Representaciónes irreducibles del grupo de Poincaré

Rafael Córdoba Lopez

Universidad de los Andes

24 de julio de 2025

Logo-Andes-gelb.

Tabla de contenidos

Logo-Andes-gelb.

Simetrías!

Los grupos actúan sobre un conjunto $\implies$ **simetrias**

Logo-Andes-gelb.

Simetrías!

Los grupos actúan sobre un conjunto $\implies$ **simetrias**

1. Cristales

Logo-Andes-gelb.

Simetrías!

Los grupos actúan sobre un conjunto $\implies$ **simetrias**

1. Cristales
2. Invariantes $\implies$ Teorema de Noether

Logo-Andes-gelb.

Simetrías!

Los grupos actúan sobre un conjunto $\implies$ **simetrias**

1. Cristales
2. Invariantes $\implies$ Teorema de Noether
3. Mecanica cuántica

Logo-Andes-gelb.

Simetrías!

Los grupos actúan sobre un conjunto $\implies$ **simetrias**

1. Cristales
2. Invariantes $\implies$ Teorema de Noether
3. Mecanica cuántica
4. Relatividad

Logo-Andes-gelb

Simetrías!

Los grupos actúan sobre un conjunto $\implies$ **simetrias**

1. Cristales
2. Invariantes $\implies$ Teorema de Noether
3. Mecanica cuántica
4. Relatividad
5. Partículas elementales

Logo-Andes-gelb.

Simetrías!

Los grupos actúan sobre un conjunto $\implies$ **simetrias**

1. Cristales
2. Invariantes $\implies$ Teorema de Noether
3. Mecanica cuántica
4. **Relatividad**
5. **Partículas elementales**

Logo-Andes-gelb.

El espacio tiempo de Minkowski

Un evento bajo un sistema de referencia **inercial** tiene como coordenadas:

$$\mathbf{X}^{\mu} \equiv \mathbf{X} = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (ct, \vec{x})$$

Logo-Andes-gelb.

El espacio tiempo de Minkowski

Un evento bajo un sistema de referencia **inercial** tiene como coordenadas:

$$\mathbf{X}^{\mu} \equiv \mathbf{X} = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (ct, \vec{x})$$

Definición

El **Espacio-tiempo de Minkowski** es una variedad cuatro dimensional con metrica $g = diag(-1, 1, 1, 1)$ con $(\Delta s)^2 = g_{\mu\nu} X^{\mu} X_{\nu}$

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 = ||X|| \tag{1}$$

En cualquier sistema de referencia intercial $\mathbf{X}'$.

Logo-Andes-gelb.

¿Como se relaciona **X** con **X**′?

Definición

Las transformaciónes lineales Λ que preservan (**??**) forman el **grupo de Lorentz** $\mathcal{L}$. i.e Si $\Lambda \in \mathcal{L}$

$$X' = \Lambda X \implies (\Delta s)^2 = (\Delta s')^2$$

Λ tambien es llamada boost de Lorentz.

Logo-Andes-gelb.

El grupo de Poincaré

Definición

El **grupo de Poincaré** $\mathcal{P}$ son todas las isometrías del espacio-tiempo de Minkowski i.e. $\mathcal{L}$ $+$ traslaciónes.
Tenemos entonces que $g \in \mathcal{P}$ es tal que:

$$X' = g \cdot X = \Lambda X + A, \qquad \Lambda \in \mathcal{L}, A \in \mathbb{R}^4$$

El grupo de Poincaré

Definición

El **grupo de Poincaré** $\mathcal{P}$ son todas las isometrías del espacio-tiempo de Minkowski i.e. $\mathcal{L}$ + traslaciónes.
Tenemos entonces que $g \in \mathcal{P}$ es tal que:

$$X' = g \cdot X = \Lambda X + A, \qquad \Lambda \in \mathcal{L}, A \in \mathbb{R}^4$$

Equivalentemente, el espacio 'físico' admisible es:

$$\mathcal{P} = \left\{ (\Lambda, a) | \Lambda \in L_+^\uparrow, a \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

con la regla de multiplicación:

$$\left(\Lambda', a'\right) \cdot (\Lambda, a) = \left(\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a'\right), \quad \Lambda, \Lambda' \in L_+^\uparrow, A \in \mathbb{R}^4$$

des-gelb

Representaciónes

Definición

Sea G un grupo, una **representación** del grupo G en el espacio vectorial V es un homomorfismo $D : G \to GL(V)$.

- $\forall a, b \in G \quad D(a)D(g) = D(ag)$

Consideraremos el caso $V \simeq \mathbb{C}^n$

Logo-Andes-gelb.

Representaciónes

Definición

Sea G un grupo, una **representación** del grupo G en el espacio vectorial V es un homomorfismo $D : G \to GL(V)$.

- $\forall a, b \in G \quad D(a)D(g) = D(ag)$

Consideraremos el caso $V \simeq \mathbb{C}^n$

Una representación D de G sobre V es **unitaria** si V tiene un producto interno hermitico tal que:

$$\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = \langle D(g)(\mathbf{v})|D(g)(\mathbf{w})\rangle, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, g \in G$$

Logo-Andes-gelb.

Representaciónes

Definición

Sea G un grupo, una **representación** del grupo G en el espacio vectorial V es un homomorfismo $D : G \to GL(V)$.

- $\forall a, b \in G \quad D(a)D(g) = D(ag)$

Consideraremos el caso $V \simeq \mathbb{C}^n$

Una representación D de G sobre V es **unitaria** si V tiene un producto interno hermitico tal que:

$$\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = \langle D(g)(\mathbf{v}) | D(g)(\mathbf{w}) \rangle, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, g \in G$$

La representación D sobre W es **irreducible** si sus unicos espacios invariantes son W y $\{0\}$

¿Por que usar una representación?

El grupo Dihedral $D_8 \iff$ Símetrias del cuadrado
Representación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Por que usar una representación?

El grupo Dihedral $D_8 \iff$ Símetrias del cuadrado
Representación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trabajamos con matrices!

Logo-Andes-gelb.

El concepto de partícula de Wigner

¿Como clasificar las particulas elementales?
Modelo de Wigner (1931):

> 'Teoría de grupos y su aplicaciónes a la mecanica cuantica de espectros atomicos'

Mecanica cuantica + Relatividad especial.

Logo-Andes-gelb.

El concepto de partícula de Wigner

¿Como clasificar las particulas elementales?
Modelo de Wigner (1931):

'Teoría de grupos y su aplicaciónes a la mecanica cuantica de espectros atomicos'

Mecanica cuantica + Relatividad especial.

1. **Diferenciar** partículas $\Longrightarrow$ grupos

Logo-Andes-gelb.

El concepto de partícula de Wigner

¿Como clasificar las particulas elementales?
Modelo de Wigner (1931):

'Teoría de grupos y su aplicaciónes a la mecanica cuantica de espectros atomicos'

Mecanica cuantica + Relatividad especial.

1. **Diferenciar** partículas $\Longrightarrow$ grupos
2. Partículas **elementales** $\Longrightarrow$ Irreducibilidad

Logo-Andes-gelb.

El teorema de Wigner

Teorema

En el espacio de Hilbert del sistema de particulas cualquier transformación de simetría S de un estado Ψ se puede representar en el espació de Hilbert de estados por un operador lineal y unitario ó antilineal y antiunitario.

Logo-Andes-gelb.

El teorema de Wigner

Teorema

En el espacio de Hilbert del sistema de particulas cualquier transformación de simetría S de un estado Ψ se puede representar en el espació de Hilbert de estados por un operador lineal y unitario ó antilineal y antiunitario.

1. Cualquier partícula es una representación irreducible de $\mathcal{G}$

Logo-Andes-gelb.

El teorema de Wigner

Teorema

En el espacio de Hilbert del sistema de particulas cualquier transformación de simetría S de un estado Ψ se puede representar en el espació de Hilbert de estados por un operador lineal y unitario ó antilineal y antiunitario.

1. Cualquier partícula es una representación irreducible de $\mathcal{G}$
2. El grupo $\mathcal{G}$ es $s\ell(2,\mathbb{C})\circledS\mathbb{R}^{1,3} := s\ell(2,\mathbb{C}) \rtimes$ *translaciones*

Logo-Andes-gelb.

El teorema de Wigner

Teorema

En el espacio de Hilbert del sistema de particulas cualquier transformación de simetría S de un estado Ψ se puede representar en el espació de Hilbert de estados por un operador lineal y unitario ó antilineal y antiunitario.

1. Cualquier partícula es una representación irreducible de $\mathcal{G}$
2. El grupo $\mathcal{G}$ es $s\ell(2,\mathbb{C})\circledS\mathbb{R}^{1,3} := s\ell(2,\mathbb{C}) \rtimes$ *translaciones*
3. Las irreps se parametrizan por $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ y $m \geq 0$

Las partículas se definen por dos parametros! Spin s y masa m!

Representación del grupo de Lorentz I

Veamos la relación de $s\ell(2,\mathbb{C})$ con el grupo de Lorentz.

$$X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + \mathrm{i}x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \text{ representa } \tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Note: $\det X = (\Delta s)^2$.
Si definimos:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos $X = x_0 e + x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$

Logo-Andes-gelb

Representación del grupo de Lorentz II

- Si $M \in s\ell(2,\mathbb{C})$ entonces $||MXM^{*}|| = (detM)^{2}||X|| = ||X||$

Logo-Andes-gelb.

Representación del grupo de Lorentz II

- Si $M \in s\ell(2, \mathbb{C})$ entonces $||MXM^*|| = (detM)^2||X|| = ||X||$
- $\phi : s\ell(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}$ representa una transformación de Lorentz.

Representación del grupo de Lorentz II

- Si $M \in s\ell(2, \mathbb{C})$ entonces $||MXM^*|| = (detM)^2||X|| = ||X||$
- $\phi : s\ell(2, \mathbb{C}) \to \mathcal{L}$ representa una transformación de Lorentz.
- Note $\phi(M) = \phi(-M)$ Por tanto, la representación no es $1 - 1$

Logo-Andes-gelb.

Representación del grupo de Lorentz II

- Si $M \in s\ell(2,\mathbb{C})$ entonces $||MXM^*|| = (detM)^2||X|| = ||X||$
- $\phi : s\ell(2,\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}$ representa una transformación de Lorentz.
- Note $\phi(M) = \phi(-M)$ Por tanto, la representación no es $1-1$
- $s\ell(2,\mathbb{C})$ es un grupo continuo con $det > 0$.

Logo-Andes-gelb.

Representación del grupo de Lorentz II

- Si $M \in s\ell(2,\mathbb{C})$ entonces $||MXM^*|| = (detM)^2||X|| = ||X||$
- $\phi : s\ell(2,\mathbb{C}) \to \mathcal{L}$ representa una transformación de Lorentz.
- Note $\phi(M) = \phi(-M)$ Por tanto, la representación no es $1-1$
- $s\ell(2,\mathbb{C})$ es un grupo continuo con $det > 0$.
- det Λ puede ser negativo $\implies L_+^\uparrow$ es espacio físicamente admisible.

Logo-Andes-gelb.

Simetrías, carga, color, etc.

Grupo de Poincaré $\implies$ Spin s y masa m.
Simetrias internas:

- Carga electrica
- Carga de color $\implies$ irreps $SU(3)$
- isospin $\implies$ irreps $SU(2)$
- Extrañeza

Logo-Andes-gelb

Bibliografía I

Y. Ohnuki
Unitary representations of the Poincaré group and relativistic wave equations
Nagoya University, 1988.

B. Simon
Representations of finite and compact groups
AMS, 1996.

S. Sternberg
Group theory and physics
Cambridge University press, 1994.

Logo-Andes-gelb.

Bibliografía II

S. Mitchell
Why representation theory?
https://sites.math.washington.edu/ mitchell/Algf/whyrep.pdf, 2014.