Los teoremas de Gödel y sus implicaciones en las matemáticas puras y aplicadas.

Alejandro Niño, Rafael Córdoba López, and Wilder Jimenez

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

11 de Mayo de 2018

Kurt Gödel fue un matemático especializado en la área de la lógica matemática. Hoy en día Gödel es considerado como uno de los más grandes contribuidores a la lógica matemática y, por tanto, un precursor en esta área.
A principios del siglo XIX se desarollo uno de los mas grandes avances en el área de las matemáticas. Los matemáticos más grandes de todos los tiempos como lo son Gauss, Euler, Lagrange, Cauchy, Riemann etc. Formularon de forma lógica y sistemática conceptos de cálculo creando así las bases y principales teoremas de lo que hoy en día se conoce como las ramas de análisis, topología, geometría, geometría diferencial etc. No fue hasta finales del siglo XIX y principios del siglo XX cuando David Hilbert uno de los matemáticos más reconocidos de la epoca comenzó lo que luego llevaría el nombre de "Programa de Hilbert". En 1920 Hilbert se preocupó por la estructuración de las matemáticas. Hilbert queria construir una base sólida de las matemáticas cuyos fundamentos permitan desarrollar a futuro una teoría consistente matemática que no se caiga eventualemte. Para lograr esto, el propuso que para llegar a esto es necesario un sistema de axiomas finito que sea consistente en el sentido lógico matematico. En palabras de Hilbert:

"We are not speaking here of arbitrariness in any sense. Mathematics is not like a game whose tasks are determined by arbitrarily stipulated rules. Rather, it is a conceptual system possessing internal necessity that can only be so and by no means otherwise." [3]

Por lo tanto, Hiblert resalta la necesidad de crear un conjunto finito de reglas bien definidas (conocidas como axiomas) que den paso a no solo la matemática desarrollada hasta el siglo XIX sino a todas las futuras contribuciones.
No obstante, Hilbert en el congreso internacional de Paris publicó una lista de problemas o preguntas abiertas cuya profundización llevase a grandes repercusiones en las matemáticas llamados los problemas de Hilbert. Fue el Segundo problema sobre "La incompatibilidad de los axiomas de la aritmética"Donde justamente se evidenciaba los problemas sobre la estructuración de las matemáticas.
En el año de 1929, un joven austriaco a la edad de 23 se encontraba realizando su tesis doctoral en la universidad de Viena, Kurt Godel había escogido el segundo problema de Hilbert para su tesis doctoral. Fue en el año 1931 cuando Godel publico su prueba final. Godel demostró que este problema era imposible de resolver y que no existe tal axiomatización de la aritmética. Godel

expone estas ideas mediante sus dos teoremas llamados así los teoremas de incompletitud de Godel haciendo referencia a que cualquier teoría consistente debe ser incompleta.
Gödel en principio uso la lógica matemática para entender como a partir de algunos sistemas con definiciónes axiomáticas pueden deducir otras proposiciones o sentencias. Sin embargo, Godel entendió que bajo ciertas condiciones, en algún punto estas deducciones formales pueden llevar a contradecir postulados dentro de la misma teoría. Un ejemplo de esto son las paradojas, por ejemplo, la paradoja de Russell o paradoja del barbero la cual en síntesis enuncia lo siguiente: Sea a una proposición entonces a sucede si y solo si no sucede la proposición a, la pregunta es ¿a ocurre?.
Fue en 1931 en un trabajo corto titulado "Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de los principia mathematica y sistemas conexos" escrito por Kurt Gödel cuando constituyó uno de los más grandes avances de la lógica matemática moderna.
En el desarrollo axiomático de la geometría, tan solo un pequeño número de axiomas como por ejemplo los de Euclides pueden derivar gran cantidad de proposiciones consistentes (Hasta que se formuló la geometría no euclídea al eliminar el ultimo postulado de Euclides). Por lo tanto, se pensó que se podía llevar el sistema axiomático a otras áreas de las matemáticas como la aritmética. Gödel demostró que esta suposición es insostenible, es decir, el programa de Hilbert resultaría imposible. La aritmética no puede ser consistente y completa a la vez. Gödel sostuvo que el método axiomático posee limitaciones intrínsecas que excluyen las posibilidades de crear una teoría completa, de esta forma, ni siquiera la axiomatización más básica de la aritmética es decir la aritmética de Robinson (la cual es la aritmética de Peano sin el axioma de inducción) en los números enteros, puede llegar a ser plenamente axiomatizada [4] y por tanto a diferencia de la geometría euclídea que si pudiese ser axiomatizada como una teoría consistente la aritmética no lo será.
Formalmente los teoremas de son:

Teorema 1 (Primer teorema de incompletitud de Gödel)**.** *Asuma que F es un sistema formalizado que contiene la aritmética de Robinson. Entonces, la sentencia G_F del lenguaje F puede ser construida sistemáticamente de F tal que:*

- *Si F es consistente, entonces, $F \nvdash G_F$.*
- *Si F es 1-consistente, entonces, $F \nvdash \neg G_F$. Por lo tanto G_F es independiente o indecidible ("No se puede probar ni refutar") Tal enunciado G_F se conoce como un enunciado de Gödel de F.*

[5]

Teorema 2 (Segundo teorema de incompletitud de Gödel)**.** *Asuma que F es un sistema formalizado que contiene la aritmética elemental. Entonces, $F \nvdash Cons(F)$.*

[5]
Ideas de la demostracion: Godel comienza por probar la existencia de tal sentencia G_F. Recordemos la paradoja del barbero denotemos por G, supongamos que este se puede realizar en nuestro sistema F bajo los axiomas y proposiciones de la misma teoría F, sin embargo, como ya observamos G no es falsa ni verdadera por lo tanto no se puede decir nada apartir de el sistema F. Considere ahora, el siguiente enunciado "Este enunciado no se puede probar" denotado como H. Si H se pudiese probar probaríamos que es falso pero esto es imposible (Pues se contradice) y por tanto no tiene sentido que lo sea. De esta forma, el enunciado no se puede probar. De hecho, es verdadero. De esta forma, hemos logrado deducir a partir de nuestro sistema F una proposición que si bien es verdadera (Tiene que serlo) no se puede probar y por tanto el sistema F es incompleto. La pregunta es ¿Como se aplica esto a una teoría arbitraria F? Gödel pensó y efectivamente encontró la forma

para construir una auto referencia en sentencias dentro del sistema F (Similar la sentencia H). La prueba de Gödel asigna a cada sentencia matemática un “numero de Gödel” de esta forma estos números permiten entender propiedades de sentencias como números. Una vez se tenga esta forma para manipular sentencias Gödel auto referencia sus números llegando a una paradoja como la anteriormente explicada y por tanto se tendrá los dos teoremas de Gödel. [4]
Cabe resaltar que los teoremas de Gödel solo especifican que las teorías numéricas que se relacionen con la paradoja i.e teorías aritméticas no pueden ser teorías completas en matemáticas es decir, aun existe la posibilidad de una teoría completa que sea axiomas de aritméticas más geometría por ejemplo. De esta forma, los teoremas de Gödel dieron paso a redirigir el sistema de las bases de matemáticas, a no buscar una estructura inicial que solo dependa de la aritmética sino que desarrolle en otras ramas de la matemática lo cual extendió el campo de trabajo de las estructuras matemáticas, Ahora bien, las implicaciones que ha tenido estos teoremas han contribuido a un desarrollo de la lógica moderna sin embargo también ha desarrollado implicaciones en matemáticas aplicadas, Ben-Ya'acov, U discute una aplicación de estos a la física. En física uno de los problemas más importantes es desarrollar una teoría unificada que permita describir todos los fenómenos físicos a partir de la menor cantidad de postulados (Axiomas). Sin embargo, muchos físicos extraordinarios han abordado el tema sin éxito alguno como por ejemplo Albert Einstein o Stephen Hawking [2]. La pregunta es ¿No se ha podido encontrar porque no existe o porque no hemos podido?, ¿Existe tal teoría? Si se observa la física como una rama de las matemáticas que atiende a ciertos postulados los teoremas de Gödel argumentan que tal teoría basada solo en aritmética no podría existir pues toda teoría física debe ser consistente, pero Gödel argumenta que por tanto esta no será completa por lo tanto algunos aspectos geométricos por ejemplo de relatividad podrían ser independientes de los aspectos aritméticos de la mecánica cuántica.

Referencias

[1] Teoremas de incompletitud de gödel, Oct 2019.

[2] Uri Ben-Ya'acov. Gödel's incompleteness theorem and Universal physical theories. *arXiv e-prints*, page arXiv:1906.02724, Jun 2019.

[3] David Hilbert. *Natur und mathematisches Erkennen*. Birkhauser Verlag, 1992.

[4] Ernest Nagel and James R. Newman. *El teorema de godel*. Consejo Nacional de Ciencia y tTcnologia, 1981.

[5] Panu Raatikainen. Gödel's incompleteness theorems, Jan 2015.

[6] Peter Smith. *An introduction to Godels theorems*. Cambridge University Press, 2017.

[7] Raymond Merrill. Smullyan. *Godels incompleteness theorems*. Oxford Univ. Press, 1992.