

Lecture notes on Algebraic Topology

November 8, 2024

Abstract

Un des buts de la topologie algébrique est de fournir des outils algébriques pour l'étude des espaces topologiques. Parmi ces outils, on peut mentionner, par exemple, les groupes d'homologie et les groupes de cohomologie. Un des objectifs principaux de ce cours est d'approfondir les notions d'homologie et de cohomologie à travers l'étude des variétés topologiques et des variétés lisses. L'on supposera connues la définition et les propriétés de base d'homologie et de cohomologie (mais on fera, néanmoins, un petit rappel) et l'on se proposera d'étudier le contenu géométrique de ces notions. Les thèmes phares de ce cours sont la dualité de Poincaré et la théorie de l'intersection.

Contents

1	Introduction	1
2	Groupes d'homologie singulière de X	1
2.1	Groupes d'homologie relatifs	1

1 Introduction

Rappels de homologie...

2 Groupes d'homologie singulière de X

An complex $C.(X)$

$$H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X)$$

, $B_k(X) = \text{Ker } \partial_k (= C_0(X) \text{ si } k = 0)$, $Z_k(X) = \text{Im } \partial_{k+1}$

Groupes d'homologie singulier d'un point $X = 1$. $H_k(X) = 0$ et $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

2.1 Groupes d'homologie relatifs

Definition 2.1. *A suite exacte homologique de la paire (X, A) ($A \subset X$)*

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(A) \rightarrow H_{k+1}(X) \rightarrow H_{k+1}(X, A) \rightarrow H_k(A) \rightarrow H_k(X) \rightarrow \cdots$$

inclusion $A \hookrightarrow X$ ou, $C_k(X, A) = C_k(X)/C_k(A)$

Example 2.2. *Si $x_0 \in X$, on a $H_k(X, \{x_0\}) = H_k(X, x_0) \cong \tilde{H}_k(X)$, $k \geq 0$.*

Si $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est une application continue, i.e. $f(A) \subset B$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow & H_{k+1}(A) & \rightarrow & H_{k+1}(X) & \rightarrow & H_{k+1}(X, A) & \rightarrow & H_k(A) & \rightarrow & H_k(X) & \rightarrow & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(A) \rightarrow H_{k+1}(X) \rightarrow H_{k+1}(X, A) \rightarrow H_k(A) \rightarrow H_k(X) \rightarrow \cdots$$

Si $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est une application continue t.q. $f : X \rightarrow Y$, $df|_A : A \rightarrow B$ soient des équivalences d'homotopie, alors $f_* : H_k(X, A) \rightarrow H_k(Y, B)$ est un isomorphisme pour tout $k \geq 0$

Definition 2.3. *A triplet (X, A, B) topologique $B \subset A \subset X$, la suite exacte homologique associée au triplet est*

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(A, B) \rightarrow H_{k+1}(X, B) \rightarrow H_{k+1}(X, A) \rightarrow H_k(A, B) \rightarrow \cdots$$

ou le premier arrow est induit par $H_k(X, B)$, le deuxième par inclusion $H_k(X, B) \subset H_k(X, A)$, le troisième par la inclusion $H_k(A, B) \subset H_k(A, A)$

On obtient la suite exacte associée à une paire topologique (X, A) ou $A \neq \emptyset$, pour les groupes d'homologie réduits:

$$\cdots \rightarrow \widetilde{H}_{k+1}(A) \rightarrow \widetilde{H}_{k+1}(X) \rightarrow H_{k+1}(X, A) \rightarrow \widetilde{H}_k(A) \rightarrow \cdots$$