

# Topologie algébrique des variétés I

## Ch. 1. Rappels

### §1. Groupes d'homologie

#### Homologie singulière

Définitions •  $k$ -simplexe standard,  $k \geq 0$  entier

$$T^k = \{(x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{k+1} \mid x_0 + \dots + x_k = 1\}$$

•  $k$ -simplexe singulier  $\sigma: T^k \rightarrow X$  d'un espace topologique  $X$

•  $k$ -chaîne singulière dans  $X$ :

$$n_1 \sigma_1 + \dots + n_m \sigma_m, \text{ où } n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$$

• complexe de chaînes singulières de  $X$ :

$$\mathcal{C}(X): \dots \rightarrow C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X)$$

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \circ \Delta_{(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_k)}$$

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$$

• groupes d'homologie singulière de  $X$ :

$$H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X),$$

où  $Z_k(X) = \ker \partial_k$  et  $B_k(X) = \text{Im } \partial_{k+1}$  si  $k \geq 1$ ,

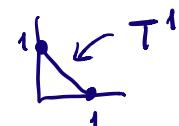
et  $Z_0(X) = C_0(X)$ ,  $B_0(X) = \text{Im } \partial_1$ .

- 
- Toute application continue  $f: X \rightarrow Y$  induit un morphisme  $f_{\#}: \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$ , donc un morphisme  $f_{*,k}: H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ ,  $k \geq 0$ .

- $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ ,  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$   
 $(\text{Id}_X)_{*,k} = \text{Id}_{H_k(X)}$
- Si  $f, g: X \rightarrow Y$  deux applications continues homotopes, alors  $f_*, g_*: C(X) \rightarrow C(Y)$  sont homotopes (comme morphismes de complexes de chaînes), donc, ils induisent les mêmes morphismes en homologie.
- Groupes d'homologie singulière d'un point

$$X = \{\text{pt}\}$$

$$\dots \xrightarrow{\circ} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\circ} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \dots \xrightarrow{\circ} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\circ} \mathbb{Z}$$

$\begin{array}{ll} k \text{ impair} & H_k(X) = 0 \\ k \text{ pair, } k \neq 0 & H_k(X) = 0, \quad H_0(X) \cong \mathbb{Z} \end{array}$ 


### Groupes d'homologie réduits

Complexe de chaînes singulière augmenté :

$$\dots \rightarrow C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} \dots \rightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$$

Groupes  $\tilde{H}_k(X)$        $\epsilon: n_1\delta_1 + \dots + n_m\delta_m \mapsto n_1 + \dots + n_m$

Groupes d'homologie relatifs  $(X, A)$ ,  $A \subset X$

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & 0 & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\dots & \rightarrow C_{k+1}(A) & \rightarrow C_k(A) & \rightarrow \dots & \rightarrow C_1(A) & \rightarrow C_0(A) & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& 0 & & 0 & & 0 & \\
\dots & \rightarrow C_{k+1}(X) & \rightarrow C_k(X) & \rightarrow \dots & \rightarrow C_1(X) & \rightarrow C_0(X) & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& 0 & & 0 & & 0 & \\
\dots & \rightarrow C_{k+1}(X, A) & \rightarrow C_k(X, A) & \rightarrow \dots & \rightarrow C_1(X, A) & \rightarrow C_0(X, A) & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

$$C_k(X, A) = C_k(X)/C_k(A)$$

Groupes  $H_k(X, A)$

- Suite exacte homologique de la paire  $(X, A)$

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(A) \xrightarrow{\quad} H_{k+1}(X) \xrightarrow{\sim} H_{k+1}(X, A) \xrightarrow{\delta} H_k(A) \xrightarrow{\quad} \dots$$

En général, une suite exacte courte de complexes de chaînes produit une suite exacte longue en homologie.

- Si  $x_0 \in X$ , on a  $H_k(X, \{x_0\}) = H_k(X, x_0) \simeq \tilde{H}_k(X)$  pour tout entier  $k \geq 0$ .
  - Si  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  est une application continue, on a le diagramme commutatif suivant:
- $$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_{k+1}(A) & \rightarrow & H_{k+1}(X) & \rightarrow & H_{k+1}(X, A) & \rightarrow & H_k(A) & \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \dots & \rightarrow & H_{k+1}(B) & \rightarrow & H_{k+1}(Y) & \rightarrow & H_{k+1}(Y, B) & \rightarrow & H_k(B) & \rightarrow \dots \end{array}$$
- Si  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  est une application continue telle que  $f: X \rightarrow Y$  et  $f|_A: A \rightarrow B$  soient des équivalences d'homotopie, alors  $f_*: H_k(X, A) \rightarrow H_k(Y, B)$  est un isomorphisme pour tout entier  $k \geq 0$ .
  - Suite exacte homologique associée à un triplet  $(X, A, B)$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_{k+1}(A, B) & \rightarrow & H_{k+1}(X, B) & \rightarrow & H_{k+1}(X, A) & \rightarrow & H_k(A, B) & \rightarrow \dots \\ & & & & & & & \searrow & \swarrow & \\ & & & & & & & & H_k(A) & \end{array}$$

Comme corollaire, on obtient la suite exacte, associée à  $(X, A)$ , pour les groupes d'homologie réduits :

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_{k+1}(A) \rightarrow \tilde{H}_{k+1}(X) \rightarrow H_{k+1}(X, A) \rightarrow \tilde{H}_k(A) \rightarrow \dots$$

### Théorème d'excision

Triplet topologique  $(X, A, V)$ , où  $V \subset A^\circ$ .

Pour tout entier  $k \geq 0$ , l'inclusion  $i: (X \setminus V, A \setminus V) \rightarrow (X, A)$  induit un isomorphisme

$$i_*: H_k(X \setminus V, A \setminus V) \rightarrow H_k(X, A).$$

Soit  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  une collection de sous-ensembles de  $X$  telle que les intérieurs  $U_i^\circ$  de ces sous-ensembles forment un recouvrement ouvert de  $X$ .

Complexe de chaînes  $C^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\sim} C(X)$ .

Proposition Le morphisme  $\iota$  est une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

En particulier,  $\iota$  induit des isomorphismes des groupes d'homologie des deux complexes de chaînes.

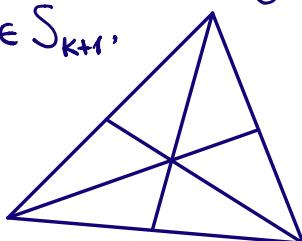
Notion importante : subdivision barycentrique.

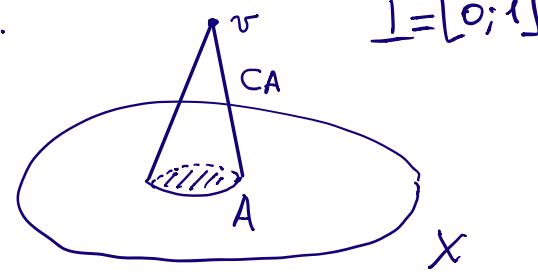
Pour toute permutation  $\tau \in S_{k+1}$ ,

on considère

$$\{(x_0, \dots, x_k) \in T^k \mid$$

$$x_{\tau(0)} \leq \dots \leq x_{\tau(k)}\}$$



- Corollaires du théorème d'excision
  - Inclusion  $(X, A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$  induit un isomorphisme  $H_k(X, A) \xrightarrow{\sim} H_k(X \cup CA, CA)$  pour tout entier  $k \geq 0$ .  


$$X \cup CA = (X \amalg CA) / \sim$$

l'équivalence identifie les points  $a \in A$  et  $(a, 0) \in CA$ .
  - De plus,  $H_k(X \cup CA, CA) \simeq H_k(X \cup CA, v) \simeq \tilde{H}_k(X \cup CA)$ , où  $v$  est le sommet du cône  $CA$ .
  - Soit  $(X, A)$  une paire de Borsuk, c'est-à-dire, pour toute application continue  $F: X \rightarrow Y$ , toute homotopie  $f_t: A \rightarrow Y$  telle que  $f_0 = F|_A$  admet une extension à une homotopie  $F_t: X \rightarrow Y$  telle que  $F_0 = F$  (propriété d'extension des homotopies).

Projection  $p: X \rightarrow X/A$  induit un isomorphisme  $H_k(X, A) \xrightarrow{\sim} H_k(X/A, A/A) = \tilde{H}_k(X/A)$  pour tout entier  $k \geq 0$ .

Démonstration La projection canonique  
 $X \cup CA \rightarrow (X \cup CA)/CA \simeq X/A$  est  
une équivalence d'homotopie.  $\square$

- Groupes d'homologie singulière des sphères

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on considère la sphère  $S^{n-1}$  comme bord du disque unité fermé  $D^n \subset \mathbb{R}^n$ .  
On a  $D^n/S^{n-1} \simeq S^n$ .

Théorème Soit  $n \geq 1$  un entier. On a

$$H_k(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k=0 \text{ ou } k=n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus,

$$H_k(S^{\circ}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{si } k=0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En termes des groupes d'homologie réduits, on a

$$\tilde{H}_k(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k=n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_k(D^n) \rightarrow H_k(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\text{iso}} \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(D^n) \rightarrow \dots$$

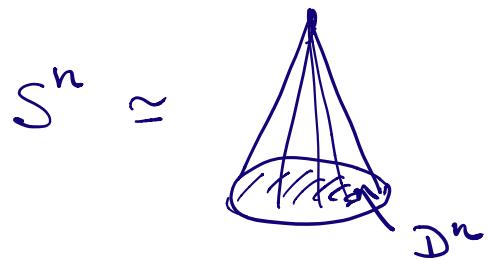
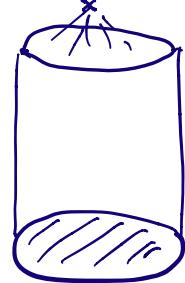
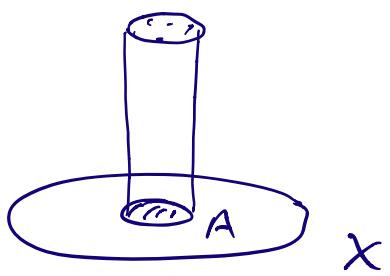
$\parallel$                $\text{IS}$                $\text{iso}$                $\parallel$                $\square$   
 $0$                $\tilde{H}_k(D^n/S^{n-1})$                $0$   
 $\sim$   $\text{IS}$                $\tilde{H}_k(S^n)$

$(D^n, S^{n-1})$  est une paire de Borsuk.

$(X, A) \quad A \hookrightarrow X$  cofibration

$\underline{(X \times \{0\}) \cup (A \times I)} \subset X \times I$ , où  $I = [0; 1]$

rétracte



- Suite de Mayer - Vietoris

$$A, B \subset X, \quad A \cap B \neq \emptyset, \quad \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$$

On pose  $\mathcal{U} = \{A, B\}$ . On a une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$0 \rightarrow C(A \cap B) \xrightarrow{(c, -c)} C(A) \oplus C(B) \xrightarrow{d_{te}} C^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow 0$$

Elle produit une suite exacte longue qui porte le nom de la suite de Mayer - Vietoris :

$$\dots \rightarrow H_k(A \cap B) \rightarrow H_k(A) \oplus H_k(B) \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_{k-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

Exercice À l'aide de la suite de Mayer - Vietoris, calculer à nouveau les groupes d'homologie singulière des sphères.

### §2. Homologie cellulaire

Un CW-complexe est un espace topologique séparé non vide muni d'une partition (dont les éléments s'appellent cellules) vérifiant les conditions suivantes :

(1) pour toute cellule  $C$ , il existe un entier  $n \geq 0$  (appelé la dimension de  $C$ ) et une application continue  $\varphi_C : D^n \rightarrow X$  (appelée application caractéristique de  $C$ ) tels que

- $\varphi_{C|D^n}$  fournit un homéomorphisme entre  $D^n$  et  $C$ ;
  - l'image du bord de  $D^n$  est contenue dans une réunion finie de cellules de dimension  $\leq n-1$ ;
- (2)  $A \subset X$  est fermé ssi, pour toute cellule  $C$ , l'intersection  $A \cap \bar{C}$  est fermé dans  $\bar{C}$ .

La partition s'appelle décomposition cellulaire.

La réunion de toutes les cellules de dimension  $\leq K$  s'appelle le  $K$ -squelette de  $X$ . Notation:  $X^{(K)}$

Proposition  $(X_i, x_i)_{i \in \mathcal{Y}}$  collection d'espaces pointés telle que  $(X_i, x_i)$  soit une paire de Borsuk pour tout  $i \in \mathcal{Y}$ . Alors,

$$\tilde{H}_K\left(\bigvee_{i \in \mathcal{Y}} X_i\right) \simeq \bigoplus_{i \in \mathcal{Y}} \tilde{H}_K(X_i).$$

Démonstration On a  $\bigvee_{i \in \mathcal{Y}} X_i = \coprod_{i \in \mathcal{Y}} X_i / \coprod_{i \in \mathcal{Y}} \{x_i\}$ .

Il reste à utiliser la suite exacte de  $(\coprod_{i \in \mathcal{Y}} X_i, \coprod_{i \in \mathcal{Y}} \{x_i\})$  et la relation  $\tilde{H}_K\left(\bigvee_{i \in \mathcal{Y}} X_i\right) \simeq H_K\left(\coprod_{i \in \mathcal{Y}} X_i, \coprod_{i \in \mathcal{Y}} \{x_i\}\right)$ .  $\square$

$X$  un CW-complexe. On a

$$H_K(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \simeq \begin{cases} \bigoplus_{n\text{-cellules}} \mathbb{Z}, & \text{si } K=n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

## Complexe de chaînes cellulaires

On considère la suite

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-2)}) \rightarrow \dots$$

où, pour tout entier  $k \geq 1$ , le morphisme

$$\partial_k : H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \rightarrow H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-2)})$$

provient de la suite exacte du triplet

$$(X^{(k)}, X^{(k-1)}, X^{(k-2)}).$$

Pour tout entier  $k \geq 1$ , on a  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ :

$$\begin{array}{ccccc} & & H_{k+1}(X^{(k+1)}, X^{(k)}) & & \\ & \downarrow & \searrow \partial_{k+1} & & \\ H_k(X^{(k)}) & \longrightarrow & H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) & & \\ & \swarrow 0 & \downarrow & \searrow \partial_k & \\ & & H_{k-1}(X^{(k-1)}) & \rightarrow & H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-2)}) \end{array}$$

Groupes d'homologie cellulaire.

Théorème Si  $X$  est un CW-complexe, alors les groupes d'homologie du complexe cellulaire de  $X$  sont isomorphes aux groupes d'homologie singulière de  $X$ .

Corollaire  $X$  un CW-complexe, entier  $n \geq 0$ .

Supposons que  $X$  a un nombre fini  $c_n$  de  $n$ -cellules. Alors,  $b_n(X) \leq c_n$ , où  $b_n(X)$  est le  $n$ -ème nombre de Betti de  $X$ .

Nombres de Betti  $Y$  espace topologique,  $i \geq 0$ .

On suppose que le groupe  $H_i(Y)$  est de type fini:

$$H_i(Y) \cong \mathbb{Z}^r \oplus A, \text{ où } A \text{ est un groupe fini.}$$

Le nombre  $r$  est le  $i$ -ème nombre de Betti de  $Y$ .

Exercice Soit  $X$  un CW-complexe fini. Alors,

$$\sum_n (-1)^n b_n(X) = \sum_n (-1)^n c_n.$$

La somme alternée  $\sum_n (-1)^n b_n(X)$  s'appelle la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $X$ .

Exemple de calcul de groupes d'homologie

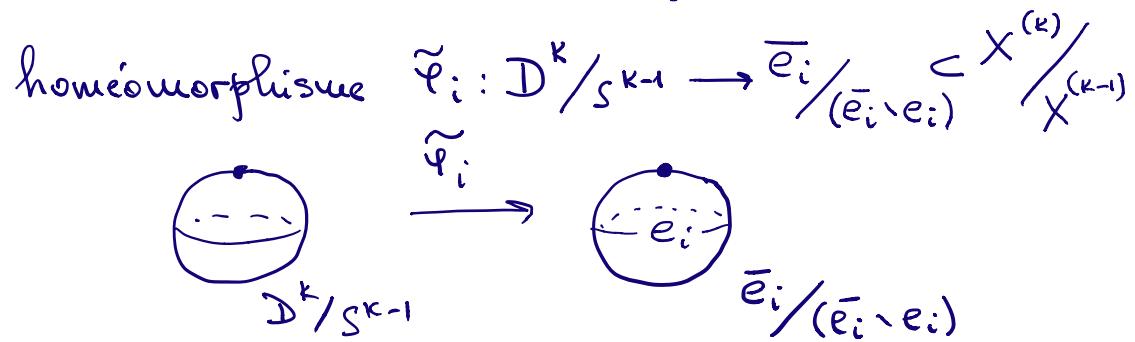
$$\mathbb{C}P^n \cong \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \dots \cup \mathbb{C}^0$$

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \underset{2n}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \rightarrow \underset{2n-2}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \underset{2}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \rightarrow \underset{0}{\mathbb{Z}}$$

$$H_k(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } 0 \leq k \leq 2n \text{ et } k \text{ est pair,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

## Coefficient d'incidence de cellules

$\varphi_i : D^k \rightarrow X$  application caractéristique  
d'une cellule  $e_i$



## Degré d'une application continue $f : S^n \rightarrow S^n$

$$f_* : \tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n(S^n)$$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto d} \mathbb{Z}$$

Cet entier  $d$  s'appelle le degré de  $f$ .

## Orientations des cellules

Pour chaque  $k$ -cellule, il y a deux classes d'équivalence d'applications caractéristiques.

$$\psi, \tilde{\psi} : D^k \rightarrow X$$

$$(\tilde{\psi})^{-1} \circ \tilde{\varphi} : D^k / S^{k-1} \xrightarrow{\cong} S^k \rightarrow D^k / S^{k-1}$$

homéomorphisme  
(de degré  $\pm 1$ )

Coefficient d'incidence  $[\sigma : \tau]$  est le degré  
de l'application

$$\ell_i|_{S^{k-1}} : S^{k-1} \rightarrow X^{(k-1)} \rightarrow X^{(k-1)} /_{\substack{(X^{(k-2)} \cup \tau') \\ \tau' \neq \tau}} \simeq \overline{\tau} /_{(\bar{\tau} - \tau)} \rightarrow S^{k-1}.$$

Pour que ce degré soit correctement défini  
(et pas seulement défini à signe près), il faut  
fixer une manière pour choisir des générateurs  
des groupes

- $\tilde{H}_k(S^k)$ , où  $S^k$  est le bord de  $D^k$ ,  $k \geq 0$ ,
- $\tilde{H}_k(S^k)$ , où  $S^k = D^k / S^{k-1}$ ,  $k \geq 0$ .

Proposition Soit  $\sigma$  une  $k$ -cellule, où  $k \geq 1$ . Alors,

$$\partial_k \sigma = \sum_{\tau} \pm [\sigma : \tau] \tau.$$

### § 3. Groupes d'homologie simpliciale

- $K$ -simplexe (affine) dans  $\mathbb{R}^n$

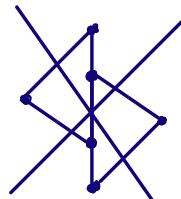
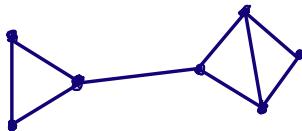
Enveloppe convexe de  $K+1$  points affinement indépendants.

- complexe simplicial géométrique dans  $\mathbb{R}^n$

C'est une collection  $K$  de simplexes dans  $\mathbb{R}^n$  telle que

- toute face d'un simplexe de  $K$  est dans  $K$ ;
- l'intersection de deux simplexes quelconques de  $K$  est leur face commune;
- la collection  $K$  est localement finie.

Support  $|K|$  de  $K$ .



Soit  $X$  un complexe simplicial (fini).

On numérote tous les sommets de  $X$ .

Pour tout entier  $k \geq 0$  et pour tout  $k$ -simplexe  $\sigma^k$  de  $X$ , on a l'homéomorphisme  $T^k \rightarrow \sigma^k$  qui préserve l'ordre des sommets.

On obtient un CW-complexe (fini), dont les cellules sont orientées, et on peut considérer ses groupes d'homologie cellulaire.

Proposition Pour tout  $k$ -simplexe  $\sigma^k$  de  $X$ , on a

$$\partial \sigma^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \Gamma_i(\sigma^k),$$

où  $\Gamma_i(\sigma^k)$  est la  $i$ -ème face de codimension 1 de  $\sigma^k$ .

Complexe de chaînes classique de  $X$   
et groupes d'homologie simpliciale de  $X$ .

#### §4. Homologie avec des coefficients différents de $\mathbb{Z}$ et cohomologie

Coefficients arbitraires  $G$  un groupe abélien

$X$  un espace topologique,  $k \geq 0$  un entier.

Une  $k$ -chaîne singulière de  $X$  à coefficients dans  $G$  est une combinaison formelle finie

$$\sum_i g_i \sigma_i,$$

où  $g_i \in G$  et  $\sigma_i$  est un  $k$ -simplexe singulier de  $X$ .

Complexe  $C(X; G)$  de chaînes singulières de  $X$   
à coefficients dans  $G$ .

Groupes d'homologie  $H_k(X; G)$  à coefficients dans  $G$ .

Groupes d'homologie réduits.

Groupes d'homologie relatifs.

Groupes de cohomologie  $G$  un groupe abélien

$X$  un espace topologique,  $k \geq 0$  un entier.

Une  $k$ -cochaîne singulière de  $X$  à coefficients dans  $G$  est une fonction qui associe à tout  $k$ -simplexe singulier de  $X$  un élément de  $G$ .

$$C^k(X; G) = \text{Hom}(C_k(X), G)$$

Complexe  $C^\bullet(X; G)$  des  $k$ -cochaînes singulières de  $X$  à coefficients dans  $G$ :

$$\dots \xleftarrow{\delta_3} C^2(X; G) \xleftarrow{\delta_2} C^1(X; G) \xleftarrow{\delta_1} C^0(X; G)$$

$$\text{On pose } (\delta_k c)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i c(\sigma \circ \Delta(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{k+1}))$$

pour toute  $k$ -cochaîne singulière  $c$  de  $X$  à coefficients dans  $G$  et pour tout  $(k+1)$ -simplexe singulier  $\sigma$  de  $X$ .

Si  $a \in C_{k+1}(X)$ , on a

$$\langle \delta_k c, a \rangle = \langle c, \partial_k a \rangle.$$

En particulier,  $\delta_{k+1} \circ \delta_k = 0$  pour tout entier  $k \geq 1$ .

Groupes de cohomologie  $H^k(X; G)$  de  $X$  à coefficients dans  $G$ .

Cocycles et cobords.

Pour obtenir un complexe augmenté dans le cas de cochaînes, on considère le morphisme

$$\varepsilon': C^0(X; G) \leftarrow G$$

qui à tout élément  $g \in G$  associe l'application constante  $g$  (sur les 0-simplexes singuliers de  $X$ ).

Groupes de cohomologie relatifs  $H^k(X, A; G)$

Suites exactes longues.

### Formules des coefficients universels

Considérons un complexe de chaînes

$$C: \dots \xrightarrow{\partial} C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0,$$

où  $C_i, i \geq 0$ , sont des groupes abéliens libres.

Application  $\delta: H^n(C; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C); G)$ .

Si  $\alpha \in H^n(C; G)$  est représenté par un morphisme

$$\varphi: C_n \rightarrow G \text{ tel que } \delta\varphi = 0. \text{ On a } \varphi \circ \partial = 0,$$

donc  $\varphi$  s'annule sur  $B_n \subset C_n$ .

La restriction  $\varphi_0 = \varphi|_{Z_n}$  induit un morphisme  $\bar{\varphi}_0: H_n(C) = Z_n/B_n \rightarrow G$  qui est un élément de  $\text{Hom}(H_n(C); G)$ .

Le résultat ne dépend pas du choix d'un représentant  $\varphi$ :

$$\text{si } \varphi \in \text{Im } \delta, \text{ on a } \varphi = \delta\psi = \psi \circ \partial,$$

donc  $\varphi$  est nul sur  $Z_n$ .

Lemme Le morphisme  $h$  est surjectif.

Démonstration La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow C_n \xrightarrow{\delta} B_{n-1} \rightarrow 0$$

est scindée. Donc, il existe une projection  
 $p: C_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ . Par conséquent, on peut étendre  
les morphismes définis sur  $\mathbb{Z}_n$  à  $C_n$ .

Dans le cas d'un morphisme qui s'annule sur  $B_n$ ,  
on obtient un élément de  $\ker \delta$ . Ceci donne

$$\text{Hom}(H_n(C); G) \rightarrow \ker \delta \xrightarrow{pr} H^n(C; G).$$

En composant ce morphisme avec  $h$ , on obtient  
l'identité.

□

Suite exacte courte scindée :

$$0 \rightarrow \ker h \rightarrow H^n(C; G) \xrightarrow{h} \text{Hom}(H_n(C); G) \rightarrow 0$$

## Diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Z_{n+1} & \rightarrow & C_{n+1} & \rightarrow & B_n & \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \circ & & \downarrow \partial & & \downarrow \circ & \\ 0 & \rightarrow & Z_n & \rightarrow & C_n & \rightarrow & B_{n-1} & \rightarrow 0 \end{array}$$

Les suites horizontales courtes sont scindées.

On a une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leftarrow & Z_{n+1}^* & \leftarrow & C_{n+1}^* & \leftarrow & B_n^* & \leftarrow 0 \\ & & \uparrow \circ & & \uparrow \delta & & \uparrow \circ & \\ 0 & \leftarrow & Z_n^* & \leftarrow & C_n^* & \leftarrow & B_{n-1}^* & \leftarrow 0 \end{array}$$

(Ici,  $A^* = \text{Hom}(A, G)$ .)

La suite exacte longue :

$$\dots \leftarrow B_n^* \xleftarrow{i_n^*} Z_n^* \leftarrow H^n(C; G) \leftarrow B_{n-1}^* \leftarrow Z_{n-1}^* \leftarrow \dots$$

où  $i_n : B_n \hookrightarrow Z_n$ . On obtient

$$0 \leftarrow \ker i_n^* \leftarrow H^n(C; G) \leftarrow \text{Coker } i_{n-1}^* \leftarrow 0$$

On a  $\ker i_n^* \simeq \text{Hom}(H_n(C), G)$ , car  $\ker i_n^*$  est formé des morphismes  $Z_n \rightarrow G$  qui s'annulent sur  $B_n$ .

L'application  $H^n(C; G) \rightarrow \ker i_n^*$  s'identifie avec  $h$ .

La suite exacte courte

$$0 \rightarrow B_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} Z_{n-1} \rightarrow H_{n-1}(C) \rightarrow 0$$

peut être vue comme résolution libre de  $H_{n-1}(C)$ .

En dualisant, on obtient

$$0 \leftarrow B_{n-1}^* \xleftarrow{i_{n-1}^*} Z_{n-1}^* \leftarrow \text{Hom}(H_{n-1}(e), G) \leftarrow 0$$

Donc,  $\text{Ext}(H_{n-1}(e), G) \simeq \text{Coker } i_{n-1}^*$ .

Rappel Si  $\mathcal{F}: \dots \rightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \rightarrow 0$  est une résolution libre de  $H$ , on a un complexe de chaînes

$$\dots \leftarrow F_2 \xleftarrow{f_2^*} F_1^* \xleftarrow{f_1^*} F_0^* \xleftarrow{f_0^*} H^* \leftarrow 0$$

Les groupes d'homologie de ce complexe de chaînes ne dépendent pas du choix de résolution libre.

Théorème (Formule des coefficients universels)

pour la cohomologie)

On a une suite exacte courte scindée

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(e), G) \rightarrow H^n(e; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(e), G) \rightarrow 0$$

Exercice

- $\text{Ext}(H \oplus H', G) \simeq \text{Ext}(H, G) \oplus \text{Ext}(H', G)$ .
- $\text{Ext}(H, G) = 0$  si  $H$  est libre.
- $\text{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) = G/nG$ .

Corollaire Si les groupes  $H_n(e)$  et  $H_{n-1}(e)$  sont de type fini, alors

$H^n(C; \mathbb{Z}) \simeq (H_n(e)/\text{Tors } H_n(e)) \oplus \text{Tors } H_{n-1}(e)$ ,  
 où  $\text{Tors } H_n(e)$  et  $\text{Tors } H_{n-1}(e)$  sont les sous-groupes de torsion de  $H_n(e)$  et  $H_{n-1}(e)$ , respectivement.

Théorème (Formule des coefficients universels pour l'homologie)

On a une suite exacte courte scindée

$$0 \rightarrow H_n(e) \otimes G \rightarrow H_n(C; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(e), G) \rightarrow 0$$

Si  $F: \dots \rightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} H \rightarrow 0$

est une résolution libre de  $H$ , on a  
 un complexe de chaînes  $\widetilde{F} \otimes G$ :

$$\dots \rightarrow F_2 \otimes G \xrightarrow{\underline{F_1 \otimes G}} F_1 \otimes G \rightarrow H \otimes G \rightarrow 0$$

On pose  $\text{Tor}(H, G) = H_1(\widetilde{F} \otimes G)$ .

Exercice •  $\text{Tor}(A, B) \simeq \text{Tor}(B, A)$ .

- $\text{Tor}(A \oplus A', B) \simeq \text{Tor}(A, B) \oplus \text{Tor}(A', B)$ .
- $\text{Tor}(A, B) = 0$  si  $A$  (ou  $B$ ) est libre.
- $\text{Tor}(A, B) = \overline{\text{Tor}(\text{Tors } A, B)}$ .
- $\text{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \simeq \ker(A \xrightarrow{x^n} A)$ .

## Ch. 2. Homologie des variétés

### §1. Variétés topologiques

Déf. Une variété topologique de dimension  $n$  (où  $n \geq 0$  est un entier) est un espace topologique  $X$  tel que

- tout point de  $X$  possède un voisinage ouvert homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ ;
- $X$  est séparé;
- $X$  possède une base dénombrable.

### Exercice

- (a) Trouver un espace topologique qui vérifie la première et la troisième propriétés, mais ne vérifie pas la deuxième propriété.
- (b) Trouver un espace topologique connexe qui vérifie les deux premières propriétés, mais ne vérifie pas la troisième propriété.

Déf. Une orientation locale de  $\mathbb{R}^n$  en  $x \in \mathbb{R}^n$  est le choix d'un générateur du groupe  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq \mathbb{Z}$ .

Orientations locales cohérentes en  $x, y \in \mathbb{R}^n$

On définit cette notion à l'aide des isomorphismes suivants (où  $B$  est un disque ouvert):

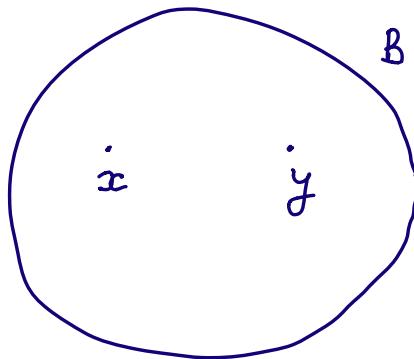
$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$$

IS

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B)$$

IS

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\})$$



Orientation de  $\mathbb{R}^n$  est un choix cohérent

d'orientations locales en tous les points de  $\mathbb{R}^n$ .

$M$  une variété topologique de dimension  $n$ .

Déf. Une orientation locale de  $M$  en  $x \in M$  est le choix d'un générateur du groupe  $H_n(M, M \setminus \{x\})$ .

Remarque On a  $H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq \mathbb{Z}$ . En effet, il existe un voisinage ouvert  $U \ni x$  (dit euclidien) t.g.  $U$  soit homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . On a

$$H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(U, U \setminus \{x\}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Un bon voisinage  $V \ni x$  est un voisinage ouvert vérifiant la propriété suivante : il existe un voisinage ouvert euclidien  $U \ni x$  tel que  $V \subset U$  correspond à un disque ouvert de rayon fini dans  $\mathbb{R}^n$ .

Pour deux points  $x, y \in V$ , on peut comparer leurs orientations locales à l'aide de  $V$  car

$$H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(M, M \setminus V) \simeq H_n(M, M \setminus \{y\}).$$

Déf. On dit qu'une variété topologique  $M$  est orientable si on peut choisir des orientations locales  $x \mapsto f_x$  en tous points  $x \in M$  (ici  $f_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$  est un générateur) pour que la condition suivante soit vérifiée : tout point  $x \in M$  admet un bon voisinage  $V$  ( $x \in V \subset U$ ) t.q. les orientations locales de  $M$  en tous les points de  $V$  soient cohérentes.

Orientation de  $M$  (pour une variété orientable  $M$ )

Proposition Toute variété topologique  $M$  de dimension  $n \geq 1$  admet un revêtement double  $\tilde{M} \rightarrow M$  tel que  $\tilde{M}$  soit une variété topologique orientable.

Démonstration On pose

$$\tilde{M} = \left\{ \mu_x \mid x \in M \text{ et } \mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}) \text{ est un générateur} \right\}.$$

L'application  $p: \tilde{M} \rightarrow M$  est définie par  $\mu_x \mapsto x$ .

Une base de topologie de  $\tilde{M}$  est donnée par la collection de sous-ensembles  $V(\mu_v) \subset \tilde{M}$ , où

- $V \subset M$  est un bon sous-ensemble ouvert (il existe un ouvert  $U \subset M$  t.q.  $U \cong \mathbb{R}^n$  et  $V \subset U$  correspond à un disque ouvert de rayon fini);
- $\mu_v \in H_n(M, M \setminus V)$  est un générateur;
- $V(\mu_v)$  est formé de  $\mu_x \in \tilde{M}$  t.q.  $x \in V$  et  $\mu_x$  soit l'image de  $\mu_v$  par l'isomorphisme  $H_n(M, M \setminus V) \xrightarrow{\sim} H_n(M, M \setminus \{x\})$ .

On vérifie facilement que  $p$  est un revêtement.

La variété topologique  $\tilde{M}$  est orientable.  $\square$

Remarque Si  $M$  est simplement connexe, alors  $M$  est orientable (dans ce cas, le revêtement double considéré est forcément trivial).

Lacets désorientants.

Unicité du revêtement d'orientation.

Soit  $G$  un groupe abélien. On peut considérer un revêtement  $p_G : \tilde{M}_G \rightarrow M$ , où

$$\tilde{M}_G = \bigcup_{x \in M} H_n(M, M \setminus \{x\}; G).$$

L'application  $p_G : \tilde{M}_G \rightarrow M$  est définie par  $\mu_x \mapsto x$ .

Une base de topologie de  $\tilde{M}_G$  est donnée par la collection de sous-ensembles  $V(\mu_v) \subset \tilde{M}_G$ , où

- $V \subset M$  est un bon sous-ensemble ouvert;
- $\mu_v \in H_n(M, M \setminus V; G)$ ;
- $V(\mu_v)$  est formé de  $\mu_x \in \tilde{M}_G$  t.q.  $x \in V$  et  $\mu_x$  soit l'image de  $\mu_v$  par l'isomorphisme  $H_n(M, M \setminus V; G) \xrightarrow{\cong} H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$ .

$\begin{matrix} 1S \\ G \end{matrix}$

Supposons maintenant que  $G$  est un anneau commutatif unitaire. Dans ce cas, on a un isomorphisme de  $G$ -modules  $H_n(M, M \setminus \{x\}; G) \cong G$ .

Une variété topologique  $M$  est dite  $G$ -orientable s'il existe une section continue  $M \rightarrow \tilde{M}_G$  dont toutes les valeurs sont des générateurs de fibres (en tant que  $G$ -modules).

Groupe des sections  $\Gamma(A, \tilde{M}_G)$ , où  $A \subset M$  est un sous-ensemble fermé. Orientabilité le long de  $A$ .

Exercice Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $M$  est orientable;
- $M$  est orientable le long de tous les sous-ensembles compacts;
- les générateurs des fibres du revêtement  $\tilde{M}_{\mathbb{Z}} \rightarrow M$  forment un revêtement double trivial;
- $\tilde{M}_{\mathbb{Z}} \simeq M \times \mathbb{Z}$  (isomorphisme de revêtements).

Soit  $G$  un groupe abélien,  $A \subset M$  un fermé.

On a un morphisme

$$\mathfrak{J}_A : H_n(M, M \setminus A; G) \longrightarrow \Gamma_c(A, \tilde{M}_G),$$

où  $\Gamma_c(A, \tilde{M}_G) \subset \Gamma(A, \tilde{M}_G)$  est le sous-groupe qui consiste des sections à support compact.

Le morphisme  $\mathfrak{J}_A$  est défini de la façon suivante :

si  $\alpha \in H_n(M, M \setminus A; G)$  et  $x \in A$ , alors

$\mathfrak{J}_A(\alpha)(x)$  est l'image de  $\alpha$  par le morphisme

$$H_n(M, M \setminus A; G) \longrightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$$

induit par l'inclusion.

On doit vérifier que

- $\mathbb{M}_A(\alpha)$  est à support compact;
  - $\mathbb{M}_A(\alpha)$  est une application continue.
- Soit  $c \in C_n(M; G)$  un représentant (d'un représentant) de  $\alpha$ . L'image de  $c$  (la réunion des images de tous les simplexes singuliers qui apparaissent dans  $c$ ) est un compact  $K \subset M$ .  
Si  $x \in A \setminus K$ , alors  $\mathbb{M}_A(\alpha)(x) = 0$ .  
En effet, puisque  $K \subset M \setminus \{x\}$ , l'image de  $c$  dans  $C_n(M, M \setminus A; G)$  est envoyé en  $0 \in C_n(M, M \setminus \{x\}; G)$ .
- De plus,  $\partial c \in C_{n-1}(M \setminus A; G)$ , et l'image de  $\partial c$  est un compact  $K' \subset M$ . Si  $x \in A$ , on peut choisir un bon voisinage  $V \ni x$  tel que  $K' \subset M \setminus V$ .  
Donc, l'image de  $c$  dans  $C_n(M, M \setminus V; G)$  définit une classe d'homologie  $\beta \in H_n(M, M \setminus V; G)$ .  
La section  $V \rightarrow V \times \{\beta\}$  coïncide avec  $\mathbb{M}_A(\alpha)$  sur  $V \cap A$ .

Théorème  $M$  variété topologique de dimension  $n$ ,  
 $A \subset M$  fermé,  $G$  groupe abélien.

Alors,

$$(1) \quad H_k(M, M \setminus A; G) = 0 \text{ pour tout } k > n;$$

$$(2) \quad j_A : H_n(M, M \setminus A; G) \rightarrow \Gamma_c(A, \tilde{M}_G)$$

est un isomorphisme.

Corollaire Soit  $M$  une variété topologique connexe de dimension  $n$ , et soit  $G$  un groupe abélien.  
Si la variété  $M$  n'est pas compacte,  
alors  $H_n(M; G) = 0$ .

Lemme (local-global pour les compacts)

Soit  $P_M(A)$  une affirmation à propos de sous-ensembles compacts  $A \subset M$  d'une variété topologique  $M$  de dimension  $n$ . Supposons que

(i) si  $A$  est compact et convexe dans un certain ouvert euclidien de  $M$ , alors  $P_M(A)$  est vraie;

(ii) si  $P_M(A)$ ,  $P_M(B)$  et  $P_M(A \cap B)$  sont vraies pour certains compacts  $A$  et  $B$  de  $M$ , alors  $P_M(A \cup B)$  est aussi vraie;

(iii) si  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  est une suite décroissante de compacts de  $M$  tels que toutes les affirmations  $P_M(A_i)$  soient vraies, alors  $P_M(\bigcap_i A_i)$  est aussi vraie.

Alors,  $P_M(A)$  est vraie pour tout compact  $A \subset M$ .

### Démonstration

- Soit  $U \subset M$  un ouvert euclidien.

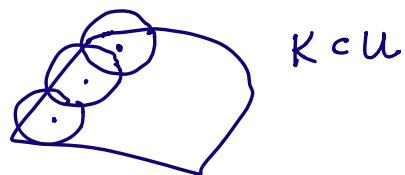
Si  $A \subset U$  est une réunion finie de sous-ensembles compacts convexes, alors  $P_M(A)$  est vraie.

On utilise l'égalité  $B \cap (C_1 \cup \dots \cup C_K) = (B \cap C_1) \cup \dots \cup (B \cap C_K)$ .

- Si  $A \subset U$  est compact, alors  $P_M(A)$  est vraie.

$$K_1 \supset K_1 \cap K_2 \supset K_1 \cap K_2 \cap K_3 \supset \dots$$

$K_i$  est une réunion finie de disques fermés de rayon  $\frac{1}{i}$  centrés en points de  $K$  tels que  $K \subset K_i$ .



L'intersection des compacts de cette suite décroissante coïncide avec  $K$ . De plus  $P_M(K_1 \cap \dots \cap K_i)$  est vraie pour tout entier  $i \geq 1$ . Donc,  $P_M(K)$  est vraie.

- Si  $A \subset M$  est compact, alors  $P_M(A)$  est vraie.

On peut utiliser le fait que  $M$  est métrisable (par exemple, c'est un corollaire du théorème de métrisation d'Urysohn) et procéder de façon similaire à l'étape précédente.  $\square$

## Lemme (local-global pour les fermés)

Soit  $P_M(A)$  une affirmation à propos de sous-ensembles fermés  $A \subset M$  d'une variété topologique  $M$  de dimension  $n$ . Supposons que

- (i) si  $A$  est compact et convexe dans un certain ouvert euclidien de  $M$ , alors  $P_M(A)$  est vraie;
- (ii) si  $P_M(A)$ ,  $P_M(B)$  et  $P_M(A \cap B)$  sont vraies pour certains fermés  $A$  et  $B$  de  $M$ , alors  $P_M(A \cup B)$  est aussi vraie;
- (iii) si  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  est une suite décroissante de compacts de  $M$  tels que toutes les affirmations  $P_M(A_i)$  soient vraies, alors  $\bigcap_i P_M(A_i)$  est aussi vraie.
- (iv) si  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{J}}$  une collection de compacts très disjoints (il existe des voisinages ouverts deux à deux disjoints  $N_i \supset A_i, i \in \mathbb{J}$ ) de  $M$  telle que  $\bigcup_{i \in \mathbb{J}} A_i$  soit fermé, et si  $P_M(A_i)$  est vraie pour tout  $i \in \mathbb{J}$ , alors  $P_M(\bigcup_{i \in \mathbb{J}} A_i)$  est aussi vraie.

Alors,  $P_M(A)$  est vraie pour tout fermé  $A \subset M$ .

Démonstration On sait que  $P_M(A)$  est vraie pour tout compact  $A \subset M$ .

Considérons le compactifié d'Alexandrov  $M^\circ$  de  $M$  (si  $M$  n'est pas compact). Remarquons que  $M^\circ$  est localement compacte. On pose  $M^\circ = M \cup \{\infty\}$  (on ajoute un point). La topologie de  $M^\circ$  est formée des ouverts de  $M$  et des ensembles de la forme  $M \setminus K$ , où  $K \subset M$  est un compact.

L'espace topologique  $M^\circ$  est compact et métrisable, et on peut choisir une métrique  $d$  bornée par 1. Soit  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = 1/d(x, \infty)$ .

Si  $A \subset M$  est un sous-ensemble fermé, on pose

$$B_i = f^{-1}([2i-2, 2i-1]) \cap A, \\ C_i = f^{-1}([2i-1, 2i]) \cap A, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

On pose  $B = \bigcup_i B_i$  et  $C = \bigcup_i C_i$ .

Ce sont des réunions très disjointes de compacts.

De plus,  $B$  et  $C$  sont fermés. Donc,  $P_M(B)$  et  $P_M(C)$  sont vraies. De la même façon,  $P_M(B \cap C)$  est vraie.

Par conséquent,  $P_M(A)$  est vraie.  $\square$

## Démonstration du théorème.

(1) Exercice.

(2) On vérifie les quatre propriétés  
du dernier lemme.

(i) Immédiat.

(ii) On a (on ne mentionne pas les coefficients)

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{n+1}(M, M \setminus (A \cap B)) & \rightarrow & H_n(M, M \setminus (A \cup B)) & \rightarrow & H_n(M, M \setminus A) \oplus H_n(M, M \setminus B) & \rightarrow & H_n(M, M \setminus (A \cap B)) \\
 \parallel & & \downarrow j_{A \cup B} & & \downarrow j_A \oplus j_B & & \downarrow j_{A \cap B} \\
 0 & \rightarrow & \Gamma_c(A \cup B, \tilde{M}_G) & \rightarrow & \Gamma_c(A, \tilde{M}_G) \oplus \Gamma_c(B, \tilde{M}_G) & \rightarrow & \Gamma_c(A \cap B, \tilde{M}_G)
 \end{array}$$

On utilise le lemme des cinq.

(iii) On pose  $A = \bigcap_i A_i$ .

Les morphismes de restriction  $\Gamma(A_i, \tilde{M}_G) \rightarrow \Gamma(A, \tilde{M}_G)$   
induisent un isomorphisme  $\varinjlim \Gamma(A_i, \tilde{M}_G) \xrightarrow{\sim} \Gamma(A, \tilde{M}_G)$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 \Gamma(A_1, \tilde{M}_G) & \rightarrow & \Gamma(A_2, \tilde{M}_G) & \rightarrow & \Gamma(A_3, \tilde{M}_G) \rightarrow \dots \\
 & \searrow & \nearrow & \nearrow & \downarrow \dots \quad \dots \\
 & & & \varinjlim \Gamma(A_i, \tilde{M}_G) & \\
 & & & \searrow & \downarrow \\
 & & & \Gamma(A, \tilde{M}_G) &
 \end{array}$$

Pour la démonstration, on utilise le fait suivant:  
si  $W \supset A$  est un voisinage ouvert, il existe  $A_i$   
(parmi les compacts de la suite) tel que  $A_i \subset W$ .

On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim H_n(M, M \setminus A_i) & \xrightarrow{\sim} & H_n(M, M \setminus A) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow g_A \\ \varinjlim \Gamma(A_i, \tilde{M}_G) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(A, \tilde{M}_G) \end{array}$$

Pour montrer que le morphisme de la première ligne est un isomorphisme, on peut utiliser le fait que l'image de toute chaîne singulière est compacte.

(iv) On a

$$\begin{aligned} H_n(M, M \setminus \bigcup_i A_i) &\simeq H_n(\bigcup_i N_i, (\bigcup_i N_i) \setminus (\bigcup_i A_i)) \\ &\simeq \bigoplus_i H_n(N_i, N_i \setminus A_i) \simeq \bigoplus_i H_n(M, M \setminus A_i). \end{aligned}$$

Pour les groupes des sections à support compact, on a des isomorphismes similaires.  $\square$

Corollaire Soit  $M$  une variété topologique connexe de dimension  $n$ , et soit  $G$  un anneau commutatif unitaire. Supposons que  $M$  est compacte.

Si  $M$  est  $G$ -orientable, alors le morphisme

$$H_n(M; G) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$$

est un isomorphisme pour tout  $x \in M$ .

En particulier, dans ce cas, on a

$$H_n(M; G) \cong G.$$

Exercice Déterminer le groupe  $H_n(M; G)$ , où  $M$  est une variété topologique connexe compacte non  $G$ -orientable de dimension  $n$ .

Un élément de  $H_n(M; G)$  tel que son image dans  $H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$  soit un générateur pour tout point  $x \in M$  s'appelle une classe fondamentale de  $M$  à coefficients dans  $G$ .

Une telle classe existe ssi  $M$  est compacte et  $G$ -orientable.

## Variétés topologiques connexes compactes de dimension 1 ou 2

dim 1

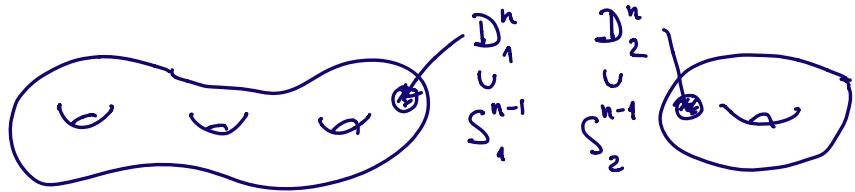


cercle  $S^1$

dim 2

			...	$S_g = \#_g \mathbb{T}$
	$\mathbb{R}P^2$	$\underline{\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2}$	...	$V_g = \#_g \mathbb{R}P^2$

On définit l'opération  $\#$  de somme connexe pour les surfaces topologiques (connexes compactes sans bord). Considérons deux telles surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  et choisissons deux disques fermés  $D_1 \subset \Sigma_1$  et  $D_2 \subset \Sigma_2$ . On choisit un homéomorphisme  $\varphi$  entre les bords de ces disques. La surface  $\Sigma_1 \# \Sigma_2$  est obtenue de la réunion disjointe  $(\Sigma_1 \setminus D_1) \coprod (\Sigma_2 \setminus D_2)$ , où  $\overset{\circ}{D}_1$  et  $\overset{\circ}{D}_2$  sont les intérieurs de  $D_1$  et  $D_2$ , respectivement, à l'aide de l'identification des bords de  $D_1$  et  $D_2$  par l'homéomorphisme  $\varphi$ . On peut vérifier que le type topologique du résultat ne dépend pas du choix de disques et d'homéomorphisme  $\varphi$ .



On généralise la définition ci-dessus aux dimensions supérieures. Le seul point délicat concerne le cas de deux variétés orientables (et orientées).

Dans ce cas, les sphères  $S_1^{n-1}$  et  $S_2^{n-1}$  sont orientées, et on suppose que  $\varphi$  renverse l'orientation (dans le cas de surfaces topologiques orientables et orientées, le type topologique d'une somme connexe ne change pas si on remplace un homéomorphisme qui renverse l'orientation par un homéomorphisme qui préserve l'orientation, car toute surface topologique orientable possède un homéomorphisme qui renverse l'orientation).

On termine ce paragraphe par une autre définition importante.

Déf. Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n$ , et soit  $N \subset M$  une sous-variété topologique compacte orientable et orientée de dimension  $k \leq n$ .

On considère la classe fondamentale  $[N] \in H_k(N)$ .

La classe réalisée par  $N$  dans  $H_k(M)$

est  $i_{\#}[N]$ , où  $i_{\#}: H_k(N) \rightarrow H_k(M)$  est

le morphisme induit par l'inclusion  $i: N \hookrightarrow M$ .

## §2. Dualité de Poincaré (première approche)

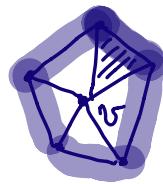
Soit  $M$  une variété topologique connexe, compacte, orientable et orientée de dimension  $n$ .

Supposons qu'il existe une triangulation (finie) combinatoire  $\tau$  de  $M$

(le link de tout simplexe de  $\tau$  est une PL-sphère).

L'étoile d'un simplexe  $\sigma$  d'une triangulation est la réunion de tous les simplexes contenant  $\sigma$ .

Le link de  $\sigma$  est la réunion des simplexes  $\sigma'$  de la triangulation tels que  $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$  et  $\sigma, \sigma'$  sont des faces d'un simplexe.



Considérons la subdivision barycentrique  $\tau_1$  de  $\tau$ .

Décomposition cellulaire duale de  $\tau$ . Cellules (fermées):

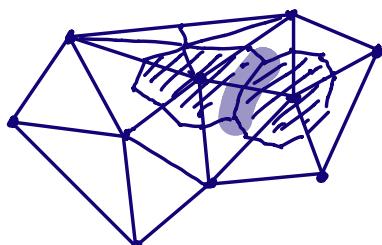
sommet  $v$  de  $\tau$

↓  
 $n$ -cellule fermée  $v^*$   
(étoile de  $v$  dans  $\tau_1$ )

$k$ -simplexe  $\sigma$  de  $\tau$

↓  
( $n-k$ )-cellule  $\sigma^*$  (intersection  
des  $n$ -cellules fermées des sommets)

On considère chaque  
( $n-k$ )-cellule comme  
une  $(n-k)$ -cochaîne.



Pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ ,  
à toute  $k$ -chaîne simpliciale  $c$  de  $M$ , on associe  
une  $(n-k)$ -cochaîne cellulaire  $\mathcal{D}(c)$ , et on a  
 $\delta \mathcal{D}(c) = \pm \mathcal{D}(\partial c)$ . On obtient l'isomorphisme de Poincaré  
 $H_k(M) \xrightarrow{\sim} H^{n-k}(M)$  pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ .

Pour toute  $k$ -chaîne simpliciale  $c_1 = \sum_i m_i \sigma_i$  de  $M$  et toute  $(n-k)$ -chaîne cellulaire  $c_2 = \sum_i e_i \sigma_i^*$ , on peut considérer leur indice d'intersection

$$\chi(c_1, c_2) = \sum_{i,j} \delta_{ij} m_i e_j.$$

On a  $\chi(\partial c, d) = \pm \chi(c, \partial d)$  pour toute  $k$ -chaîne simpliciale  $c$  de  $M$  et toute  $(n-k+1)$ -chaîne cellulaire  $d$  de  $M$  ( $1 \leq k \leq n$ ).

On obtient une forme bilinéaire entière

$$H_k(M)/_{\text{Tors}} \times H_{n-k}(M)/_{\text{Tors}} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(ou H_k(M; \mathbb{Z}/2) \times H_{n-k}(M; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2)$$

appelée forme d'intersection de  $M$ .

Exemple Pour  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ , on a  $H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}$ .

Un générateur est donné par la classe réalisée par une droite. Le carré de cette classe par rapport à la forme d'intersection

$$H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) \times H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) \rightarrow \mathbb{Z}$$

est égal à 1, autrement dit, cette forme bilinéaire est isomorphe à  $\langle 1 \rangle$ .

### §3. Variétés différentiables

Un atlas d'une variété topologique  $M$  de dimension  $n$  est une collection de cartes locales  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que les ouverts  $U_i$  forment un recouvrement de  $M$ .

Un tel atlas est dit de classe  $C^k$  si, pour tous les  $i$  et  $j$  tels que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , l'application

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

soit un difféomorphisme de classe  $C^k$  (ici  $k$  est un entier strictement positif ou  $\infty$ ).

Atlas compatibles. Variété différentiable de classe  $C^k$  (une classe d'équivalence d'atlas de classe  $C^k$ ). Atlas maximal.

Variétés lisses (variétés différentiables de classe  $C^\infty$ ).

Applications lisses. Difféomorphismes.

On dit qu'une variété lisse est orientable si elle admet un atlas orienté, c'est-à-dire, un atlas de classe  $C^\infty$  dont toutes les applications de changement de cartes sont de Jacobiens strictement positifs.

Une orientation d'une variété lisse orientable.

Théorème Soit  $M$  une variété lisse de dim.  $n \geq 1$ .

Alors,  $M$  est orientable en tant qu'une variété topologique ssi elle est orientable en tant qu'une variété lisse.

### Démonstration

Soit  $x \in M$  un point, et soit  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une carte locale telle que  $x \in U$ . On peut supposer que  $\varphi(x) = 0$  et  $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$ .

On fixe un générateur  $\alpha \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

Alors,  $\varphi_*^{-1}(\alpha) \in H_n(U, U \setminus \{x\})$  est un générateur.

Si  $\varphi': U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une autre carte locale

telle que  $\varphi'(x) = 0$  (on peut supposer que  $U' \subset U$ ), alors le difféomorphisme  $\varphi' \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  est de Jacobien strictement positif en tout point.

Un tel difféomorphisme est isotope à l'identité (exercice). On obtient que l'application

$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , fournie

par  $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ , est homotope à l'identité.

La section  $M \rightarrow \tilde{M}_{\mathbb{Z}}$  ainsi définie est continue

(on utilise l'application  $\varphi_*^{-1}: H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D^n) \rightarrow H_n(U, U \setminus V)$ , où  $V = \varphi^{-1}(D^n)$ ).

⇒ Soit  $s: M \rightarrow \tilde{M}_{\mathbb{Z}}$  une section dont toutes les images sont des générateurs.  
Pour chaque carte locale  $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on peut comparer le générateur  $s(x)$  (ici  $x \in U$ ) et le générateur fixé de  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .  
Modification appropriée de cartes (on compose, si nécessaire, des cartes avec une réflexion) donne un atlas orienté. □

## §4. Cohomologie de de Rham

On note  $A^p(V)$  l'espace des  $p$ -formes multilinéaires alternées sur un espace vectoriel (réel)  $V$ .

On note  $\omega \wedge \eta$  le produit extérieur de  $\omega \in A^p(V)$

et  $\eta \in A^q(V)$ :

$$(\omega \wedge \eta)(x_1, \dots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \omega(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_p}) \eta(x_{\sigma_{p+1}}, \dots, x_{\sigma_{p+q}}).$$

$(\sigma_1 < \dots < \sigma_p \text{ et } \sigma_{p+1} < \dots < \sigma_{p+q})$

Si  $\dim V = n$ , on a  $\dim A^p(V) = \binom{n}{p}$ :

Si  $a_1, \dots, a_n$  est une base de  $V^*$ , alors

$\{a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_p} \mid i_1 < \dots < i_p\}$  est une base de  $A^p(V)$ .

---

Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$ .

On note  $T_x(M)$  l'espace tangent de  $M$  en  $x \in M$ .

Rappel Si  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$  est une courbe lisse

(définie sur un voisinage ouvert  $\mathbb{R}_0 \subset \mathbb{R}$  de  $0 \in \mathbb{R}$ )

t.q.  $\gamma(0) = x$ , alors, pour toute fonction lisse  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$

(où  $U \ni x$  est un voisinage ouvert), on considère

la dérivée directionnelle  $D_{\gamma}(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=0}$

de  $f$ .

Relation d'équivalence.

Vecteurs tangents.

Une  $p$ -forme différentielle sur  $M$  est une application différentiable (de classe  $C^\infty$ ) qui associe à tout point  $x \in M$  une forme  $\omega_x \in \Lambda^p(T_x(M))$  (une section  $C^\infty$  du fibré vectoriel  $\Lambda^p T^*(M)$ ).

En coordonnées locales  $x_1, \dots, x_n$  au voisinage de  $x$ , l'espace cotangent  $T_x^*(M)$  a une base  $dx_1, \dots, dx_n$ , où  $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$ .

Ici,  $\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_x$  est donné par  $D_{v_i}$ , où  $v_i(t) = (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$ .

Pour toute  $p$ -forme différentielle  $\omega$  sur  $M$ , au voisinage de  $x$ , on a

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} f_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \text{ où } f_{i_1, \dots, i_p} \text{ est lisse.}$$

On note  $\Omega^p(M)$  l'espace vectoriel des  $p$ -formes différentielles sur  $M$ . On pose  $\Omega(M) = \bigoplus_p \Omega^p(M)$ . Produit extérieur (point par point).

Dérivée extérieure  $d: \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ .

Si  $f \in \Omega^0(M)$ , la 1-forme différentielle  $df$  est la différentielle de  $f$ :  $df(X) = X(f)$  pour tout champ de vecteurs  $X$  de  $M$ . On a

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad (\text{au voisinage de } x).$$

Si  $\omega \in \Omega^p(M)$  et

$\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  (au voisinage de  $x$ ),  
alors

$$d\omega = df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Par linéarité, on obtient la dérivée extérieure

$$d: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M).$$

On a  $d \circ d = 0$ .

Formes fermées. Formes exactes.

Groupes  $H_{\Omega}^p(M)$  de cohomologie de de Rham de  $M$ .

Si  $\omega \in \Omega^p(M)$  et  $\eta \in \Omega^q(M)$ , on a

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta.$$

Ceci fournit une application bilinéaire

$$H_{\Omega}^p(M) \times H_{\Omega}^q(M) \rightarrow H_{\Omega}^{p+q}(M)$$

donnée par  $([\omega], [\eta]) \mapsto [\omega \wedge \eta]$ .

On obtient une algèbre graduée (associative  
et anti-commutative)  $H_{\Omega}^{\bullet}(M)$ .

Si  $M$  et  $N$  deux variétés lisses et

$\Theta: M \rightarrow N$  est une application lisse,

pour tout entier  $p \geq 0$ , on a l'application

$\Theta^*: \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^p(M)$   
 définie par  
 $\Theta^*(\omega)(X_1, \dots, X_p) = \omega(\Theta_*(X_1), \dots, \Theta_*(X_p)),$   
 où  $X_1, \dots, X_p$  sont des vecteurs tangents à  $M$   
 en  $x \in M$  (si  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction, on a  $\Theta^*(f) = f \circ \theta$ ).  
 Ici,  $\Theta_*(X)(f) = X(f \circ \theta)$  pour tout vecteur tangent  $X$   
 à  $M$  en  $x$ .  
 On a  $\Theta^*(fdx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) = (f \circ \theta)d(x_1 \circ \theta) \wedge \dots \wedge d(x_p \circ \theta)$ .

L'application  $\Theta^*$  induit un morphisme

$$H_{\Omega}^{\bullet}(N) \rightarrow H_{\Omega}^{\bullet}(M) \text{ d'algèbres graduées.}$$

### Intégration de formes différentielles

Le support d'une forme  $\omega \in \Omega^p(M)$  est  
 l'adhérence de l'ensemble  $\{x \in M \mid \omega_x \neq 0\}$ .

Si  $\omega$  est une  $n$ -forme différentielle  
 sur un ouvert  $W \subset \mathbb{R}^n$  à support compact,  
 on peut étendre  $\omega$  à  $\mathbb{R}^n$  (par 0) avec le support  
 dans un cube.

Si  $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$   
 (où  $f$  est à support compact), on pose

$$\int_W \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\dots} \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Si  $W' \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert et  
 $\theta : W' \rightarrow W$  est un difféomorphisme,  
alors

$$\theta^*(\omega) = (f \circ \theta)^* d(x_1 \circ \theta) \wedge \dots \wedge d(x_n \circ \theta)$$

et

$$\int_{W'} \theta^*(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \theta^*(\omega) = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \omega$$

(formule de changement de variables).

Si  $M$  est orientée et  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$   
est une carte locale d'un atlas orienté,  
considérons une  $n$ -forme  $\omega \in \Omega^n(M)$  dont  
le support est contenu dans  $U$ . On pose

$$\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^{-1})^* \omega.$$

On vérifie que le résultat ne dépend pas du choix  
d'une carte locale (de l'atlas orienté).

Pour une forme arbitraire  $\omega \in \Omega^n(M)$ , on procède  
par une partition de l'unité:

- $f_i \geq 0$  des fonctions lisses;
- le support de  $f_i$  est contenu dans le domaine de définition  $U_i$  d'une carte locale, et  $\{U_i\}_i$  forment un recouvrement localement fini de  $M$ ;
- $\sum_i f_i = 1$ .

Tout compact  $K \subset M$  touche un nombre fini d'ouverts  $U_i$ . On pose

$$\int \omega = \sum_i \int f_i \omega.$$

Si  $\{g_j\}$  est une autre partition de l'unité, on a  
 $\sum_{i,j} f_i g_j = 1$ .

Donc,

$$\sum_i \int f_i \omega = \sum_i \sum_j \int f_i g_j \omega = \sum_j \int g_j \omega.$$

Si  $\theta: M \rightarrow N$  est un difféomorphisme de variétés orientées qui préserve l'orientation,

on a

$$\int_N \omega = \int_M \theta^* \omega$$

pour toute  $n$ -forme  $\omega \in \Omega^n(N)$  à support compact.

## Relations avec la cohomologie singulière

Introduisons d'abord la notion  
d'une variété topologique à bord.

Déf. Une variété topologique de dimension  $n$  à bord (où  $n \geq 1$  est un entier) est un espace topologique  $M$  t.q.

- tout point de  $M$  possède un voisinage ouvert homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ;
- $M$  est séparé;
- $M$  possède une base dénombrable.

L'ensemble  $\partial M$  des points de  $M$  qui possède un voisinage ouvert homéomorphe à

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$$

et qui correspondent sous cette identification à un point de l'hyperplan  $x_1=0$   
s'appelle le bord de  $M$ .

Remarques (1) Si  $x \in \partial M$ , alors  $x$  ne possède pas de voisinage (dans  $M$ ) homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . En effet, si  $U \ni x$  est un voisinage de  $x$  dans  $M$ , on a

$$H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong H_n(U, U \setminus \{x\}),$$
 d'après le théorème d'excision.

(2) L'espace topologique  $\partial M$  est une variété topologique de dimension  $n-1$  (sans bord).

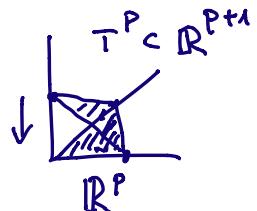
Variétés lisses à bord.

Intégration de formes sur une variété lisse à bord.



Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$ .

On se restreint aux simplexes singuliers lisses  $\sigma: T^P \rightarrow M$ , et on considère  $T^P$  (et toutes ses faces) comme simplexe orienté.



Soit  $\omega \in \Omega^P(M)$  et  $\sigma: T^P \rightarrow M$  un simplexe singulier lisse (défini sur un voisinage ouvert de  $T^P \subset \mathbb{R}^P$ ). Alors,  $\sigma^* \omega$  est une  $p$ -forme sur (un voisinage ouvert de)  $T^P$ .

On pose  $\int_M \omega = \int_{T^P} \sigma^* \omega$  (on omet des détails techniques concernant le  $(p-2)$ -squelette de  $T^P$ ).

Pour une  $p$ -chaîne  $c = \sum \sigma n_\sigma \sigma \in C_p^{\text{lisse}}(M)$ , on pose

$$\int_c \omega = \sum_{\sigma} n_\sigma \int_{\sigma} \omega.$$

On obtient un morphisme

$$\psi^p : \Omega^p(M) \rightarrow \text{Hom}(C_p^{\text{lisse}}(M), \mathbb{R}) = C_p^{\text{lisse}}(M; \mathbb{R})$$

donné par  $\psi^p(\omega)(c) = \int_c \omega,$

et un morphisme de complexes de (co)chaînes.

C'est un corollaire du théorème de Stokes :

si  $M$  est une variété lisse orientée avec le bord  $\partial M$  et  $\omega \in \Omega^{n-i}(M)$  est une  $(n-i)$ -forme à support compact, alors

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

On note  $H_p^{\text{lisse}}(M)$  les groupes d'homologie de  $C_{\text{lisse}}^{\bullet}(M; \mathbb{R})$ .

Théorème de de Rham Le morphisme induit

$$\psi^* : H_p^{\text{lisse}}(M) \rightarrow H_p^{\text{lisse}}(M)$$

est un isomorphisme pour tout entier  $p \geq 0$ .

Deux séries de résultats.

- Dans le cadre de simplexes singuliers lisses : suites exactes longues, suite de Mayer - Vietoris (pour sous-ensembles ouverts), calcul pour les espaces contractiles.
- Résultats similaires pour la cohomologie de de Rham.

- Lemme de Poincaré Le théorème de de Rham est vrai pour tout sous-ensemble ouvert et convexe de  $\mathbb{R}^n$ .
- Analogue de la suite de Mayer - Vietoris

$U, V \subset M$  deux ouverts.

Suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Omega^p(U \cup V) \xrightarrow{i} \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \xrightarrow{+} \Omega^p(U \cap V) \rightarrow 0$$

Pour montrer la surjectivité de la deuxième application, considérons une  $p$ -forme  $\omega$  sur  $U \cap V$ .

On peut utiliser une partition de l'unité pour trouver une fonction lisse

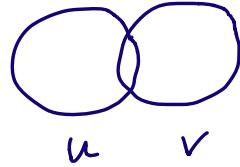
$$f: U \cup V \rightarrow \mathbb{R}$$

qui est 0 sur un voisinage de  $U \setminus V$

et 1 sur un voisinage de  $V \setminus U$ .

On a une décomposition

$$\omega = f\omega + (1-f)\omega.$$



Les formes  $f\omega$  et  $(1-f)\omega$  peuvent être prolongées (par 0) sur  $U$  et  $V$ , respectivement.

Le diagramme suivant est commutatif (ici  $U = \{U, V\}$ ):

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \Omega^p(U \cup V) & \rightarrow & \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) & \rightarrow & \Omega^p(U \cap V) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow i^* \psi & & \downarrow \psi \oplus \psi & & \downarrow \psi \\
 0 & \rightarrow & C_{U, \text{lisse}}^p(U \cup V; \mathbb{R}) & \rightarrow & C_{\text{lisse}}^p(U; \mathbb{R}) \oplus C_{\text{lisse}}^p(V; \mathbb{R}) & \rightarrow & C_{\text{lisse}}^p(U \cap V; \mathbb{R}) \rightarrow 0
 \end{array}$$

On obtient la suite de Mayer - Vietoris et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_{\Omega}^p(U \cup V) & \rightarrow & H_{\Omega}^p(U) \oplus H_{\Omega}^p(V) & \rightarrow & H_{\Omega}^p(U \cap V) \rightarrow H_{\Omega}^{p+1}(U \cup V) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & H_{\text{lisse}}^p(U \cup V; \mathbb{R}) & \rightarrow & H_{\text{lisse}}^p(U; \mathbb{R}) \oplus H_{\text{lisse}}^p(V; \mathbb{R}) & \rightarrow & H_{\text{lisse}}^p(U \cap V; \mathbb{R}) \rightarrow H_{\text{lisse}}^{p+1}(U \cup V; \mathbb{R}) \rightarrow \dots \end{array}$$

Corollaire Si  $\psi^*$  est un isomorphisme pour  $U, V$  et  $U \cap V$  (pour tout  $p$ ), il est aussi pour  $U \cup V$ .

- Lemme Soit  $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  une collection d'ouverts deux à deux disjoints telle que  $\psi^*$  soit un isomorphisme pour tout  $U_i$ . Alors,  $\psi^*$  est un isomorphisme pour  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$ .

C'est un corollaire du calcul des groupes de cohomologie (dans le cas singulier et dans le cas de de Rham) et la naturalité de  $\psi^*$ .

## Lemme (local-global pour les ouverts)

Soit  $P(A)$  une affirmation à propos de sous-ensembles ouverts  $A \subset M$  d'une variété topologique (lisse)  $M$  de dimension  $n$ . Supposons que

- (i) si  $A$  est homéomorphe (difféomorphe) à un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $P(A)$  est vraie;
- (ii) si  $P(A), P(B)$  et  $P(A \cap B)$  sont vraies pour certains ouverts  $A$  et  $B$  de  $M$ , alors  $P(A \cup B)$  est aussi vraie;
- (iii) si  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  est une collection d'ouverts de  $M$  deux à deux disjoints et  $P(A_i)$  est vraie pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , alors  $P(\bigcup_i A_i)$  est aussi vraie.

Alors,  $P(U)$  est vraie pour tout ouvert  $U \subset M$ .

Démonstration Par (i) et (ii), l'affirmation  $P(U)$  est vraie pour toute réunion finie  $U$  d'ouverts convexes de  $\mathbb{R}^n$  (pour l'instant, on considère le cas  $M \subset \mathbb{R}^n$ ). Soit  $f: M \rightarrow [0, +\infty)$  une fonction propre.

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on pose

$$K_n = f^{-1}([n, n+1]).$$

On peut recouvrir le compact  $K_n$  par une réunion finie  $U_n \subset f^{-1}(n - \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2})$  d'ouverts convexes.

Toutes les affirmations  $P(U_n)$  sont vraies.

On pose  $U = \bigcup_{n \text{ pair}} U_n$  et  $V = \bigcup_{n \text{ impair}} U_n$ .

On déduit de (iii) que  $P(U)$  et  $P(V)$  sont vraies. De plus,

$$U \cap V = \bigcup_{i,j} (U_{2i} \cap U_{2j+1}).$$

Les ouverts de cette réunion sont deux à deux disjoints, et chacun de ces ouverts est une réunion finie d'ouverts convexes.

Donc,  $P(U \cup V)$  est vraie.

Par conséquent,  $P(M) = P(U \cup V)$  est aussi vraie.

L'énoncé est, donc, démontré pour les ouverts de  $\mathbb{R}^n$ .

En remplaçant les expressions ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$  dans le raisonnement présenté par ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on obtient l'énoncé demandé.  $\square$

Ceci termine la démonstration du théorème de de Rham.

L'isomorphisme obtenu  $\psi^*: H_\Omega^p(M) \rightarrow H_{\text{lisse}}^p(M; \mathbb{R})$  peut être composé avec un isomorphisme  $H_{\text{lisse}}^p(M; \mathbb{R}) \rightarrow H^p(M; \mathbb{R})$ .

L'inclusion  $C_\cdot^{\text{lisse}}(M) \hookrightarrow C_\cdot(M)$  induit un morphisme de complexes de (co)chaînes  $C^\bullet(M; G) \rightarrow C^\bullet_{\text{lisse}}(M; G)$  pour tout groupe abélien  $G$ .

On peut utiliser le lemme local-global pour les ouverts pour démontrer que le morphisme induit  $H^p(M; G) \rightarrow H_{\text{lisse}}^p(M; G)$  est un isomorphisme pour tout entier  $p \geq 0$  (isomorphisme de  $G$ -modules si  $G$  est un anneau commutatif).

## Dualité de Poincaré pour la cohomologie de de Rham

Soit  $M$  une variété lisse compacte de dimension  $n$ .

Dans cette situation, tous les groupes de cohomologie de de Rham de  $M$  sont de dimension finie.

Supposons, en plus, que  $M$  est orientée.

On considère l'application bilinéaire  
(pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ )

$$H_{\Omega}^k(M) \times H_{\Omega}^{n-k}(M) \rightarrow H_{\Omega}^n(M) \quad (\text{cup produit})$$

et la forme bilinéaire

$$\int : H_{\Omega}^k(M) \times H_{\Omega}^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par  $([\omega], [\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$ .

### Théorème (dualité de Poincaré)

La forme bilinéaire  $\int$  est non dégénérée.

### Démonstration

On peut vérifier les hypothèses du lemme local-global pour les ouverts dans le cas de notre affirmation.

### Corollaire Le morphisme

$$H_{\Omega}^k(M) \rightarrow (H_{\Omega}^{n-k}(M))^*,$$

fournit par la forme bilinéaire  $\int$ ,  
est un isomorphisme pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ .

Si la variété  $M$  n'est pas compacte, on note  $\Omega_c^k(M)$  l'espace de  $k$ -formes différentielles à support compact sur  $M$ .

Complexe

$$\Omega_c^0(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^1(M) \xrightarrow{d} \dots$$

Groupes  $H_{\Omega,c}^k(M)$  de cohomologie de de Rham de  $M$  à support compact.

Si  $M$  est une variété lisse orientée (de dim.  $n$ ), on a la forme bilinéaire (pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ )

$$\int : H_{\Omega}^k(M) \times H_{\Omega,c}^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{définie par } ([\omega], [\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

(remarquons que la forme  $\omega \wedge \eta$  est à support compact).

Le morphisme

$$H_{\Omega}^k(M) \rightarrow (H_{\Omega,c}^{n-k}(M))^*$$

fournit par la forme bilinéaire  $\int$ ,

est un isomorphisme pour tout entier  $0 \leq k \leq n$

(on ne démontre pas cet énoncé ici).

Ch. 3. Dualité de Poincaré  
et théorie des intersections

§ 1. Cup produit et cap produit

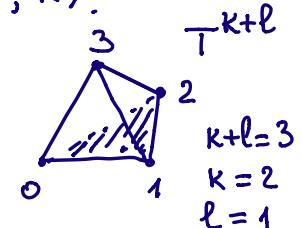
Soit  $R$  un anneau commutatif, et soit  $X$  un espace topologique. Pour tous entiers  $k, l \geq 0$ , on définit l'opération de cup produit

$$\cup : H^k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H^{k+l}(X; R).$$

Pour toute cochaîne  $c \in C^k(X; R)$ ,

toute cochaîne  $d \in C^l(X; R)$  et

tout  $(k+l)$ -simplexe singulier  $\sigma$  de  $X$ , on pose



$$(c \cup d)(\sigma) = c(\sigma \circ \Delta_{(e_0, \dots, e_k)}) d(\sigma \circ \Delta_{(e_k, \dots, e_{k+l})}).$$

Ceci définit une application bilinéaire

$$\cup : C^k(X; R) \times C^l(X; R) \rightarrow C^{k+l}(X; R).$$

Pour tout  $c \in C^k(X; R)$  et tout  $d \in C^l(X; R)$ , on a

$$\delta(c \cup d) = \delta c \cup d + (-1)^k c \cup \delta d.$$

On obtient le cup produit

$$\cup : H^k(X; R) \times H^\ell(X; R) \rightarrow H^{k+\ell}(X; R).$$

### Propriétés

(1) Si  $\alpha_i \in H^{k_i}(X; R)$ ,  $i=1,2,3$ , alors

$$\alpha_1 \cup (\alpha_2 \cup \alpha_3) = (\alpha_1 \cup \alpha_2) \cup \alpha_3.$$

(2) Si  $\alpha_i \in H^{k_i}(X; R)$ ,  $i=1,2$ , alors

$$\alpha_1 \cup \alpha_2 = (-1)^{k_1 k_2} \alpha_2 \cup \alpha_1.$$

(3) Si  $h: R \rightarrow R'$  est un morphisme

d'anneaux commutatifs,

et  $\alpha_i \in H^{k_i}(X; R)$ ,  $i=1,2$ , alors

$$h^*(\alpha_1 \cup \alpha_2) = h^*(\alpha_1) \cup h^*(\alpha_2).$$

(4) Si  $Y$  est un espace topologique,

$f: Y \rightarrow X$  est une application continue,

et  $\alpha_i \in H^{k_i}(X; R)$ , alors

$$f^*(\alpha_1 \cup \alpha_2) = f^*(\alpha_1) \cup f^*(\alpha_2).$$

Anneau de cohomologie  $H^*(X; R)$  de  $X$  à coefficients dans  $R$ .

## Cup produits relatifs $(X, A)$ paire topologique

$$H^k(X; R) \times H^l(X, A; R) \longrightarrow H^{k+l}(X, A; R)$$

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X; R) \longrightarrow H^{k+l}(X, A; R)$$

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X, A; R) \longrightarrow H^{k+l}(X, A; R).$$

Pour tous entiers  $k \geq l \geq 0$ , on peut aussi définir  
l'opération de cap produit

$$\cap : H_k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H_{k-l}(X; R).$$

Pour tout  $k$ -simplexe singulier  $\sigma$  de  $X$  et  
toute cochaîne  $c \in C^l(X; R)$ , on pose

$$\sigma \cap c = c(\sigma \circ \Delta_{(e_0, \dots, e_l)}) \sigma \circ \Delta_{(e_l, \dots, e_k)}$$

Ceci définit une application bilinéaire

$$\cap : C_k(X; R) \times C^l(X; R) \rightarrow C_{k-l}(X; R).$$

Pour tout  $k$ -simplexe singulier  $\sigma$  de  $X$  et  
toute  $l$ -cochaîne singulière  $c \in C^l(X; R)$ , on a

$$\partial(\sigma \cap c) = (-1)^l (\partial \sigma \cap c - \sigma \cap \partial c).$$

On obtient le cap produit

$$\cap : H_k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H_{k-l}(X; R).$$

Cap produits relatifs  $(X, A)$  paire topologique

$$H_k(X, A; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H_{k-l}(X, A; R)$$

$$H_k(X, A; R) \times H^l(X, A; R) \rightarrow H_{k-l}(X; R).$$

Naturalité Si  $f: X \rightarrow Y$  est une application continue, on a

$$f_*(\alpha) \cap \varphi = f_*(\alpha \cap f^*(\varphi))$$

pour tout  $\alpha \in H_k(X; R)$  et tout  $\varphi \in H^l(Y; R)$ .

## § 2. Dualité de Poincaré

Soit  $M$  une variété topologique (sans bord) de dimension  $n$ . On suppose que  $M$  est compacte et  $R$ -orientable, et on considère une classe fondamentale  $[M] \in H_n(M; R)$  de  $M$  à coefficients dans  $R$ , où  $R$  est un anneau commutatif unitaire.

## Théorème (Isomorphisme de Poincaré dans le cas compact)

L'application  $D: H^m(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_{n-m}(M; \mathbb{R})$   
définie par  $D(\alpha) = [M] \wedge \alpha$   
est un isomorphisme pour tout entier  $0 \leq m \leq n$ .

Pour démontrer ce théorème, on aura besoin  
de la notion de cohomologie à support compact.

Si  $X$  est un espace topologique et  $G$  est  
un groupe abélien, pour tout entier  $m > 0$ ,  
on considère le sous-groupe

$$C_c^m(X; G) \subset C^m(X; G)$$

formé par les cochaînes  $\varphi: C_m(X) \rightarrow G$   
pour lesquelles il existe un compact  $K_\varphi \subset X$  tel que  
 $\varphi$  soit 0 sur toutes les  $m$ -chaînes dans  $X \setminus K_\varphi$ .

Remarquons que  $\delta \varphi$  est 0 sur toutes  
les  $(m+1)$ -chaînes dans  $X \setminus K_\varphi$ .

Complexe de cochaînes de  $X$  à support compact :

$$\dots \xleftarrow{\delta} C_c^2(X; G) \xleftarrow{\delta} C_c^1(X; G) \xleftarrow{\delta} C_c^0(X; G)$$

Groupes de cohomologie  $H_c^m(X; G)$  de  $X$   
à coefficients dans  $G$  et à support compact.

Autre description Remarquons que  $C_c^m(X; G)$   
est la réunion  $\bigcup_{K \subset X \text{ compact}} C^m(X, X \setminus K)$ .

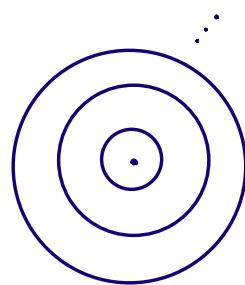
Si  $K \subset L$  sont des sous-ensembles compacts de  $X$ ,  
on a le morphisme  $H^m(X, X \setminus K) \rightarrow H^m(X, X \setminus L)$   
(pour tout entier  $m \geq 0$ ) induit par l'inclusion

$$X \setminus L \hookrightarrow X \setminus K.$$

On a

$$\varinjlim H_c^m(X, X \setminus K; G) \simeq H_c^m(X; G).$$

Exemple On a  $H_c^m(\mathbb{R}^n; G) = 0$  si  $m \neq n$   
et  $H_c^n(\mathbb{R}^n; G) \simeq G$ .



Remarque Si  $X$  est séparé, le groupe  
 $H^m(X, X \setminus K; G)$ , où  $K \subset X$  est un compact,  
ne dépend que d'un voisinage de  $K$  (et de  $m$  et  $G$ ).

Soit  $M$  une variété topologique (sans bord)  
de dimension  $n$ . Supposons que  $M$  est  
 $R$ -orientable, où  $R$  est un anneau commutatif  
unitaire. On suppose que  $M$  est  $R$ -orientée.

Si  $K \subset L \subset M$  sont deux sous-ensembles  
compacts, on a (pour tout entier  $0 \leq m \leq n$ )

$$H_n(M, M \setminus L; R) \times H^m(M, M \setminus L; R) \xrightarrow{\cap} H_{n-m}(M; R)$$

$$H_n(M, M \setminus K; R) \times H^m(M, M \setminus K; R) \xrightarrow{\cap \text{ II}} H_{n-m}(M; R)$$

Il existe un unique élément  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K; R)$  qui, pour tout point  $x \in K$ , donne l'orientation locale choisie.

De la même façon, on a  $\mu_L \in H_n(M, M \setminus L; R)$ . L'unicité implique que  $i_*(\mu_L) = \mu_K$ , où  $i$  est l'inclusion  $(M, M \setminus L) \hookrightarrow (M, M \setminus K)$ .

La naturalité du cap produit implique que

$$\mu_K \cap \alpha = i_*(\mu_L) \cap \alpha = \mu_L \cap i^*(\alpha)$$

pour tout  $\alpha \in H^m(M, M \setminus K; R)$ .

Donc, les morphismes

$$H^m(M, M \setminus K; R) \rightarrow H_{n-m}(M; R),$$

$$\alpha \mapsto \mu_K \cap \alpha$$

où  $K$  parcourt les compacts de  $M$ , induisent un morphisme

$$D_M: H_c^m(M; R) \rightarrow H_{n-m}(M; R).$$

### Théorème (Isomorphisme de Poincaré)

Le morphisme  $D_M: H_c^m(M; R) \rightarrow H_{n-m}(M; R)$  est un isomorphisme pour toute variété topologique  $R$ -orientée de dimension  $n$  et tout entier  $0 \leq m \leq n$ .

Dans toute la démonstration, on n'indique pas  $R$ .

Lemme Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $M$ .

On a le diagramme suivant, formé par deux suites de Mayer-Vietoris, qui est commutatif (à signe près) :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow H_c^m(U \cap V) & \rightarrow H_c^m(U) \oplus H_c^m(V) & \rightarrow H_c^m(U \cup V) & \rightarrow H_c^{m+1}(U \cap V) & \rightarrow \dots \\ & \downarrow D_{U \cap V} & \downarrow D_U \oplus D_V & \downarrow D_{U \cup V} & \downarrow D_{U \cap V} & & \\ \dots & \rightarrow H_{n-m}^m(U \cap V) & \rightarrow H_{n-m}^m(U) \oplus H_{n-m}^m(V) & \rightarrow H_{n-m}^m(U \cup V) & \rightarrow H_{n-m-1}^m(U \cap V) & \rightarrow \dots \end{array}$$

On va démontrer ce lemme plus tard.

Lemme Supposons que  $M = \bigcup_i U_i$ , où

$U_1 \subset U_2 \subset \dots$  est une suite d'ouverts.

Si  $D_{U_i} : H_c^m(U_i) \rightarrow H_{n-m}^m(U_i)$

est un isomorphisme pour tout  $i$ , alors

$D_M : H_c^m(M) \rightarrow H_{n-m}^m(M)$  est aussi un isomorphisme.

Démonstration Par le théorème d'excision,

le groupe  $H_c^m(U_i)$  peut être vu comme limite inductive

des groupes  $H^m(M, M - K)$ , où  $K$  parcourt

les sous-ensembles compacts de  $U_i$ . Par conséquent, on a des morphismes naturels

$$H_c^m(U_i) \rightarrow H_c^m(U_{i+1}), i=1, 2, \dots$$

Donc, on peut former  $\lim H_c^m(U_i)$  qui est isomorphe à  $H_c^m(M)$ , car tout compact de  $M$  est contenu dans un certain ouvert  $U_i$ . Il reste à utiliser le lemme suivant (pour obtenir  $\lim \rightarrow H_{n-m}(U_i) \simeq H_{n-m}(M)$  et utiliser le fait que  $D_M$  est la limite d'isomorphismes  $D_{U_i}$ ).

Lemme Si  $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ , où  $I$  est un ensemble partiellement ordonné filtrant (à droite), et tout compact  $K \subset X$  est contenu dans un certain espace  $X_i$ , alors le morphisme

$$\lim H_m(X_i; G) \rightarrow H_m(X; G)$$

est un  $\rightarrow$  isomorphisme pour tout entier  $m \geq 0$  et tout groupe abélien  $G$ .

La démonstration est laissée en exercice.

Lemme Le morphisme

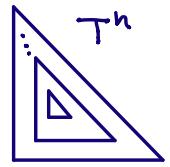
$$D_{\mathbb{R}^n} : H_c^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{n-m}(\mathbb{R}^n)$$

est un isomorphisme pour tout entier  $0 \leq m \leq n$ .

Démonstration Le seul cas à considérer est  $m=n$ .

On identifie  $\mathbb{R}^n$  avec l'intérieur de  $T^n$ .

Le morphisme  $D_{\mathbb{R}^n}$  s'identifie avec le morphisme



$$H^n(T^n, \partial T^n) \rightarrow H_0(T^n)$$

donné par le cap produit avec le générateur  $[T^n] \in H_n(T^n, \partial T^n)$ , multiplié par un élément invisible de  $\mathbb{R}$ , le générateur  $[T^n]$  étant représenté par l'identité  $Id_{T^n}$ .

Un générateur de  $H^n(T^n, \partial T^n)$

$$\simeq \text{Hom}(H_n(T^n, \partial T^n), \mathbb{R})$$

est représenté par un cocycle  $\varphi$  qui prend la valeur 1 sur  $T^n$ .

Donc,  $T^n \sim \varphi$  est le dernier sommet de  $T^n$ , et ce sommet représente un générateur de  $H_0(T^n)$ .  $\square$

Démonstration du théorème Le lemme local-global pour les ouverts nous donne l'énoncé du théorème pour  $M$ .  $\square$

Démonstration du lemme sur les suites de Mayer-Vietoris

On peut supposer que  $M = U \cup V$ .

Si  $K \subset U$  et  $L \subset V$  sont des compacts, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H^m(M, M \setminus (K \cup L)) & \rightarrow & H^m(M, M \setminus K) \oplus H^m(M, M \setminus L) & \rightarrow & H^m(M, M \setminus (K \cup L)) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \mu_{K \cup L} \cap \\ & & H^m(U \cap V, (U \cap V) \setminus (K \cup L)) & & H^m(U, U \setminus K) \oplus H^m(V, V \setminus L) & & \\ & & \downarrow \mu_{K \cup L} \cap & & \downarrow \mu_K \cap \oplus \mu_L \cap & & \\ \dots & \rightarrow & H_{n-m}(U \cap V) & \rightarrow & H_{n-m}(U) \oplus H_{n-m}(V) & \longrightarrow & H_{n-m}(M) \rightarrow \dots \end{array}$$

Il est suffisant de montrer que ce diagramme est commutatif (à signe près). Vérifions la commutativité du carré suivant (le reste est un exercice) :

$$\begin{array}{ccc} H^m(M, M \setminus (K \cup L)) & \xrightarrow{\cong} & H^{m+1}(U \cap V, (U \cap V) \setminus (K \cup L)) \\ \downarrow \mu_{K \cup L} \cap & & \downarrow \mu_{K \cup L} \cap \\ H_{n-m}(M) & \xrightarrow{\quad} & H_{n-m-1}(U \cap V) \end{array}$$

On pose  $A = M \setminus K$  et  $B = M \setminus L$ . On a la suite exacte courte de complexes de chaînes

$$0 \rightarrow C^*(M, A+B) \xrightarrow{+} C^*(M, A) \oplus C^*(M, B) \xrightarrow{-} C^*(M, A \cap B) \rightarrow 0$$

( $C^*(M, A+B)$  est formé de chaînes qui s'annulent sur les chaînes dans  $M \setminus K$  et les chaînes dans  $M \setminus L$ ).

Pour évaluer le morphisme  $\delta$  sur une classe de cohomologie représentée par un cocycle  $\varphi \in C^*(M, A \cap B)$ , on écrit

$$\varphi = \varphi_A - \varphi_B, \text{ où } \varphi_A \in C^*(M, A), \varphi_B \in C^*(M, B).$$

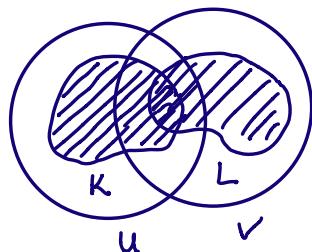
$$\text{On a } \delta[\varphi] = [\delta\varphi_A] = [\delta\varphi_B]$$

$$(\delta\varphi = 0, \text{ donc, } \delta\varphi_A = \delta\varphi_B).$$

De façon similaire, pour toute classe d'homologie représentée par un cycle  $c \in C_i^u(M)$  ( $c = c_u + c_v$ , où

$c_u \in C_i(U)$  et  $c_v \in C_i(V)$ ), on a

$$\partial[c] = [\partial c_u].$$



La classe  $\mu_{K \cup L}$  peut être représentée par une chaîne  $\omega = \omega_{U \setminus L} + \omega_{U \cap V} + \omega_{V \setminus K}$ .

La chaîne  $\omega_{U \cap V}$  représente  $\mu_{K \cap L}$ , car les chaînes  $\omega_{U \setminus L}$  et  $\omega_{V \setminus K}$  sont dans le complémentaire de  $K \cap L$ .

De façon similaire,  $\omega_{U \setminus L} + \omega_{U \cap V}$  représente  $\mu_K$ .

Soit  $[\varphi] \in H^m(M, M \setminus (K \cup L))$ . En appliquant  $\delta$ , on obtient  $[\delta \varphi_A]$ . Ensuite, dans  $H_{n-m-1}(U \cap V)$ , on obtient

$$[d_{U \cap V} \cap \delta \varphi_A] = [\delta d_{U \cap V} \cap \varphi_A]$$

(car  $\delta(d_{U \cap V} \cap \varphi_A) = (-1)^m (\delta d_{U \cap V} \cap \varphi_A - d_{U \cap V} \cap \delta \varphi_A)$  et  $d_{U \cap V} \cap \varphi_A$  est une chaîne dans  $U \cap V$ ).

D'autre part, dans  $H_{n-m}(M)$ , on obtient  $[\alpha \cap \varphi]$ .

On a

$$\alpha \cap \varphi = (d_{U \setminus L} \cap \varphi) + (d_{U \cap V} \cap \varphi + d_{V \setminus K} \cap \varphi).$$

Donc,  $\delta [\alpha \cap \varphi] = [\delta (d_{U \setminus L} \cap \varphi)] \in H_{n-m-1}(U \cap V)$ .

On a

$$\begin{aligned} \delta (d_{U \setminus L} \cap \varphi) &= (-1)^m \delta d_{U \setminus L} \cap \varphi \quad \leftarrow (\text{car } \delta \varphi = 0) \\ &= (-1)^m \delta d_{U \setminus L} \cap \varphi_A \quad \leftarrow (\text{car } \varphi_A \text{ est nul sur les chaînes dans } B = M \setminus L) \\ &= (-1)^{m+1} \delta d_{U \cap V} \cap \varphi_A, \end{aligned}$$

car  $\delta (d_{U \setminus L} + d_{U \cap V}) \cap \varphi_A = 0$  et

$\delta (d_{U \setminus L} + d_{U \cap V})$  est une chaîne dans  $U \setminus K$

( $d_{U \setminus L} + d_{U \cap V}$  représente  $f_K$ ).  $\square$

### §3. Relations avec le cup produit

Proposition     $X$  espace topologique,  $k, l \geq 0$  entiers,  
 $R$  anneau commutatif.

Pour tous  $\alpha \in C_{k+l}(X; R)$ ,  $\varphi \in C^k(X; R)$  et  $\psi \in C^l(X; R)$ ,  
on a

$$\psi(\alpha \cap \varphi) = (\varphi \cup \psi)(\alpha).$$

Démonstration   Pour tout simplexe singulier  $\sigma: \overline{\Delta}^{k+l} \rightarrow X$ ,  
on a

$$\begin{aligned}\psi(\sigma \cap \varphi) &= \psi(\varphi(\sigma \circ \Delta_{(e_0, \dots, e_k)})) \sigma \circ \Delta_{(e_k, \dots, e_{k+l})} \\ &= \varphi(\sigma \circ \Delta_{(e_0, \dots, e_k)}) \psi(\sigma \circ \Delta_{(e_k, \dots, e_{k+l})}) = (\varphi \cup \psi)(\sigma).\end{aligned}$$

Donc, le morphisme

$$\varphi \cup : C^l(X; R) \rightarrow C^{k+l}(X; R)$$

coincide avec le morphisme

$$\text{Hom}_R(C_l(X; R), R) \rightarrow \text{Hom}_R(C_{k+l}(X; R), R)$$

dual à  $\cap \varphi$ .

Au niveau de groupes d'homologie/cohomologie, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{\ell}(X; R) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}_R(H_{\ell}(X; R), R) \\ \downarrow \varphi_U & & \downarrow (\circ \varphi)^* \\ H^{k+\ell}(X; R) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}_R(H_{k+\ell}(X; R), R) \end{array}$$

Si les morphismes  $h$  sont des isomorphismes (par exemple,  $R$  est un corps ou  $R = \mathbb{Z}$  et les groupes d'homologie de  $X$  sont libres), alors, on obtient que, au niveau des groupes d'homologie/cohomologie, les morphismes  $\varphi_U$  et  $\circ \varphi$  sont duals.

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire, et  $M$  une variété topologique compacte (sans bord)  $R$ -orientable et  $R$ -orientée de dimension  $n$ .

On a la forme bilinéaire

$$H^k(M; R) \times H^{n-k}(M; R) \rightarrow R$$

$$(\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \cup \psi)[M].$$

(Les  $R$ -modules qui apparaissent ici sont de type fini.)

Rappel Soient  $E$  et  $F$  deux  $R$ -modules libres.

Une forme bilinéaire  $f: E \times F \rightarrow R$  est dite non dégénérée si les morphismes associés  $E \rightarrow \text{Hom}_R(F, R)$  et  $F \rightarrow \text{Hom}_R(E, R)$  sont injectifs.

Si  $R$  est un corps et  $E, F$  sont des espaces vectoriels sur  $R$  de dimension finie, les conditions suivantes sont équivalentes :

- $f$  est non dégénérée,
- le premier morphisme associé est un isomorphisme,
- le deuxième morphisme associé est un isomorphisme.

Si  $E$  et  $F$  sont des  $R$ -modules libres, on dit que  $f$  est unimodulaire si les deux morphismes associés sont des isomorphismes.

### Théorème (Dualité de Poincaré)

(1) Si  $R$  est un corps, la forme bilinéaire  $H^k(M; R) \times H^{n-k}(M; R) \rightarrow R$  est non dégénérée pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ .

(2) Si  $R = \mathbb{Z}$ , la forme bilinéaire  $H^k(M)_{/\text{Tors}} \times H^{n-k}(M)_{/\text{Tors}} \rightarrow \mathbb{Z}$  est unimodulaire pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ .

Démonstration Considérons l'application composée

$$H^{n-k}(M; R) \xrightarrow{h} \text{Hom}_R(H_{n-k}(M; R), R) \xrightarrow{\mathcal{D}^*} \text{Hom}_R(H^k(M; R), R).$$

Ce morphisme composé envoie  $\psi \in H^{n-k}(M; R)$  sur le morphisme  $\varphi \mapsto \psi([M] \cap \varphi) = (\varphi \cup \psi)[M]$ .

Si  $R$  est un corps (ou si  $R = \mathbb{Z}$  et on passe au quotient par la torsion), le morphisme  $h$  est un isomorphisme. Donc, sous ces hypothèses, le morphisme composé est un isomorphisme.

On montre que l'autre morphisme associé est un isomorphisme en utilisant la (anti)commutativité du cup produit.  $\square$

Soit  $M$  une variété topologique compacte (sans bord) orientable (et orientée) de dimension  $n = 4k$ .

On obtient la forme bilinéaire symétrique non dégénérée

$$H^{2k}(M; \mathbb{Q}) \times H^{2k}(M; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}.$$

$$(\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \cup \psi)[M]$$

La signature de la forme quadratique associée (le nombre de carrés positifs moins le nombre de carrés négatifs) s'appelle la signature de  $M$  (notation :  $\sigma(M)$ ).

## §4. Autres formes de dualité

Dualité pour les variétés à bord.

Soit  $M$  une variété topologique à bord. On pose  $n = \dim M$ .

Supposons que  $M$  est compacte et  $\mathbb{R}$ -orientable.

Classe fondamentale relative  $[M] \in H_n(M, \partial M; \mathbb{R})$

Le bord  $\partial M$  de  $M$  admet un voisinage ouvert

(dans  $M$ ) homéomorphe à  $\partial M \times [0, 1]$ .

On identifie ce voisinage avec  $\partial M \times [0, 1]$ .

Pour tout  $0 < \varepsilon < 1$ , on a un isomorphisme naturel

$$H_n(M, \partial M; \mathbb{R}) \cong H_n(M - \partial M, \partial M \times (0, \varepsilon); \mathbb{R}).$$



Donc, une  $\mathbb{R}$ -orientation de  $M$  donne une classe

$$[M] \in H_n(M, \partial M; \mathbb{R}).$$

L'image de cette classe par le morphisme habituel

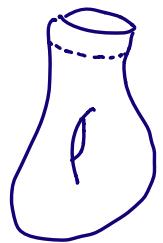
$$H_n(M, \partial M; \mathbb{R}) \rightarrow H_{n-1}(\partial M; \mathbb{R}) \text{ est } [\partial M] \in H_{n-1}(\partial M; \mathbb{R}).$$

Théorème (Isomorphisme de Poincaré pour les variétés à bord)

Supposons que le bord  $\partial M$  d'une variété topologique  $M$  (à bord) compacte,  $\mathbb{R}$ -orientable de dimension  $n$  est présenté comme réunion disjointe  $\partial M = A \sqcup B$ , où  $A$  et  $B$  sont des réunions de composantes connexes de  $\partial M$ . Alors,

$$\begin{aligned} D_M : H^k(M, A; \mathbb{R}) &\rightarrow H_{n-k}(M, B; \mathbb{R}) \\ \varphi &\mapsto [M] \cap \varphi \end{aligned}$$

est un isomorphisme pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ .

Démonstration Considérons le cas  $B = \emptyset$ . On a 

$$H^k(M, \partial M; R) \simeq H_c^k(M \setminus \partial M; R) \text{ et}$$

$$H_{n-k}(M; R) \simeq H_{n-k}(M \setminus \partial M; R).$$

On peut utiliser le théorème d'isomorphisme de Poincaré.

Dans le cas général, on a le diagramme commutatif  
(à signe près) :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H^k(M, \partial M) & \rightarrow & H^k(M, A) & \rightarrow & H^k(\partial M, A) \rightarrow H^{k+1}(M, \partial M) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow [M]_n & & \downarrow [M] & & \downarrow H^k(B) \simeq \\ & & & & & & \downarrow [B]_n \\ \dots & \rightarrow & H_{n-k}(M) & \rightarrow & H_{n-k}(M, B) & \rightarrow & H_{n-k}(B) \rightarrow H_{n-k-1}(M) \rightarrow \dots \end{array}$$

(On ne précise pas l'anneau  $R$  des coefficients.)

On utilise le lemme des cinq. □

Soit  $M$  une variété topologique (sans bord)  
de dimension  $n$ . Supposons que  $M$  est  
compacte et orientable.

Soit  $K \subset M$  un "bon" compact.

Théorème On a  $H_m(M, M \setminus K) \simeq H^{n-m}(K)$   
pour tout entier  $0 \leq m \leq n$ .

Démonstration Soit  $K \subset U$  un voisinage ouvert.

On a le diagramme commutatif (à signe près)

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_m(M \setminus K) & \rightarrow & H_m(M) & \rightarrow & H_m(M, M \setminus K) \rightarrow H_{m-1}(M \setminus K) \rightarrow \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow [M]_n & & \uparrow \text{IS} \\ & & H^{n-m}(M \setminus K, U \setminus K) & & H_m(U, U \setminus K) & & H^{n-m+1}(M \setminus K, U \setminus K) \\ & & \text{IS} & & \uparrow & & \text{IS} \\ \dots & \rightarrow & H^{n-m}(M, U) & \rightarrow & H^{n-m}(U) & \rightarrow & H^{n-m+1}(M, U) \rightarrow \dots \end{array}$$

(La classe fondamentale  $[M]$  de  $M$  est représentée par un cycle qui est la somme d'une chaîne dans  $M \setminus K$  et une chaîne dans  $U$  représentant des éléments de  $H_n(M \setminus K, U \setminus K)$  et  $H_n(U, U \setminus K)$ , respectivement ; ce sont les éléments utilisés pour définir les flèches correspondantes du diagramme.)

On considère des voisinages ouverts de plus en plus petits et on passe à la limite inductive.

La première flèche verticale devient

l'isomorphisme de Poincaré  $H_c^{n-m}(M \setminus K) \cong H_m(M \setminus K)$ .

On obtient un isomorphisme

$$H_m(M, M \setminus K) \xleftarrow{\quad} \varinjlim H^{n-m}(U).$$

Sous certaines hypothèses sur  $K$  (un "bon" compact), on a  $\varinjlim H^{n-m}(U) \cong H^{n-m}(K)$ .  $\square$

## Version plus générale

$M$  variété topologique orientable de dim.  $n$

$\mu_M \in \Gamma(M, \tilde{M}_{\mathbb{Z}})$  une orientation,  $G$  un groupe abélien.

Si  $L \subset K \subset M$  sont des sous-ensembles compacts, on pose

$$\check{H}^m(K, L; G) = \varprojlim \left\{ H^m(U, V; G) \mid (U, V) \supset (K, L), U, V \text{ ouverts} \right\}$$

(ces groupes sont isomorphes aux groupes de cohomologie de Čech).

Si  $K$  et  $L$  sont raisonnables (par exemple, CW-complexes ou variétés topologiques), ces groupes sont isomorphes aux groupes de cohomologie singulière correspondants.

On a un cap produit

$$\left[ \frac{C_n(V) + C_n(U \setminus L)}{C_n(U \setminus K)} \right] \times C^m(U, V; G) \rightarrow C_{n-m}(U \setminus L, U \setminus K; G)$$

donné par  $(b+c)_n f = b_n f + c_n f = c_n f$ .

On a

$$H_{n-m}(U \setminus L, U \setminus K; G) \cong H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G)$$

$$H_n \left( \frac{C_*(V) + C_*(U \setminus L)}{C_*(U \setminus K)} \right) \cong H_n(U, U \setminus K) \cong H_n(M, M \setminus K)$$

(car  $\{V, U \setminus L\}$  est un recouvrement ouvert de  $U$ ).

On obtient un cap produit

$$H_n(M, M \setminus K) \times H^m(U, V; G) \rightarrow H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G).$$

Pour tout compact  $K' \supset K$ , on peut considérer la classe  $\mu_{K'} = \mu_M|_{K'} \in \Gamma(K', \tilde{M}_Z) \simeq H_n(M, M \setminus K')$ ,

et on a un morphisme

$$\mu_{K', n} : H^m(U, V; G) \rightarrow H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G).$$

Il est défini par

$$[f] \mapsto g \cap [f] = [c \cap f] \in H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G),$$

où  $g \in H_n(M, M \setminus K')$  est représenté par

$$b + c + d \in C_n(V) + C_n(U \setminus L) + C_n(M \setminus K).$$

En passant à la limite inductive, on obtient le morphisme

$$\mu_n : \check{H}^m(K, L; G) \rightarrow H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G).$$

Théorème (Poincaré - Alexander - Lefschetz)

Le morphisme

$$\mu_n : \check{H}(K, L; G) \rightarrow H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G)$$

est un isomorphisme pour tout entier  $0 \leq m \leq n$ .

Démonstration Le cas  $L = \emptyset$  a été déjà (essentiellement) considéré.

Le cas général peut être déduit du cas  $L = \emptyset$  à l'aide du diagramme commutatif (à coefficients dans  $G$ )

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \check{H}^m(K, L) & \longrightarrow & \check{H}^m(K) & \longrightarrow & \check{H}^m(L) & \longrightarrow & \check{H}^m(K, L) & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \dots & \rightarrow & H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K) & \rightarrow & H_{n-m}(M, M \setminus K) & \rightarrow & H_{n-m}(M, M \setminus L) & \rightarrow & H_{n-m-1}(M \setminus L, M \setminus K) & \dots \end{array}$$

(La commutativité du diagramme est un exercice.)  $\square$

Corollaire (Dualité d'Alexander)

Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un sous-ensemble compact. Alors,

$$\tilde{H}_i(\mathbb{R}^n \setminus K; G) \simeq \check{H}^{n-i-1}(K; G)$$

pour tout entier  $0 \leq i \leq n-1$ .

Démonstration On a

$$\check{H}^{n-i-1}(K; G) \simeq H_{i+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K; G) \simeq \tilde{H}_i(\mathbb{R}^n \setminus K; G).$$

$\square$

Théorème Soit  $F$  un corps,  $N$  une variété topologique compacte orientée de dimension  $2n+1$  à bord connexe  $M = \partial N$ . Alors,

$$\begin{aligned} \dim H^n(M; F) &\text{ est paire et} \\ \dim \ker(i_* : H_n(M; F) \rightarrow H_n(N; F)) \\ &= \dim \text{Im}(i^* : H^n(N; F) \rightarrow H^n(M; F)) = \frac{1}{2} \dim H^n(M; F), \\ &\text{où } i : M \hookrightarrow N \text{ est l'inclusion.} \end{aligned}$$

De plus, pour tous  $\alpha, \beta \in \text{Im } i^*$ , on a  $\alpha \cup \beta = 0$ .

Démonstration On a le diagramme commutatif (à signe près)

$$\begin{array}{ccccc} H^n(N; F) & \xrightarrow{i^*} & H^n(M; F) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+1}(N, M; F) \\ & & \simeq \downarrow [M]_n & & \simeq \downarrow [N]_n \\ & & H_n(M; F) & \xrightarrow{i_*} & H_n(N; F) \end{array}$$

$$\text{On a } [M]_n \cap \text{Im } i^* = [M]_n \cap \ker \delta^* = \ker i_{*}.$$

Donc,

$$\text{rank } i^* = \dim \text{Im } i^* = \dim \ker i_{*} = \dim H^n(M) - \text{rank } i_{*}.$$

Par conséquent,

$$\dim H^n(M; F) = 2 \text{rank } i^* = 2 \dim \ker i_{*}.$$

Si  $\alpha', \beta' \in H^n(N; F)$ , alors

$$\delta^*(i^*(\alpha') \cup i^*(\beta')) = \delta^* i^*(\alpha' \cup \beta') = 0.$$

De plus,  $\delta^* : H^{2n}(M; F) \rightarrow H^{2n+1}(N, M; F)$  est injectif, car ce morphisme est Poincaré-dual à  $i_* : H_0(M; F) \rightarrow H_0(N; F)$ .  $\square$

Corollaire (Thom) Soit  $N$  une variété topologique compacte orientable de dimension  $4k+1$  à bord connexe  $M = \partial N$ . Alors,  $\sigma(M) = 0$ .

Démonstration On pose  $\dim H^{2k}(M; \mathbb{Q}) = 2m$ .  
Notons  $r$  le nombre de carrés positifs de la forme bilinéaire

$$H^{2k}(M; \mathbb{Q}) \times H^{2k}(M; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$(\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \cup \psi)[M].$$

D'après le théorème précédent, l'espace  $H^{2k}(M; \mathbb{Q})$  contient un sous-espace totalement isotrope de dimension  $m$ . Donc,  $r = 2m - r = m$ .  $\square$

On dit que deux variétés compactes  $M_1$  et  $M_2$  (de même dimension  $n$ ) sont cobordantes s'il existe une variété compacte à bord (de dimension  $n+1$ ) dont le bord est homeomorphe à la réunion disjointe de  $M_1$  et  $M_2$ .

Une variété compacte  $M$  est dite cobordante à zéro, si elle est cobordante à l'ensemble vide, c'est-à-dire, s'il existe une variété compacte à bord dont le bord est homeomorphe à  $M$ .

Toute variété compacte de dimension 1 est cobordante à zéro.

Toute surface topologique compacte orientable (sans bord) est cobordante à zéro.

Le plan projectif réel n'est pas cobordant à zéro (on peut facilement montrer que la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété compacte cobordante à zéro est paire).

Deux variétés compactes orientées  $M_1$  et  $M_2$  sont cobordantes (en tant que des variétés orientées) s'il existe une variété compacte orientée à bord dont le bord peut être identifié avec

$\bar{M}_1 \amalg M_2$ , où  $\bar{M}_1$  est la variété  $M_1$  munie de l'orientation opposée à celle qui a été choisie.

Une variété compacte orientée est dite cobordante à zéro (en tant qu'une variété orientée) s'il existe une variété compacte orientée à bord dont le bord peut être identifié avec  $M$ .

Le corollaire ci-dessus donne une condition nécessaire pour qu'une variété compacte connexe orientable (sans bord) de dimension  $4k$  soit le bord d'une variété compacte orientable.

Par exemple,  $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$  n'est pas cobordante à zéro dans le sens orienté (on peut vérifier que la signature  $\sigma(\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2})$  de  $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$  est égale à 2). On peut montrer que  $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$  est cobordante à zéro dans le sens non orienté : il existe une variété compacte de dimension 5 dont le bord est homéomorphe à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ .

D'autre part,  $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$  (de signature 0) est cobordante à zéro dans le sens orienté.

Pour les variétés compactes lisses, une condition nécessaire et suffisante pour être cobordante à zéro peut être formulée en termes de certaines classes caractéristiques, qui s'appellent classes de Stiefel - Whitney.

De façon similaire, pour les variétés compactes lisses orientées, une condition nécessaire et suffisante pour être cobordante à zéro dans le sens orienté peut être formulée en termes de classes de Stiefel - Whitney et de classes de Pontryagin.

Quelques commentaires concernant  
variétés topologiques / variétés lisses

Soit  $M$  une variété topologique fermée (c'est-à-dire, compacte sans bord) simplement connexe orientée de dim. 4.

On vérifie facilement que tous les groupes d'homologie  $H_i(M)$  et tous les groupes de cohomologie  $H^i(M)$  de  $M$  sont sans torsion. D'après la dualité de Poincaré, la forme bilinéaire symétrique (fournie par le cup produit)

$$b_M : H^2(M) \times H^2(M) \rightarrow \mathbb{Z}$$

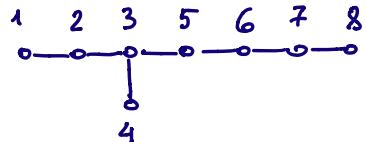
est unimodulaire. Supposons que la forme  $b_M$  est paire (c'est-à-dire,  $b_M(\alpha, \alpha) = 0 \bmod 2$  pour tout  $\alpha \in H^2(M)$ ).

Théorème (Arf) Soit  $E \simeq \mathbb{Z}^r$  un groupe abélien libre de type fini, et soit  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{Z}$  une forme bilinéaire symétrique unimodulaire paire. Alors, la signature de  $b$  est divisible par 8.

Inversement, pour tout nombre entier  $s$  divisible par 8, il existe une forme bilinéaire symétrique (à valeurs entières) unimodulaire paire dont la signature est égale à  $s$ . On peut construire une telle forme, à l'aide de l'opération de la somme directe, à partir des formes  $\pm E_8$ .

Ici,  $E_8$  est la forme bilinéaire symétrique unimodulaire paire définie positive de rang 8 dont la matrice de Gram dans une certaine base est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & -1 & & & \\ & & -1 & 2 & 0 & & & \\ & & & -1 & 0 & 2 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 \\ 0 & & & & & & & \end{pmatrix}$$



( $-E_8$  est la forme  $E_8$  dont toutes les valeurs sont multipliées par  $-1$ ).

Il existe une variété topologique fermée simplement connexe orientée  $N$  de dimension 4 (appelée  $E_8$ -variété de Freedman) dont la forme bilinéaire  $b_N$  est isomorphe à  $E_8$ .

Théorème (Rokhlin) Si  $M$  est une variété lisse fermée simplement connexe orientée de dimension 4, et si la forme bilinéaire  $b_M$  est paire, alors la signature  $\sigma(M)$  de  $M$  est divisible par 16.

Par conséquent, la  $E_8$ -variété de Freedman n'admet pas de structure lisse.

## §5. Théorie des intersections

Soit  $M$  une variété topologique (à bord) de dimension  $n$ .

On suppose que  $M$  est compacte, orientable  
(et orientée).

On note  $D : H^{n-i}(M) \rightarrow H_i(M, \partial M)$  et

$D : H^{n-i}(M, \partial M) \rightarrow H_i(M)$

les isomorphismes de Poincaré.

On définit le produit d'intersection

- :  $H_i(M) \times H_j(M) \rightarrow H_{i+j-n}(M)$ ,
- :  $H_i(M, \partial M) \times H_j(M) \rightarrow H_{i+j-n}(M)$ ,
- :  $H_i(M, \partial M) \times H_j(M, \partial M) \rightarrow H_{i+j-n}(M, \partial M)$

$$\begin{aligned} \text{par } a \bullet b &= D(D^{-1}(b) \cup D^{-1}(a)) \\ &= [M] \cap (D^{-1}(b) \cup D^{-1}(a)) \\ &= ([M] \cap D^{-1}(a)) \cap D^{-1}(b) \\ &= a \cap D^{-1}(b). \end{aligned}$$

$$\text{On a } a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c,$$

$$a \bullet b = (-1)^{(n-\deg(a))(n-\deg(b))} b \bullet a.$$

## Classe de Thom et isomorphisme de Thom

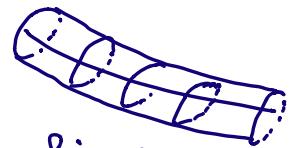
$N$  variété topologique (sans bord)  
compacte et orientée.

$\pi: W \rightarrow N$  fibré en  $k$ -disques fermés :

tout point  $x \in N$  admet un voisinage ouvert  $U \ni x$   
et un homéomorphisme  $\varphi_u: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times D^k \subset U \times \mathbb{R}^k$ ,  
compatible avec les projections sur  $U$ ,

tels que, pour deux ouverts arbitraires  $U$  et  $V$

trivialisant  $\pi$  et tout point  $y \in U \cap V$ , l'homéomorphisme  
 $\varphi_v \circ \varphi_u^{-1}|_{\{y\} \times D^k}: \{y\} \times D^k \rightarrow \{y\} \times D^k$  soit linéaire.



Supposons que  $W$  est orientée.

On voit  $N$  comme sous-variété de  $W$   
(la section zéro  $i: N \hookrightarrow W$ ).

Définition La classe de Thom du fibré  $\pi$   
est  $\tau = \mathbb{D}_w^{-1}(i_*[N]) \in H^k(W, \partial W)$ .

De façon équivalente,  $[w] \cap \tau = i_*[N]$ .

On peut voir  $\tau$  comme élément de

$$H^k(W, W \setminus N) \simeq H^k(W, \partial W).$$

## Définition (Hopf-Freudenthal)

$M, N$  variétés compactes (à bord) orientées de dimensions  $m, n$ ,  
 $f: (N, \partial N) \rightarrow (M, \partial M)$  application continue

On considère les morphismes

$$f^!: H^{n-p}(N) \rightarrow H^{m-p}(M)$$

$$f^!: H^{n-p}(N, \partial N) \rightarrow H^{m-p}(M, \partial M)$$

définis par

$$f^! = D_M^{-1} f_* D_N.$$

De façon similaire, on a

$$f_!: H_{m-p}(M) \rightarrow H_{n-p}(N)$$

$$f_!: H_{m-p}(M, \partial M) \rightarrow H_{n-p}(N, \partial N)$$

définis par

$$f_! = D_N f^* D_M^{-1}.$$

On appelle  $f^!$  et  $f_!$  des morphismes de transfert.

### Théorème (Isomorphismes de Thom)

Si  $\pi: W \rightarrow N$  est un fibré en  $k$ -disques sur une variété fermée orientée de dimension  $n$ , alors on a les isomorphismes de Thom pour tout entier  $0 \leq p \leq n$ :

- $H^p(N) \xrightarrow{\cong} H^p(W) \xrightarrow{\cup \tau} H^{p+k}(W, \partial W)$

qui coïncide avec  $i^!$ ,

- $H_{p+k}(W, \partial W) \xrightarrow{\cong} H_p(W) \xrightarrow{\pi_*} H_p(N)$

qui coïncide avec  $i_!$ .

Démonstration Les morphismes  $i^!$  et  $i_!$  sont des isomorphismes. On a (pour  $\alpha \in H^p(W)$  et  $\beta = i^*(\alpha)$ )

$$\begin{aligned} i^!(\beta) &= D_w^{-1} i_* D_N(\beta) \\ &= D_w^{-1} i_* ([N] \cap i^*(\alpha)) \\ &= D_w^{-1} (i_* [N] \cap \alpha) \\ &= D_w^{-1} (([W] \cap \tau) \cap \alpha) \\ &= D_w^{-1} ([W] \cap (\alpha \cup \tau)) \\ &= \alpha \cup \tau = \tau^*(\beta) \cup \tau. \end{aligned}$$

Calcul similaire pour  $i_!$

□

Supposons que  $N$  est connexe.

Soit  $A \subset N$  fermé. On pose  $\tilde{A} = j_{!*}^{-1}(A)$  et  $\partial \tilde{A} = \tilde{A} \cap \partial W$ .

Lemme On a  $\check{H}^p(\tilde{A}, \partial \tilde{A}) = 0$  pour tout entier  $0 \leq p < k$ .

Démonstration On utilise le lemme local-global pour les compacts.

□

Lemme Si  $A = \{x\}$ , où  $x \in N$ , alors la restriction  $\tau_x \in \check{H}^k(\tilde{A}, \partial \tilde{A})$  de  $\tau$  est un générateur (dans ce cas,  $(\tilde{A}, \partial \tilde{A}) \simeq (D^k, S^{k-1})$ ).

Démonstration Supposons que  $\tau_x = 0$  pour certain  $x \in N$ . Dans ce cas, il existe un voisinage de  $x$  tel que  $\tau_y = 0$  pour tout point  $y$  de ce voisinage. Puisque  $N$  est connexe, on obtient que  $\tau_y = 0$  pour tout point  $y \in N$ .

Soit  $P_N(A)$  l'affirmation  
 "la restriction  $\tau_A \in \check{H}^k(\tilde{A}, \partial\tilde{A})$  de  $\tau$  est nulle"  
 où  $A \subset N$  est fermé.

Si  $A \subset U$  est un sous-ensemble fermé et convexe d'un certain ouvert euclidien  $U \subset N$ , alors  $P(A)$  est vraie. Pour (ii) du lemme local-global pour les compacts, on peut utiliser le diagramme commutatif suivant (de type de Mayer - Vietoris) :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow H^k(W, \partial W) & \longrightarrow H^k(W, \partial W) \oplus H^k(W, \partial W) \\ & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow \check{H}^k(\tilde{A} \cup \tilde{B}, \partial(\tilde{A} \cup \tilde{B})) & \longrightarrow \check{H}^k(\tilde{A}, \partial \tilde{A}) \oplus \check{H}^k(\tilde{B}, \partial \tilde{B}) \end{array}$$

Pour (iii) du lemme, on peut utiliser le fait que le passage à la limite inductive commute avec la considération de groupes  $\check{H}$ .

Donc, le lemme implique que  $P_N(N)$  est vraie, ce qui contredit  $\tau \neq 0$ .

Si  $\tau_x \neq 0$  est divisible dans  $H^k(D^k, S^{k-1}) \cong \mathbb{Z}$  par un premier nombre  $p$ , alors on peut changer le groupe des coefficients pour  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .  $\square$

Corollaire Si  $N$  est connexe, la classe  $\tau \in H^k(W, \partial W)$  est l'unique (à signe près) classe dont la restriction sur chaque fibre de  $\pi$  est un générateur.

Démonstration Le cup produit avec  $\tau$  donne l'isomorphisme de Thom

$$H^0(N) \cong H^0(W) \longrightarrow H^k(W, \partial W).$$

Donc,  $\tau \in H^k(W, \partial W) \cong \mathbb{Z}$  est un générateur.  $\square$

### Théorème d'isomorphisme de Thom

Pour tout sous-ensemble compact  $A \subset N$ , l'application

$$\pi^*(.) \cup \tau_A : \check{H}^p(A) \longrightarrow \check{H}^{p+k}(\tilde{A}, \partial \tilde{A}) \text{ est un isomorphisme.}$$

Démonstration - exercice (on peut, à nouveau, utiliser le lemme local-global pour les compacts).  $\square$

Soient, maintenant,  $N$  et  $W$  des variétés lisses compactes orientées de dimensions  $n$  et  $n+k$ , respectivement, et soit  $i: N \hookrightarrow W$  un plongement lisse ( $N$  est sans bord;  $W$  peut avoir un bord non vide, disjoint de  $i(N)$ ).

On pose  $[N]_w = i_*[N]$  et  $\tau_N^w = D_w^{-1}([N]_w) \in H^k(W)$ .  
(Ici,  $D_w: H_n(W, \partial W) \rightarrow H^k(W)$ .)

La classe  $\tau_N^w$  (qui s'appelle aussi classe de Thom) est l'image de la classe de Thom du fibré normal  $v_N^w$  en  $k$ -disques de  $N$  dans  $W$ :

$$H^k(\text{tube}, \partial \text{tube}) \cong H^k(W, W \setminus \text{tube}) \rightarrow H^k(W).$$

On a

$$[w] \cap \tau_N^w = [N]_w. \quad (*)$$

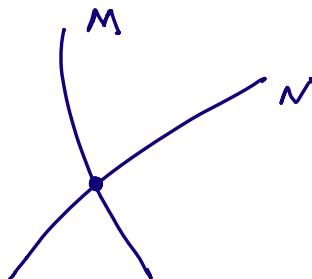
Considérons, maintenant, deux sous-variétés lisses orientées  $M$  et  $N$  (de dimensions  $m$  et  $n$ ) de  $W$ . Alors,

$$\begin{aligned} [M]_w \cdot [N]_w &= ([w] \cap \tau_M^w) \cdot ([w] \cap \tau_N^w) \\ &= [w] \cap (\tau_N^w \cup \tau_M^w). \end{aligned}$$

Supposons que  $M \pitchfork N$   
(et  $M \cap N$  est connexe).

$$\text{On a } v_{M \cap N}^N = v_M^w|_{M \cap N}$$

De plus,  $\tau_M^w$  se restreint à  $\tau_{M \cap N}^N$ , car la propriété de fournir (par restriction) un générateur (du groupe de cohomologie relatif correspondant) pour chaque fibre caractérise la classe de Thom (à signe près).



Par conséquent (on choisit une orientation de  $M \cap N$  de façon appropriée),

$$\tau_{M \cap N}^N = i^*(\tau_M^W). \quad (**)$$

Théorème Si  $M$  et  $N$  sont deux sous-variétés lisses (fermées) orientées (de dimensions  $m$  et  $n$ , respectivement) d'une variété lisse fermée orientée  $W$  telles que  $M \pitchfork N$ , alors

$$\tau_{M \cap N}^W = \tau_M^W \cup \tau_N^W,$$

où, de façon équivalente,

$$[M \cap N]_w = [N]_w \circ [M]_w.$$

Démonstration On a

$$\begin{aligned} [M \cap N]_w &= (i_{M \cap N}^W)_* [M \cap N] = (i_N^W)_* (i_{M \cap N}^N)_* [M \cap N] \\ &= (i_N^W)_* ([N] \cap \tau_{M \cap N}^N) \quad (\text{par } (*)) \\ &= (i_N^W)_* ([N] \cap (i_N^W)^* \tau_M^W) \quad (\text{par } (**)) \\ &= (i_N^W)_* [N] \cap \tau_M^W \quad (\text{naturalité du cap produit}) \\ &= ([W] \cap \tau_N^W) \cap \tau_M^W \quad (\text{par } (*)) \\ &= [W] \cap (\tau_M^W \cup \tau_N^W) \\ &= [N]_w \circ [M]_w. \end{aligned}$$

□

Exemple d'une classe caractéristique : classe d'Euler

Soit  $N \xrightarrow{i_N^W} W$  un plongement lisse, où  $N$  est une variété lisse fermée orientée de dimension  $n$ , et  $W$  est une variété lisse compacte orientée de dimension  $n+k$ .

La classe d'Euler du fibré normal de  $N$  dans  $W$  est

$$e_N^W = (i_N^W)^*(\tau_N^W) \in H^k(N).$$

Le cas général d'un fibré vectoriel (de rang fini) de base  $N$  peut être réduit à ce cas de fibré normal.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^k(W, W \setminus \text{tube}) & \longrightarrow & H^k(W) \ni \tau_N^W \\ \downarrow \cong & & \downarrow \\ H^k(\text{tube}, \partial \text{tube}) & \longrightarrow & H^k(\text{tube}) \simeq H^k(N) \\ \downarrow \tau & & \downarrow e_N^W \end{array}$$

Si le rang  $k$  du fibré est strictement plus grand que  $n$ , le groupe  $H^k(N)$  est trivial, donc  $e_N^W = 0$ .

Proposition Si il existe une section continue  $s$  du fibré normal de  $N$  dans  $W$  telle que  $s$  ne s'annule pas, alors  $e_N^W = 0$ .

Démonstration Une telle section  $s$  fournit une application continue  $s': N \rightarrow \partial \text{tube}$  telle que la composition de  $s'$  avec la projection sur  $N$  soit l'identité. Donc, la deuxième application dans la suite exacte

$$H^*(\text{tube}, \partial \text{tube}) \rightarrow H^*(\text{tube}) \rightarrow H^*(\partial \text{tube})$$

est injective.

Par conséquent, la première application est nulle.  $\square$

On peut vérifier que

- si  $M$  est une variété lisse fermée orientée de dim.  $n$ , on peut parler de la classe d'Euler (dans  $H^n(M)$ ) du fibré tangent de  $M$ , et l'évaluation en  $[M]$  de cette classe d'Euler est la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(M)$  de  $M$ .
- si  $\pi: W \rightarrow N$  est un fibré lisse en  $k$ -disques fermés, où  $N$  est une variété lisse fermée orientée et  $W$  est orientée, et si  $s: N \rightarrow W$  est une section lisse telle que  $s(N)$  intersecte la section zéro  $N$  transversalement, alors la classe Poincaré-duale de la classe  $[s(N) \cap N]_N$  coïncide avec la classe d'Euler du fibré.