An explicit proof of T_2 in a Hilbertspace given the Weak topology. - 202110

Rafael F. Córdoba L.

26 de febrero de 2021

Proposition 1. *El conjunto* $\ell^2 = \{x \in \mathbb{R}^\omega : \sum_{n\in\omega} x_n^2 < \infty\}$ *con la topología inicial respecto a la familia de funciónes* $\{f_a : \ell^2 \to \mathbb{R}\}_{a\in\ell^2}$ *definidas por* $f_a(x) = \sum_{n\in\omega} a_n x_n$ *es de Hausdorff.*

Demostración. ■

Lemma 1. *Sea* M *y* m *entonces*

$$\underbrace{\frac{2\sqrt{Mm}}{M+m}}_{<1}\left(\sum_{n\in\omega} a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\omega} x_n^2\right)^{1/2} \leq \sum_{n\in\omega} a_n x_n \leq \left(\sum_{n\in\omega} a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\omega} x_n^2\right)^{1/2} \tag{1}$$

Demostración. El lado derecho sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwartz con igualdad si y solo si $\forall k \in \omega a_k = x_k$

$$\underbrace{\left(\frac{a_k}{x_k} - M\right)}_{<0}\underbrace{\left(\frac{a_k}{x_k} - m\right)}_{>0} \leq 0 \implies a_k^2 + Mm{x_k}^2 \leq (M+m)a_k x_k$$

$$\implies \frac{1}{M+m}(a_k^2 + Mmx_k^2) \leq a_k x_k \implies \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{M+m}(a_k^2 + Mmx_k^2) \leq \sum_{k=0}^{n} a_k x_k$$

Por la desigualdad AM-GM ($(\sum_{k=0}^n a_k)/2 > \sqrt{\prod_{k=0}^n a_k}$ igualdad si y solo sí $\{a_k\}$ es constante) Tenemos

$$2\frac{\sqrt{Mm}}{M+m}\left(\sum_{k=0}^{n} a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right)^{1/2} \leq \frac{1}{M+m}\sum_{k=0}^{n}(a_k^2 + Mmx_k^2) \leq \sum_{k=0}^{n} a_k x_k$$

para todo $n \in \omega$ y por tanto

$$\frac{2\sqrt{Mm}}{M+m}\left(\sum_{n\in\omega} a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\omega} x_n^2\right)^{1/2} \leq \sum_{n\in\omega} a_n x_n \leq \left(\sum_{n\in\omega} a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\omega} x_n^2\right)^{1/2}$$

■

Demostración. Sea $x, y \in \ell^2, x \neq y$.

Suponga $\sum_{n\in\omega} x_n^2 < \sum_{n\in\omega} y_n^2$ Sea $\varepsilon > 0$ Defina a por $a_k = x_k + \varepsilon/n$.

Note que

$$\sum_{n\in\omega} \frac{x_n \varepsilon}{n} \leq \underbrace{\left(\sum_{n\in\omega} x_n^2\right)^{1/2}}_{<\infty} \underbrace{\left(\sum_{n\in\omega} \frac{\varepsilon^2}{n^2}\right)^{1/2}}_{=\frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{6}}<\infty}$$

y por tanto,

$$\underbrace{\sum_{n\in\omega} x_n^2}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{n\in\omega} 2\frac{x_n\varepsilon}{n}}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{n\in\omega} \frac{\varepsilon^2}{n^2}}_{<\infty} = \sum_{n\in\omega}\left(x_n^2 + 2\frac{x_n\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon^2}{n^2}\right) = \sum_{n\in\omega} a_n^2$$

es decir, $a \in \ell^2$.

Por la desigualdad 1 tenemos que

$$f_a(x) \in \left(\frac{2\sqrt{Mm}}{M+m}\sqrt{\sum_{n\in\omega} a_n^2 \sum_{n\in\omega} x_n^2}, \sqrt{\sum_{n\in\omega} a_n^2 \sum_{n\in\omega} x_n^2}\right) := u_{f_a(x)}$$

y similarmente para y.

Defina $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(\varepsilon) = \frac{2\sqrt{Mm}}{M+m} < 1$. Como h es continua, h puede ser arbitrariamente cerca a 1 para ε lo suficientemente pequeño pues $h(0) = 1$.

Como $\sum_{n\in\omega} x_n^2 < \sum_{n\in\omega} y_n^2$ coja $\varepsilon > 0$ tal que

$$\gamma\delta := \sqrt{\sum_{n\in\omega} a_n^2 \sum_{n\in\omega} x_n^2} < h(\varepsilon)\sqrt{\sum_{n\in\omega} a_n^2 \sum_{n\in\omega} y_n^2} =: h(\varepsilon)\gamma\eta$$

el cual existe por que

$$\gamma\delta < h(\varepsilon)\gamma\eta \iff \delta < h(\varepsilon)\eta \text{ y } \delta < \eta$$

.

Así,$u_{f_a(x)} \cap u_{f_a(y)} = \emptyset$ y como f_a es continua $f^{-1}(u_{f_a(x)})$ y $f^{-1}(u_{f_a(y)})$ son abiertos en la topología debíl y en particular son vecindades de x, y respectivamente.

Finalmente,

$$f^{-1}(u_{f_a(x)}) \cap f^{-1}(u_{f_a(y)}) = f^{-1}(u_{f_a(x)} \cap u_{f_a(y)}) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

para todo $x, y \in \ell$ distintos. i.e. ℓ^2 es de T_2. ■

Lemma 2. *Sea* $a, b \in \mathbb{R}^2$ *si* $a < b$ *entonces existe* $0 < \alpha < 1$ *tal que* $a < \alpha b$

Demostración. Sea d talque $a < d < b$ coja $\alpha b = d$. Claramente $\alpha < 1$ ■

Suponga que $\sum_{n\in\omega} x_n^2 = \sum_{n\in\omega} y_n^2$