

Lecture notes on Schemes I

November 12, 2024

Abstract

Ce cours propose une introduction à la théorie des schémas. Introduite par Grothendieck il y a plus d'un demi-siècle, c'est actuellement le langage commun non seulement de la géométrie algébrique mais également de larges pans de la théorie des nombres et de la théorie des représentations.

Contents

1	Introduction	1
1.1	faisautisation	1
1.1.1	Fonctorialité	1
A	Commutative diagrams	4

1 Introduction

Let \mathcal{C} , rappel f est monomorphisme...

Example 1.1. Dans le categorie des prefasioux on X espace topologique, $f \in \text{Hom}_{\text{Pre}_X}(F, Y)$, f est un mono, epi, iso ssi par tout ouvert V des X $f_V : F(V) \rightarrow Y(V)$ l'est. Dans Faseux, ssi $f_x : F_x \rightarrow Y_x$ pour tout $x \in X$ est inective, surjective, bijective.

Si F est un prèfasceaux sur X , $x \in X$ on pose

$$\mathcal{F}_x = \text{colim}_{x \in U, U \text{ ouvert}} F(U)$$

avec

$$\text{colim}_{x \in U} F(V) = \prod_{x \in U} F(V) / \sim$$

Proposition 1.2. Si F fasceau, pour tout V , $F(V) \rightarrow \prod_{x \in U} F_x$ est injectif.

Supposons F faisceau et pour tout $x \in X$, $\phi_x : \sigma_x \rightarrow Y_x$ injectif ssi pout tout V ouvert de X $\phi_V : F(V) \rightarrow Y(V)$ injectif.

Si F et Y fasiceaux, $\forall x \in X$, ϕ_x bij ssi $\forall V$, ϕ_V bij.

1.1 faiseautisation

Si F, Y fasiceaux, $\phi = \psi$ ssi $\forall x \in X$, $\phi_x = \psi_x$. F faisceau sur X , on pose

On verifie que \tilde{F} est un fasiceau et que $F \mapsto \tilde{F}$ est un foncteur. On a un morphisme canonique $\tau : F \rightarrow \tilde{F}$, $s \in F(V) \mapsto (s_x)_{x \in V}$ on verifie que τ es un iso. ssi F est un faisceau.

D'autre part en general $\forall x \in X$, $\tau_x : F_x \mapsto \tilde{F}_x$ es un iso.

En composant avec τ on a $\alpha : \text{Hom}_{\text{Faseux}}(\tilde{F}, G) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Pre}}(F, \iota(G))$ avec $\iota : \text{faisceau} \rightarrow \text{prefasioux}$ l'inclusion naturelle.

On verifie facilement que α est un bijective functorielle en F et G . Autrement dit, le foncteur $F \mapsto \tilde{F}$ est l'adjunt à gauche du functor ι .

1.1.1 Functorialité

$f : X \rightarrow Y$ application continue. F prefasioux sur X , on pose $f_*F(V) = F(f^{-1}(V))$, avec V ouvert de Y .

f_*F est un prefasioux $F \mapsto f_*F$ est un foncteur et si F est un faisceau f_*F également.

On a $g_*(f_*F) = (g \circ f)_*F$. Si G est un prefasioux sur Y , on note f^+Y le prefasioux $f^+G(V) = \text{colim}_{f(V) \in V} G(V)$

En general si F faisceau, f^+F n'est pas un faisceau. on pose $f^{-1}F = \tilde{f}^+F$

Si $\iota_x : x \rightarrow$, $(\iota_x^+ F)_x \equiv (\iota_x^{-1} F)_x = F_x$

$f^+(g^+H) = (g \circ f)^+H$ si G sur Y $(f^{-1}G)_x = (f^+G)_x = G_{f(x)}$.

Proposition 1.3. Si $f : X \rightarrow Y$ continue, on a une adjunction $\text{Hom}_{\text{Faseux}_X}(f^{-1}G, F) \sim \text{Hom}_{\text{Faseux}_Y}(G, f_*F)$ f^{-1} est adjunt à gauche de f_* .

Espaces localement annulés (X, O_X) , avec X espace top., O_X un faisceau d'anneaux sur X t.q. $\forall x \in X$, $O_{X,x}$ est un anneaux **local**.

On va munir $\text{Spec}A$ d'une telle structure. Soit M un A -module, V ouvert de $\text{Spec}A$ et $S(V) = \{f \in A \mid V \subset D(f)\}$.

On note $M_P(V)$ le $S(V)^{-1}A$ -module $S(V)^{-1}M$.

M_P est un prefaisceau de A -modules sur $\text{Spec}A$. Soit $x \in \text{Spec}A$, correspondait à p_x

$$M_{P,x} = \text{colim}_{x \in U} S^{-1}(V)M = M_{p_x}$$

En fait M_P est un prefaisceau de A_P -modules. On note \tilde{M} le faisceau associé de M . Soit $f \in A$, $f \in S(D(f))$ on dispose donc de $M_f \rightarrow S(D(f))^{-1}M = M_P(D(f))$, $\frac{m}{f} \mapsto \frac{m}{f}$

(A -linéaire) qui induit par composition avec $M_P(D(f)) \rightarrow \tilde{M}(D(f))$.

Theorem 1.4. Pour tout $f \in A$

1. l'application A -linéaire $M_f \rightarrow \tilde{M}(D(f))$ est un iso.

Corollary 1.5. $M \rightarrow \tilde{M}(\text{Spec}A) = \Gamma(\text{Spec}A, \tilde{M})$ est un iso. de A -modules.

Proof. On peut identifier $D(f)$ à $\text{Spec}A_1$. On note $\tau_f : A \rightarrow A_f$, le morphisme $a \mapsto \frac{a}{1}$. Si $D(f) \subset D(g)$ il existe $n \geq 1$, $a \in A$ t.q. $f^n = ag$. On en tire $\rho_{f,g} : A_g \rightarrow A_f$, $\frac{1}{g} \mapsto \frac{a}{f^n}$. C'est l'unique morphisme de A -algèbres $A_g \rightarrow A_f$ t.q. $\rho_{f,g} \circ \tau_g = \tau_f$. Il suit que si $D(f) \subset D(g)$ $\rho_{f,g} \circ \rho_{g,h} = \rho_{f,h}$. En particulier si $D(f) = D(g)$, $\rho_{f,g} \circ \rho_{g,f} = \text{Id}$. On peut donc identifier A_f et A_g via $\rho_{f,g}$.

Démonstration OPS $f = 1$ et $A = A_f$ (on identifie $\tilde{M}/D(f)$ à \tilde{M}_d)

- $M \rightarrow \tilde{M}(\text{Spec}A)$ est injective. Soit $m \in M$ dans le noyau. Pour tout $p \in \text{Spec}A$ l'image de m dans M_P est nulle et suet que $m = 0$ (en effect $\text{Ann}m \cap A \setminus P \neq \emptyset$ pour tout P .)

- surjectivité

Soit $\sigma \in \tilde{M}(\text{Spec}A)$ par quasi compacité OPS $\text{Spec}A = \cup_{i \in I} D(f_i)$ avec I fini. Alors, $\forall i \in I$ $\sigma|_{D(f_i)}$ par medio de m_i/f_i , $m_i \in M$

$\sigma_{D(f_i f_j)}$ est représentable par $f_j m_i / (f_i f_j)$ et par $f_i m_j / (f_i f_j)$.

Mais par injectivité de $M_{f_i f_j} \rightarrow \tilde{M}(D(f_i f_j))$ il suit que $\frac{f_j m_i}{f_i f_j} = \frac{f_i m_j}{f_i f_j}$ dans $M_{f_i f_j}$. Il existe donc $N \geq 1$ indices de (i, j) t.q.

$$(f_i f_j)^{N-1} (f_j f_i f_j m_i - f_i f_j f_i m_j) = 0$$

$(f_i f_j)^N f_j m_i = (f_i f_j)^N f_i m_j$. Posons $f'_i = f_i^{N+1}$ et $m'_i = f_i^N m_i$. On peut remplacer f_i par f'_i et m_i par m'_i . $f_j m_i = f'_i m'_i = f_i m_j$ par tout indices.

Pour montré que $m \in M$ a pour image σ il suffit de montrer que l'image de m dans M_{f_i} est $\frac{m_i}{f_i}$.

Comme $\text{Spec}A = \cup D...$ il existe $\alpha_i \in A$, $i \in I$ t.q. $1 = \sum \alpha_i f_i$. On pose $m = \sum_{j \in J} \alpha_j m_j$ On a $f_i m = \sum_{j \in I} \alpha_j f_i m_j = \sum_{j \in I} \alpha_j f_j m_i = m_i$ et l'image de m dans M_{f_i} est bien $\frac{m_i}{f_i}$.

On pose $O_{\text{Spec}A} = A$ on a $O_{\text{Spec}A}(D(f)) = A_f$

$$O_{\text{Spec}A,x} = A_{P_x}$$

de plus $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec} A, x}$ est l'unique faisceau de A -modules sur $\mathrm{Spec} A$.

□

Definition 1.6. *Un morphisme d'espaces annelés*

$$(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

est un couple (f, f^b) avec $f : X \rightarrow Y$ continue et $f^b : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ un morphisme de faisceaux d'anneaux sur Y

$$(f^b \iff f^\# : f^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X)$$

$$f_x^\# : (f^{-1} \mathcal{O}_Y)_x = \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$$

un morphisme entre espaces localement annelés

$$(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

est un couple (f, f^b) comme a-dessus t.q. $\forall x \in X$ $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ est un morphisme local $[\phi : (A, m_A) \rightarrow (B, m_B)$ t.q. $\phi(m_A) \subset m_B$ i.e. qui equivarent à $\phi^{-1}(m_B) = m_A]$

A Commutative diagrams

Test1

$$\begin{array}{ccccc}
 F : \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} & & \\
 & & & & \\
 A & \longmapsto & B & x & \\
 a \downarrow & & b \downarrow & \downarrow & \\
 A' & \longmapsto & B' & y &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longmapsto & B \\
 a \downarrow & & b \downarrow \\
 A' & \longmapsto & B'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longmapsto & Z \\
 f \downarrow & & Ff \downarrow \\
 Y & \longmapsto & W
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 F : \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} & & \\
 & & & & \\
 X & \longmapsto & Z & x & \\
 a \downarrow & & b \downarrow & \downarrow & \\
 Y & \longmapsto & W & y &
 \end{array}$$