

Solución de Kerr-rotating black hole metric

Rafael Felipe Córdoba L., Andres Felipe Estupiñan S. & Juan Pablo Acuña A.

Universidad de los Andes

Noviembre 28, 2019

ABSTRACT

En el siguiente trabajo se revisan los conceptos fundamentales e introductorios a la teoría de la relatividad general de Einstein y se presentan las ecuaciones de campo con las cuales se describen las interacciones entre el espacio-tiempo y la materia. Luego se muestran dos soluciones a estas ecuaciones, Schwarzschild y Kerr, se realizó dos derivaciones a la solución de Kerr y se argumenta la validez de el segundo método de carácter heurístico. Además, se revisara las implicaciones de esta geometría y su respectivo horizonte de eventos.

Key words. Ecuaciones de campo, Agujero negro rotando, Métrica de Kerr

1. Introducción

La teoría de la gravitación de Newton fue muy exitosa al explicar el movimiento de astros, cuerpos masivos y diferentes fenómenos mecánicos hasta el momento desconocidos, sin embargo presentó diferentes incongruencias tanto experimental como teóricamente. En primera instancia, el electromagnetismo no era compatible con los postulados de Newton además, el experimento de Michelson-Morley, determinó una característica fundamental del movimiento, la invarianza de la velocidad de la luz. Todos estos hechos impulsaron una búsqueda de nuevas teorías más generales que tuvieran tres grandes puntos, invarianza bajo transformaciones de Lorentz congruentes con el electromagnetismo, la gravitación de Newton (en ciertos casos) y que la velocidad de la luz fuese constante en cualquier marco de referencia inercial.

El 26 de septiembre de 1905 Albert Einstein publicó un artículo llamado "On the Electrodynamics of Moving Bodies" en el cual se postula un límite para la rapidez de todo movimiento de objetos. En cualquier marco de referencia, este límite sería c , la velocidad de la luz. Eventualmente las ideas de Einstein obtuvieron gran aceptación creando así lo que se llama la teoría especial de la relatividad (SR), Einstein notó que si se tenían objetos con velocidad mucho menor que la de la luz su teoría era congruente con la mecánica Newtoniana, esta similitud se conoce como el límite Newtoniano. Sin embargo, para Einstein, esta teoría no abarcaba la generalidad de una teoría completa cuyo límite Newtoniano resulte en la teoría de gravitación de Newton, esto se debe a que la teoría SR no tenía en cuenta el principio de equivalencia¹.

Einstein en 1915 concluyó la formulación de dicha teoría general, llamada por tanto teoría general de la gravitación (GR) en donde no solo los cuerpos ejercen gravitación sino que también la misma curvatura del espacio lo hace y viceversa. Einstein por lo tanto comprendió que para estudiar la gravitación se debe estudiar las propiedades geométricas del espacio y por tanto estableció una serie de ecuaciones que permiten deducir

la geometría del espacio llamadas las ecuaciones de campo de Einstein (EFE) cuya solución contienen toda la información de gravitación. Si bien las EFE resuelven la geometría del sistema en general resultan para nada triviales pues poseen una gran cantidad de ecuaciones diferenciales parciales acopladas y resolverlas analíticamente (si es que es posible) puede llegar a ser muy tedioso.

Tras publicarse la teoría de la relatividad general (GR), Schwarzschild fue el primero en resolver de forma exacta las EFE para un caso específico, el caso con simetría esférica en vacío sin rotación del objeto i.e momento angular nulo. Sin embargo, Schwarzschild se dio cuenta que en estos casos específicos ciertos cuerpos masivos poseen puntos donde la solución de las EFE no está determinada. Schwarzschild noto que para $r = 0$ y $r = 2m$ la solución era indeterminada y posteriormente se dio cuenta que las trayectorias no podían pasar en la zona determinada por estos puntos. Estas zonas prohibidas llevaron a desarrollar los conceptos de agujero negro o black hole y horizonte de eventos.

Schwarzschild resolvió de forma exacta las ecuaciones de campo de Einstein para el primer caso no trivial en el vacío, con masa sin momento angular y simetría esférica. Kerr resolvió para el caso con simetría elipsoidal sin embargo se desarrollaron dos métodos para llegar a este, la solución apartir de las ecuaciones de Einstein y apartir de las simetrías del problema las dos llegando a la misma solución. En este artículo se deriva la solución de Kerr por ambos métodos y se continua con el análisis para la métrica de Kerr. Se argumenta la validez de estos métodos mediante la unicidad de la solución (7) con simetría elipsoidal, con momento angular y con vacío y posteriormente se analiza el límite cuando se reduce esta simetría elipsoidal a simetría esférica con rotación nula, es decir el modelo de Schwarzschild.

2. Definiciones importantes

2.1. Variedades

El estudio de la relatividad general exige usar un espacio mas general que el espacio que se acostumbra a usar normalmente (Espacio Euclidiano). Esta necesidad de definir espacios por

¹ El principio de equivalencia postula que puntualmente, todo sistema sujeto a un campo gravitacional es equivalente a el sistema sujeto a un determinado sistema de referencia acelerado.

ejemplo con curvatura intrínseca se satisface con el uso de geometría diferencial. La estructura mas básica de dicho espacio generalizado es una variedad topológica. Utilizando la definición de Tu (12) Se dice que M es una variedad topológica de dimensión n si es localmente homeomorfo (Existe función continua biyectiva con inversa continua entre espacios) a una vecindad de \mathbf{R}^n en todos sus puntos y esta es consistente, i.e. si un punto se encuentra en cualesquiera dos vecindades el cambio de coordenadas debe ser compatible. Ahora bien, en física la estructura de una variedad resulta ser muy general pues no posee las suficientes herramientas necesarias para analizar objetos que se encuentren en esta, se acostumbra a usar una variedad suave la cual es una variedad C^∞ en cada una de sus vecindades. En un espacio 1 + 3 dimensional (1 coordenada de tiempo y 3 espaciales también llamado espacio-tiempo) no solo es importante la propiedad de ser "suave" sino que también se desea realizar geometría en el, para eso se hace necesario la noción de "distancia" generalizada entre puntos de dicha variedad dicha forma de medir se conoce como la métrica de la variedad. Una variedad pseudo-Riemanniana es una variedad suave con un tensor métrico no degenerado (en todos los puntos) y no necesariamente definido positivo. De esta forma, la variedad pseudo-Riemanniana permite clasificar vectores tangentes v^μ como time-like, null o spacelike dependiendo de si el valor de $v_\mu v^\mu$ es negativo, nulo o positivo. Esta caracterización de la métrica permite orientar localmente la variedad y por tanto se tendrá una estructura causal (debido a la signatura de la variedad). El análisis entonces de estas estructuras de espacio tiempo se vera reflejado en el análisis de la métrica y su comportamiento.

2.2. Ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

son un set de ecuaciones diferenciales para determinar el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ dado un tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$. Visto de otra manera, consisten en diez ecuaciones que conectan las componentes de la métrica y el contenido material, imponiendo ligaduras o restricciones sobre la elección simultanea de $g_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$. Por lo tanto, las soluciones de las EFE son métricas de el espacio-tiempo así, Einstein conectó la interacción geométrica del espacio-tiempo con la materia. Debido a la no linealidad de la ecuaciones, encontrar soluciones exactas a este problema ha sido muy complicado exceptuando ciertos casos especiales. En el caso de simetría esférica, la solución exacta a las ecuaciones lo logra la métrica de Schwarzschild bajo los supuestos de que la carga, momento angular y constante cosmológica sean nulas(3). El elemento de linea en esta métrica es de la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2)$$

donde la elección del sistema de coordenadas refleja la simetría del sistema en cuestión. La solución de las ecuaciones en este caso se logró escribiendo la métrica con simetría esférica y demandando que un fotón cayendo radialmente no experimentara aceleración, mientras que un objeto masivo experimentará la conocida aceleración Newtoniana(1).

3. Solución de Kerr

La solución de Schwarzschild puede considerarse como un caso particular de la solución de Kerr. Kerr desarrolló la solución para

las EFE en vacío, simetría, elipsoidal y considerando la presencia de momento angular. Esta solución por tanto se conoce como la métrica de Kerr, posterior mente Kerr desarrollo una teoría mas general en la cual tiene en cuenta el efecto electromagnetico. Esta ultima solución es la solución de Kerr-Newman. Procedemos a realizar una derivación la métrica de Kerr.

De forma análoga a como se encontró la solución de Schwarzschild, se parte de una simetría del objeto que pensamos describir, en este caso un cuerpo rotando, y tomando ciertos límites se logra determinan la forma de la solución. Este análisis determina totalmente la solución (debido a la unicidad de la solución que se discutirá mas adelante en las siguientes secciones) y por tanto se logrará obtener la solución de Kerr. Algunas diferencias con la métrica de Schwarzschild que se pueden esperar, es cierta dependencia del tiempo con respecto a la posición, y dependencia con respecto a θ por la nueva forma que toma el objeto en movimiento(1).

En primer lugar, a diferencia del caso esféricamente simétrico, para un objeto en rotación la simetría apropiada va a ser elipsoidal tal que la métrica del espacio tiempo estará dada por

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - (r^2 + a^2) \sin^2\theta d\phi^2 \quad (3)$$

donde $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$ con a constante.

Hasta ahora sólo hemos introducido las simetrías que esperamos que nuestro objeto tenga, pero todavía no hemos introducido la interacción o dinámica gravitacional. Para esto primero transformamos la métrica a las coordenadas de Boyer-Lindquist donde

$$A = \frac{r^2 + a^2}{\rho^2} \quad (4)$$

tal que

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{A} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - (r^2 + a^2) \sin^2\theta d\phi^2$$

$$ds^2 = A(dt - a \sin^2\theta d\phi)^2 - \frac{1}{A} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dt)^2 \quad (5)$$

Ahora, le añadimos la contribución del campo gravitatorio, incluyendo un potencial gravitacional en A , tal que

$$ds^2 = \frac{f(r)}{\rho^2} (dt - a \sin^2\theta d\phi)^2 - \frac{\rho^2}{g(r)} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dt)^2 \quad (6)$$

Para poder hallar estas funciones en el futuro, tomaremos en consideración las trayectorias de partículas en las geodésicas(1).

Una derivación sencilla que podemos ir incluyendo (debido a la unicidad de la solución), para poder visualizar al producto que deseamos llegar es tomando las coordenadas

$$x = f(r) \sin\theta \cos\phi \quad (7)$$

$$y = f(r) \sin\theta \sin\phi \quad (8)$$

$$z = r \cos\theta \quad (9)$$

Bajo estas coordenadas

$$r = f(r)\sin\theta\cos\phi + f(r)\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta$$

derivando con respecto a r , θ y ϕ obtenemos

$$e_r = \frac{df}{dr}\sin\theta\cos\phi + \frac{df}{dr}\sin\theta\sin\phi + \cos\theta$$

$$e_\theta = f(r)\cos\theta\cos\phi + f(r)\cos\theta\sin\phi - r\sin\theta$$

$$e_\phi = -f(r)\sin\theta\sin\phi + f(r)\sin\theta\cos\phi$$

haciendo uso de esto, la metrica $g_{\mu\nu}$ sera de la siguiente forma:

$$g_{rr} = \frac{df^2}{dr} \sin^2\theta\cos^2\phi + \frac{df^2}{dr} \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta$$

$$g_{r\theta} = \frac{df^2}{dr} \sin^2\theta + \cos^2\theta$$

$$g_{\theta\theta} = f^2\cos^2\theta\cos^2\phi + f^2\cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta$$

$$g_{\theta\phi} = f^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$$

$$g_{\phi\phi} = f^2\sin^2\phi\sin^2\theta + f^2\sin^2\phi\cos^2\theta$$

$$g_{\phi\theta} = f^2\sin^2\theta$$

$$g_{\theta\phi} = 2(ff' - r)\sin\theta\cos\theta$$

Similarmente a las condiciones de Schwarzschild queremos que los elementos fuera de la diagonal se cancelan debido a la simetría del problema. Tenemos entonces la condición $ff' - r = 0$ cuya solución es $f(r) = r^2 + a^2$ con a constante. De esta forma tenemos:

$$ds^2 = -dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 \quad (10)$$

con:

$$g_{rr} = \frac{r^2}{r^2 + a^2} \sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{r^2 + a^2\cos\theta}{r^2 + a^2} \quad (11)$$

$$g_{\theta\theta} = (a^2 + r^2)\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2 + a^2\cos\theta \quad (12)$$

$$y \quad g_{\phi\phi} = (a^2 + r^2)\sin^2\theta \quad (13)$$

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\frac{r^2 + a^2\cos\theta}{r^2 + a^2} \right) dr^2 + (r^2 + a^2\cos\theta)d\theta^2 + ((a^2 + r^2)\sin^2\theta)d\phi^2 \quad (14)$$

Queremos que este elemento tenga forma la ecuación 6 y por tanto realizando algunos cálculos (Ver apéndice) tenemos que efectivamente 14 es de la forma de 6 con $f(r) = g(r) = r^2 + a^2$ y $\rho^2 = -r^2 - a^2\cos\theta$.

4. Derivación de Kerr

En la sección anterior observamos a partir de razonamientos heurísticos la forma que debe tener una métrica con la simetría impuesta puede guiar a una solución de Kerr, sin embargo, esta "derivación" no tiene en cuenta las condiciones físicas o geométricas del sistema por lo que se pierde información física del sistema, se procede a realizar una solución un poco mas detallada.

Como ya se comentó, realizar la solución a partir de las EFE's resulta ser muy tedioso, sin embargo, queremos formalizar un poco mas esta derivación; apriori ya sabemos la solución de Kerr por lo tanto, podemos realizar una serie de análisis físicos o ansatz para ayudarnos a la hora de utilizar las EFE's.

Centrándonos en las simetrías de el problema de Kerr, tenemos una fuente rotando, como hemos visto en la métrica de Schwarzschild tenemos una fuente estática por lo tanto, en el limite "Weak field" tendremos una métrica que se asemeja a esta. Partimos entonces por una métrica que gira lentamente

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &\quad - \frac{4aM}{r} \sin^2 \theta d\phi dt \\ &= -dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &\quad + \frac{2M}{r} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 \end{aligned}$$

Donde $a = J/M$ es el momento angular por unidad de masa. Este termino se deduce a partir de que no solo masa ejerce campo gravitacional sino que también la rotación del objeto, por lo tanto, la luz que viaja en torno al objeto se verá afectada dependiendo de si está a favor o en contra de la rotación de la fuente de campo gravitacional que rota. Este se conoce como el efecto de Lense-Thirring. Ahora bien, asumiendo una métrica elíptica con :

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi$$

$$y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

Por lo tanto, como lo hicimos en la anterior sección ds^2 queda como:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -dt^2 + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &= -\frac{r^2 + a^2}{2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 \\ &\quad + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 \end{aligned}$$

Note que en este ansatz tenemos una forma parecida a la propuesta con rotación sin embargo, el termino $dt d\phi$ se cancela. Por lo tanto, podemos formular nuestra simetría, esto es $(r^2 + a^2)/(r^2 + a^2 \cos \theta)$ se sustituye por una función mas general $(r^2 + a^2 - Z(r))/(r^2 + a^2 \cos \theta)$ y $r^2 + a^2$ se convierte en $F(r)$; así tenemos que ds^2 es :

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\Sigma}{F(r)} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{Z(r)}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2$$

(15)

Sin embargo, esta solución es meramente matemática por lo tanto no hay seguridad que sea el mismo parámetro de densidad de momento angular. Analicemos las EFE's, como es en vacío tenemos $G_{\mu\nu} = 0$, para este análisis observamos solo la componente en $G_{rr}=0$ que contiene información radial del objeto. Resolviendo en Mathematica salen las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} -r^2(r^2 + a^2 - Z) + [Z + r(r - Z')]F &= 0 \\ (r^2 - Z)(r^2 + a^2 - Z) + r(Z' - r)F &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

De donde se sigue que F es

$$F = \frac{(r^2 - Z)(r^2 + a^2 - Z)}{r(r - Z')} \quad (17)$$

Ahora bien, expresando en la ecuación G_{rr} tenemos $Z = r^2 + a^2 F(r) = 0$ La cual no nos interesa pues no tiene sentido físico, $Z' = Z/r$ es decir, $Z = 2Mr$, $F = r^2 - 2Mr + a^2$ La cual es exactamente la solución de Kerr. Por lo tanto, el parámetro a tiene sentido físico y es justamente la densidad de momento angular como lo habíamos previsto.

5. Particularidades de Kerr

Es fácil comprobar que partiendo de la métrica de Kerr, esta se reduce a Schwarzschild para $a=0$ en las coordenadas de Boyer–Lindquist, lo que es de esperar pues para $a=0$ tenemos el caso de simetría esférica estática. Para a diferente de cero, la métrica es estacionaria sin ser estática, pues una métrica rotante como la de Kerr, no es invariante bajo $t \rightarrow -t$ (11).

En 1967 se demostró la unicidad de los agujeros negros estáticos en el vacío, donde se mostraba que la única solución a tal sistema son los agujeros negros de Schwarzschild. Lo mismo se logró para agujeros negros cargados, y eventualmente se extendió a agujeros negros rotantes (11).

Otro teorema que tomó importancia al pasar el tiempo, fue el del no cabello. Este teorema afirma que todas las soluciones de agujeros negros a las ecuaciones de campo, pueden ser completamente caracterizadas por tres parámetros clásicos. La masa, la carga eléctrica y el momento angular (11).

6. Diagrama de Penrose

Dentro del marco de la relatividad general, los diagramas de Penrose son una herramienta bien conocida que ayudan a visualizar las diferentes relaciones causales que se dan en un espacio tiempo, uno de los usos más frecuentes es representar las singularidades que puede tener una métrica, de esta forma se puede tener una idea más intuitiva de que pasa en las singularidades.

Dibujar el diagrama para este caso no es tan fácil como para otras métricas debido a que no se tiene simetría esférica. Para este caso nuestra singularidad solo se va a presentar siempre y cuando $\theta = \pi/2$, por lo tanto los diagramas de Penrose para $\theta = \pi/2$ y $\theta \neq \pi/2$ van a ser muy distintos. Una forma de visualizar lo que pasa en ambos casos, el diagrama resultante es una combinación de lo que le sucede a un observador cayendo desde $\theta = 0$ y otro que cae desde $\theta = \pi/2$, el observador a

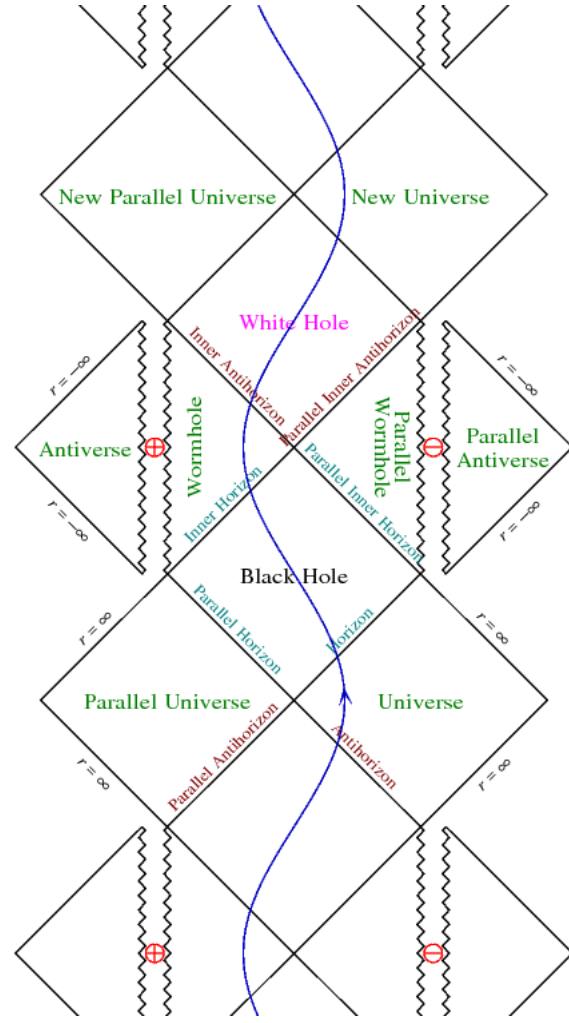


Fig. 1. Diagrama de Penrose para un agujero negro de Kerr

lo largo de $\theta = \pi/2$ estará rotando. La combinación se puede observar por medio de los símbolos rojos del diagrama en donde $r = 0$.

Es importante aclarar que debido a la combinación que consideramos de los diagramas de Penrose, cuando $\theta = 0$ hay una singularidad de tipo espacial en $r = 0$ mientras que si $\theta = \pi/2$ se darán singularidades de tipo timelike. Es por esta razón que aunque se logre visualizar la causalidad en este agujero negro, hacer un análisis con estos diagramas es confuso y no muy apropiado para ángulos $\theta \neq 0$.

Appendix A: Cálculos para llegar a la forma de la ecuación 6

Expandiendo la ecuación 6 tenemos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{f(r)}{\rho^2}(dt^2 - 2a\sin^2\theta dt d\phi + a^2\sin^4\theta d\phi^2) - \frac{\rho^2}{g(r)}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}((r^2 + a^2)^2 d\phi^2 - 2a(r^2 + a^2)ddt + a^2 dt^2) \\ &= dt^2\left(\frac{f(r)}{\rho^2} - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}a^2\right) + d\phi dt\left(\frac{-2a\sin^2\theta f(r)}{\rho^2} + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}2a(r^2 + a^2)\right) + d\phi^2\left(a^2\sin^4\theta\frac{f(r)}{\rho^2} - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}(r^2 + a^2)^2\right) + d\theta^2(-\rho^2) + dr^2\left(-\frac{\rho^2}{g(r)}\right) \end{aligned}$$

Comparando termino a termino con la ecuación 14:

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\frac{r^2 + a^2\cos\theta}{r^2 + a^2}\right)dr^2 + (r^2 + a^2\cos\theta)d\theta^2 + ((a^2 + r^2)\sin^2\theta)d\phi^2$$

Por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} -\rho^2 &= r^2 + a^2\cos\theta \\ -\frac{\rho^2}{g(r)} &= \frac{r^2 + a^2\cos\theta}{r^2 + a^2} \end{aligned}$$

Es decir $-\rho^2 = r^2 + a^2\cos\theta$ y $g(r) = r^2 + a^2$. Sustituyendo estos en la ecuación 6 tenemos que $-\rho^2 = f(r) - \sin^2\theta a^2$ y por lo tanto $f(r) = g(r)$. Así, la ecuación 14 se puede expresar como:

$$ds^2 = -\frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2\cos\theta}(dt - a\sin^2\theta d\phi)^2 + \frac{r^2 + a^2\cos\theta}{r^2 + a^2}dr^2 + (r^2 + a^2\cos\theta)d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos\theta}((r^2 + a^2)d\phi - a dt)^2 \quad (\text{A.1})$$

References

- [1] Dadhich and Naresh. A novel derivation of the rotating black hole metric. *arXiv.org*, Oct 2013.
- [2] S. Deser and J. Franklin. De/re-constructing the kerr metric. *General Relativity and Gravitation*, 42(11):2657–2662, Nov 2010.
- [3] Ray D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press, 1992.
- [4] Zhong-Ying Fan and Xiaobao Wang. Construction of regular black holes in general relativity. *Physical Review D*, 94(12), Dec 2016.
- [5] B. Goutéraux. Black-hole solutions to einstein’s equations in the presence of matter and modifications of gravitation in extra dimensions. 2010.
- [6] Roy P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11:237–238, Sep 1963.
- [7] Marc Mars. Uniqueness properties of the Kerr metric. *Classical and Quantum Gravity*, 17(16):3353–3373, Aug 2000.
- [8] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. 1973.
- [9] Richard S. Palais. The principle of symmetric criticality. *Comm. Math. Phys.*, 69(1):19–30, 1979.
- [10] PhoenixPerson. Are the topology of a manifold and the topology induced by the metric of a manifold the same?, Dec 2014.
- [11] Teukolsky and Saul A. The kerr metric. *arXiv.org*, Jan 2015.
- [12] L.W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Universitext. Springer New York, 2010.