Notes in quantum fields

Rafael Córdoba L.

30 de junio de 2020

This will be a series of notes of the seminar "Seminario Partículas, Campos Simetrías".

Part I of this notes are strongly basesd in:

- Bogoliubov. Quantum Fields.
- Reyes A. Notas capitulo 25 Quantum Fields.
- Stefan Weinzierl Introduction to feynman diagramas `https://arxiv.org/pdf/1005.1855.pdf`.

Índice general

Parte I

REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL

1 Calculo de integrales y divergencias

Esquema organización

- El termino de 1-loop
- Divergencia en el 1-loop
- Renormalización: Integrales previas
- Renormalización dimensional
- Tipos de Loops, 1,2,3 o 4 vertices.
- Contraterminos
- Re parametrización del Lagrangiano
- Teoria ϕ^3 y ϕ^4

1.1. Preliminares

Definición 1.1.1. *La función $\Gamma(z)$ de Euler está dada por*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

En particular, la función Γ nos perimte extender el factorial (!), pues integrando por partes tenemos:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1$$

por tanto, recursicamente tenemos para $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Para valores pequeños de $\varepsilon << 1$, Γ toma la forma asintotica (Le Lionnais 1983):

$$\Gamma(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon) \tag{1.1}$$

Por otra parte, $f(x)^\varepsilon$ se aproxima como

$$f(x)^\epsilon = e^{\varepsilon \log f(x)} \sim 1 + \varepsilon \log f(x) + O(\varepsilon^2)$$

1.1.1. Integrales

El volumen de la esfera $n-$ dimensional (esfera unitaria) S^n está dado por

$$V(n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

por tanto, el area será:

$$S(n) = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

En particular, al integrar sobre $\mathbb{R}^n$ (similar a $\mathbb{R}^3$ en esfericas),

$$\int d^n x = \int_{S^{n-1}} d\Omega \int x^{n-1} dx$$

En particular, coga $n = 3$ entonces:

$$\int d^3 x = \int dx dy dx = \int_{S^2} d\Omega \int x^2 dx = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi d\theta \int_0^{\infty} r^2 dr$$

Definición 1.1.2. *Al integrar sobre k_0 podemos rotar el contorno de integracion en un angulo de 90 lo cual es equivalente a multiplicar por i. Por tanto, al hacer*

$$\int d^4 k = \int dk^0 \int d^3 k \mapsto i \int dk_4 \int d^3 k \equiv i \int \underbrace{(d_4 k)_E}_{\text{Espacio Eucildeo}}$$

decimos que realizamos una **rotación de Wick**

1.2. Motivación

Al resolver las integrales de los diagramas encontramos expresiones que dependen de el 4-vector de momento p de la forma:

$$\mathcal{M} = \int dk_1 dk_2 \ldots dk_c F(p, k)$$

donde $F(p, k)$ es producto de los propagadores de momento

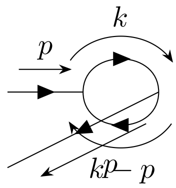
$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \frac{P_{\alpha\beta(k)}}{m^2 - k^2 - i\epsilon}$$

(lineas internas regla R4 Scheck.)
En general queremos resolver integrales de la forma:

$$I(p, L) = \frac{i}{\pi^2} \int dk \prod_{l=1}^{L} \frac{P(k, p_l)}{m_l{}^2 - (k + p_l)^2 - i\epsilon} \tag{1.2}$$

Sinembargo, en el espacio de Fourier k resulta mas sencillo resolver estas.

Ejemplo 1.2.0.1. *En el caso de 1-loop tenemos el diagrama mas sencillo para una teoria $\lambda : \phi^3$ ::*



Para una teoria $\lambda : \phi^3$: matriz de scattering será

$$S^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!}\lambda^2 \int d^4x \int d^4y T\left(: \varphi(x)^3 :: \varphi(y)^3 :\right)$$

y como vimos, la figura de 1-loop será hacer dos contraciones dando así:

$$\frac{(-i)^2}{2!}(3!\lambda)^2 \int d^4x \int d^4y \Delta_F(x-y)^2 : \phi(x)\phi(y) :$$

Recordando la definición del propagador de Feynman,

$$\Delta_F(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik\cdot x}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Hay un problema, el operador $\Delta_F(x-y)$ no está definido para $x = y$ pues

$$\Delta_F(x) = \frac{\delta(x^2)}{4\pi} + \frac{1}{4\pi^2 i}\frac{1}{x^2} + \frac{im^2}{8\pi^2} log\left(\frac{m\sqrt{|x^2|}}{2}\right) - \frac{m^2}{8\pi}\theta(x^2) + \dots$$

Note que las distribuciones $\delta(x^2), x^{-2}$ son singulares
(Recuerde

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i f(x_i)=0} \frac{\delta(x - x_i)}{f'(x_i)}$$

por tanto, para $\delta(x^2)$ habrá singularidad en $x = 0$)
Por tanto, necesitamos solucionar esto! Resulta en general mas facil ver la contribución en el espacio de momentos y por tanto, para el 1-loop tenemos

$$I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dp}{\underbrace{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)}_{\text{Momentum } p} \underbrace{(m^2 - (k-p)^2 - i\varepsilon)}_{\text{Momentum } k-p}}.$$

Definición 1.2.1. *Analizando la forma de la integral anterior valores grandes de momento p (espectro ultravioleta),*

$$I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dp}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)(m^2 - (k-p)^2 - i\varepsilon)} \sim \int \frac{dp}{p^4}$$

Calculando la integral posterior,

$$\int \frac{dp}{p^4} = \int \frac{dp_0 d^3p}{p^4} = i \int \frac{(d^4p)_E}{p^4} \sim \int_{S^3} \int_0^\infty \frac{p^3\, dp}{p^4} \sim log(p)\Big|_0^\infty$$

por tanto, se dice que el **grado de divergencia superficial** *es logaritmico.*

1.3. Regularización dimensional

En la regularización dimensional replanteamos el problema a uno mas general, cambiamos la integral 4-dimensional de momentos a una integral de dimensión $n = 4-2\epsilon$*,* $\epsilon > 0$*.*
Nota: Cambiaremos $m^2 - i\epsilon$ *por* m^2 *para evitar confusión.*

$$\int (d^4p)_E = \underbrace{\int_{\Omega(4)} d\Omega}_{\text{Angular}} \underbrace{\int_0^\infty p^3 dp}_{\text{Radial}} \rightarrow \int d^n p \equiv \underbrace{\mu^{2\varepsilon}}_{\text{Cte. Dim.}} \underbrace{\int_{\Omega(n)} d\Omega}_{\text{Angular}} \underbrace{\int_0^\infty p^{n-1} dp}_{\text{Radial}}$$

Donde $\Omega(n) = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2) \leftarrow$ *Area de la esfera (n-1)-dimensional.*
En particular, la constante μ *se escoge de tal forma que las dimensiones de la integral sean las mismas.*
La idea es "separar"los terminos divergentes, ilustraremos esto mejor con un ejemplo:

Ejemplo 1.3.0.1. *Para el caso de 1-loop tenemos la regularicación dada por (Ver derivación aquí)*

$$\mathrm{reg}_\varepsilon\, I(k) = \int d^n p = -\left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \Gamma(\epsilon) \int_0^1 \frac{dx}{(m^2 - x(1-x)k^2)^\varepsilon}$$

Utilizando la aproximación asintotica de Γ*,* **[??]** *tenemos:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{reg}_\varepsilon\, I(k) &= -\left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \Gamma(\epsilon) \int_0^1 \frac{dx}{(m^2 - x(1-x)k^2)^\varepsilon} \\
&= -\left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon)\right) \int_0^1 \frac{dx}{(m^2 - x(1-x)k^2)^\varepsilon} \\
&= -\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon)\right) \int_0^1 dx \left[1 - \varepsilon \log\left(\frac{(m^2 - x(1-x)k^2)\pi}{\mu^2}\right)\right] \\
&= -\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon)\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon)\right) \int_0^1 dx \left[\varepsilon \log\left(\frac{(m^2 - x(1-x)k^2)\pi}{\mu^2}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{\varepsilon} + \gamma + \int_0^1 dx \log\left[\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2}\right] + \log\pi + O(\varepsilon) \\
&= \underbrace{-\frac{1}{\varepsilon}}_{I_{\text{Singular}}} + \underbrace{\int_0^1 dx\, \varepsilon \log\left[\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2}\right]}_{I_{\text{finito}}(k,\mu)} + O(\varepsilon)
\end{aligned}$$

Ahora bien, en la representación posición,

$$\begin{aligned}\mathrm{reg}_\varepsilon[\Delta_F(x)^2] &= \mathcal{F}\left[\frac{i\pi^2}{(2\pi)^6}I(k)\right] = \frac{i\pi^2}{(2\pi)^6(2\pi)^2}\int d^4k e^{-ik\cdot x} I(k)\\ &= -\frac{i\pi^2}{(2\pi)^6(2\pi)^2}\int d^4k e^{-ik\cdot x}\frac{1}{\varepsilon} + \frac{i\pi^2}{(2\pi)^6(2\pi)^2}\int d^4k e^{-ik\cdot x} I_{\textit{finito}}\\ &= \frac{1}{16\pi^2 i}\frac{1}{\varepsilon}\delta(x) + \underbrace{\frac{i\pi^2}{(2\pi)^8}\int d^4k e^{-ik\cdot x} I_{\textit{finito}}}_{\widetilde{\Delta}_F^2(x)}\\ &= \frac{1}{i} I_{\textit{Sing}}\delta(x) + \widetilde{\Delta}_F^2(x)\end{aligned}$$

Donde $\widetilde{\Delta}_F^2(x)$ es un termino libre de divergencias!

Logramos entonces separar la singularidad en un termino, esto en la matriz de scattering se traduce a,

$$\frac{(-i)^2}{2!}(3!\lambda)^2\int d^4x\int d^4y \Delta_F(x-y)^2 : \phi(x)\phi(y) :\to \frac{(-i)^2}{2!}(3!\lambda)^2\int d^4x\int d^4y\, \mathrm{reg}_\varepsilon[\Delta_F(x)^2] : \phi(x)\phi(y) :$$

Por tanto, la contribución será:

$$\begin{aligned}S^{(2)} &= \frac{(-i)^2}{2!}(3!\lambda)^2\int d^4x\int d^4y\, \mathrm{reg}_\varepsilon[\Delta_F(x-y)^2] : \phi(x)\phi(y) :\\ &= \frac{(-i)^2}{2!}(3!\lambda)^2\int d^4x\int d^4y\left(\frac{1}{i}I_{\textit{Sing}}\delta(x-y) + \widetilde{\Delta}_F^2(x-y)\right) : \phi(x)\phi(y) :\\ &= \frac{(-i)^2}{2!}(3!)^2\int d^4x\int d^4y\big(-i\lambda^2 I_{\textit{Sing}}\delta(x-y)\big) : \phi(x)\phi(y) :\\ &\quad + \underbrace{\frac{(-i)^2}{2!}(3!)^2\int d^4x\int d^4y \lambda^2\widetilde{\Delta}_F^2(x-y) : \phi(x)\phi(y) :}_{\widetilde{S^{(2)}}}\\ &= \underbrace{(-i)\int d^4x \frac{-(3!\lambda)^2}{2!} I_{\textit{Sing}} : \phi(x)^2 :}_{\textit{Termino orden 1}} + \widetilde{S^{(2)}}\end{aligned}$$

Por tanto, para el diagrama ϕ^3 la serie de Dyson hasta orden 2:

$$\begin{aligned}S^{(1)} + S^{(2)} &= \mathbf{1} + (-i)\int d^4x \underbrace{\lambda : \phi(x)^3 :}_{-\mathcal{L}_I} + (-i)\int d^4x \underbrace{\frac{-(3!\lambda)^2}{2!} I_{\textit{Sing}} : \phi(x)^2 :}_{\Delta\mathcal{L}} + \widetilde{S^{(2)}}\\ &= \mathbf{1} + i\int d^4x[\mathcal{L}_I(x) + \Delta\mathcal{L}(x)] + \widetilde{S^{(2)}}\end{aligned}$$

Por tanto, podemos resumir esto en la siguiente definición

Definición 1.3.1. *Aislar la singularidad mediante la regularización dimensional genera el termino singular, este resulta ser equivalente a añadir una contribución $\Delta\mathcal{L}$. A este termino se le llama* **contra-termino** *note que el termino $\Delta\mathcal{L}$ es local pero el termino $\phi(x)\delta(x-y)\phi(y)$ es cuasi-local.*

Ejemplo 1.3.0.2. *En una teoría $\lambda\phi^4$*

Veamos ahora los terminos $\tilde{J}_l$ con este planteamiento.

$$reg_\epsilon \tilde{J}_l(D) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^n p}{(p^2 - D)^l}$$

En esta aproximación tenemos

$$reg_\epsilon \tilde{J}_l(D) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^n p}{(p^2 - D)^l} = \left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \frac{(-1)^{l+1}\Gamma(l+\varepsilon-2)}{D^{l+8-2}\Gamma(l)}$$

*Y por tanto, la integral [**??**] es de la forma:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{reg}_\varepsilon I(k) &= \frac{i\mu^2\varepsilon}{\pi^2} \int \frac{d^n p}{(m^2 - p^2)(m^2 - (p-k)^2)} = \\
&= \frac{i^3 \mu^{2\varepsilon}}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha d\beta e^{i\beta k^2 - i(\alpha+\beta)m^2} \int d^n p e^{i(\alpha+\beta)p^2 + 2i\beta pk} \\
&= -\left(\frac{i\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{(\alpha+\beta)^{2-\varepsilon}} e^{i\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}k^2} - i(\alpha+\beta)m^2 \\
&= -\left(\frac{i\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{da}{a^{1-\varepsilon}} e^{-iaZ\left(x,k^2\right)}
\end{aligned}$$

Y así,

$$\operatorname{reg}_\varepsilon I(k) = -\left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 \frac{dx}{[m^2 - x(1-x)k^2]^\varepsilon}$$

Tendiendo ϵ a 0. Y usando que $\Gamma(\epsilon) \to \frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon)$ donde γ es la constante de Euler-Mascheroni $(0{,}57\ldots)$.
Así,

$$\operatorname{reg}_\epsilon I(k) \to -\frac{1}{\epsilon} \int_0^1 dx \ln\left[\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2}\right] + \ln\pi + \gamma$$

Por tanto, la parte singular se convierte en el polo ϵ^{-1}.

Ejemplo 1.3.0.3. *La integral*

$$J_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{p_\mu p_v dp}{[m^2 - (p-k/2)^2][m^2 - (p+k/2)^2]}$$

se convierte en

$$\operatorname{reg}_\varepsilon J_{\mu v}(k) = \left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(\varepsilon)}{4} \int_0^1 \frac{dx}{(Z)^\varepsilon} \left[2g_{\mu v}\frac{z}{1-\varepsilon} - k_\mu k_v (1-2x)^2\right]$$

Con

$$Z = Z\left(x, k^2\right) = m^2 - x(1-x)k^2$$

$$\operatorname{reg}_\varepsilon J_{\mu v}(k) = \frac{1}{2\varepsilon}\left[g_{\mu v} m^2 - \frac{g_{\mu v} m^2 + k_\mu k_v}{6}\right] + J_{\mu v}^{\mathrm{fin}(\varepsilon)}(k)$$

where

$$J_{\lambda v}^{\mathrm{fin}(\varepsilon)}(k) = \frac{g_{\mu v}}{2}\left(m^2 - \frac{k^2}{6}\right) + \frac{1}{4}\int_U^1 dx\left[2g_{\mu v}Z - k_\mu k_v(1-2x)^2\right]\ln Z$$

Usando la identidad

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[(1-x)A + xB]^2}$$

tenemos

$$I(k) = I(k) = \frac{i}{\pi^2}\int dp\int_0^1 \frac{dx}{[(1-x)\left(m^2 - p^2 - i\varepsilon\right) + x\left(m^2 - (k-p)^2 - i\varepsilon\right)]^2}.$$

Feynam realizó un metodo para resolver estas las integrales de tipo [**??**] llamada **parametrización de Feynman** donde se encuentra (Click aquí) que las integrales resultan ser una combinación lineal de integrales de la forma:

$$\int \frac{dq}{(q^2 - D + i\epsilon)^3}$$

y

$$\int \frac{dq}{(q^2 - D + i\epsilon)^l} \quad , l \leq 2$$

donde

$$D(x,p) = (\Sigma x_l p_l)^2 + \Sigma x_l\left(m_l^2 - p_i^2\right).$$

Sinembargo, la primera si se puede resolver pero la segunda no existe! Usando la idenidad (Introducida por Feynamn),

Proposición 1.3.0.1.

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_L} = \Gamma(L)\int_0^1 \frac{\{dx\}_L}{\left(\sum_{1\leqslant l\leqslant L} a_l x_l\right)^L} \qquad \sum_l x_l = 1$$

Observamos que ($a_i = (k+p_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon$) podemos escribir [**??**]

$$I_L(p;L) = (-1)^L\Gamma(L)\int_0^1 \{dx\}_L J_L(p,x)$$

con

$$J_L(p,x) = \frac{i}{\pi^2}\int \frac{dkP(k,p)}{[Z(p,k,x)]^L}$$

$$Z(p,k,x) = \sum_l x_l \left[(k+p_l)^2 - m_l^2 + i\varepsilon \right] = k^2 + 2bk + b^2 - D + i\varepsilon = \underbrace{q - D + i\epsilon}_{q=k+b}$$

$$D(x,p) = (\Sigma x_l p_l)^2 + \Sigma x_l \left(m_l^2 - p_i^2 \right)$$

por tanto, reparametrizando,

$$J_L(p,x) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq P(q-b,p)}{(q^2 - D + i\varepsilon)^L}$$

En general, integrales de la forma $\int q^\mu F(q^2) dq$, $\int q^\rho q^\nu q^\mu F(q^2) dq$ i.e. integrales con numero impar de "q's"son 0 por simetría en q. Por otra parte, para q par tenemos:

$$\int q^v q^\mu F\left(q^2\right) dq = \frac{1}{4} g^{v\mu} \int q^2 F\left(q^2\right) dq$$

,

$$\int q^v q^\mu q^\rho q^\sigma F\left(q^2\right) dq = \frac{1}{24} (g^{v\mu} g^{p\sigma} + g^{v\rho} g^{\mu\sigma} + g^{v\sigma} g^{\mu\rho}) \int \left(q^2\right)^2 F(q^2) dq$$

Por tanto, como $P(q-b,p)$ es polinomio en la variable q, entonces I_l será combinación lineal de integrales de la forma:

$$\tilde{J}_l(p,x) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq}{(q^2 - D + i\varepsilon)^l}, \quad l \leqslant L$$

Al integrar sobre D, si $l \geq 3$ la integral se reduce a $\tilde{J}_3(p,x)$ pero si $l < 3$ la integral no existe! Veamos $\tilde{J}_3$.

Hola

$$\begin{aligned} \tilde{J}_3 &= \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^4 q}{(q - D + i\varepsilon)^3} = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq_0 dq}{\left(q_0^2 - q^2 - D + i\varepsilon\right)^3} = \frac{-i}{\pi^2} \int \frac{dq_0 dq}{\left(-q_4^2 - q^2 - D + i\varepsilon\right)^3} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int \frac{(dq)_E}{\left(q_E^2 + D\right)^3} = \frac{1}{\pi^2} \int_{S^3} \int_0^\infty \frac{q^{3-1} dq}{(q^2 + D)^3} = \frac{1}{\pi^2} \frac{2\pi^{4/2}}{\Gamma(4/2)} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{u\, du}{(u+D)^3} = \frac{1}{2D} \end{aligned}$$

Derivando respecto a D tenemos ($l \geq 3$):

$$\tilde{J}_L(p,x) = \frac{(-1)^{L+1}}{(L-1)(L-2)} \frac{1}{D^{L-2}}$$

La integral $I(k)$ segun la parametrización queda:

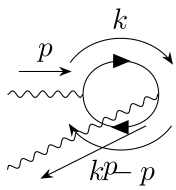
$$\tilde{I}_L(p) = -(L-3)! \int_0^1 \frac{\{dx\}_L}{[D(x,p) + i\varepsilon]^{L-2}}$$

1.3.1. Divergencias ultravioleta

Las integrales que divergen para valores grandes de k se dicen divergencias ultravioletas, esto, se debe a el comportamiento de decaimiento el cual no es lo suficientemente rapido para converger por ejemplo, $1/x^2$ cae mas lento que $1/x^3$.

El caso mas simple que encontramos es el caso de 1-loop con p cuyo momento en la linea superior es k y en la inferior es $k-p$; la integral en este caso es

$$I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dp}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)\,(m^2 - (k-p)^2 - i\varepsilon)}. \tag{1.3}$$



En el espacio de Fourier tenemos

$$i2^8\pi^6\,[\Delta_F(x-y)]^2$$

Donde Δ_F es el propagador de Feynman, el problema es que Δ_F no esta definida en x=y por lo que tenemos que introducir una forma apropiada para que se solucione, ahí entran los operadores $\Lambda_2(x,y)$ quasi-local en el sentido que es cero para todo valor $x \neq y$ los cuales ayudan a que las integrales anteriormente mencionadas covergan Hacer uso de este operador se conoce como remover las divergencias ultravioleta por renormalización.

La integral [**??**] contiene distribuciones singulares $\delta(x^2), x^{-2}$ (Recuerde

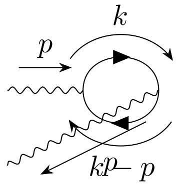
$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i f(x_i)=0} \frac{\delta(x-x_i)}{f'(x_i)}$$

por tanto, para $\delta(x^2)$ habrá singularidad en $x=0$) Necesitamos solucionar esto!.

1.4. Regularización de Pauli-Villards

1.4.1. Regularización dimensional: Cutoff (Frecuencia de corte)

La idea mas intuitiva es realizar un corte o un limte superior de frecuencias sobre las cuales se integran con el proposito de evitar la divergencia ultravioleta. Es intuitiva en el



sentido en que a medida que la frecuencia aumenta hay menos interacciónes y por tanto, en algun punto (λ) no afectará a nuestro calculo. Realizando una rotación de Wick tenemos

$$\int dp \to i \int_{S^4} dV \int_0^\Lambda p^3 dp$$

$$\mathrm{reg}_\Lambda \, J_2(D) = \frac{l}{\pi^2} \int_{S(\Lambda)} \frac{dq}{(q^2 - D + i\varepsilon)^2} = \ln \frac{D - i\epsilon}{\Lambda^2} + 1$$

$$\mathrm{reg}_\Lambda \, J_{\mu v}(D) = \frac{i}{\pi^2} \int_{S(\Lambda)} \frac{q_\mu q_v dq}{(q^2 - D + i\varepsilon)^2} = \frac{g_{\mu v}}{4} \left(\Lambda^2 - 2D \ln \frac{\Lambda^2}{D} - D \right)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{reg}_{\Lambda(F)} \, I(k) &= \frac{i\Lambda^2}{\pi^2} \int \frac{dp}{(m^2 - p^2)(\Lambda^2 - p^2)[m^2 - (p-k)^2]} \\
&= \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dp}{m^2 - (p-k)^2} \left(\frac{1}{m^2 - p^2} - \frac{1}{\Lambda^2 - p^2} \right) \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - m^2} \\
&= i^2 \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{(\alpha + \beta)^2} e^{i \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} k^2 - i\alpha m^2} \left(e^{-i\beta m^2} - e^{-i\beta\Lambda^2} \right) \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - m^2} \\
&= \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - m^2} \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{xm^2 + (1-x)\Lambda^2 - x(1-x)k^2} \right] \to - \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \\
&+ \left\{ 1 + \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

1.4.2. Ejemplos:

Diagrama 'Fish'

El diagrama Fish es el diagrama mas sencillo que aparece para orden dos.

1.5. Apendice

1.5.1. Integrales

Representación en la variable α

$$\frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon} = i \int_0^{\infty} e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\epsilon)} d\alpha$$

La integral Gaussiana 4-dimensional:

$$\frac{i}{\pi^2} \int e^{i\left(ak^2 + 2bk\right)} dk = \frac{1}{a^2} \cdot e^{-ib^2/a}$$

Demostración. ■

$$\begin{array}{l}
\frac{i}{\pi^2} \int e^{l\left(ak^2+2bk\right)} \left[k^v\right] dk = \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a} \left[-\frac{b^v}{a}\right] \\
\frac{i}{\pi^2} \int e^{t(ak^s+2bk)} \left[k^v k^\mu\right] dk = \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a} \left[\frac{2b^v b^\mu + iag^{v\mu}}{2a^2}\right] \\
\frac{i}{\pi^2} \int e^{i\left(ak^2+2bk\right)} \left[k^2\right] dk = \frac{1}{a^2} e^{-tb^2/a} \left[\frac{b^2+2ia}{a^2}\right]
\end{array}$$

Parametrización de Feynman: Derivación de integrales

Proposición 1.5.0.1.

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_L} = \Gamma(L) \int_0^1 \frac{\{dx\}_L}{\left(\sum_{1 \leqslant l \leqslant L} a_l x_l\right)^L}$$

Usando $a_i = (k + p_i)^2 - m_l^2 + i\epsilon$ podemos escribir [**??**]

$$I_L(p; L) = (-1)^L (L-1)! \int_0^{\prime} \{dx\}_L J_L(p, x)$$

con

$$J_L(p, x) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dk P(k, p)}{[Z(p, k, x)]^L}$$

$$Z(p, k, x) = \sum_l x_l \left[(k + p_l)^2 - m_l^9 + i\varepsilon\right] = k^2 + 2bk + b^2 - D + i\varepsilon$$

$$D(x, p) = \left(\Sigma x_l p_l\right)^2 + \Sigma x_l \left(m_l^2 - p_i^2\right)$$

por tanto, reparametrizando,

$$J_L(p,x) = \frac{i}{\pi^2}\int \frac{dqP(q-b,p)}{(q^2-D+i\varepsilon)^L}$$

En general, integrales de la forma $\int q^\mu F(q^2)dq$, $\int q^\rho q^\nu q^\mu F(q^2)dq$ i.e. integrales con numero impar de "q's"son 0 por simetría en q. Por otra parte, para q par tenemos:

$$\int q^v q^\mu F\left(q^2\right) dq = \frac{1}{4} g^{v\mu} \int q^2 F\left(q^2\right) dq$$

,

$$\int q^v q^\mu q^\rho q^\sigma F\left(q^2\right) dq = \frac{1}{24}(g^{v\mu}g^{p\sigma} + g^{v\rho}g^{\mu\sigma} + g^{v\sigma}g^{\mu\rho}) \int \left(q^2\right)^2 F(q^2)dq$$

Por tanto, [**??**] será combinación lineal de integrales de la forma:

$$\tilde{J}_l(p,x) = \frac{i}{\pi^2}\int \frac{dq}{(q^2-D+i\varepsilon)^l}, \quad l \leqslant L$$

Al integrar sobre D, si $l \geq 3$ la integral se reduce a $\tilde{J}_3(p,x)$ pero si $l < 3$ la integral no existe!

$$\frac{i}{\pi^2}\int \frac{dq_0 dq}{\left(q_0^2 - q^2 - D + i\varepsilon\right)^3} = \frac{i}{\pi^2}\int \frac{dq_0 dq}{\left(-q_4^2 - q^2 - D + i\varepsilon\right)^3} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int \frac{d_E q}{\left(q_E^2 + D\right)^3} = \frac{1}{2D}$$

Derivando respecto a D tenemos ($l \geq 3$):

$$\tilde{J}_L(p,x) = \frac{(-1)^{L+1}}{(L-1)(L-2)}\frac{1}{D^{L-2}}$$

Click aquí para regresar a la sección que estaba.

Integrales n dimensiones

$$\frac{i}{\pi^2}\int d^n p e^{i\left(ap^2+2bp\right)} = \left(\frac{ia\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a}$$

1.5.2. Derivación regularización 1-loop