Lecture notes on Schemes I

November 8, 2024

Abstract

Ce cours propose une introduction à la théorie des schémas. Introduite par Grothendieck il y a plus d'un demi-siècle, c'est actuellement le langage commun non seulement de la géométrie algébrique mais également de larges pans de la théorie des nombres et de la théorie des représentations.

Contents

1 Introduction

Let $\mathcal{C}$, rappel f est monomorphisme...

Example 1.1. *Dans le categorie des prefasioux on X espace toplogique, $f \in Hom_{Pre_X}(F, Y)$, f est un mono, epi, iso ssi par tout ouvert V des X $f_V : F(V) \to Y(V)$ l'est. Dans Faseux, ssi $f_x : F_x \to Y_x$ pour tout $x \in X$ est inective, surjective, bijective.*

Si F est un prèfasceaux sur X, $x \in X$ on pose

$$\mathcal{F}_x = \mathrm{colim}_{x \in U, U \mathrm{ouvert}} F(U)$$

avec

$$\mathrm{colim}_{x \in U} F(V) = \prod_{x \in U} F(V) / \sim$$

Proposition 1.2. *Si F fasceau, pour tout V, $F(V) \to \prod_{x \in U} F_x$ est injectif.*

Supposons F faiseau et pour tout $x \in X$, $\phi_x : \sigma_x \to Y_x$ injectif ssi pout tout V ouvert de X $\phi_V : F(V) \to Y(V)$ injectif.

Si F et Y fasiceaux, $\forall\ x \in X$, ϕ_x bij ssi $\forall\ V$, ϕ_V bij.

1.1 faiseautisation

Si F, Y fasiceaux, $\phi = \psi$ ssi $\forall\ x \in X$, $\phi_x = \psi_x$. F faiseau sur X, on pose

On verifie que $\tilde{F}$ est un fasiceau et que $F \mapsto \tilde{F}$ est un foncteur. On a un morphisme canonique $\tau : F \to \tilde{F}$, $s \in F(V) \mapsto (s_x)_{x \in V}$ on verifie que τ es un iso. ssi F est un faiseau.

D'autre part en general $\forall\ x \in X$, $\tau_x : F_x \mapsto \tilde{F}_x$ es un iso.

En composant avec τ on a $\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Faseux}}(\tilde{F}, G) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pre}}(F, \iota(G))$ avec ι : faiseau $\to$ prefasioux l'inclusion naturalle.

On verifie facilment que α est un bijective functorielle en F et G. Autrement dit, le foncteur $F \mapsto \tilde{F}$ est l'adjunt à gauche du functor ι.

1.1.1 Fonctorialité

$f : X \to Y$ application continue. F prefasioux sur X, on pose $f_* F(V) = F(f^{-1}(V))$, avec V oubert de Y.

$f_* F$est un prefasioux $F \mapsto f_* F$ est un functeur et si F est un faiseau $f_* F$ égalment.

On a $g_*(f_* F) = (g \circ f)_* F$. Si G est un prefasioux sur Y, on note $f^+ Y$ le prefasioux $f^+ G(V) = \mathrm{colim}_{f(V) \in V} G(V)$

En general si F faiseau, $f^+ F$ n'est pas un faiseau. on pose $f^{-1} F = \tilde{f^+} F$

Si $\iota_x : x \to$, $(\iota_x^+ F)_x \equiv (\iota_x^{-1} F)_x = F_x$

$f^+(g^+ \mathcal{H}) = (g \circ f)^+ \mathcal{H}$ si G sur Y $(f^{-1} G)_x = (f^+ G)_x = G_{f(x)}$.

Proposition 1.3. *Si $f : X \to Y$ continue, on a une adjuncition $Hom_{Faseux_X}(f^{-1} G, F) \sim Hom_{Faseux_Y}(G, f_* F)$ f^{-1} est adjunt à gauche de f_*.*

Espaces localment annulés (X, O_X), avec X espace top., O_X un faiseau d'anneaux sur X t.q. $\forall\, x \in X$, $O_{X,x}$ est un anneaux **local**.

On va munir Spec$A$ d'une telle structure. Soit M un A-module, V ouvert de Spec$A$ et $S(V) = \{f \in A | V \subset D(f)\}$.

On note $M_P(V)$ le $S(V)^{-1}$ A-module $S(V)^{-1}M$.

M_P est un prefasioux de A-modules sur Spec$A$. Soit $x \in$ Spec$A$, correspondait à p_x

$$M_{P,x} = \text{colim}_{x \in U} S^{-1}(V)M = M_{p_x}$$

En fait M_P est un prefasioux de A_P-modules. On note $\tilde{M}$ le faiseautisé de M. Soit $f \in A$, $f \in S(D(f))$ on dispose donc de $M_f \to S(D(f))^{-1}M = M_P(D(f))$, $\frac{m}{f} \mapsto \frac{m}{f}$

(A-linéaire) qui induit por composition avec $M_P(D(f)) \to \tilde{M}(D(f))$.

Theorem 1.4. *Pour tout $f \in A$*

1. *l'application $A-$linéaire $M_f \to \tilde{M}(D(f))$ est un iso.*

Corollary 1.5. *$M \to \tilde{M}(SpecA) = \Gamma(SpecA, \tilde{M})$ est un iso. de $A-$modules.*

Proof. On peut identifier $D(f)$ à SpecA_1. On note $\tau_f : A \to A_f$, le morphisme $a \mapsto \frac{a}{1}$. Si $D(f) \subset D(g)$ il existe $n \geq 1$, $a \in A$ t.q. $f^n = ag$. On en tire $\rho_{f,g} : A_g \tilde{A}_f$, $\frac{1}{g} \mapsto \frac{a}{f^n}$. C'est l'unique morphisme de $A-$algebras $A_g \to A_f$ t.q. $\rho_{f,g} \circ \tau_f = \tau_g$. Il suit que si $D(f) \subset D(g)$ $\rho_{f,g} \circ \rho_{g,h} = \rho_{f,h}$. En particulier si $D(f) = D(g)$, $\rho_{f,g} \circ \rho_{g,f} = \text{Id}$. On peut donc identifier A_f et A_g via $\rho_{f,g}$.

Demonstration OPS $f = 1$ et $A = A_f$ (on identifie $\tilde{M}/D(f)$ à $\tilde{M}_d$)

• $M \to \tilde{M}(\text{Spec}A)$ est injective. Soit $m \in M$ dans le noyau. Pour tout $p \in$ Spec$A$ l'image de m dans M_P est nulle et suet que $m = 0$ (en effect Ann$m \cap A \backslash P \neq \emptyset$ pour tout P.)

• surjectivité

Soit $\sigma \in \tilde{M}(\text{Spec}A)$ por quasi compacité OPS Spec$A = \cup_{i \in I} D(f_i)$ avec I fini. Alors, $\forall i \in I$ $\sigma \|_{D(f_i)}$ por medio de m_i/f_i, $m_i \in M$

$\sigma_{D(f_i f_j)}$ est representablé par $f_j m_i/(f_i f_j)$ et par $f_i m_j/(f_i f_j)$.

Mais par injectivité de $M_{f_i f_j} \to \tilde{M}(D(f_i f_j))$ il suit que $\frac{f_j m_i}{f_i f_j} = \frac{f_i m_j}{f_i f_j}$ dans $M_{f_i f_j}$. Il existe donc $N \geq 1$ indices de (i, j) t.q.

$$(f_i f_j)^{N-1}(f_j f_i f_j m_i - f_i f_j f_i m_j) = 0$$

$(f_i f_j)^N f_j m_i = (f_i f_j)^N f_i m_j$. Posons $f_i' = f_i^{N+1}$ et $m_i' = f_i^N m_i$. On peut remplacer f_i par f_i' et m_i par m_i'. $f_j m_i = f_i' m_j' = f_i m_j$ par tout indices.

Pour montré que $m \in M$ a pour image σ il suffit de montrer que l'image de m dans M_{f_i} est $\frac{m_i}{f_i}$.

Comme Spec$A = \cup D$... il existe $\alpha_i \in A, i \in I$ t.q. $1 = \sum \alpha_i f_i$. On pose $m = \sum_{j \in J} \alpha_j m_j$ On a $f_i m = \sum_{j \in I} \alpha_j f_i m_j = \sum_{j \in I} \alpha_j f_j m_i = m_i$ et l'image de m dans M_{f_i} est bien $\frac{m_i}{f_i}$.

On pose $O_{\text{Spec}A} = \tilde{A}$ on a $O_{\text{Spec}A}(D(f)) = A_f$

$$O_{\text{Spec}A,x} = A_{P_x}$$

de plus $O_{\mathrm{Spec}A,x}$ est l'unique faiseau de $A-$modules sur Spec$A$.

$\square$

Definition 1.6. *Un morphisme d'espaces annulés*

$$(X, O_X) \to (Y, O_Y)$$

est un couple (f, f^b) *avec* $f : X \to Y$ *continue et* $f^b : O_y \to f_* O_X$ *un morphisme de faisaux d'anneaux sur* Y

($f^b \iff f^{\#} : f^{-1}O_Y \to O_X$*)*

$$f_x{}^{\#} : (f^{-1}O_Y)_x = O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$$

un morphisme entre espaces localment annelés

$$(X, O_X) \to (Y, O_Y)$$

est un couple (f, f^b) *comme a-desseus t.q.* $\forall x \in X$ $f_x^{\#} : O_{Y,f(x)} \to O_{X,x}$ *est un morphisme local [*$\phi : (A, m_A) \to (B, m_B)$ *t.q.* $\phi(m_A) \subset m_B$ *i.e. qui equivarent à* $\phi^{-1}(m_B) = m_A$*]*

A Commutative diagrams

Test1

$$
\begin{tikzcd}
F\colon & \mathscr{A} \arrow[r] & \mathscr{B} & \\
 & A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"'] & x \arrow[d, mapsto] \\
 & A' \arrow[r, mapsto] & B' & y
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"'] \\
A' \arrow[r, mapsto] & B'
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "Ff"'] \\
Y \arrow[r, mapsto] & W
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
F\colon & \mathscr{A} \arrow[r] & \mathscr{B} & \\
 & X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "a"'] & Z \arrow[d, "b"'] & x \arrow[d, mapsto] \\
 & Y \arrow[r, mapsto] & W & y
\end{tikzcd}
$$