# Agregação

- Em muitos casos – em particular, em Macro – o comportamento agregado é mais importante que o individual.
- Em tese, se conseguimos explicar o comportamento individual, conseguiríamos explicar também as escolhas agregadas:

$$\sum_{i=1}^{N} x^i(p, w^i), \quad \text{para os consumidores} \quad i \in \{1, \ldots, N\}$$

- Até agora, extraímos da abordagem de preferências diversas propriedades das funções de demanda individual.
- Seria interessante que essas propriedades fossem válidas também para as funções de demanda agregada.

# Agregação

- Em particular, gostaríamos, por exemplo:

    1. Que a demanda agregada pudesse ser escrita como função da renda agregada
    2. Que a demanda agregada satisfaça também o AFPR, quando $x^i(p, w^i)$ vier de $\succsim^i$ racional, $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$.
    3. Que seja possível fazer inferências sobre bem-estar dos consumidores a partir da demanda agregada, tal como fazemos com a demanda individual.

- Vamos tratar desses pontos, um de cada vez.

# Demanda Agregada e Renda Agregada

**1. Quando podemos escrever a demanda agregada como função da renda agregada?**

$$x(p, w_1, w_2, \ldots, w_I) = \sum_{i=1}^{I} x^i(p, w_i) \stackrel{?}{=} X\left(p, \sum_{i=1}^{I} W\right)$$

- Se pudermos, a renda agregada funciona como uma estatística suficiente para a distribuição de renda da economia.
- Isso é importante porque há casos em que apenas dados agregados – e não microdados – estão disponíveis para o econometrista.

# Demanda Agregada e Renda Agregada

**1. Quando podemos escrever a demanda agregada como função da renda agregada?**

- Seja $I = \{1, \ldots, N\}$ o conjunto de consumidores da economia.
- Cada consumidor tem preferências racionais $\succsim^i$, que produzem demandas walrasianas $x^i(p, w^i)$.
- Temos, então, uma demanda agregada dada por:

$$x(p, w^1, \ldots, w^N) = \sum_{i \in I} x^i(p, w^i)$$

- Se $x(p, w_1, w_2, \ldots, w_I) = \bar{x}\left(p, \sum_{i=1}^{I} w^i\right)$, então qualquer mudança na distribuição que não altere a renda agregada deve manter inalterada a demanda agregada.

# Demanda Agregada e Renda Agregada

**1. Quando podemos escrever a demanda agregada como função da renda agregada?**

- Consideremos uma mudança desse tipo, partindo de uma distribuição $w = (w^1, \ldots, w^N)$ qualquer:

$$dw = (dw^1, \ldots, dw^N), \quad \text{tal que} \quad \sum_{i \in I} dw^i = 0$$

- Supondo diferenciabilidade, a variação na demanda agregada será dada por:

$$\sum_{i \in I} \frac{\partial x_\ell^i(p, w^i)}{\partial w^i} dw^i = 0 \tag{1}$$

# Demanda Agregada e Renda Agregada

**1. Quando podemos escrever a demanda agregada como função da renda agregada?**

- A equação (1) no slide anterior tem que ser verdade:
  - Para todo $(w^1, \ldots, w^N)$ e
  - Para todo $dw = (dw^1, \ldots, dw^N)$.
- Isso ocorre se, e somente se:

$$\frac{\partial x_\ell^i(p, w^i)}{\partial w^i} = \frac{\partial x_\ell^j(p, w^j)}{\partial w^j}, \quad \forall i \neq j \quad e \quad \forall \ell \in \{1, \ldots, L\}$$

- Ou seja: caminhos de expansão da riqueza paralelos entre quaisquer dois consumidores.

# Demanda Agregada e Renda Agregada

**1. Quando podemos escrever a demanda agregada como função da renda agregada?**

- Se os efeitos sobre as demandas de um aumento na riqueza são iguais para todos os consumidores, redistribuições de riqueza não afetarão a demanda agregada.
- Efeito positivo sobre a demanda de um indivíduo será cancelado pelo efeito negativo sobre a demanda de outro indivíduo.

# Preferências Homotéticas

**Definição**

Preferências são **homotéticas** se, para todo $x, y \in \mathbb{R}^L_+$ e $\alpha > 0$,

$$x \succsim y \leftrightarrow \alpha x \succsim \alpha y$$

- Preferências Homotéticas resultam em:
  - Funções utilidade homogêneas de grau 1
  - Curvas de indiferença com inclinação constante ao longo de semirretas partindo da origem
  - Demandas walrasianas homogêneas de grau 1 na renda
  - Utilidade indireta na forma:

$$v(p, w) = b(p)w$$

# Preferências Quase-lineares

**Definição**

Preferências são **quase-lineares** no bem 1 se podem ser representadas por função utilidade na forma:

$$u(x) = x_1 + g(x_2, x_3, \ldots, x_L)$$

Se alguma renda for gasta no bem numerário, função utilidade indireta terá o formato:

$$v(p, w) = a(p) + w$$

# Preferências Quase-homotéticas

**Definição**

Preferências são **quase-homotéticas** se admitirem função utilidade indireta na forma polar de Gorman:

$$v(p, w) = a(p) + b(p)w$$

# Demanda Agregada e Renda Agregada

**1. Quando podemos escrever a demanda agregada como função da renda agregada? Quando a utilidade indireta tiver a forma polar de Gorman.**

**Proposição**

Consumidores exibirão caminhos de espansão da renda em linha reta e paralela, para qualquer vetor de preços $p$, se, e somente se, suas preferências admitirem utilidades indiretas com a forma polar de Gorman, com coeficientes sobre $w^i$ idênticos para todos os consumidores.

$$v^i(p, w^i) = a^i(p) + b(p)w^i$$

- Hipótese bastante restritiva sobre a utilidade indireta.

# Demanda Agregada e Renda Agregada

**1. Quando podemos escrever a demanda agregada como função da renda agregada? Quando a utilidade indireta tiver a forma polar de Gorman.**

**Proposição**

Consumidores exibirão caminhos de espansão da renda em linha reta e paralela, para qualquer vetor de preços $p$, se, e somente se, suas preferências admitirem utilidades indiretas com a forma polar de Gorman, com coeficientes sobre $w^i$ idênticos para todos os consumidores.

$$v^i(p, w^i) = a^i(p) + b(p)w^i$$

- Hipótese bastante restritiva sobre a utilidade indireta.

# Demanda Agregada e Renda Agregada

**1. Quando podemos escrever a demanda agregada como função da renda agregada? Quando a utilidade indireta tiver a forma polar de Gorman.**

- Duas soluções:
    1. Permitir que a demanda agregada dependa de outros momentos da distribuição.
    2. Especificar qual a relação entre a renda agregada e a renda individual: **regra de distribuição de riqueza**.

# Regra de Distribuição da Riqueza

**1. Quando podemos escrever a demanda agregada como função da renda agregada? Quando a utilidade indireta tiver a forma polar de Gorman.**

- Duas soluções:
  1. Permitir que a demanda agregada dependa de outros momentos da distribuição.
  2. Especificar qual a relação entre a renda agregada e a renda individual: **regra de distribuição de riqueza**.

# Regra de Distribuição da Riqueza

- Não precisaremos que a demanda agregada dependa apenas da renda agregada para toda distribuição de riqueza, mas apenas daquelas produzidas por uma regra de distribuição de riqueza.
- Exemplos:
  1. Riqueza individual pode ser determinada pelo governo, que distribui entre os indivíduos a riqueza agregada de acordo com algum critério pré-determinado.
  2. Riqueza pode vir da propriedade de firmas e dotações, cujo valor, em equilíbrio, irá depender do vetor de preços vigente na economia.

$$w^i = \sum_{i \in I} \theta_j^i \pi_j(p) + p \cdot e^i$$

# Demanda Agregada e o AFPR

- O que mais queremos saber sobre a demanda agregada?
- Por exemplo: que propriedades da demanda individual se estendem também à demanda agregada?
- Três delas são válidas trivialmente:
    1. Lei de Walras
    2. Homogeneidade de grau zero
    3. Continuidade
- E o AFPR?

# Demanda Agregada e o AFPR

**2. Quando $x^i(p, w^i)$ vier de $\succsim^i$ racional, $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$, a demanda agregada satisfará o AFPR?**

**Definição**

A função demanda $x(p, w)$ satisfaz o AFPR se a seguinte propriedade é válida para quaisquer dois pares de preços e renda:

$$\text{Se } p \cdot x(p', w') \leq w \ \text{ e } \ x(p', w') \neq x(p, w), \ \text{entao } p' \cdot x(p, w) > w'$$

# Demanda Agregada e o AFPR

**2. Quando $x^i(p, w^i)$ vier de $\succsim^i$ racional, $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$, a demanda agregada satisfará o AFPR?**

- Vimos que as preferências individuais satisfazem o AFPR se, e somente se, vale a lei da demanda compensada:

$$(\tilde{p} - p) \cdot [x^i(\tilde{p}, \tilde{w}^i) - x^i(p, w^i)] \leq 0$$

  em que $\tilde{w}^i = \tilde{p} \cdot x^i(p, w^i)$, para quaisquer $\tilde{p}, p, w^i$, com desigualdade estrita se $x^i(\tilde{p}, \tilde{w}^i) \neq x^i(p, w^i)$.

- Gostaríamos que esse resultado fosse válido também no agregado.
- **Isto, contudo, não é válido!**

# Demanda Agregada e o AFPR

**2. Quando $x^i(p, w^i)$ vier de $\succsim^i$ racional, $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$, a demanda agregada satisfará o AFPR?**

- Vimos que as preferências individuais satisfazem o AFPR se, e somente se, vale a lei da demanda compensada:

$$(\tilde{p} - p) \cdot [x^i(\tilde{p}, \tilde{w}^i) - x^i(p, w^i)] \leq 0$$

em que $\tilde{w}^i = \tilde{p} \cdot x^i(p, w^i)$, para quaisquer $\tilde{p}, p, w^i$, com desigualdade estrita se $x^i(\tilde{p}, \tilde{w}^i) \neq x^i(p, w^i)$.

- Gostaríamos que esse resultado fosse válido também no agregado.
- **Isto, contudo, não é válido!**

# Demanda Agregada e o AFPR

**2. Quando $x^i(p, w^i)$ vier de $\succsim^i$ racional, $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$, a demanda agregada satisfará o AFPR? Não obrigatoriamente!**

- Qual o problema? Uma variação compensada na renda agregada ($w' = p' \cdot x(p, w)$) pode ocorrer sem que todas as variações individuais sejam compensadas.
- Nesse caso:
  - O efeito-substituição é bem-comportado: move-se em direção oposta aos preços
  - O efeito-renda pode ser qualquer coisa: pode ser maior, em módulo, que o efeito-substituição, invalidando o AFPR para a demanda agregada.

$$\frac{\partial x^i_\ell(\bar{p}, \bar{w})}{\partial p_k} = \frac{\partial h^i_\ell(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_k} - \frac{\partial x^i_\ell(\bar{p}, \bar{w}^i)}{\partial w} x^i_k(\bar{p}, \bar{w}^i)$$

# Demanda Agregada e o AFPR

**2. Quando $x^i(p, w^i)$ vier de $\succsim^i$ racional, $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$, a demanda agregada satisfará o AFPR?** **Não obrigatoriamente!**

- Precisamos restringir um pouco mais as demandas individuais.
- Se vale **a lei da demanda não-compensada** $\forall i \in I$, temos:

$$(p' - p)[x^i(p', w^i) - x^i(p, w^i)] \leq 0$$

- Nesse caso, vale a agregação:

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} (p' - p)[x^i(p', \alpha^i w) - x^i(p, \alpha^i w)] &\leq 0 \\
(p' - p)\left[\sum_{i \in I} x^i(p', \alpha^i w) - \sum_{i \in I} x^i(p, \alpha^i w)\right] &\leq 0 \\
(p' - p)[x(p', w) - x(p, w)] &\leq 0
\end{aligned}$$

# Agregação e Lei da Demanda Não-Compensada

**Proposição**

Se a função demanda walrasiana $x^i(p, w^i)$ de cada consumidor $i \in I$ satisfizer a lei da demanda não-compensada, então a demanda agregada $x(p, w) = \sum_{i \in I} x^i(p, w^i)$ também a satisfará. Consequentemente, o AFPR será válido também para a demanda agregada.

- **Atenção:**
  - Lei da demanda não-compensada para as demandas individuais não é condição necessária para validade da lei da demanda não-compensada para a demanda agregada. Apenas suficiente!
- $\succsim^i$ ser homotética é suficiente para que valha a Lei da Demanda Não-Compensada

# Existência de um Consumidor Representativo

**3. Podemos tratar a função de demanda agregada como se derivada de consumidor representativo, cujas preferências possam ser usadas como medida de bem-estar social?**

- Partimos de $(w^1(p,w),\dots,w^N(p,w))$, com $\sum_i w^i(p,w) = w$.
- Suponhamos ainda que:
  1. $w^i$ é contínua
  2. $w^i$ é homogênea de grau um.
- A demanda agregada $x(p,w) = \sum_{i\in I} x^i(p, w^i(p,w))$, sendo a demanda de mercado, satisfaz:
  1. Lei de Walras
  2. Continuidade
  3. Homogeneidade de grau zero

# Existência de um Consumidor Representativo

**3. Podemos tratar a função de demanda agregada como se derivada de consumidor representativo, cujas preferências possam ser usadas como medida de bem-estar social?**

**Definição**

Consumidor representativo positivo existe se há uma relação de preferências $\succsim$ sobre $\mathbb{R}^L_+$, tal que que a função de demanda agregada $x(p, w)$ é precisamente a função demanda walrasiana gerada por essa relação de preferências.

- É como se houvesse um consumidor cujo problema de maximização de utilidade, sujeito à restrição orçamentária da sociedade ($p \cdot x \leq w$), gerasse a demanda agregada.
- Nesse caso, a demanda agregada satisfaz todas as propriedades que já vimos anteriormente.

# Existência de um Consumidor Representativo

**3. Podemos tratar a função de demanda agregada como se derivada de consumidor representativo, cujas preferências possam ser usadas como medida de bem-estar social?**

- Queremos fazer análise de bem-estar, usando as ferramentas que vimos anteriormente
- Precisamos de uma função de bem-estar social:

**Definição**

Uma função de bem-estar social é uma função $W: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ que designa uma utilidade para cada vetor de utilidades individuais $(u^1, \ldots, u^N) \in \mathbb{R}^N$ dos N consumidores da economia.

# Existência de um Consumidor Representativo

**3. Podemos tratar a função de demanda agregada como se derivada de consumidor representativo, cujas preferências possam ser usadas como medida de bem-estar social?**

- Hipóteses comuns sobre a função de bem-estar social:
  - Côncava
  - Crescente
  - Diferenciável
- Suponhamos existir um planejador social benevolente que maximiza o bem-estar social:

$$\begin{array}{cc} \max\limits_{w^1,\ldots,w^N} & W(v^1(p,w^1),\ldots,v^N(p,w^N)) \\ \text{s.a.} & \sum_{i\in I} w^i \leq w \end{array}$$

- Quem seria o planejador social benevolente?

# Existência de um Consumidor Representativo

**Proposição**

Suponha que para cada nível de preços $p$ e riqueza $w$, a distribuição de riqueza $(w^1(p,w), \ldots, w^N(p,w))$ é a solução do problema de maximização de bem-estar social. Então a função valor $v(p,w)$ do problema é uma função de utilidade indireta de um consumidor representativo positivo, para uma função de demanda agregada $x(p,w) = \sum_{i \in I} x^i(p, w^i(p,w))$.

# Existência de um Consumidor Representativo

**Definição**

O consumidor representativo positivo $\succsim$ para a demanda agregada $x(p, w) = \sum_{i \in I} x^i(p, w^i(p, w))$ é o consumidor representativo normativo referente à função de bem-estar social $W(\cdot)$ se para cada $(p, w)$, a distribuição de riqueza $(w^1(p, w), \ldots, w^{\mathrm{N}}(p, w))$ soluciona o problema de maximização de bem-estar social sendo, portanto, a função valor do referido problema de maximização uma função de utilidade indireta para $\succsim$.