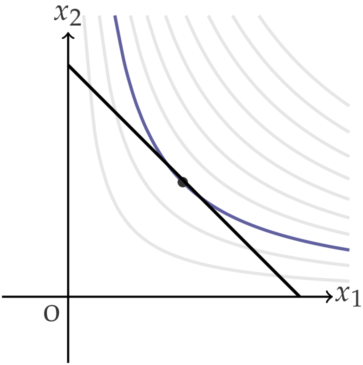


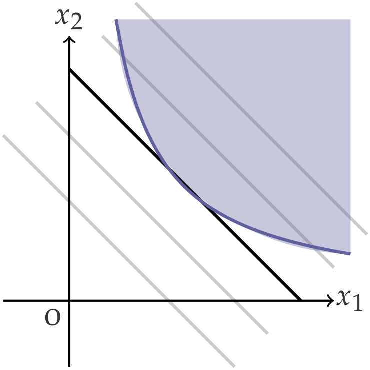


Minimização de Despesa

$$\overbrace{v(p,w)}^{\text{Utilidade Indireta}} = \max_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{u(x) \ \text{ s.a. } \ p \cdot x \leq w\}$$
$$= p \cdot x(p,w)$$

$$\overbrace{e(p,u)}^{\text{Função despesa}} = \min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{p \cdot x \ \text{ s.a. } \ u(x) \geq u\}$$
$$= p \cdot h(p,u)$$

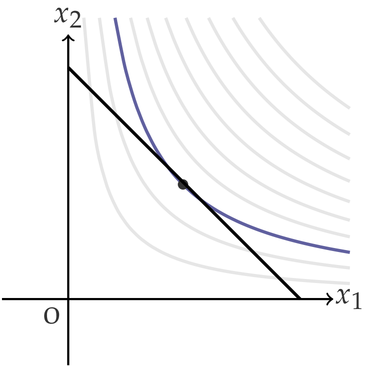


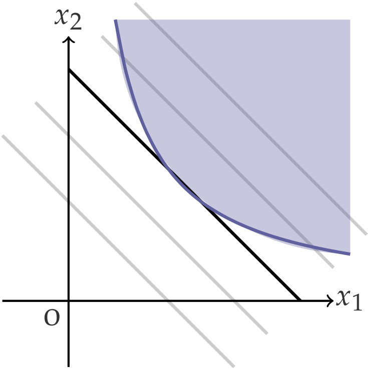


Minimização de Despesa

$$v(p,w) = \max_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{u(x) \ \text{ s.a. } \ p \cdot x \leq w\}$$
$$= u(\underbrace{x(p,w)}_{\text{Demanda Walrasiana}})$$

$$e(p,u) = \min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{p \cdot x \ \text{ s.a. } \ u(x) \geq u\}$$
$$= p \cdot \underbrace{h(p,u)}_{\text{Demanda Hicksiana}}$$





Minimização de Despesa

- Ao invés de fixar preços e renda e buscar o nível máximo de utilidade atingível, resolvemos um problema distinto.
- **Qual o menor nível de despesa que o consumidor consegue atingir, fixados um vetor de preços e um nível de utilidade?**
- Fixamos uma curva de indiferença e encontramos a isogasto que a tangencia.

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \quad & p \cdot x \\ \text{s.a} \quad & u(x) \geq u \end{aligned}$$

- Função despesa:

$$e(p,u) = p \cdot h(p,u) = \min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{p \cdot x \ \text{ s.a. } \ u(x) \geq u\}$$

Propriedades da Função Despesa: Continuidade (1)

Seja $\mathbb{U} = \{u(x) : x \in \mathbb{R}^L_+\}$ o conjunto imagem de u.

A função despesa $e : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

- Contínua em $\mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{U}$
  - **Demonstração**: Teorema de Berge.

Propriedades da Função Despesa: Continuidade (2)

Seja $\mathbb{U} = \{u(x) : x \in \mathbb{R}^L_+\}$ o conjunto imagem de u.

A função despesa $e : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

- Contínua em $\mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{U}$
  - **Demonstração**: Teorema de Berge.

Propriedades da Função Despesa: Valor Mínimo

Seja $\mathbb{U} = \{u(x) : x \in \mathbb{R}^L_+\}$ o conjunto imagem de u.

A função despesa $e : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

- É igual a zero quando u atinge seu valor mínimo.
  - **Demonstração**: Preferências estritamente monotônicas implicam que $u(x) > u(0), \forall x \in \mathbb{R}^L_+ \backslash \{0\}$.
- Não decrescente em p.
  - **Demonstração**: Sejam p^2 e p^1 dois vetores, com $p^2_\ell \geq p^1_\ell$ e $p^2_k = p^1_k, \forall k \neq \ell$. Então
$$e(p^2, u) = p^2 \cdot h(p^2, u) \leq p^1 \cdot h(p^2, u) \leq e(p^2, u)$$

Propriedades da Função Despesa: Valor Mínimo

Seja $\mathbb{U} = \{u(x) : x \in \mathbb{R}^L_+\}$ o conjunto imagem de u.

A função despesa $e : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

- É igual a zero quando u atinge seu valor mínimo.
  - **Demonstração**: Preferências estritamente monotônicas implicam que $u(x) > u(0), \forall x \in \mathbb{R}^L_+ \backslash \{0\}$.

Propriedades da Função Despesa: Valor Mínimo

Seja $\mathbb{U} = \{u(x) : x \in \mathbb{R}^L_+\}$ o conjunto imagem de u.

A função despesa $e : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

- Não decrescente em p.
  - **Demonstração**: Sejam p^2 e p^1 dois vetores, com $p^2_\ell \geq p^1_\ell$ e $p^2_k = p^1_k, \forall k \neq \ell$. Então
    $$e(p^2, u) = p^2 \cdot h(p^2, u) \geq p^1 \cdot h(p^2, u) \geq p^1 \cdot h(p^1, u) = e(p^1, u)$$

Propriedades da Função Despesa (2)

A função despesa $e : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

- É côncava em p
  - **Demonstração**: Considere dois vetores p^1 e p^2 e defina:

$$h^1 \equiv \begin{cases} \underset{x \in \mathbb{R}^L_+}{\arg\min} & p^1 \cdot x \\ \text{s.a.} & u(x) \geq u \end{cases} \quad \text{e} \quad h^2 \equiv \begin{cases} \underset{x \in \mathbb{R}^L_+}{\arg\min} & p^2 \cdot x \\ \text{s.a.} & u(x) \geq u \end{cases}$$

Defina $p^\lambda = \lambda p^1 + (1-\lambda)p^2$ e $h^\lambda \equiv \begin{cases} \underset{x \in \mathbb{R}^L_+}{\arg\min} & p^\lambda \cdot x \\ \text{s.a.} & u(x) \geq u \end{cases}$

Note que $p^1 \cdot h^1 \leq p^1 \cdot h^\lambda$ e que $p^2 \cdot h^2 \leq p^2 \cdot h^\lambda$. Segue que:

$$\lambda \underbrace{p^1 \cdot h^1}_{e(p^1,u)} + (1-\lambda) \underbrace{p^2 \cdot h^2}_{e(p^2,u)} \leq \underbrace{p^\lambda \cdot h^\lambda}_{e(p^\lambda,u)}$$

Propriedades da Função Despesa (3)

A função despesa $e : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

- É estritamente crescente em u e sem limite superior $\forall p \gg 0$
  - **Demonstração**: Como a restrição de utilidade mínima é ativa (por conta de continuidade e de monotonicidade estrita), podemos usar o teorema do envelope para mostrar que:

$$e(p,u) = \min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \mathscr{L}(x,\mu)$$

com $\mathscr{L}(x,\mu) = p \cdot x + \mu[u - u(x)]$. Então:

$$\frac{\partial}{\partial u} e(p,u) = \frac{\partial}{\partial u} \min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \mathscr{L}(x,\mu) = \mu > 0$$

Propriedades da Função Despesa (4)

A função despesa $e : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

- É homogênea de grau 1 em p
  - **Demonstração**: Note que:

$$e(\lambda p, u) \equiv \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^L_+} & \lambda p \cdot x \\ \text{s.a.} & u(x) \geq u \end{cases} = \begin{cases} \lambda \min\limits_{x \in \mathbb{R}^L_+} & p \cdot x \\ \text{s.a.} & u(x) \geq u \end{cases} \equiv \lambda e(p, u)$$

- Satisfaz o **Lema de Sheppard**: se $e(p, u)$ é diferenciável no ponto $(\tilde{p}, \tilde{u})$, com $\tilde{p} \gg 0$, então:

$$\frac{\partial}{\partial p_\ell} e(\tilde{p}, \tilde{u}) = h_\ell(\tilde{p}, \tilde{u})$$

  - **Demonstração:** Pelo Teorema do Envelope:

$$\frac{\partial}{\partial p_\ell} e(p, u) = \frac{\partial}{\partial p_\ell} \min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \mathscr{L}(x, \mu) = h_\ell(p, u)$$

Propriedades da Demanda Hicksiana (1)

Seja $h : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ função demanda hicksiana.

- Homogeneidade em p: $\forall (p, u)$ e $\lambda > 0$, $h(\lambda p, u) = h(p, u)$
  - **Demonstração**: Similar à demonstração de homogeneidade da função despesa.
- Matriz de Substituição (de Hicks) é negativa semi-definida.
  - **Demonstração:** $\sigma(p, u)$ é igual à Hessiana da função despesa, que sabemos ser côncava em p:

$$\sigma(p,u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(p,u)}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial h_L(p,u)}{\partial p_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1(p,u)}{\partial p_L} & \cdots & \frac{\partial h_L(p,u)}{\partial p_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 e_1(p,u)}{\partial p_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 e_L(p,u)}{\partial p_L \partial p_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 e_1(p,u)}{\partial p_1 \partial p_L} & \cdots & \frac{\partial^2 e_L(p,u)}{\partial p_L^2} \end{bmatrix}$$

Propriedades da Demanda Hicksiana (2)

Seja $h : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ função demanda hicksiana.

- Simetria: $\sigma(p,u)$ é simétrica, i.e.,

$$\frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial h_k(p,u)}{\partial p_\ell}$$

  - **Demonstração**: Pelo Lema de Sheppard:

$$\frac{\partial h_k(p,u)}{\partial p_\ell} = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_k \partial p_\ell} = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_\ell \partial p_k} = \frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k}$$

  A segunda desigualdade decorre do Teorema de Young.

- **Lei da Demanda Compensada**: a demanda hicksiana é não-positivamente inclinada.

Lei da Demanda Compensada

Proposição

Seja $u(\cdot)$ função utilidade contínua representando preferências $\succsim$ localmente não saciadas definidas sobre o conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$, e que para todo $p \gg 0$, $h(p, u)$ consiste em um único elemento. Então a função demanda hicksiana satisfaz a lei da demanda compensada:

$$(p' - p)[h(p', u) - h(p, u)] \leq 0$$

Demonstração

1. Se $p \gg 0$ e $p' \gg 0$, então a demanda hicksiana satisfaz:

$$p \cdot h(p, u) \leq p \cdot h(p', u)$$

$$p' \cdot h(p', u) \leq p' \cdot h(p, u)$$

2. Somando as duas desigualdades, temos:

$$p \cdot h(p, u) + p' \cdot h(p', u) \leq p \cdot h(p', u) + p' \cdot h(p, u)$$

Lei da Demanda Compensada

Proposição

Seja $u(\cdot)$ função utilidade contínua representando preferências $\succsim$ localmente não saciadas definidas sobre o conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$, e que para todo $p \gg 0$, $h(p,u)$ consiste em um único elemento. Então a função demanda hicksiana satisfaz a lei da demanda compensada:

$$(p' - p)[h(p',u) - h(p,u)] \leq 0$$

Demonstração (cont.)

2. Somando as duas desigualdades, temos:

$$p \cdot h(p,u) + p' \cdot h(p',u) \leq p \cdot h(p',u) + p' \cdot h(p,u)$$

3. Rearranjando os termos, chegamos ao resultado:

$$(p' - p)[h(p',u) - h(p,u)] \leq 0$$

Lei da Demanda Compensada

- Para variação de preços em um único bem:

$$(p'_\ell - p_\ell)[h_\ell(p', u) - h_\ell(p, u)] \leq 0$$

- O efeito da variação no preço do bem ℓ sobre a demanda hicksiana do bem ℓ é sempre negativo.
- Se h é diferenciável em p, podemos demonstrar também usando o Lema de Sheppard e a concavidade da função despesa:

$$\frac{\partial h_\ell(p, u)}{\partial p_\ell} = \frac{\partial^2 e(p, u)}{\partial p_\ell^2} \leq 0$$

- Vimos que isso não é verdade para a demanda walrasiana, por conta dos bens de Giffen.

Demandas Walrasiana e Hicksiana

Proposição

Seja $u(\cdot)$ função utilidade contínua representando preferências $\succsim$ localmente não saciadas definidas sobre o conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Se $p >> 0$, temos:

1. Se $x^* \in x(p, w)$, com $w > 0$, então $x^* \in h(p, u)$, quando $u = u(x^*)$. Adicionalmente, $e(p, u(x^*)) = w$.

2. Se $x^* \in h(p, u)$, com $u > u(0)$, então $x^* \in x(p, w)$, quando $w = p \cdot x^*$. Adicionalmente, $v(p, p \cdot x^*) = u$.

Demandas Walrasiana e Hicksiana

Proposição

Seja $u(\cdot)$ função utilidade contínua representando preferências $\succsim$ localmente não saciadas definidas sobre o conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Se $p >> 0$, temos:

1. Se $x^* \in x(p, w)$, com $w > 0$, então $x^* \in h(p, u)$, quando $u = u(x^*)$. Adicionalmente, $e(p, u(x^*)) = w$.

Demonstração

1. Precisamos de $w > 0$ e $u > u(0)$ para que o conjunto de restrição seja não-vazio.
2. Demonstração por contradição.
3. Suponha que $x^* \in x(p, w)$ e $x^* \notin h(p, u)$, quando $u = u(x^*)$.
4. Existe $\tilde{x}$ tal que $u(\tilde{x}) \geq u(x^*)$ e $p \cdot \tilde{x} < p \cdot x^* \leq w$.
5. Por não-saciedade local, existe um x' na vizinhança de $\tilde{x}$ tal que $u(x') > u(\tilde{x})$.

Demandas Walrasiana e Hicksiana

Proposição

Seja $u(\cdot)$ função utilidade contínua representando preferências $\succsim$ localmente não saciadas definidas sobre o conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Se $p >> 0$, temos:

1. Se $x^* \in x(p, w)$, com $w > 0$, então $x^* \in h(p, u)$, quando $u = u(x^*)$. Adicionalmente, $e(p, u(x^*)) = w$.

Demonstração (cont.)

6. Como x' é factível, x^* não pode ser solução do Problema de Maximização de Utilidade. Contradição!

7. Logo, $x^* \in h(p, u)$. Pela lei de Walras, $p \cdot x^* = w$.

8. Segue que $e(p, v(p, w)) = w$.

Demandas Walrasiana e Hicksiana

Proposição

Seja $u(\cdot)$ função utilidade contínua representando preferências $\succsim$ localmente não saciadas definidas sobre o conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Se $p >> 0$, temos:

2. Se $x^* \in h(p, u)$, com $u > u(0)$, então $x^* \in x(p, w)$, quando $w = p \cdot x^*$. Adicionalmente, $v(p, p \cdot x^*) = u$.

Demonstração

1. Como $u > u(0)$, precisamos ter $x^* \neq 0$. Portanto, $p \cdot x^* > 0$.
2. Demonstração por contradição.
3. Suponha que $x^* \notin x(p, w)$, quando a riqueza é $w = p \cdot x^*$.
4. Existe $\tilde{x}$ tal que $u(\tilde{x}) > u(x^*)$ e $p \cdot \tilde{x} \leq p \cdot x^*$.
5. Seja $x = \lambda \tilde{x}$, para um $\lambda \in (0, 1)$ suficientemente próximo de 1.

Demandas Walrasiana e Hicksiana

Proposição

Seja $u(\cdot)$ função utilidade contínua representando preferências $\succsim$ localmente não saciadas definidas sobre o conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Se $p >> 0$, temos:

2. Se $x^* \in h(p, u)$, com $u > u(0)$, então $x^* \in x(p, w)$, quando $w = p \cdot x^*$. Adicionalmente, $v(p, p \cdot x^*) = u$.

Demonstração (cont.)

6. Como $u(\cdot)$ é contínua, ainda teremos $u(x) > u(x^*)$ e $p \cdot x < p \cdot x^*$.
7. Logo, x^* não pode ser solução do Problema de Minimização de Despesa. Contradição!
8. Portanto, x^* precisa ser solução do Problema de Maximização de Utilidade. Portanto, temos $u = u(x^*)$.
9. Segue que $v(p, e(p, u)) = u$.

Demandas Walrasiana e Hicksiana

- Seja $\bar{w}$=e($\bar{p}$,$\bar{u}$). Então $h(p,u) = x(p, e(p,u)), \forall (p,u)$. Logo:

$$\frac{\partial h_\ell(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_k} = \frac{\partial x_\ell(\bar{p}, e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial p_k} + \frac{\partial x_\ell(\bar{p}, e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial w} \underbrace{\frac{\partial e(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_k}}_{h_k(\bar{p},\bar{u})}$$

- Como $\bar{w} = e(\bar{p},\bar{u})$ e $h_k(\bar{p},\bar{u}) = x_k(\bar{p}, e(\bar{p},\bar{u})) = x_k(\bar{p},\bar{w})$:

$$\frac{\partial h_\ell(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_k} = \frac{\partial x_\ell(\bar{p},\bar{w})}{\partial p_k} + \frac{\partial x_\ell(\bar{p},\bar{w})}{\partial w} x_k(\bar{p},\bar{w})$$

- Essa equação chamamos de **Equação de Slutsky**.

Equação de Slutsky

Proposição

Seja $u(\cdot)$ função utilidade contínua representando preferências $\succsim$ localmente não saciadas e estritamente convexas definidas sobre o conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Então, para todo (p, w) e $u = v(p, w)$, temos:

$$\frac{\partial x_\ell(p, w)}{\partial p_k} = \frac{\partial h_\ell(p, u)}{\partial p_k} - \frac{\partial x_\ell(p, w)}{\partial w} x_k(p, w), \quad \forall \ell, k \in \{1, \dots, L\}$$

Equação de Slutsky

$$\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k} = \underbrace{\frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k}}_{\text{efeito-substituição}} - \underbrace{\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial w} x_k(p,w)}_{\text{efeito}-\text{renda}}, \quad \forall \ell, k \in \{1, \ldots, L\}$$

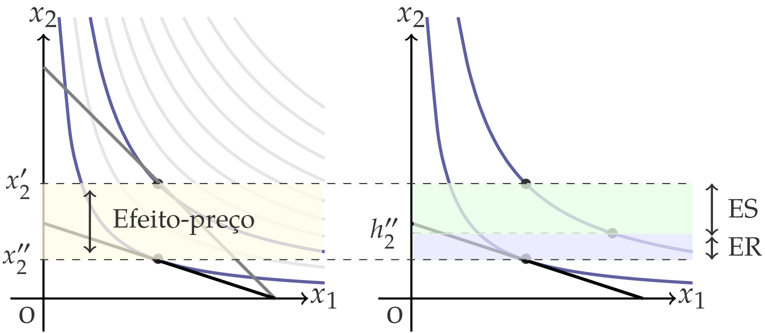
Intuição: se p_k muda, dois efeitos sobre a demanda do bem ℓ:

1. **Efeito-substituição**
   - movimento ao longo da curva de indiferença original
   - é o efeito da mudança nos preços, mantendo-se fixa a utilidade.
2. **Efeito-renda**:
   - movimento de uma curva de indiferença para outra
   - é o efeito da mudança na renda, mantendo-se fixos os preços

Equação de Slutsky

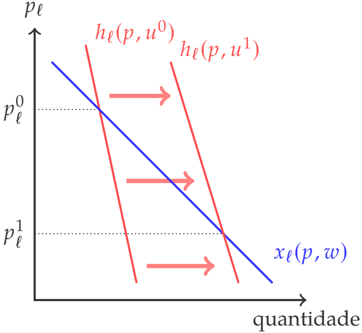
Intuição: efeito-preço de p_k sobre demanda walrasiana do bem ℓ pode ser decomposto em:

1. **Efeito-substituição**: movimento ao longo da curva de indiferença original
2. **Efeito-renda**: movimento para uma outra curva de indiferença

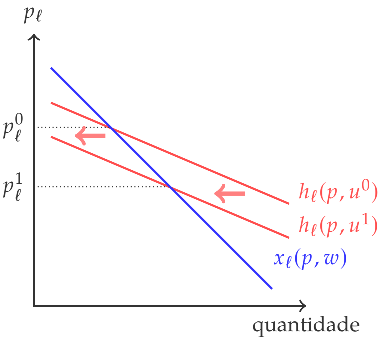


Demandas Walrasiana e Hicksiana

Bem Normal



Bem Inferior



Aplicação: Análise de Bem-Estar

- Exercício de estática comparativa.
- Como varia o bem-estar do consumidor quando variam os preços?
- O que é bem-estar?
- O que é uma boa métrica de bem-estar?
- Analisaremos três métricas distintas:
    1. Excedente do Consumidor
    2. Variação Compensatória
    3. Variação Equivalente

Excedente do Consumidor

- Suponha que a função utilidade representa o bem-estar do consumidor de modo realista.
- Preços mudam de p^1 para p^2 (apenas muda ℓ-ésimo preço):

$$p^1 = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, p^1_\ell, \ldots, \bar{p}_L) \quad \text{e} \quad p^2 = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, p^2_\ell, \ldots, \bar{p}_L)$$

- Mudança de bem-estar é dada por:

$$\begin{aligned} v(p_2, w) - v(p_1, w) &= \int_{p^1_\ell}^{p^2_\ell} \frac{\partial v(p,w)}{\partial p_\ell} dp_\ell \\ &= -\int_{p^1_\ell}^{p^2_\ell} \frac{\partial v(p,w)}{\partial w} x_\ell(p,w) dp_\ell \end{aligned}$$

- A última igualdade decorre da Identidade de Roy.

Excedente do Consumidor

HIPÓTESE

Utilidade marginal da renda é constante:

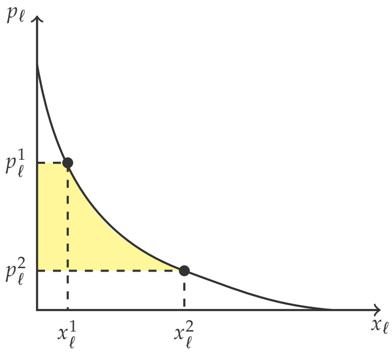
$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial w} = \bar{m}$$

- Mudança de bem-estar é proporcional à área embaixo da curva de demanda:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\bar{m}}[v(p_2,w) - v(p_1,w)] &= -\frac{1}{\bar{m}} \int_{p_\ell^1}^{p_\ell^2} \frac{\partial v(p,w)}{\partial p_\ell} dp_\ell \\
&= \int_{p_\ell^1}^{p_\ell^2} x_\ell(p,w) dp_\ell
\end{aligned}$$

Excedente do Consumidor

- Lembre-se: construímos o gráfico usando a demanda inversa (demanda no eixo horizontal)
- Chamamos essa área de **Excedente do Consumidor**.
- Ao dividir pela utilidade marginal da renda constante, chegamos a uma métrica que independe da função utilidade.



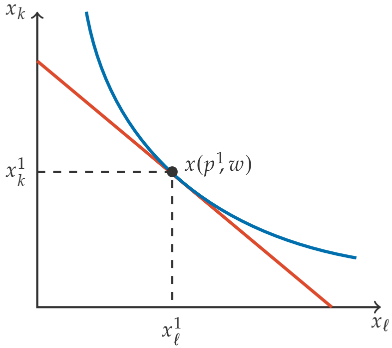
$$\int_{p_\ell^1}^{p_\ell^2} x_\ell(p,w)dp_\ell$$

Excedente: Problemas e Alternativas

- Depende da hipótese forte de constância da utilidade marginal da renda.
- Não está bem definido quando varia o preço de múltiplas commodities.
- Métricas alternativas para Avaliação de Bem-Estar:
  - **Variação Compensatória**: quanto de renda devemos dar ao consumidor para compensá-lo por uma variação nos preços?
  - **Variação Equivalente**: quanto o consumidor estaria disposto a pagar para evitar uma variação nos preços?

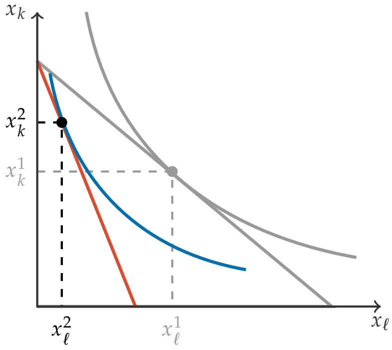
Variação Compensatória: Análise Gráfica

- Partimos da escolha ótima do consumidor, $x(p^1, w)$.
- Suponha que os preços mudam de $p^1 = (p^1_\ell, \bar{p}_k)$ para $p^2 = (p^2_\ell, \bar{p}_k)$, com $p^2_\ell > p^1_\ell$.
- Nesse exemplo muda apenas o preço do bem ℓ. Mas a análise não muda se múltiplos preços variam.



Variação Compensatória

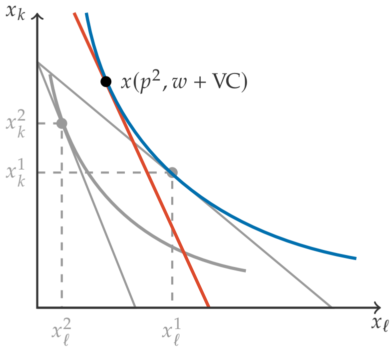
- Sob os novos preços $p^2 = (p_\ell^2, \bar{p}_k)$, cai o consumo de x_ℓ e aumenta o de x_k.
- O consumidor agora está em uma curva de indiferença mais baixa.
- **Quanto precisaríamos dar de renda adicional ao consumidor para que ele atinja a mesma utilidade que tinha antes da mudança nos preços?**



Variação Compensatória

- A renda adicional não muda os preços relativos; apena desloca paralelamente o hiperplano orçamentário.
- A magnitude do deslocamento para atingir a curva de indiferença original, mais alta, determina o valor da Variação Compensatória:

$$v(p^2, w + \mathrm{VC}) = v(p^1, w)$$



Variação Compensatória

- Variação Compensatória (VC) é definida implicitamente:

$$v(p^2, w + \text{VC}) = v(p^1, w)$$

- Ou, de modo equivalente:

$$\begin{aligned} e(p^2, v(p^2, w + \text{VC})) &= e(p^2, v(p^1, w)) \\ \text{VC} &= e(p^2, v(p^1, w)) - w \end{aligned}$$

- Como $w = e(p^1, v(p^1, w))$, temos:

$$\text{VC} = e(p^2, v(p^1, w)) - e(p^1, v(p^1, w))$$

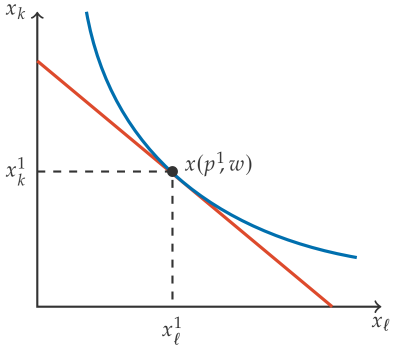
Variação Compensatória

- Aplicando o Lema de Sheppard:

$$
\begin{aligned}
\text{VC} &= e(p^2, v^1) - e(p^1, v^1) \\
&= \int_{p_\ell^1}^{p_\ell^2} \frac{\partial e(p, v^1)}{\partial p_\ell} dp_\ell \\
&= \int_{p_\ell^1}^{p_\ell^2} h_\ell(p, v^1) dp_\ell
\end{aligned}
$$

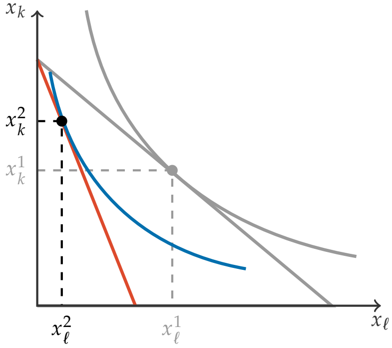
Variação Equivalente: Análise Gráfica

- Mais uma vez, partimos da escolha ótima do consumidor, $x(p^1, w)$.
- Suponha que os preços mudam de $p^1 = (p^1_\ell, \bar{p}_k)$ para $p^2 = (p^2_\ell, \bar{p}_k)$, com $p^2_\ell > p^1_\ell$.
- Aqui mudamos apenas o preço do bem ℓ. Mas a análise não muda se múltiplos preços variam.



Variação Equivalente: Análise Gráfica

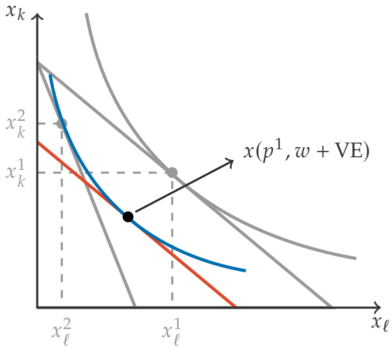
- Sob os novos preços $p^2 = (p_\ell^2, \bar{p}_k)$, cai o consumo de x_ℓ e aumenta o de x_k.
- O consumidor agora está em uma curva de indiferença mais baixa.
- **Qual seria a variação na renda do consumidor que o deixaria com o mesmo bem-estar que esta mudança nos preços?**



Variação Equivalente: Análise Gráfica

- Agora deslocamos o hiperplano orçamentário em direção ao nível de utilidade ex-post (após a mudança), diferentemente que no caso da Variação Compensatória.
- A magnitude do deslocamento para atingir nova curva de indiferença, mais baixa, determina o valor da Variação Equivalente:

$$v(p^2, w) = v(p^1, w - \mathrm{VE})$$



Variação Equivalente

- Variação Equivalente (VE) é definida implicitamente:

$$v(p^2, w) = v(p^1, w - \mathrm{VE})$$

- Ou, de modo equivalente:

$$\begin{aligned} e(p^1, v(p^2, w)) &= e(p^1, v(p^1, w - \mathrm{VE})) \\ \mathrm{VE} &= w - e(p^1, v(p^2, w)) \end{aligned}$$

- Como $w = e(p^2, v(p^2, w))$, temos:

$$\mathrm{VE} = e(p^2, v(p^2, w)) - e(p^1, v(p^2, w))$$

Variação Equivalente

- Aplicando o Lema de Sheppard:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VC} &= e(p^2, v^2) - e(p^1, v^2) \\
&= \int_{p_\ell^1}^{p_\ell^2} \frac{\partial e(p, v^2)}{\partial p_\ell} dp_\ell \\
&= \int_{p_\ell^1}^{p_\ell^2} h_\ell(p, v^2) dp_\ell
\end{aligned}
$$

Qual das medidas é melhor?

- Variação Compensatória vs. Variação Equivalente: **Qual das duas é a melhor?**
- Resposta: Depende!
    - Esquemas de compensação (ex-post) pedem a utilização da variação compensatória;
    - Cálculo de "willingness to pay" pedem a utilização da variação equivalente.

Aplicação: Índice de Preços

- Aplicação importante para entender variações no bem-estar de consumidores: **medida de variação no nível de preços**
- Pense em todas as utilizações de índices de preços:
  - Crescimento real do PIB
  - Correção de contratos
  - Negociações salariais
  - ...

Paasche e Laspeyres

- **Laspeyres:** razão entre o novo e o antigo custo da cesta **original**.

$$\frac{p_1 \cdot x_0}{p_0 \cdot x_0}$$

- **Paasche:** razão entre o novo e o antigo custo da cesta **nova**.

$$\frac{p_1 \cdot x_1}{p_0 \cdot x_1}$$

Problema: $p_1 \cdot x_0$ e $p_0 \cdot x_1$ são irrelevantes.

O que gostaríamos?

- De usar as funções despesa para identificar variações no custo de um nível de utilidade pré-definido:

$$I(u) = \frac{e(p_1, u)}{e(p_0, u)}$$

em que $u = v(p_1, w)$ ou $u = v(p_0, w)$

- **Substitution Bias:** Diferença entre índice ideal e índices de Paasche e Laspeyres dá origem a um distorções.

Substitution Bias

- Laspeyres: superestima inflação:

$$\frac{p_1 \cdot x_0}{p_0 \cdot x_0} = \frac{p_1 \cdot x_0}{e(p_0, u_0)} \geq \frac{e(p_1, u_0)}{e(p_0, u_0)} = I(u_0)$$

- Paasche: subestima inflação:

$$\frac{p_1 \cdot x_1}{p_0 \cdot x_1} = \frac{e(p_1, u_1)}{p_0 \cdot x_1} \leq \frac{e(p_1, u_1)}{e(p_0, u_1)} = I(u_1)$$

  em que $u = v(p_1, w)$ ou $u = v(p_0, w)$

- Ambos os índices ignoram o fato de que, quando preços aumentam, consumidores consomem bens mais baratos.

Preferências Reveladas

- Segunda abordagem para explicar o comportamento individual.
- As escolhas são os primitivos da teoria, e não as preferências.
- Comportamento de escolha é definido como:

Definição

Uma estrutura de escolha é um par $\{\mathscr{B}, C(\cdot)\}$, em que $\mathscr{B}$ é uma família de subconjuntos não-vazios de X, e $C(\cdot)$ é uma regra de escolha (correspondência) que designa, para cada $B \in \mathscr{B}$, um subconjunto $C(B) \subset B$.

  - $\mathscr{B}$: circunstâncias com que o indivíduo pode se deparar.
  - $B \subset X$: representa uma dessas circunstâncias.
  - $C(B)$: quais opções (elementos de B) podem ser escolhidas

Preferências Reveladas

- Note: esse arcabouço teórico é abstrato
- Como na abordagem das preferências, partimos do arcabouço mais abstrato e genérico, e vamos adicionando estrutura.
- Tem diversas aplicações no âmbito da teoria da escolha individual.
- Teoria do consumidor é uma delas:
  - $\mathscr{B}$ é família de conjuntos orçamentários
  - $C(\cdot)$ é correspondência de demanda
- A definição de estrutura de escolha não impõe restrições sobre propriedades da regra de escolha $C(\cdot)$
- Em algumas situações, contudo, queremos impor restrições.

O que são escolhas razoáveis?

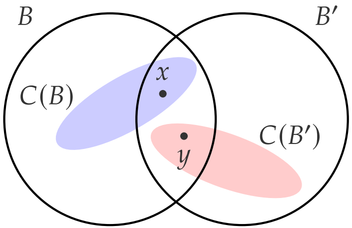
- Seja $X = \{\text{morango}, \text{flocos}, \text{chocolate}\}$
- Considere a seguinte estrutura de escolha:
  - $\mathscr{B} = \Big\{\{\text{morango}, \text{chocolate}\}, \{\text{morango}, \text{flocos}, \text{chocolate}\}\Big\}$
  - $C(\cdot) = \begin{cases} \text{morango}, & \text{se } B = \{\text{morango}, \text{chocolate}\} \\ \text{chocolate}, & \text{se } B = \{\text{morango}, \text{flocos}, \text{chocolate}\} \end{cases}$
- Isso parece uma estrutura de escolha razoável?
- Restringir esse tipo de inconsistência é o mesmo que exigir que a regra de escolha satisfaça o **Axioma Fraco da Preferência Revelada (AFPR)**.

Axioma Fraco da Preferência Revelada (AFPR)

Definição

A estrutura de escolha $\{\mathscr{B}, C(\cdot)\}$ satisfaz o **Axioma Fraco da Preferência Revelada** se a seguinte propriedade é válida:
Se para algum $B \in \mathscr{B}$, com $x, y \in B$ tivermos $x \in C(B)$, então para qualquer B' com $x, y \in B'$, devemos ter $x \in C(B')$.

- Ou seja: se x é escolhido quando y está disponível, y nunca poderá ser escolhido sem que x também o seja sempre que ambos estiverem disponíveis.
- O caso ao lado **não** satisfaz o AFPR.



Relação de Preferência Revelada

Definição

Dada uma estrutura de escolha $\{\mathscr{B}, C(\cdot)\}$, definimos a **relação de preferência revelada** $\succsim^R$ por:

$$x \succsim^R y \Leftrightarrow \exists B \in \mathscr{B} \text{ tal que } x, y \in B \text{ e } x \in C(B)$$

- Preferência Revelada: elementos de $C(B)$ foram "revelados como sendo ao menos tão bons quanto" os demais elementos de B.
- Se $x \in C(B)$ e $y \notin C(B)$, dizemos que x foi "revelado como preferido a y".
- o AFPR será satisfeito desde que, se x for revelado como preferido a y, y não possa ser revelado como preferido a x.

Relação de Preferências vs. Regras de Escolha

- Impusemos restrições para evitar escolhas inconsistentes:
  - **Preferências**: Racionalidade
  - **Regras de Escolha**: AFPR
- Há alguma relação entre essas duas restrições?
  1. Se $\succsim$ forem racionais, as escolhas em $B \in \mathscr{B}$, $B \subset X$, satisfazem o AFPR?
  2. Se as escolhas em $B \in \mathscr{B}$, $B \subset X$, são descritas por $\{\mathscr{B}, C(\cdot)\}$ que satisfaz o AFPR, existe $\succsim$ racional consistente com essas escolhas?

Relação de Preferências vs. Regras de Escolha

1. Se $\succsim$ forem racionais, as escolhas em $B \in \mathscr{B}$, $B \subset X$, satisfazem o AFPR?

- Sejam:
  - $\succsim$ racional.
  - $B \subset X$
  - $C^*(B, \succsim) = \{x \in B : x \succsim y \quad \forall y \in B\}$
  - $\succsim$ e $\mathscr{B}$ são tais que $C^*(B, \succsim)$ não-vazio $\forall B \in \mathscr{B}$.

Relação de Preferências vs. Regras de Escolha

1. Se $\succsim$ forem racionais, as escolhas em $B \in \mathscr{B}$, $B \subset X$, satisfazem o AFPR? **Sim!**

Proposição

Seja $\succsim$ relação de preferências racional. Então a estrutura de escolha gerada por $\succsim$, $(\mathscr{B}, C^*(\cdot, \succsim))$ satisfaz o Axioma Fraco.

Relação de Preferências vs. Regras de Escolha

2. Se as escolhas em $B \in \mathscr{B}$, $B \subset X$, são descritas por $\{\mathscr{B}, C(\cdot)\}$ que satisfaz o AFPR, existe $\succsim$ racional consistente com essas escolhas?

Definição

Dada uma estrutura de escolha $(\mathscr{B}, C(\cdot))$, dizemos que a estrutura de escolha gerada por $\succsim$ racionaliza $C(\cdot)$ em relação a $\mathscr{B}$ se:

$$C(B) = C^*(B, \succsim)$$

para todo $B \in \mathscr{B}$. Isto é, se $\succsim$ gera a estrutura de escolha $(\mathscr{B}, C^*(B, \succsim))$.

Relação de Preferências vs. Regras de Escolha

2. Se as escolhas em $B \in \mathscr{B}$, $B \subset X$, são descritas por $\{\mathscr{B}, C(\cdot)\}$ que satisfaz o AFPR, existe $\succsim$ racional consistente com essas escolhas? **Nem sempre!**

Proposição

Se $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ é uma estrutura de escolha tal que:

1. O Axioma Fraco é satisfeito
2. $\mathscr{B}$ inclui todos os subconjuntos de X com até três elementos.

Então existe uma relação de preferências $\succsim$ que racionaliza $C(\cdot)$ em relação a $\mathscr{B}$. Adicionalmente, esta relação de preferências é a única que racionaliza $C(\cdot)$ em relação a $\mathscr{B}$.

O AFPR e a Demanda Walrasiana

- O AFPR não é suficiente para garantir a existência de preferências capazes de racionalizar uma estrutura de escolhas.
- Apenas para o caso especial restritivo a teoria da escolha com base no AFPR é estritamente equivalente à teoria da escolha baseada em preferências racionais.
- Em alguns cenários, em que desejamos definir preferências apenas para tipos especiais de conjuntos factíveis, essa restrição é muito forte.
- **O Axioma Forte da Preferência Revelada** resolve esse problema.

O AFPR e a Demanda Walrasiana

Definição

A função demanda walrasiana $x(p, w)$ satisfaz o AFPR se a seguinte propriedade é válida para quaisquer dois pares de preços e renda:

$$\text{Se } p \cdot x(p', w') \leq w \;\text{ e }\; x(p', w') \neq x(p, w), \text{ entao } p' \cdot x(p, w) > w'$$

- Se $x(p', w')$ é factível quando os preços eram p e a riqueza w, mas $x(p, w) \neq x(p', w')$, i.e., $x(p, w)$ foi escolhida e não $x(p', w')$, então $x(p, w)$ foi revelada como preferida a $x(p', w')$.
- Sempre que $x(p', w')$ for escolhido, $x(p, w)$ deve não ser factível (não pode pertencer ao conjunto orçamentário).

Variações Compensadas de Preços

- Vimos que podemos decompor o efeito de uma variação nos preços em:
  1. *Mudança nos preços relativos* (inclinação da reta orçamentária, se $L = 2$)
  2. *Mudança no poder de compra* do consumidor da commodity cujo preço sofreu a variação.
- **Como isolar apenas o efeito da mudança nos preços relativos?**
- *Variação Compensada*: imagine-se que, após uma mudança nos preços de p para p', a riqueza do consumidor foi ajustada de w para $w' = p' \cdot x(p, w)$.
- A nova riqueza w' é chamada de **Riqueza Compensada** (de Slutsky).

O AFPR e a Lei da Demanda Compensada

Proposição

Suponha que a função demanda walrasiana $x(p, w)$ é homogênea de grau zero e satisfaz a lei de Walras. Então $x(p, w)$ satisfaz o axioma fraco se, e somente se, a seguinte propriedade é válida:

Para qualquer mudança compensada de preços de (p, w) para (p', w'), temos que:

$$(p' - p) \cdot [x(p', w') - x(p, w)] \leq 0$$

Adicionalmente, sempre que $x(p, w) \neq x(p', w')$ a desigualdade acima será estrita.

O AFPR e a Lei da Demanda Compensada

Demonstração ($\Longrightarrow$)

1. Se $x(p, w) \neq x(p', w')$, o resultado segue trivialmente.
2. Seja $x(p, w) \neq x(p', w')$.
3. Podemos reescrever o lado esquerdo da desigualdade como:

$$p' \cdot x(p', w') - p' \cdot x(p, w) - p \cdot x(p', w') + p \cdot x(p, w)$$

4. Pela Lei de Walras e por w' ser a renda compensada, temos:

$$\underbrace{p' \cdot x(p', w')}_{w'} - \underbrace{p' \cdot x(p, w)}_{w'} - p \cdot x(p', w') + p \cdot x(p, w)$$

O AFPR e a Lei da Demanda Compensada

Demonstração ($\Longrightarrow$)

5. Como $p' \cdot x(p,w) = w'$, $x(p,w)$ é factível sob (p',w').
6. Se vale o AFPR, $p \cdot x(p',w') > w$, i.e., $x(p',w')$ não pode ser factível sob (p,w).

$$\underbrace{p' \cdot x(p',w')}_{w'} - \underbrace{p' \cdot x(p,w)}_{w'} - \underbrace{p \cdot x(p',w')}_{>w} + \underbrace{p \cdot x(p,w)}_{=w}$$

7. Segue que:

$$(p'-p) \cdot [x(p',w') - x(p,w)] < 0$$

O AFPR e a Lei da Demanda Compensada

Demonstração ($\Longleftarrow$)

1. Para provar a volta, usamos o fato de que **o AFPR vale se, e só se, vale para todas as variações compensadas de preços**.
2. Basta, portanto, testar para as variações compensadas.
3. Suponhamos que o AFPR não vale. Então existe uma variação compensada de (p, w) para (p', w') tal que $x(p, w) \neq x(p', w')$, $p \cdot x(p', w') = w$ e $p' \cdot x(p, w) \leq w'$.
4. Segue, então, que:

$$\underbrace{p' \cdot x(p', w')}_{=w'} - \underbrace{p' \cdot x(p, w)}_{\leq w'} - \underbrace{p \cdot x(p', w')}_{=w} + \underbrace{p \cdot x(p, w)}_{=w}$$

5. Segue que: $(p' - p) \cdot [x(p', w') - x(p, w)] \geq 0$. Contradição!

O AFPR e a Lei da Demanda Compensada

- Note que:
  - O AFPR restringe apenas as demandas resultantes de variações compensadas. Por isso temos a **Lei da Demanda Compensada**.
  - Não impõe restrições sobre variações não-compensadas.

O AFPR e a Lei da Demanda Compensada

- Se $x(p,w)$ e diferenciável em (p,w), podemos reescrever como:

$$dp \cdot dx \leq 0$$

- em que dx é dado, pela Regra da Cadeia, por:

$$\begin{aligned} dx &= D_p x(p,w)dp + D_w x(p,w)dw \\ &= D_p x(p,w)dp + D_w x(p,w)[x(p,w) \cdot dp] \\ &= [D_p x(p,w) + D_w x(p,w)x(p,w)^T]dp \end{aligned}$$

- A Lei da Demanda Compensada se torna:

$$dp \cdot \underbrace{[D_p x(p,w) + D_w x(p,w)x(p,w)^T]}_{S(p,w)} dp \leq 0$$

O AFPR e a Lei da Demanda Compensada

- $S(p,w)$ é chamada de Matrix de Substituição (ou Matriz de Slutsky).
- Seus elementos são os efeitos-substituição, que vimos anteriormente:

$$S(p,w) = \begin{bmatrix} s_{11}(p,w) & \dots & s_{1L}(p,w) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{L1}(p,w) & \dots & s_{LL}(p,w) \end{bmatrix}$$

em que a entrada na ℓ-ésima linha e k-ésima coluna é:

$$s_{\ell k} = \frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial w} x_k(p,w)$$

O AFPR e a Lei da Demanda Compensada

Proposição

Se uma função demanda walrasiana $x(p, w)$ satisfaz a Lei de Walras, homogeneidade de grau zero e o AFPR, então para qualquer par (p, w) de preços e riqueza, a matriz de Slutsky $S(p, w)$ é negativa semi-definida.