

Notes in physics

Rafael Córdoba L.

December 30, 2020

This will be a self-though course on QFT and beyond (if I can).

Part I of this lecture notes are strongly based in: The Quantum Theory of Fields Volume I; S. Weinberg

Part II of this lecture notes are strongly based in: The Quantum Theory of Fields Volume II; S. Weinberg

Part III of this lecture notes are strongly based in: The Quantum Theory of Fields Volume III; S. Weinberg

Part IV of this lecture notes are strongly based in: Classical Electrodynamics; J.Jackson

Part V of this lecture notes are strongly based in: Black Hole Information and Thermodynamics; D. Lüst

Part VI of this lecture notes are strongly based in: Solitons, instantons and twistors; M. Dunajski

Contents

I. QFT I	4
1. Basics and historical introduction	4
2. Birth of QFT	6
3. Preliminares	9
3.1. La función Γ	9
3.2. Integrales	10
4. Motivación	11
4.1. Divergencias ultravioleta	11
5. Regularización dimensional	13
5.1. Calculo de integrales	17
5.2. 1-loop en QED	21
5.3. Regularización dimensional: Cutoff (Frecuencia de corte)	25
6. Propiedades matemáticas del espacio D -dimensional	25
6.1. Cálculo fraccional	25
6.2. Integrales	26
6.3. El álgebra de Dirac	27
7. Apendice	28
7.1. Identidades de la función Gamma	28
7.2. Integrales	28
7.2.1. Integrales n dimensiones	28
7.3. Trazas	28
8. Notes	29
II. QFT II	29
III. QFT III	29
IV. Electrodynamics	29
V. Black Hole Information Theory	29

Part I

QFT I

Introduction

1. Basics and historical introduction

The continuity equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$$

in the context of quantum mechanics we have a density of probability given by the wave equation $\psi(x, t)$ hence the continuity equation turns out to be

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0$$

where $J = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$.

Given a evolution equation i.e. Schrödinger equation (Erwin Schrödinger was a austrian physicist father of the matrix quantum mechanics):

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H} \psi$$

where \mathcal{H} is the hamiltonian of the system.

We want a probability density not depending on t . Remember that the Klein-Gordon (K-G) equation:

$$\left[-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \phi = 0$$

or using the D'Alembertian operator

$$\square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 = \sum_{\nu} \partial_{\nu} \partial^{\nu}, \quad \mu = \frac{mc}{\hbar}$$

we have:

$$[\square + \mu^2] \phi = 0$$

is Lorentz invariant but nevertheless its probability density may give negative probabilities and therefore Dirac proposed a "linearization of this problem". If the equation is linear in time-derivatives it also may be linear on space-derivatives hence \mathcal{H} is of the form $-i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \alpha_4 m c^2$ (notas [?]) with α_{ν} ($\nu = 1, 2, 3, 4$) constant matrix.

Then the Schrödinger eq becomes

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \alpha_4 mc^2) \psi$$

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla) \psi = \alpha_4 mc^2 \psi \quad (1)$$

We call the operator $D = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}$ and the Schrödinger equation it's just $D\psi = 0$. To see the second order equation (K-G) we apply D^2 hence $(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathcal{H}^2) \psi = 0$ or equivalent:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mathcal{H}^2 \psi$$

$$= -\hbar^2 c^2 \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} - i\hbar mc^3 (\alpha_i \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + m^2 c^4 \alpha_4^2 \psi \quad |(\text{Ansatz H})$$

With summation implicit in i, j . In order to retrieve the K-G we have to have :

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} 1$$

$$\alpha_i \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_i = 0$$

$$\alpha_4^2 = 1$$

Dirac found "some" (In principle are more representations) matrix that satisfies this which are 4x4 matrix:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

We then recover the K-G eq. but it still left to show that this is Lorentz invariant. We multiply the equation 1 on left by α_4 hence we have

$$\left[\hbar c \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + mc^2 \right] \psi = 0$$

with $\boldsymbol{\gamma} = -i\alpha_4 \boldsymbol{\alpha}$ and $\gamma^0 = -i\alpha_4$ (Einstein summation implicit and $x^0 = ct$).

$$\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \eta^{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ -1 & \mu = \nu = 0 \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

2. Birth of QFT

The lagrangian that gives the wave equation is given by :

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2}\mu u_t(x, t)^2 - \frac{1}{2}T u_x(x, t)^2 \quad (2)$$

Because in the field E-L (Euler-Lagrange equations in fields) have the form:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right).$$

Our equation 2 have no terms in explicit dependence of the potential u and therefore the RHS vanishes. Then we have:

$$0 = \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x}$$

Hence

$$\begin{aligned} 0 &= \mu u_{t,t}(x, t) - T u_{x,x}(x, t) \\ u_{t,t}(x, t) &= \frac{T}{\mu} u_{x,x}(x, t) \end{aligned}$$

with T/μ the inverse square of the velocity, hence in a photon we have:

$$u_{t,t}(x, t) = \frac{1}{c^2} u_{x,x}(x, t)$$

Which is exactly the wave equation. Note that in this lagrangian field formalist (We may explore this later) we have the component 00 of the Stress-Energy tensor $\mathcal{T}^{00} = \mathcal{H}$ With

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial^\nu \phi_\alpha - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3)$$

And the Hamiltonian of the sistem will be:

$$\mathcal{T}^{00} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_\alpha)} \partial^0 \phi_\alpha - g^{00} \mathcal{L}$$

Hence:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{00} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 u)} \partial^0 u - g^{00} \mathcal{L} \\
&= \mu u_t u_t - \left(\frac{1}{2} \mu u_t(x, t)^2 - \frac{1}{2} T u_x(x, t)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} (\mu u_t^2 + T u_x^2) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

The Hamiltonian of the system that gives the wave equation and hence the motion of a one dimensional particle called photon is

$$H = \int \mathcal{H} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} dx$$

If we express u in terms of the Fourier expansion we have (with $u(0) = 0$, $u(L) = 0$):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \left(\frac{\omega_k x}{c} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right)$$

using $\langle \sin x \rangle = \langle \cos x \rangle = 1/2$ and by the orthogonality we have:

$$H = \frac{L}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \{ \dot{q}_k(t)^2 + \omega_k^2 q_k(t)^2 \}$$

Thus the field behaves like infinite harmonic oscillators with frequency ω_k . Using Hamiltons equations, $\dot{q}_k(t) = \frac{\partial H(p(t), q(t))}{\partial p_k(t)}$ gives a chanonical momentum $p_k(t) = \frac{L}{2} \dot{q}_k(t)$ and a conumta-tion relations:

$$[\dot{q}_k(t), q_j(t)] = \frac{2}{L} [p_k(t), q_j(t)] = -\frac{2i\hbar}{L} \delta_{kj}$$

$$[q_k(t), q_j(t)] = 0$$

With the evolution:

$$\ddot{q}_k(t) = \frac{2}{L} \dot{p}_k(t) = -\frac{2}{L} \frac{\partial H}{\partial q_k(t)} = -\omega_k^2 q_k(t)$$

$$q_k(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega_k}} [a_k \exp(-i\omega_k t) + a_k^\dagger \exp\{i\omega_k t\}]$$

with a_k the quantum operators studied in QM I.

$$a_k = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

On the other hand, the complex scalar field or the K-G with complex solutions have a lagrangian L given by:

$$L = \int \mathcal{L} d^3x = \int d^3x \left[\dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} - c^2 (\nabla \phi)^\dagger \cdot (\nabla \phi) - \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \phi^\dagger \phi \right]$$

In the real case we let $\mathcal{L}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$. We then derive the equations with the variation of L .

$$\begin{aligned} \delta L &= \int \delta \mathcal{L} d^3x = \int d^3x \left[\delta(\dot{\phi}^\dagger \dot{\phi}) - c^2 \delta((\nabla \phi)^\dagger \cdot (\nabla \phi)) - \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \delta(\phi^\dagger \phi) \right] \\ &= \int d^3x \left[\delta \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} + \dot{\phi}^\dagger \delta \dot{\phi} - c^2 (\nabla \phi)^\dagger \cdot \delta(\nabla \phi) - c^2 \delta(\nabla \phi^\dagger) \cdot (\nabla \phi) - \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \delta \phi^\dagger \phi - \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \phi^\dagger \delta \phi \right] \end{aligned}$$

Using the priciple of stationary action the variation of the field should vanish on the bound-aries (Stationary) thus, integrating along the space and using integration by parts

$$\int d^4x \delta(\nabla \phi^\dagger) \cdot (\nabla \phi) = \int d^4x (\nabla \delta \phi^\dagger) \cdot (\nabla \phi) = (\delta \phi^\dagger) \cdot (\nabla \phi) |_{\text{boundary}} - \int d^4x (\delta \phi^\dagger) \cdot (\nabla^2 \phi) = - \int d^4x (\delta \phi^\dagger) \cdot (\nabla^2 \phi)$$

And similarly for t ,

$$\int d^4x \delta \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} = \delta \phi^\dagger \dot{\phi} - \int d^4x \delta \phi^\dagger \ddot{\phi} = - \int d^4x \delta \phi^\dagger \ddot{\phi}$$

$$0 = \delta \int L dt = c^2 \int d^4x \left[\delta \phi^\dagger \left(\square - \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \right) \phi + \delta \phi \left(\square - \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \right) \phi^\dagger \right]$$

Hence we recover the Klein-Gordon equation

$$\left(\square - \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \right) \phi = 0$$

With its canonical 'momenta':

$$\pi \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger$$

$$\pi^\dagger \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi}$$

With conmutation relations

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = [\pi^\dagger(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = -i\hbar\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

and the rest vanishes. See exam 2 particle physics for more computations.

Cálculo de integrales y divergencias

3. Preliminares

3.1. La función Γ

Definition 3.1. La función $\Gamma(z)$ de Euler está dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

En particular, la función Γ nos permite extender el factorial $\bullet! \mapsto \Gamma(\bullet)$, pues integrando por partes tenemos la **formula funcional**:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1$$

por tanto, recursivamente tenemos para $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Definition 3.2. γ es la constante de Euler-Mascheroni,

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \log \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \right] \sim 0.5772156649 \dots$$

La función Γ cumple la **formula de reflexión**:

$$\frac{\Gamma(x-n)}{\Gamma(x)} = (-1)^n \frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma(1-x+n)}$$

Así mismo, la expansión al rededor de 1 es:

$$\Gamma(1 + \varepsilon) = \exp \left(-\gamma\varepsilon + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) \varepsilon^n \right)$$

Donde $\zeta(n)$ es la función zeta de Riemann

$$\zeta(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n}$$

En particular, la función Γ posee polos en los enteros negativos y 0 i.e. $(0, -1, -2, \dots)$ sin embargo, nos interesará el comportamiento alrededor de estos puntos por tanto, usando la formula funcional y la formula anterior podemos encontrar la serie de Laurent para la función Γ alrededor de sus polos.

Por otra parte, $f(x)^\varepsilon$ se aproxima como

$$f(x)^\varepsilon = e^{\varepsilon \log f(x)} \sim 1 + \varepsilon \log f(x) + O(\varepsilon^2)$$

Example 3.0.1 (Serie de Laurent de la función Γ al rededor de el polo $x = 0$). Usando la formula funcional,

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \Gamma(1 + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} (1 - \gamma\varepsilon + O(\varepsilon^2)) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon). \quad (4)$$

3.2. Integrales

El volumen de la esfera n - dimensional (esfera unitaria) S^n , $n \in \mathbb{R}$ está dado por

$$V(n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

por tanto, el area será:

$$S(n) = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

En particular, al integrar sobre \mathbb{R}^n (similar a \mathbb{R}^3 en esféricas),

$$\int d^n x = \int_{S^{n-1}} d\Omega \int x^{n-1} dx$$

En particular, sí $n = 3$ entonces:

$$\int d^3 x = \int dx dy dz = \int_{S^2} d\Omega \int x^2 dx = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\varphi d\theta \int_0^\infty r^2 dr$$

Definition 3.3. Al integrar sobre k_0 podemos rotar el contorno de integración en un ángulo de 90° lo cual es equivalente a multiplicar por i . Por tanto, al hacer

$$\int d^4k = \int dk^0 \int d^3k \mapsto i \int dk_4 \int d^3k \equiv i \int \underbrace{(d^4k)_E}_{\text{Espacio Eucildeo}}$$

decimos que realizamos una rotación de Wick

Al realizar la rotación de Wick el producto de Minkowski se convierte en el Kronecker delta δ sobre $\mu = 1, 2, 3, 4$.

4. Motivación

Al resolver las integrales de los diagramas encontramos expresiones que dependen de el 4-vector de momento p de la forma:

$$\mathcal{M} = \int dk_1 dk_2 \dots dk_c F(p, k)$$

donde $F(p, k)$ es producto de los propagadores de momento

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \frac{P_{\alpha\beta}(k)}{m^2 - k^2 - i\epsilon}$$

En general queremos resolver integrales de la forma:

$$I(p, L) = \frac{i}{\pi^2} \int dk \prod_{l=1}^L \frac{P(k, p_l)}{m_l^2 - (k + p_l)^2 - i\epsilon} \quad (5)$$

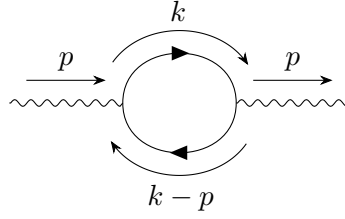
Sin embargo, en el espacio de Fourier k resulta mas sencillo resolver estas.

4.1. Divergencias ultravioleta

Las integrales que divergen para valores grandes de k se dicen divergencias ultravioletas, esto, se debe a el comportamiento de decaimiento el cual no es lo suficientemente rápido para converger por ejemplo, $1/x^2$ cae mas lento que $1/x^3$.

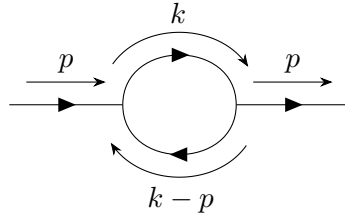
El caso mas simple que encontramos es el caso de 1-loop con p cuyo momento en la línea superior es k y en la inferior es $k - p$; la integral en este caso depende de $\Delta_F(x - y)^2$, en el espacio de momento,

$$I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dp}{(m^2 - p^2 - i\epsilon)(m^2 - (k - p)^2 - i\epsilon)}. \quad (6)$$



Donde Δ_F es el propagador de Feynman, el problema es que Δ_F no esta definida en $x=y$ por lo que tenemos que introducir una forma apropiada para que se solucione, ahí entran los operadores $\Lambda_2(x, y)$ quasi-local en el sentido que es cero para todo valor $x \neq y$ los cuales ayudan a que las integrales anteriormente mencionadas converjan Hacer uso de este operador Λ se conoce como remover las divergencias ultravioleta por renormalización.

Example 4.0.1. Consideremos el lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x) - \frac{m^2}{2}\varphi(x)^2 + \lambda\varphi(x)^3$ i.e. una teoría $\lambda\varphi^3$ En el caso mas sencillo de orden 2 tenemos el diagrama de 1-loop llamado el diagrama 'fish',



Para una teoría $\lambda : \varphi^3$: matriz de scattering será

$$S^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!} \lambda^2 \int d^4x \int d^4y T (: \varphi(x)^3 :: \varphi(y)^3 :)$$

y como vimos, la figura de 1-loop será hacer dos contracciones dando así:

$$\frac{(-i)^2}{2!} (3!\lambda)^2 \int d^4x \int d^4y \Delta_F(x-y)^2 : \varphi(x)\varphi(y) :$$

Recordando la definición del propagador de Feynman,

$$\Delta_F(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Hay un problema, el operador $\Delta_F(x-y)$ no está definido para $x = y$ pues

$$\Delta_F(x) = \frac{\delta(x^2)}{4\pi} + \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{x^2} + \frac{im^2}{8\pi^2} \log\left(\frac{m\sqrt{|x^2|}}{2}\right) - \frac{m^2}{8\pi} \theta(x^2) + \dots$$

Note que las distribuciones $\delta(x^2), x^{-2}$ son singulares

(Recuerde

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i f(x_i)=0} \frac{\delta(x - x_i)}{f'(x_i)}$$

por tanto, para $\delta(x^2)$ habrá singularidad en $x = 0$)

Por tanto, necesitamos solucionar esto! Resulta en general mas fácil ver la contribución en el espacio de momentos y por tanto, para el 1-loop tenemos

$$I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \underbrace{\frac{dp}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)}}_{\text{Momentum } p} \underbrace{\frac{dp}{(m^2 - (k-p)^2 - i\varepsilon)}}_{\text{Momentum } k-p}.$$

Definition 4.1. Analizando la forma de la integral anterior valores grandes de momento p (espectro ultravioleta),

$$I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dp}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)(m^2 - (k-p)^2 - i\varepsilon)} \sim \int \frac{dp}{p^4}$$

Calculando la integral posterior,

$$\int \frac{dp}{p^4} = \int \frac{dp_0 d^3p}{p^4} = i \int \frac{(d^4p)_E}{p^4} \sim \int_{S^3} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{p^4} \sim \log(p) \Big|_0^\infty$$

por tanto, se dice que el grado de divergencia superficial es logarítmico.

5. Regularización dimensional

En la regularización dimensional replanteamos el problema a uno mas general, cambiamos la integral 4-dimensional de momentos a una integral de dimensión $n = 4 - 2\epsilon$, $\epsilon > 0$. Nota: Cambiaremos $m^2 - i\epsilon$ por m^2 para evitar confusión.

$$\int (d^4p)_E = \underbrace{\int_{\Omega(4)} d\Omega}_{\text{Angular}} \underbrace{\int_0^\infty p^3 dp}_{\text{Radial}} \rightarrow \int d^n p \equiv \underbrace{\mu^{2\epsilon}}_{\text{Cte. Dim.}} \underbrace{\int_{\Omega(n)} d\Omega}_{\text{Angular}} \underbrace{\int_0^\infty p^{n-1} dp}_{\text{Radial}}$$

Donde $\Omega(n) = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2) \leftarrow$ Área de la esfera (n-1)-dimensional.

En particular, la constante μ se escoge de tal forma que las dimensiones de la integral sean las mismas.

La idea es "separar" los términos divergentes, ilustraremos esto mejor con un ejemplo:

Example 5.0.1. Para el caso de 1-loop tenemos la regularización dada por (Ver derivación aquí)

$$\text{reg}_\varepsilon I(k) = \int d^n p = -\left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 \frac{dx}{(m^2 - x(1-x)k^2)^\varepsilon} \quad (7)$$

Utilizando la aproximación asintótica de Γ , [4] tenemos:

$$\begin{aligned} \text{reg}_\varepsilon I(k) &= -\left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 \frac{dx}{(m^2 - x(1-x)k^2)^\varepsilon} \\ &= -\left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon)\right) \int_0^1 \frac{dx}{(m^2 - x(1-x)k^2)^\varepsilon} \\ &= -\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon)\right) \int_0^1 dx \left[1 - \varepsilon \log \left(\frac{(m^2 - x(1-x)k^2)\pi}{\mu^2}\right)\right] \\ &= -\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon)\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon)\right) \int_0^1 dx \left[\varepsilon \log \left(\frac{(m^2 - x(1-x)k^2)\pi}{\mu^2}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} + \gamma + \int_0^1 dx \log \left[\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2}\right] + \log \pi + O(\varepsilon) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{\varepsilon}}_{I_{\text{Singular}}} + \underbrace{\int_0^1 dx \varepsilon \log \left[\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2}\right]}_{I_{\text{finito}}(k, \mu)} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

Ahora bien, en la representación posición,

$$\begin{aligned} \text{reg}_\varepsilon [\Delta_F(x)^2] &= \mathcal{F} \left[\frac{i\pi^2}{(2\pi)^6} I(k) \right] = \frac{i\pi^2}{(2\pi)^6 (2\pi)^2} \int d^4 k e^{-ik \cdot x} I(k) \\ &= -\frac{i\pi^2}{(2\pi)^6 (2\pi)^2} \int d^4 k e^{-ik \cdot x} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{i\pi^2}{(2\pi)^6 (2\pi)^2} \int d^4 k e^{-ik \cdot x} I_{\text{finito}} \\ &= \frac{1}{16\pi^2 i} \frac{1}{\varepsilon} \delta(x) + \underbrace{\frac{i\pi^2}{(2\pi)^8} \int d^4 k e^{-ik \cdot x} I_{\text{finito}}}_{\tilde{\Delta}_F^2(x)} \\ &= \frac{1}{i} I_{\text{Sing}} \delta(x) + \tilde{\Delta}_F^2(x) \end{aligned}$$

Donde $\tilde{\Delta}_F^2(x)$ es un termino libre de divergencias!

Logramos entonces separar la singularidad en un termino, esto en la matriz de scattering se traduce a,

$$\frac{(-i)^2}{2!} (3!\lambda)^2 \int d^4 x \int d^4 y \Delta_F(x-y)^2 : \varphi(x) \varphi(y) : \rightarrow \frac{(-i)^2}{2!} (3!\lambda)^2 \int d^4 x \int d^4 y \text{reg}_\varepsilon [\Delta_F(x)^2] : \varphi(x) \varphi(y) :$$

Por tanto, la contribución será:

$$\begin{aligned}
S^{(2)} &= \frac{(-i)^2}{2!} (3!\lambda)^2 \int d^4x \int d^4y \text{reg}_\varepsilon [\Delta_F(x-y)^2] : \varphi(x)\varphi(y) : \\
&= \frac{(-i)^2}{2!} (3!\lambda)^2 \int d^4x \int d^4y \left(\frac{1}{i} I_{\text{Sing}} \delta(x-y) + \tilde{\Delta}_F^2(x-y) \right) : \varphi(x)\varphi(y) : \\
&= \frac{(-i)^2}{2!} (3!)^2 \int d^4x \int d^4y (-i\lambda^2 I_{\text{Sing}} \delta(x-y)) : \varphi(x)\varphi(y) : \\
&\quad + \underbrace{\frac{(-i)^2}{2!} (3!)^2 \int d^4x \int d^4y \lambda^2 \tilde{\Delta}_F^2(x-y) : \varphi(x)\varphi(y) :}_{\widetilde{S^{(2)}}} \\
&= \underbrace{(-i) \int d^4x \frac{-(3!\lambda)^2}{2!} I_{\text{Sing}} : \varphi(x)^2 :}_{\text{Termino orden 1}} + \widetilde{S^{(2)}}
\end{aligned}$$

Por tanto, para el diagrama φ^3 la serie de Dyson hasta orden 2:

$$\begin{aligned}
S^{(1)} + S^{(2)} &= \mathbf{1} + (-i) \int d^4x \underbrace{\lambda : \varphi(x)^3 :}_{-\mathcal{L}_I} + (-i) \int d^4x \underbrace{\frac{-(3!\lambda)^2}{2!} I_{\text{Sing}} : \varphi(x)^2 :}_{\Delta\mathcal{L}} + \widetilde{S^{(2)}} \\
&= \mathbf{1} + i \int d^4x [\mathcal{L}_I(x) + \Delta\mathcal{L}(x)] + \widetilde{S^{(2)}}
\end{aligned}$$

Por tanto, podemos resumir esto en la siguiente definición

Definition 5.1. Aislar la singularidad mediante la regularización dimensional genera el termino singular, este resulta ser equivalente a añadir una contribución $\Delta\mathcal{L}$. A este termino se le llama contra-termino note que el termino $\Delta\mathcal{L}$ es local pero el termino $\varphi(x)\delta(x-y)\varphi(y)$ es cuasi-local.

Example 5.0.2. Consideremos el Lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x) - \frac{m^2}{2}\varphi(x)^2 + \lambda\varphi(x)^4$ i.e. una teoría $\lambda\varphi^4$.

En esta teoría tenemos (no todos) a orden dos los siguientes diagramas:

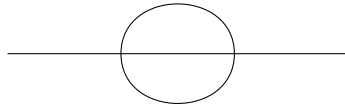


Figure 1: Diagrama 'walnut' de orden 2 en $\lambda\varphi(x)^4$

Con contribución

$$-i96\lambda^2\Delta_F(x-y)^3 : \varphi(x)\varphi(y) :$$

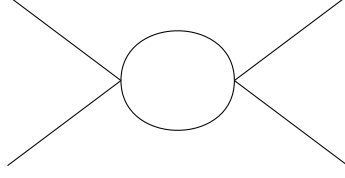


Figure 2: Diagrama 'walnut' de orden 2 en $\lambda\varphi(x)^4$

Con contribución

$$-i72\lambda^2\Delta_F(x-y)^2 : \varphi(x)^2\varphi(y)^2$$

Veamos la regularización de este.

Para regularizar el primero debemos regularizar Δ_F^3 mientras que para el segundo se regulariza Δ_F^2 .

Al regularizar el diagrama dos obtenemos el termino $A_1\delta(x-y)$ que como vimos se termina convirtiendo en un contra-término de la forma

$$\boxed{A_1\lambda^2 : \varphi(x)^4 :}$$

Pero por otra parte, al regularizar Δ_F^3 (apéndice) tenemos

$$\text{reg}_\varepsilon \Delta_F(x)^3 = -\frac{A_2}{48}\delta(x) - \frac{A_0}{48}\square\delta(x) + \widetilde{\Delta_F^3(x)}$$

Donde A_0, A_2 constantes divergentes para $\varepsilon \rightarrow 0$ y \square es el D'lambertiano en x .

Así, el primer y segundo término se convierten en los contra-términos

$$\boxed{A_2\lambda^2 : \varphi(x)^2 :} \quad \text{y} \quad \boxed{-A_0\lambda^2 : \partial_\nu\varphi(x)\partial^\nu\varphi(x)}$$

respectivamente. Note que estos términos son justamente de la forma del Lagrangiano y por tanto, esto sugiere que podemos agregar estos términos a el Lagrangiano total quedando así:

$$\mathcal{L} + \Delta\mathcal{L} = \frac{1+a_0}{2}\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x) - \frac{m^2+a_2}{2}\varphi(x)^2 + (\lambda+c)\varphi(x)^4$$

Esto, por tanto hará que se quiten las divergencias (olvidándonos de la divergencia de las constantes A_i) sin embargo, las relaciones de conmutación cambian ($\pi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}$) Para solucionar esto definimos

$$\varphi \mapsto \varphi' \equiv X\varphi, \quad m \mapsto m', \quad \lambda \mapsto \lambda'.$$

De tal forma que recuperemos el Lagrangiano de la teoría $\lambda\varphi(x)^4$ i.e.

$$1 + a_0 = X^2 = Z_1, \quad m^2 + a_2 = m'X^2 = m'Z_1, \quad \lambda + c = \lambda'X^2 = \lambda'Z_1^2$$

Así, el Lagrangiano es:

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi'(x) \partial^\mu \varphi'(x) - \frac{m'^2}{2} \varphi'(x)^2 + \lambda' \varphi'(x)^4,$$

$$\varphi = \sqrt{Z_1}^{-1} \varphi', \quad m'^2 = \frac{m^2 + a_2}{1 + a_0}, \quad \lambda' = \frac{c + \lambda}{(1 + a_0)^2}$$

Definition 5.2. De acuerdo a esto decimos que los valores m y λ son parámetros desnudos.

El anterior razonamiento nos permite realizar la siguiente proposición Un campo renormalizado es aquel donde el propagador tiene el mismo comportamiento a el campo libre cerca a sus polos y la masa renormalizada está definida por la posición del polo

Note 5.1. Algunas renormalizaciones de masas o campos no están directamente relacionadas a el problema de las divergencias pero pueden ser necesarias incluso en una teoría donde todas las integrales del espacio de momento son convergentes.

5.1. Calculo de integrales

Comenzamos primero calculando las integrales para el caso $n = 4$ y extrapolamos para el caso general (n arbitrario)

Algunas veces cuando se tiene integrales sobre dos variables x, y alguna de las integrales

$$\int dx \int dy \quad \text{o} \quad \int dy \int dx$$

resulta mas fácil de integrar. Por tanto, resulta una herramienta importante expresar funciones en forma de operadores integrales.

$$f(k) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon} = i \int_0^\infty e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\epsilon)} d\alpha$$

En el caso de la expresión de la derecha decimos que la función $f(k)$ está en la **representación** α .

Definition 5.3. La integral de cuadratura Gaussiana es:

$$\frac{i}{\pi^2} \int e^{i(ak^2+2bk)} dk = \frac{1}{a^2} \cdot e^{-ib^2/a}$$

Donde a es una constante, b un 4-vector.

Proof.

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int e^{i(-at^2+2bt)} dt && \left| \text{Completando el cuadrado} \right. \\ &= \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{ib^2/a} \int e^{-ax^2} dx = \left(\frac{\pi}{ai} \right)^{1/2} e^{\frac{ib^2}{a}} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{i}{\pi^2} \int e^{i(ak^2+2bk)} dk &= \int e^{i(ak_0^2+2b_0k_0)} dk_0 \prod_{i=1}^n \int e^{-i(ak_i^2+2b_ik_i)} dk_i \\ &= I(-a, b_0) I(a, b_1) I(a, b_2) I(a, b_3) = \frac{\pi^2}{ia^2} e^{\frac{b_0^2-b_1^2-b_2^2-b_3^2}{ia}} \end{aligned}$$

■

Similarmente derivando la expresión respecto a β tenemos los siguientes resultados

$$\begin{aligned} \frac{i}{\pi^2} \int e^{i(ak^2+2bk)} [k^v] dk &= \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a} \left[-\frac{b^v}{a} \right] \\ \frac{i}{\pi^2} \int e^{i(ak^2+2bk)} [k^v k^\mu] dk &= \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a} \left[\frac{2b^v b^\mu + iag^{v\mu}}{2a^2} \right] \\ \frac{i}{\pi^2} \int e^{i(ak^2+2bk)} [k^2] dk &= \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a} \left[\frac{b^2 + 2ia}{a^2} \right] \end{aligned}$$

Feynman realizó un método para resolver estas las integrales de tipo [5] llamada parametrización de Feynman donde se encuentra (Click aquí, aun no está acabado) que las integrales resultan ser una combinación lineal de integrales de la forma:

$$\int \frac{dq}{(q^2 - D + i\epsilon)^l}, \quad 3 \leq l \leq$$

y

$$\int \frac{dq}{(q^2 - D + i\epsilon)^l}, \quad l \leq 2$$

donde

$$D(x, p) = (\sum x_l p_l)^2 + \sum x_l (m_l^2 - p_l^2).$$

Sin embargo, la primera si se puede resolver pero la segunda no existe!

[Feynman trick] Similar a la representación α , podemos escribir

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_L} = \Gamma(L) \int_0^1 \frac{d^L x}{\left(\sum_{l=1}^L a_l x_l\right)^L}$$

donde $\sum_l x_l = 1$

Proof. ■

Por tanto, usando $a_i = (k + p_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon$ en [5] tenemos

$$\begin{aligned} I_L(p; L) &= (-1)^L (L-1)! \int_0^1 d^L x J_L(p, x) = (-1)^L (L-1)! \int_0^1 d^L x \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dk P(k, p)}{[Z(p, k, x)]^L} \\ &= (-1)^L (L-1)! \int_0^1 d^L x \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dk P(k, p)}{\left[\sum_l x_l \left[(k + p_l)^2 - m_l^2 + i\epsilon\right]\right]^L} \\ &= (-1)^L (L-1)! \int_0^1 d^L x \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dk P(k, p)}{\underbrace{[(k + b)^2 - D + i\epsilon]}_q^L} \end{aligned}$$

Con $D(x, p) = (\sum x_l p_l)^2 + \sum x_l (m_l^2 - p_l^2)$, $\sum_l x_l = 1$

por tanto, reparametrizando,

$$J_L(p, x) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq P(q - b, p)}{(q^2 - D + i\epsilon)^L}$$

En general las integrales se pueden expresar como combinación lineal de integrales de la forma

$$\tilde{J}_l(p, x) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq}{(q^2 - D + i\epsilon)^l}, \quad 3 \leq l \leq L \quad (8)$$

las cuales al revisar la divergencia superficial notamos que no tienen divergencias (notación con tilde).

Example 5.1.1. El caso \tilde{J}_3 .

$$\begin{aligned}\tilde{J}_3 &= \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^4 q}{(q^2 - D + i\varepsilon)^3} = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq_0 dq}{(q_0^2 - q^2 - D + i\varepsilon)^3} = \frac{-i}{\pi^2} \int \frac{dq_0 dq}{(-q_4^2 - q^2 - D + i\varepsilon)^3} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int \frac{(dq)_E}{(q_E^2 + D)^3} = \frac{1}{\pi^2} \int_{S^3} \int_0^\infty \frac{q^{3-1} dq}{(q^2 + D)^3} = \frac{1}{\pi^2} \frac{2\pi^{4/2}}{\Gamma(4/2)} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{u du}{(u + D)^3} = \frac{1}{2D}\end{aligned}$$

Note que para \tilde{J}_3 si derivamos respecto a D tenemos ($l \geq 3$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{J}_3(p, x; D)}{\partial D} &= (-3)(-1) \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^4 q}{(q^2 - D + i\varepsilon)^4} = -\frac{1}{2D^2} \implies \tilde{J}_4 = \frac{(-1)^3}{3 \cdot 2 \cdot D^2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{J}_3(p, x; D)}{\partial D^2} &= (-3)(-4)(-1)^2 \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^4 q}{(q^2 - D + i\varepsilon)^5} = (-1)(-2) \frac{1}{2D^3} \implies \tilde{J}_5 = \frac{(-1)^6}{3 \cdot 4 \cdot D^3}\end{aligned}$$

Y en general (inducción)

$$\tilde{J}_L(p, x) = \frac{(-1)^{L+1}}{(L-1)(L-2)} \frac{1}{D^{L-2}}$$

Así,

$$\tilde{I}_L(p) = -(L-3)! \int \frac{d^L x}{[D + i\varepsilon]^{L-2}}$$

Veamos estas integrales en el caso n dimensional para poder realizar la regularización dimensional, finalmente procedemos a demostrar el calculo de [7].

Similarmente a la demostración de la cuadratura Gaussiana para el caso n dimensional tenemos:

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^n p e^{i(ap^2 + 2bp)} = \left(\frac{ia\mu^2}{\pi} \right)^\varepsilon \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a}$$

Proof. $n = 4 - 2\varepsilon$

$$I(a, b) = \int e^{i(-at^2 + 2bt)} dt = \left(\frac{\pi}{ai} \right)^{1/2} e^{\frac{ib^2}{a}}$$

$$I(-a, b_0) I(a, b_1) \dots I(a, b_{n-1}) = i \left(\frac{\pi}{ai} \right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{i(b_0^2 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i^2)}{a}} = i \left(\frac{\pi}{ai} \right)^{2-\varepsilon} e^{-ib^2/a}$$

Por otra parte, introduciendo la constante de dimensionalidad μ y usando el resultado anterior tenemos

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^n p e^{i(ap^2 + 2bp)} = \frac{i^2}{\pi^2} \mu^{2\varepsilon} \left(\frac{\pi}{ai} \right)^{2-\varepsilon} e^{-ib^2/a} = \left(\frac{\mu^2 ai}{\pi} \right)^\varepsilon \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a}$$

■

Retomando la expresión integral de \tilde{J}_l tenemos

$$\text{reg}_\epsilon J_l(D) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^n p}{(p^2 - D)^l}$$

Similarmente a el caso \tilde{J}_3 podemos encontrar la expresión general bajo la regularización dimensional

$$\text{reg}_\epsilon J_l(D) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^n p}{(p^2 - D)^l} = \left(\frac{\mu^2}{\pi} \right)^\epsilon \frac{(-1)^{l+1} \Gamma(l + \epsilon - 2)}{D^{l+\epsilon-2} \Gamma(l)}$$

Veamos ahora la integral de 1-loop.

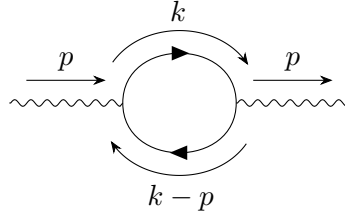
$$\begin{aligned} \text{reg}_\epsilon I(k) &= \frac{i\mu^{2\epsilon}}{\pi^2} \int \frac{d^n p}{(m^2 - p^2)(m^2 - (p - k)^2)} \\ &= \frac{i\mu^{2\epsilon}}{\pi^2} \int d^n p \left(i \int_0^\infty e^{i\alpha(p^2 - m^2)} d\alpha \right) \left(i \int_0^\infty e^{i\beta((p-k)^2 - m^2)} d\beta \right) \quad \left| \text{Rep. } \alpha, \beta \right. \\ &= \frac{i^3 \mu^{2\epsilon}}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha d\beta e^{i\beta k^2 - i(\alpha+\beta)m^2} \underbrace{\int d^n p e^{i(\alpha+\beta)p^2 - 2i\beta pk}}_{\left[\frac{i(\alpha+\beta)\mu^2}{\pi} \right]^\epsilon \frac{1}{(\alpha+\beta)^2} e^{-i\frac{\beta^2 k^2}{\alpha+\beta}}} \\ &= - \left(\frac{i\mu^2}{\pi} \right)^\epsilon \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{(\alpha + \beta)^{2-\epsilon}} e^{i\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} k^2 - i(\alpha + \beta)m^2} \\ &= - \left(\frac{i\mu^2}{\pi} \right)^\epsilon \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{da}{a^{1-\epsilon}} e^{-iaZ(x, k^2)} \end{aligned}$$

Y así, usando la integral [??] del apéndice tenemos ($L = \epsilon + 2$):

$$\text{reg}_\epsilon I(k) = - \left(\frac{\mu^2}{\pi} \right)^\epsilon \Gamma(\epsilon) \int_0^1 \frac{dx}{[m^2 - x(1-x)k^2]^\epsilon}$$

5.2. 1-loop en QED

One-particle-irreducible graphs. Una vez mas veremos el caso mas sencillo de 1-loop. En QED es el caso de auto-energía del fotón. El método mas conveniente de calcular este es mediante la regularización dimensional pues cutoff haría que el fotón adquiriera masa por lo que violaría la gauge-invariance. t'Hooft y Veltman en 1972 realizaron esta.



Cuya contribución es de tipo

$$- \text{tr} [S(y-x)\gamma^\rho S(x-y)\gamma^\sigma] : A_\rho(x)A_\sigma(y) :$$

En particular tenemos

$$- \int d^4p \text{Tr} \left[\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} - \not{q} + m}{(p-q)^2 + m^2} i e \gamma^\rho \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 + m^2} i e \gamma^\sigma \right]$$

$$\Pi^{*\rho\sigma}(q) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\text{Tr} [(\not{p} + m)\gamma^\rho(\not{p} - \not{q} + m)\gamma^\sigma]}{(p^2 + m^2)((p-q)^2 + m^2)}$$

Usando el Feynman trick, tenemos:

$$\begin{aligned} [(p^2 + m^2)((p-q)^2 + m^2)]^{-1} &= \int_0^1 [(p^2 + m^2)(1-x) + ((p-q)^2 + m^2)x]^{-2} \\ &= \int_0^1 [p^2 + m^2 - 2p \cdot qx + q^2x]^{-2} dx \\ &= \int_0^1 [(p-qx)^2 + m^2 + q^2x(1-x)]^{-2} dx \end{aligned}$$

Cambiando la integración de $p \rightarrow p + qx$,

$$\Pi^{*\rho\sigma}(q) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^4p \frac{\text{Tr} [(\not{p} + \not{q}x + m)\gamma^\rho(\not{p} - \not{q}(1-x) + m)\gamma^\sigma]}{[p^2 + m^2 + q^2x(1-x)]^2}$$

Calculemos la traza.

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} [(\not{p} + \not{q}x + m)\gamma^\rho(\not{p} - \not{q}(1-x) + m)\gamma^\sigma] \\
&= \text{Tr} [(\not{p} + \not{q}x)\gamma^\rho(\not{p} - \not{q}(1-x))\gamma^\sigma + (\not{p} + \not{q}x)\gamma^\rho(m)\gamma^\sigma + (m)\gamma^\rho(\not{p} - \not{q}(1-x))\gamma^\sigma + m^2\eta^{\rho\sigma}] \\
&= \text{Tr}[(p+qx)_\alpha(p-q(1-x))_\beta \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta \gamma^\sigma + (p+qx)_\alpha \underbrace{\gamma^\alpha \gamma^\rho (m) \gamma^\sigma}_{\# \text{ impar de } \gamma} + (m)(p-q(1-x))_\alpha \underbrace{\gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\sigma}_{\# \text{ impar de } \gamma} + m^2\eta^{\rho\sigma}] \\
&= 4[(p+qx)^\alpha(p-q(1-x))_\beta (\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma} - \eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma} + \eta^{\alpha\sigma}\eta^{\rho\beta}) + m^2\eta^{\rho\sigma}] \\
&= 4[(p+qx)^\rho(p-q(1-x))^\sigma - (p+qx) \cdot (p-q(1-x))\eta^{\rho\sigma} + (p+qx)^\sigma(p-q(1-x))^\rho + m^2\eta^{\rho\sigma}] \\
&= 4[p^\rho p^\sigma - q^\rho q^\sigma x(1-x) - p^\rho q^\sigma(1-x) + q^\rho p^\sigma x - (p^2 + q \cdot px - p \cdot q(1-x) + q^2 x(1-x))\eta^{\rho\sigma} \\
&\quad + p^\sigma p^\rho - q^\sigma q^\rho x(1-x) - p^\sigma q^\rho(1-x) + q^\sigma p^\rho x + m^2\eta^{\sigma\rho}] \\
&:= \text{TR}
\end{aligned}$$

Realizando la rotación de Wick

$$\Pi^{*\rho\sigma}(q) = \frac{4e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int (d^4 p)_E \frac{\text{TR}}{[p^2 + m^2 + q^2 x(1-x)]^2}$$

Realizando la regularización dimensional y recordando que para números impares de p^μ la integral es 0 y para números pares tenemos las identidades del apéndice,

$$\begin{aligned}
\Pi^{*\rho\sigma}(q) &= \\
&= \frac{4e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_{S^d} d\Omega \int p^{d-1} dp \frac{\left[\frac{2p^2\eta^{\rho\sigma}}{d} - 2q^\rho q^\sigma x(1-x) - (p^2 + q^2 x(1-x))\eta^{\rho\sigma} + m^2\eta^{\rho\sigma} \right]}{[p^2 + m^2 + q^2 x(1-x)]^2}
\end{aligned}$$

Usando la integral del apéndice [10] con $\nu^2 = m^2 + q^2 x(1-x)$,

$$\begin{aligned}
\Pi^{*\rho\sigma}(q) &= \\
&= \frac{2e^2\Omega(d)}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left[\left(1 - \frac{2}{d}\right) \eta^{\rho\sigma} (m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-1} \Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \right] \\
&+ \left[(2q^\rho q^\sigma x(1-x) - q^2 \eta^{\rho\sigma} x(1-x) + m^2 \eta^{\rho\sigma}) (m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \right] \\
&= \frac{2e^2\Omega(d)}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left[-\eta^{\rho\sigma} (m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-1} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \right] \\
&+ \left[(2q^\rho q^\sigma x(1-x) - q^2 \eta^{\rho\sigma} x(1-x) + m^2 \eta^{\rho\sigma}) (m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \right] \\
&= \frac{2e^2\Omega(d)}{(2\pi)^4} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx (m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} [2q^\rho q^\sigma x(1-x) - 2q^2 \eta^{\rho\sigma} x(1-x)] \\
&= \frac{2e^2\Omega(d)}{(2\pi)^4} [2q^\rho q^\sigma - 2q^2 \eta^{\rho\sigma}] \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x(1-x) (m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-2}
\end{aligned}$$

Encontramos en este que la singularidad está en

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)$$

cuando $d = 4$. Por otra parte, la parte del Lagrangiano \mathcal{L}_{EM} tiene contribución

$$\Pi_{\mathcal{L}_{EM}}^{*\rho\sigma} = -(Z_3 - 1)(q^2 \eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)$$

, así, la contribución total será de la forma

$$\Pi^{*\rho\sigma} = (q^2 \eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \pi(q^2)$$

,

$$\pi(q^2) = -\frac{4e^2\Omega(d)}{(2\pi)^4} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x(1-x) (m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} - (Z_3 - 1)$$

Ahora bien, para que el residuo del polo del propagador sea el mismo se necesita $\pi(0) = 0$ por tanto,

$$Z_3 = 1 - \frac{4e^2\Omega(d)}{(2\pi)^4} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x(1-x) (m^2)^{\frac{d}{2}-2}$$

Y así,

$$\pi(q^2) = -\frac{4e^2\Omega(d)}{(2\pi)^4} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x(1-x) \left[(m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} - (m^2)^{\frac{d}{2}-2} \right]$$

Usando la aproximación de Γ para $d \rightarrow 4$.

$$\begin{aligned} Z_3 - 1 &= -\frac{4e^2\Omega(4)}{(2\pi)^4}\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{1}{2-d/2}-\gamma\right)\int_0^1 dx x(1-x)(m^2)^{\frac{4}{2}-2} \\ &= -\frac{4e^2 2\pi^2}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{2-d/2}-\gamma\right)\frac{1}{6} = \frac{e^2}{6\pi^2}\left(\frac{1}{d-1}\right) + \gamma\frac{e^2 2}{3\pi^2} \end{aligned}$$

Note en este caso que no usamos la definición de $\mu^{2\varepsilon}$ pues el papel que juega la constante e^2 es justamente este, las dimensiones son $[Masa]^{4-d} = [Masa]^{2\varepsilon}$.

5.3. Regularización dimensional: Cutoff (Frecuencia de corte)

La idea mas intuitiva es realizar un corte o un limite superior de frecuencias sobre las cuales se integran con el propósito de evitar la divergencia ultravioleta. Es intuitiva en el sentido en que a medida que la frecuencia aumenta hay menos interacciones y por tanto, en algún punto (Λ) no afectará a nuestro calculo.

6. Propiedades matemáticas del espacio D -dimensional

A grandes rasgos el espacio de D dimensiones es una generalización directa de el espació de Minkowski 4-dimensional sin embargo, hay ciertos detalles que resultan importantes. Como vimos, en primer lugar el espacio D en general no es un entero por lo que la idea básica de calculo no es formalmente valida.

Desde el punto de vista matemático para formalizar este razonamiento realizamos el uso de una rama del análisis llamada análisis funcional (teoría espectral)

6.1. Cálculo fraccional

En ocasiones necesitaremos realizar derivadas l - esimas donde $l \in \mathbb{R}$. Para ello usamos her-
rmientas de el analisis funciönal llamada "Fractional calculus" que nos permite generalizar los operadores integrales y diferenciales para valores reales.

$$\frac{d^l x^k}{dx^l} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)} x^{k-a}, \quad k \leq 0.$$

Example 6.0.1 (Media derivada).

$$\begin{aligned}\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)}x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}} \\ \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{2\frac{\sqrt{\pi}}{2}x^0}{\sqrt{\pi}} = 1.\end{aligned}$$

Por tanto, aplicar dos veces la media derivada coincide con aplicar la derivada. En general $D^l \circ D^m = D^{l+m}$, $l, m \in \mathbb{R}$.

6.2. Integrales

Las integrales sobre el espacio D poseen las mismas propiedades del espacio de Minkowski 4 dimensional. En particular, la invarianza de Lorentz,

$$\int d^4p f(\Lambda p) = \int d^4p f(p) \mapsto \int d^Dp f(\Lambda' p) = \int d^Dp f(p)$$

Donde Λ' estará en el grupo $SO(1, n-1)$. Dada la generalización de este espacio decimos entonces que la métrica pasa a ser $\text{diag}(+1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{(d-1)\text{-veces}})$

Como vimos en la regularización,

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^m p e^{i(ap^2 + 2bp)} = \left(\frac{\mu^2 a i}{\pi} \right)^\epsilon \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a}$$

por tanto, la integral Gaussiana αp^2 será ($b=0, a=i\alpha$)

$$\int \underbrace{\mu^D d^D p}_{\text{Medida normalizada}} e^{\alpha p^2} = i \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{D}{2}}$$

Por tanto, la integral Gaussiana con D en los naturales.

Así, la integral $l \in \mathbb{R}$

$$\int f(p) d^l p$$

Tiene sentido viendo la medida $d^l p$ como una medida de un espacio infinito dimensional V tal que $d^l p$ es la extension de la medida $d^n p$, $n \in \mathbb{N}$ i.e. las dos medidas coinciden en $l \in \mathbb{N}$.

Convertir el espacio de 4 dimensiones en uno de D también supone un problema en el espacio visto como espacio vectorial. En cualquier caso se asume

$$(\mathbb{R}^{1,D-1}) = V_{(4)} \oplus \underbrace{V_{(D-4)}}_{V_{(4)}^\perp}$$

por tanto, $k^\mu = k_{(4)}^\mu + k_{(D-4)}^\mu$. Claramente, las partículas no observadas, es decir, las partículas de los loops deben tener momento en el espacio completo (Esa es toda la idea de la regularización dimensional) pero ¿que pasa con los momentos de las partículas observadas o las polarizaciones?

6.3. El álgebra de Dirac

Es claro que al variar la dimensionalidad del espacio debemos observar que sucede con el álgebra de Clifford de este, para ello existen diferentes esquemas.

Muchas veces queremos calcular $\gamma_\mu \gamma^\nu$, ¿como resulta esto en el caso d dimensional? Para el caso $d = 4$,

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = \eta_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu} + \eta_{\nu\mu} \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 4I_4$$

En principio podemos plantear diferentes esquemas con diferentes convenciones para el caso general, CDR, HV, FD.

$$\gamma_\nu \gamma^\nu = \begin{cases} D \cdot I_D & \text{Esquema CDR y HV} \\ 4 \cdot I_D & \text{Esquema FD} \end{cases}$$

La diferencia entre estos esquemas resulta en que el esquema **CDR (convencional de regularización dimensional)** se propone que todos los momentos y todas las polarizaciones están en el espacio completo; el **esquema de t'Hooft-Veltman (HV)** propone que las partículas observadas tienen momento y helicidad en el espacio $V_{(4)}$ mientras que las partículas no observadas (las que aparecen en los loops) tienen momento y helicidad en el espacio completo y el **esquema de helicidad 4-dimensional (FD)** plantea que toda polarización está en $V_{(4)}$ pero los momentos de las partículas no observadas están en el espacio completo.

7. Apendice

7.1. Identidades de la función Gamma

$$\left(1 - \frac{2}{d}\right) \Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) = -\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)$$

7.2. Integrales

$$\int_0^\infty e^{iA(-D)+i\varepsilon} A^{L-3} dA = -\frac{\Gamma(L-2)}{i^L(D-i\varepsilon)^{L-2}}, \quad L \geq 2 \quad (9)$$

Directa de la derivada de la integral cuadratura Gaussiana y derivar $L-2$ veces.

$$\int_0^\infty \frac{p^{d-1}}{(p^2 + \nu^2)^2} dp = \frac{1}{2} (\nu^2)^{\frac{d}{2}-2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \quad (10)$$

7.2.1. Integrales n dimensiones

$$\int q^\nu q^\mu F(q^2) dq = \frac{1}{4} g^{\nu\mu} \int q^2 F(q^2) dq$$

$$\int q^\nu q^\mu q^\rho q^\sigma F(q^2) dq = \frac{1}{24} (g^{\nu\mu} g^{\rho\sigma} + g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho}) \int (q^2)^2 F(q^2) dq$$

En d dimensiones tenemos:

$$p^\mu p^\nu \rightarrow \frac{1}{d} p^2 \eta^{\mu\nu}$$

$$p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma \rightarrow \frac{1}{d(d+2)} (p^2)^2 [\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}] \eta^{\mu\nu}$$

7.3. Trazas

Para productos pares de γ la traza es:

$$\text{Tr}\{\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2N}}\} = 4 \sum_{\text{Pairings}} \delta_P \prod_{\text{Pares}} \eta_{\text{Paired } \mu_s}$$

Pues

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = -\text{Tr}\{\gamma_\nu \gamma_\mu\} + 2\text{Tr}\{\eta_{\mu\nu}\} = -\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} + 8\eta_{\mu\nu}$$

En particular tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} &= 4\eta_{\mu\nu} \\ \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma\} &= 4[\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}] \\ \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\kappa \gamma_\eta\} &= 4[\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \eta_{\kappa\eta} - (\sigma \leftrightarrow \kappa) + (\sigma \leftrightarrow \eta) - (\nu \leftrightarrow \rho) \\ &+ (\nu \leftrightarrow \rho, (\sigma \leftrightarrow \kappa)) - (\rho \leftrightarrow \nu, (\sigma \leftrightarrow \eta)) + (\sigma \leftrightarrow \nu) - (\sigma \leftrightarrow \nu, (\sigma \leftrightarrow \kappa)) + \dots] \end{aligned}$$

Para productos impares de γ la traza es 0.

8. Notes

Hola es una prueba

Part II

QFT II

Part III

QFT III

Part IV

ELECTRODYNAMICS

Part V

BLACK HOLE INFORMATION THEORY

Part VI

SOLITONS, INSTANTONS AND TWISTORS