

Quantum field theory

Notes based on David Tong's QFT part III mathematical tripos.
Complement are some notes of Andrés Reyes Lega originally
written for a course (particle physics) in UNIANDES.

www.qft-mathphys.uniandes.edu.co/a_reyes/fisica-de-particulas

QFT

$$\text{Units} \rightarrow [c] = \frac{L}{T}, [t] = \frac{L^2 M}{T}, [G] = \frac{L^3}{M T^2}, M = \text{Mass}$$

"Natural" Units $c = \hbar = 1$ \leftarrow Distance replaces time!

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc}, m_e = 10^6 \text{ eV} \rightarrow \text{Length} \quad \lambda_e = \frac{1}{m_e} = 10^{-12} \text{ m}$$

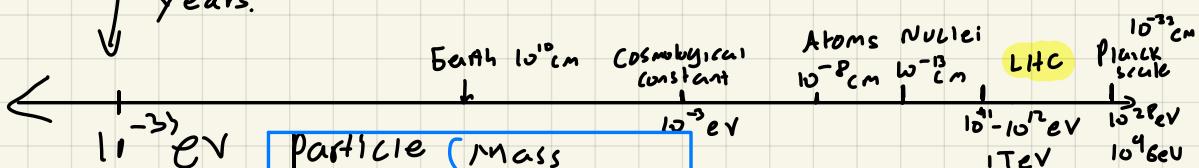
$$[x] = M^d \equiv d, \text{ ex } G = \frac{t c}{M_p^2} = \frac{1}{M_p^2} \rightarrow [G] = -2$$

"Planck Scale" $\approx 10^{19} \text{ GeV}$

Corresponds to $\ell_p = 10^{-33} \text{ cm}$

Observable universe ~ 20 billion light

years.



particle	mass
Neutrinos	10^{-2} eV
Electron	0.5 MeV
Muon	100 MeV
Pions	140 MeV
Proton, Neutron	1 GeV
Tau	2 GeV
W, Z boson	$80-90 \text{ GeV}$
Higgs Boson	125 GeV

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{and} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}$$

$$\delta S = \int d^4x \left[\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta (\partial_\mu \phi_a)}_{\text{Variation of action}} \right] = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) \right] \delta \phi_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right)$$

E-L

$$\boxed{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0}$$

Ex. K-b equation $\rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2 \right) = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 - (\nabla \phi)^2 - m^2 \phi^2)$

$$L = T - V \rightarrow \int d^3x \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kinetic energy}}}{=} T \quad V \equiv \int d^3x \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi = \gamma^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$

E-L $\underbrace{\partial_\mu \partial^\mu \phi}_{\square} + m^2 \phi = 0$

if V is general $\rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$

$$\text{Ex} \quad \mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}} \psi) - \nabla \bar{\psi} \cdot \nabla \psi - m \bar{\psi} \psi$$

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \frac{1}{2} \dot{\psi} - m \psi$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\frac{i}{2} \dot{\bar{\psi}}$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \bar{\psi}} = -\nabla \psi$

E-L $\frac{i}{2} \dot{\psi} - m \psi + \frac{i}{2} \partial_0 \psi + \partial_0 \nabla \psi = 0$

$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\nabla^2 \psi + m \psi$ ← It's NOT the Schrödinger eq

- $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\partial^\mu A^\nu + \partial_\rho A^\rho \gamma^{\mu\nu}$

E-L

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) &= -\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \underbrace{\partial_\mu \partial_\rho A^\rho}_{\partial^\nu \partial_\rho A^\rho} \gamma^{\mu\nu} \\ &= -\partial_\mu \left(\underbrace{\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}_{F^{\mu\nu}} \right) = -\partial_\mu F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

- Reproduces $\nabla \cdot \vec{E} = 0$

- $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$

The remaining equations are identities of $\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$A^{\mu} = (\phi, A^1, A^2, A^3)$$

• $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
 • $\frac{d\vec{B}}{dt} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$

Locality \rightarrow No terms coupling $\phi(x, t)$ and $\phi(y, t)$, i.e. $L = \int d^3x d^3y \phi(\vec{x})\phi(\vec{y})$

Lorentz invariance $\rightarrow x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}$ where

$$\Lambda_{\sigma}^{\mu} \gamma^{\sigma\tau} A_{\tau}^{\nu} = \gamma^{\mu\nu}$$

Ex. Rotation by θ about x^3 -axis $\rightarrow \Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Boost by $[v < 1]$ along x^1 -axis \rightarrow

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$$

Ex. $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$, $(\partial_{\mu} \phi)(x) = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} (\partial_{\nu} \phi)(\Lambda^{-1}x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{deinv}}(x) &= \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi(x) \gamma^{\mu\nu} \rightarrow (\bar{\lambda})^\mu_\nu (\partial_\mu \phi)(y) (\bar{\lambda}^\nu)_\nu (\partial_\sigma \phi)(y) \gamma^{\mu\nu} \\ &= (\partial_\mu \phi)(y) (\partial_\sigma \phi)(y) \gamma^{\mu\sigma} = \mathcal{L}_{\text{deinv}}(y) \end{aligned}$$

$$K-6 \rightarrow S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \rightarrow \int d^4y \det'' \wedge \mathcal{L}(y) = S \quad \checkmark$$

- The Lagrangian $\frac{1}{2}(\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\not{D}\psi) - \nabla\bar{\psi} \cdot \nabla\psi - m\bar{\psi}\psi$ is Not Lorentz invariant

Noether's theorem Every continuous symmetry of the Lagrangian gives

$$\text{rise to a conserved current } j^\mu(x) \rightsquigarrow \partial_\mu j^\mu = \frac{d}{dt} \vec{j} = 0$$

$$\text{Conserved in the sense} \rightsquigarrow Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j^0$$

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{as } \vec{j} \text{ is 0 when } |x| \rightarrow \infty$$

theorem (Noether)

Proofs

$\delta \phi_a(x) = X_a(\phi)$ is a symmetry if the Lagrangian changes by a total derivative

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu \quad \text{for some } F^\mu(\phi)$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \partial_\mu (\delta \phi_a) = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right] \delta \phi_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right)$$

If ϕ satisfies the E-L $\rightarrow \delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right)$

hence, since $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu \rightarrow J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a = F^\mu(\phi) - f^\mu(\phi)$
 $\partial_\mu J^\mu = 0$

Ex: Translations and Energy-Momentum tensor

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - \varepsilon^\mu \Rightarrow \phi_a(x) \rightarrow \phi_a(x) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi_a(x)$$

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(x) \quad \text{gives 4-conserved currents}$$

(Each for coordinate ε^ν , $\nu = 0, 1, 2, 3$)

$$(J^\mu)_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_a)} \partial_\nu \phi_a - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \equiv T^\mu_\nu$$

- $E = \int d^3x \ T^{00} \quad \leftarrow \text{Total energy (conserved)}$
- $P^i = \int d^3x \ T^{0i} \quad \leftarrow \text{Total momentum (conserved)}$

- Consider $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2)$

$$\begin{aligned} T_{\nu}^{\mu} &= \frac{1}{2} (\gamma^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) \partial_\nu \phi - \gamma^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ T^{\mu\nu} &= \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \gamma^{\mu\nu} \mathcal{L} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} E = \int d^3x \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ P = \int d^3x \phi \partial^\mu \phi \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} T^0_0 &= \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\dot{\phi} - (\nabla \phi)^2 - m^2 \phi^2) \\ T^0_i &= \dot{\phi} \partial^i \phi \end{aligned}$$

$$\text{Symmetrizing} \rightarrow \Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho \Gamma^{\rho\mu\nu} \quad \begin{array}{l} \text{Anti-symmetry in two indices} \\ \Gamma^{\rho\mu\nu} = -\Gamma^{\mu\rho\nu} \end{array}$$

\sim 6 components
 $\partial_\rho (\partial_\rho \Gamma^{\mu\nu})$

Lorentz transf and Angular momentum

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \quad \begin{array}{l} \sim \text{infinitesimal} \end{array} \quad \Lambda \gamma \Lambda^{-1} \sim (\delta^\mu_\sigma + \omega^\mu_\sigma) (\delta^\nu_\tau + \omega^\nu_\tau) \gamma^{\sigma\tau} = \gamma^{\mu\nu}$$

$$\omega^{\mu\nu} + \omega^{\nu\mu} = 0 \quad \leftarrow \text{Anti-symmetric}$$

$$\begin{aligned} \phi(x) \rightarrow \phi'(x) &= \phi(\Lambda^{-1}x) = \phi(x^\mu - \omega^\mu_\nu x^\nu) = \phi(x^\mu) - \underbrace{\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x)}_{\delta \phi} \\ \delta \phi &= -\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(\Lambda^{-1}x) \rightarrow \delta \mathcal{L} = -\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \mathcal{L} = -\partial_\mu (\omega^\mu_\nu x^\nu \mathcal{L})$$

↑ Noether's
theorems

$$j^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} (-\omega_{\nu}^{\phi} x^{\nu} \partial_{\mu}\phi) + \omega_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \mathcal{L} = -\omega_{\nu}^{\mu} x^{\nu} T_{\mu}^{\nu}$$

↑ n.s.t.p.s, n.o.i choice

$$(J^{\mu})^{\rho\sigma} = x^{\rho} T^{\mu\sigma} - x^{\sigma} T^{\mu\rho} \leftarrow 6 \text{ conserved charges} (\text{one for each gauge parameter } \omega)$$

↑ conserved

For $\rho, \sigma = 1, 2, 3 \rightarrow$ the three conserved charges give the total angular momentum of the field

$$Q^{ij} = \int d^3x (x^i T^{0j} - x^j T^{0i})$$

The boost gives

$$Q^{0i} = \int d^3x (x^0 T^{0i} - x^i T^{00})$$

It follows that

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d Q^{0i}}{dt} = \int d^3x T^{0i} + t \int d^3x \frac{\partial T^{0i}}{\partial t} - \frac{d}{dt} \int d^3x x^i T^{00} = p^i + t \frac{d p^i}{dt} - \frac{d}{dt} \int d^3x x^i T^{00} \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \int d^3x x^i T^{00} = \text{constant} \end{aligned}$$

p^i is conserved

The center of the field travels with constant velocity

Internal Symmetries: Inverses transformations that acts the same at every point in S-T

Consider $\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \psi - V(|\psi|^2)$ where $\psi(x) = (\phi_1(x) + i\phi_2(x))/\sqrt{2}$

$$E-L \rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \psi + \partial \frac{V(|\psi|^2)}{\partial \bar{\psi}} = 0$$

The System has a $U(1)$ Symmetry $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi = \psi + i\alpha \psi$

$$\Rightarrow \delta \psi = i\alpha \psi$$

$$\delta \mathcal{L} = 0 \Rightarrow j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} (-i\alpha \bar{\psi}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} i\alpha \psi$$

$$= -i\alpha \bar{\psi} \partial^\mu \psi + i\alpha \psi \partial^\mu \bar{\psi} = i\alpha (\psi \partial^\mu \bar{\psi} - \bar{\psi} \partial^\mu \psi)$$

(Interpretation of charge or particle number)

Ex Non-Abelian Internal Symmetries

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a - \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m^2 \phi_a^2 - g \left(\sum_{a=1}^N \phi_a^2 \right)^2$$

The lagrangian is invariant under $SO(N) \leftarrow$ Non-abelian

Trick $\sim \delta \phi = \alpha \phi^{\text{constant}}$ with invariant lagrangian Consider $\alpha = \alpha(x)$, the action is not invariant however

$$\delta \mathcal{L} = (\partial_\mu \alpha) h''(\phi)$$

$$\Rightarrow \delta S = \int d^4x \times \delta \mathcal{L} = - \int d^4x \propto (x) \partial_\mu h^\mu$$

If the equations of motion are satisfied ($\delta S = 0$)

$$\partial_\mu h^\mu = 0$$

Hamiltonian Formalism:

The momentum $\Pi^a(x)$ conjugate to $\phi_a(x)$, $\Pi^a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a}$

The Hamiltonian density is given by $H = \Pi^a(x) \dot{\phi}_a(x) - \mathcal{L}(x)$

the Hamiltonian is then $H = \int d^3x H$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a} \dot{\phi}_a$

Ex: Consider $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi)$, $\Pi = \dot{\phi} \Rightarrow$

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2) + V(\phi) \right)$$

- Lorentz invariance is inherently noticed in the Lagrangian formalism

however, while working in the Hamiltonian formalism we

picked a prescribed time and therefore are not Lorentz invariant

$$\dot{\phi}(x, t) = \frac{\partial H}{\partial \pi(x, t)}, \quad \dot{\pi}(x, t) = -\frac{\partial H}{\partial \phi(x, t)} \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{Equations} \\ \text{of motion} \end{matrix}$$

which, unlike the E-L equations are Not Lorentz invariant

Nevertheless, even though the Hamilton framework is not, the physics remains unchanged! although Lorentz invariance is not presented in intermediate steps

2. Free fields

Canonical Quantization \leadsto (in units $\hbar=1$)

$$[q_a, q_b] = [p^a, p^b] = 0$$

$$[q_a, p^b] = i\delta_a^b$$



$$[\phi_a(\vec{x}), \phi_b(\vec{y})] = [\pi^a(\vec{x}), \pi^b(\vec{y})] = 0$$

$$[\phi_a(\vec{x}), \pi^b(\vec{y})] = i\delta_a^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \delta_a^b$$

QM

QFT

We work in the Schrödinger picture \rightarrow [No] dependence of ϕ_n and Π^n on time, only space]

Time dependence sits on $|\psi\rangle$ which evolve by the usual Schrödinger eq

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$$

- We want to see spectrum of $H \rightarrow$ In QFT this is Very hard

-we have an infinite amount of degrees of freedom (1 for each point x)

However, "free theories" allows us to identify dynamics such that each degree of freedom evolves independently from all others

$$\text{Ex } \boxed{\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0} \rightarrow \phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}} \phi(\vec{p}, t)$$

↑ Fourier transform

$\phi(\vec{p}, t)$ satisfies

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{p}^2 + m^2) \right) \phi(\vec{p}, t) = 0$$

Harmonic oscillator with frequency $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

Remark $\phi(\vec{x}, t)$ is a superposition of simple harmonic oscillators.

SHO

Consider $\hat{H} = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2$, $[q, p] = i$

We find $\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2}} q + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} p$, $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}} q - \frac{i}{\sqrt{2\omega}} p$

Using a and $a^\dagger \rightsquigarrow q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a + a^\dagger)$

$p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (a - a^\dagger)$

We find $[a^\dagger, a] = -1 \rightsquigarrow \hat{H} = \frac{1}{2} \omega (aa^\dagger + a^\dagger a) = \omega (a^\dagger a + \frac{1}{2})$

$-\hat{H}, a^\dagger] = \omega a^\dagger \Leftrightarrow [\hat{H}, a] = -\omega a$ allow to construct eigenstates

i.e. given $|E\rangle$ s.t. $\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle \rightsquigarrow -\hat{H}a^\dagger|E\rangle = (E + \omega)a^\dagger|E\rangle$
 $-\hat{H}a|E\rangle = (E - \omega)a|E\rangle$

"Ladder" of states with energies

$\dots, E - \omega, E, E + \omega, E + 2\omega, \dots$

If the energy is bounded below $\rightsquigarrow \exists$ a state $|0\rangle$ that satisfies $a|0\rangle = 0$

$$\text{i.e. } \Rightarrow H|0\rangle = \frac{1}{2}\omega|0\rangle$$

We have excited states from $a^\dagger \rightarrow |n\rangle = (a^\dagger)^n |0\rangle$ with $H|n\rangle = (n+\frac{1}{2})\omega|n\rangle$
 (possibly $\langle n|n\rangle \neq 1$)

Free scalar field: We write ϕ and π as sum of infinite numbers creation
 and annihilation operators ($a_{\vec{p}}$ and $a_{\vec{p}}^\dagger$)

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{p}}}} [a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}]$$

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\omega_{\vec{p}}} [a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}]$$

Remark: $[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}] = 0$

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \quad \quad [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})$$

$$\text{Proof: Assume } [\alpha_{\vec{p}}, \alpha_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$$

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}), \nabla(\vec{y})] &= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \frac{(-i)}{2} \sqrt{\omega_{\vec{q}}} (-[\alpha_{\vec{p}}, \alpha_{\vec{q}}^\dagger]) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - i\vec{q}\cdot\vec{y}} + [\alpha_{\vec{p}}^\dagger, \alpha_{\vec{q}}] e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x} + i\vec{q}\cdot\vec{y}} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{(-i)}{2} (-e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} - e^{i\vec{p}\cdot(\vec{y}-\vec{x})}) = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned}$$

The Hamiltonian

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d^3 x \pi^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} \int d^3 x \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \left[-\frac{\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}}{2} (\alpha_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - \alpha_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) (\alpha_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} - \alpha_{\vec{q}}^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}} (i\vec{p} \alpha_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - i\vec{p} \alpha_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) (i\vec{q} \alpha_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} - i\vec{q} \alpha_{\vec{q}}^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}) \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}} (\alpha_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \alpha_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) (\alpha_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} + \alpha_{\vec{q}}^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \left[-\frac{\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}}{2} (\alpha_{\vec{p}} \alpha_{\vec{q}}^\dagger \delta^3(p+q) - \alpha_{\vec{p}} \alpha_{\vec{q}}^\dagger \delta^3(p-q) - \alpha_{\vec{p}}^\dagger \delta^3(q-p) + \alpha_{\vec{p}}^\dagger \alpha_{\vec{q}}^\dagger \delta^3(-p-q)) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}} (-\vec{p} \cdot \vec{q} \alpha_{\vec{p}} \alpha_{\vec{q}}^\dagger \delta^3(p+q) + \vec{p} \cdot \vec{q} \alpha_{\vec{p}}^\dagger \alpha_{\vec{q}}^\dagger \delta^3(p-q) + i\vec{p} \cdot \vec{q} \alpha_{\vec{p}}^\dagger \alpha_{\vec{q}}^\dagger \delta^3(q-p) - i\vec{p} \cdot \vec{q} \alpha_{\vec{p}}^\dagger \alpha_{\vec{q}}^\dagger \delta^3(-p-q)) \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}} (\alpha_{\vec{p}} \alpha_{\vec{q}}^\dagger \delta^3(p+q) + \alpha_{\vec{p}} \alpha_{\vec{q}}^\dagger \delta^3(p-q) + \alpha_{\vec{p}}^\dagger \alpha_{\vec{q}}^\dagger \delta^3(q-p) + \alpha_{\vec{p}}^\dagger \alpha_{\vec{q}}^\dagger \delta^3(-p-q)) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[-\frac{1}{2} \left(a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} \sqrt{\omega_p \omega_{-\vec{p}}} - a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^+ \omega_p \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\vec{p}^2 a_{\vec{p}}^+ a_{-\vec{p}}^+ \frac{1}{\sqrt{\omega_p \omega_{-\vec{p}}}} + \vec{p}^2 a_{\vec{p}}^- a_{\vec{p}}^+ \frac{1}{\omega_p} \right. \\
&\quad \left. \left. + \vec{p}^2 a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^- \frac{1}{\omega_p} + \vec{p}^2 a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^+ \frac{1}{\sqrt{\omega_p \omega_{-\vec{p}}}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{m^2}{2} \left(a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{\omega_p \omega_{-\vec{p}}}} + a_{\vec{p}}^- a_{\vec{p}}^+ \frac{1}{\omega_p} + a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^- \frac{1}{\omega_p} + a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^+ \frac{1}{\sqrt{\omega_p \omega_{-\vec{p}}}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\omega_p \omega_{-\vec{p}}} (a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^+ a_{-\vec{p}}^+) + \frac{1}{2} \omega_p (a_{\vec{p}}^- a_{\vec{p}}^+ + a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^-) + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{\sqrt{\omega_p \omega_{-\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^+ a_{-\vec{p}}^+) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{\omega_p} (a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^+ + a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^-) + \frac{m^2}{\sqrt{\omega_p \omega_{-\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^+ a_{-\vec{p}}^+) + \frac{m^2}{\omega_p} (a_{\vec{p}}^- a_{\vec{p}}^+ + a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^-) \right]
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\left(-\frac{1}{2} \sqrt{\omega_p \omega_{-\vec{p}}} + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{\sqrt{\omega_p \omega_{-\vec{p}}}} + \frac{m^2}{2\sqrt{\omega_p \omega_{-\vec{p}}}} \right) (a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^+ a_{-\vec{p}}^+) + \left(\frac{i\omega_p}{2} + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{\omega_p} + \frac{m^2}{2\omega_p} \right) (a_{\vec{p}}^- a_{\vec{p}}^+ + a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^-) \right]$$

$$=\frac{1}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p} \left[(-\omega_p^2 + \vec{p}^2 + m^2) (a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^+ a_{-\vec{p}}^+) + (\omega_p^2 + \vec{p}^2 + m^2) (a_{\vec{p}}^- a_{\vec{p}}^+ + a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^-) \right]$$

Since $\omega_p^2 = \vec{p}^2 + m^2$

$$[a_{\vec{p}}^+, a_{\vec{p}}^-] = -(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p})$$

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_p (a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^+ + a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^-) \stackrel{!}{=} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_p (a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^- + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}))$$

!!!

$$\underline{\text{Vacuum}} \sim |0\rangle \text{ so that } \alpha_{\vec{p}} |0\rangle = 0 \text{ & } \vec{p}' \sim H|0\rangle = E_0 |0\rangle = \int d^3p \frac{1}{2} w_p \delta(0) |0\rangle = 0 \quad \text{!!!}$$

We can take the space since (Infrared divergences)

$$(2\pi)^3 \delta^3(0) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{V_L}^{V_L} d^3x e^{i \vec{x} \cdot \vec{p}'} \Big|_{\vec{p}'=0} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} d^3x = V \leftarrow \text{Volume of a box}$$

Then the energy density is defined! $\sim E_0 = \frac{E_0}{V} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} w_p$

- $E_0 \rightarrow \infty$ due to the $|\vec{p}'| \rightarrow \infty$ (Ultra violet divergences) \leftarrow we can use a cut-offs to solve the divergence.

We can also take E_0 as 0 $\rightarrow H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} w_p \alpha_p^\dagger \alpha_p$
physically valid

Remark: this problems are ordering ambiguity from (1)

Classical to quantum theory, for example, if we desire a hamiltonian to be $\rightarrow H = \frac{1}{2} (\omega_q - i\mu) (\omega_q + i\mu)$ then upon quantization $H = \omega_q$

$$= \frac{1}{2} (\omega q^2 + \omega q p - \omega p q + p^2) = \frac{1}{2} (\omega^2 q^2 + p^2) \quad \checkmark$$

How we decide the ordering?

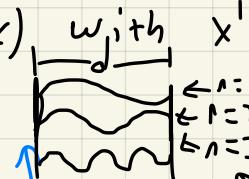
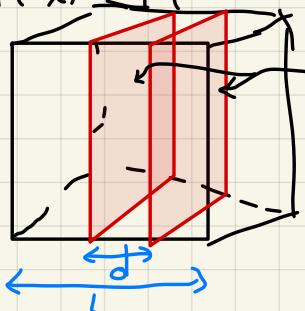
Definition: $\phi_1(\vec{x}_1), \phi_n(\vec{x}_n) \rightsquigarrow$ the normal order is $\phi_1(\vec{x}_1) \phi_n(\vec{x}_n)$

Is desired so that all annihilator operators $a_{\vec{p}}$ are placed to the right

Ex: $H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_p q_p^\dagger a_{\vec{p}}$ from

Casimir effect. Consider $\phi(x)$ with x^1 periodic i.e

$$\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x} + L \hat{n})$$



condicion de frontera ($\phi(x)=0$)

$$\omega_p^2 = \vec{p}^2 = \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + p_y^2 + p_z^2$$

Inside the plates $\vec{p} = \left(\frac{n\pi}{d}, p_y, p_z\right)$, for massless

$$\frac{E(d)}{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{dp_y dp_z}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

Energy outside $\sim E(L-d)$ Total energy $\sim E = E(d) + E(L-d)$

Casimir E depends on d, Is true, there is a force $\leftarrow \frac{\partial E}{\partial d} = F$ on the plates due to the structures of the vacuum $\leftarrow [1948] \sim$ observed 10 years later

E is infinite \sim Cutoffs (UV) such $\delta \gg a^{-1}$, $a \ll d$ are neglected

One way is:

$$\frac{E(d)}{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{dp_y dp_z}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 + p_y^2 + p_z^2} e^{-a\sqrt{\left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 + p_y^2 + p_z^2}}$$

We want finite and independent of a (Otherwise no physical meaning)

Ex: For 1+1 dimensions

$$E_{1+1}(d) \rightarrow \frac{\pi}{2d} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-an\pi/d} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-an\pi/d} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{1-e^{-a\pi/d}} \\ = \frac{\pi}{2d} \frac{e^{-a\pi/d}}{(e^{-a\pi/d}-1)^2} = \frac{d}{\pi^2 a^2} - \frac{\pi}{24d} + O(a^2)$$

$$\vec{E} = E(d) + E(L-d) = \frac{L}{2\pi a^2} - \frac{\pi}{24} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{L-d} \right) + O(a^2)$$

Cusini
force

$$\frac{\partial E_{l+1}}{\partial d} = \frac{\pi}{24d^2}$$

+ (curly bracket) terms of $\frac{1}{L} \sim 0$
 $\frac{\alpha}{d} \rightarrow 0$

Then the force remains static

as $a \rightarrow 0, L \rightarrow \infty$

$$\text{For 3+1 d.m. } \sim \frac{1}{\lambda} \frac{\partial E}{\partial d} = \frac{\pi^2}{480d^4}$$

← "Real" Cusini effect is twice
observed
(polarization
of photon)

Particles

$$[H, a_{\vec{p}}^+] = H a_{\vec{p}}^+ - a_{\vec{p}}^+ H = H a_{\vec{p}}^+ - \left[\frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} \right] = H a_{\vec{p}}^+ - \left(H a_{\vec{p}}^+ - \left[\frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} \right] \right)$$
$$= \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^+$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^+] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) = a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^+ - a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{p}}$$

$$\text{Similar } \sim [H, a_{\vec{p}}^-] = -\omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^-$$

$$\text{Denote } | \vec{p} \rangle = a_{\vec{p}}^+ | 0 \rangle \leftarrow \text{has energy } H | \vec{p} \rangle = \omega_{\vec{p}} | \vec{p} \rangle, \quad \omega_{\vec{p}} = \vec{p}^2/m^2$$

$$\text{using } P = \int d^3x \dot{\phi} \partial^i \phi \sim P = \int d^3x \frac{\dot{\phi}}{-\pi} \nabla \phi$$

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right)$$

$$\Pi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{2}} (-i) \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right)$$

$$\begin{aligned} P &= \int d^3x \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_p E_q}{2}} i \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} - e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} a_{\vec{p}}^\dagger \right) \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{q}} \nabla e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} + a_{\vec{q}}^\dagger \nabla e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \frac{1}{2} \left(a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger i \vec{q} \delta^3(\vec{p} + \vec{q}) - \vec{q} a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) - \vec{q} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) \right. \\ &\quad \left. + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}}^\dagger \vec{q} i \delta^3(\vec{p} + \vec{q}) \right) \end{aligned}$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left(a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}}^\dagger i(-\vec{p}) - i\vec{p} a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger - i\vec{p} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + i a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger \vec{p} \right)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger \rightarrow \text{normal ordering} \rightarrow \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = i\pi^3 \delta(\vec{p} - \vec{q})$$

$$\text{Hence, } \langle P | \vec{p} \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle \stackrel{V}{=} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} a_{\vec{p}}^\dagger ((2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}) | 0 \rangle$$

$$= \vec{p} | \vec{p} \rangle + 0 = \vec{p} | \vec{p} \rangle$$

$$\text{Angular operator} \rightarrow \vec{J}^i = \epsilon^{ijk} (\vec{\delta} \times (\vec{J}^0))^i$$

Ex $\vec{J}' | \vec{p}=0 \rangle = 0 \leftarrow \text{Particle carries no internal angular momentum}$
 (Quantizing the spin gives 0 for scalar field)

- Multi-particles $\sim |\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle = a_{\vec{p}_1}^+ a_{\vec{p}_2}^+ \dots a_{\vec{p}_n}^+ |0\rangle \rightsquigarrow |\vec{p}, \vec{q}\rangle = |\vec{q}, \vec{p}\rangle$

The particles are Bosons.

Fock space is generated by $|0\rangle, a_{\vec{p}}^+ |0\rangle, a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{q}}^+ |0\rangle, \dots \leftarrow N = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}$

$$N|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = n|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle$$

Check $|t| = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} w_p a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} \leftrightarrow N = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}$

$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

$$H a_{\vec{p}}^+ |E\rangle = (E + w) |E\rangle$$

Remark: $[N, H] = 0 \rightarrow$ place our states on $S(H)$ and stay there

Is intuition still no longer true (creation and annihilation)

- $|\vec{p}\rangle$ are "particles" since they are not localized in space

Position or momentum eigenstates are not good elements, \rightarrow QM brane are not

Renormalizable (delta - functions) Similarly $\phi_a(\vec{x})$ and a_p are not good operators on the Fock space

$$\langle 0 | a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'}^\dagger | 0 \rangle = \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{p}) \text{ and } \langle 0 | \phi(x) \phi(x) | 0 \rangle = \langle x | x \rangle = \delta(0)$$

Operators valued distributions

- Well known (defined) Exp vacuum $\langle 0 | \phi(0) | 0 \rangle = 0$

Fluctuations of the operator are infinite $\langle 0 | \phi(x) \phi(x) | 0 \rangle = \infty$.

Smearing of valued distributions:

$$|\Psi\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{p}) |\vec{p}\rangle .$$

$$\psi(\vec{p}) = e^{-\frac{p^2 L^2}{2m^2}}$$

Relativistic normalization

$$\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = \langle 0 | a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \leftarrow \text{Not Lorentz invariant (3-vector)}$$

we want $p' \rightarrow (p')' = \lambda^\mu \nu p^\nu \iff QM \langle \vec{p} \rangle \rightarrow \langle \vec{p} \rangle = U(\lambda) \langle \vec{p} \rangle$
 what about $\langle p | q \rangle$?

we have $|\vec{p}\rangle \rightarrow \lambda(\vec{p}, \vec{p}') |\vec{p}'\rangle$

Remark $I = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}'|$ is Lorentz invariant
but $\int d^3 p$ and $|\vec{p}'\rangle \langle \vec{p}'|$ are not.

Claim: $\int \frac{d^3 p}{2E_p}$ is Lorentz invariant $\rightarrow \int d^4 p$ is Lorentz invariant, using

$$p_\mu p^\nu = m^2 \Rightarrow p_\mu^2 = m^2 + \vec{p}^2 = E_{\vec{p}}^2$$

$\int d^4 p$ is Lorentz invariant and $p_0^2 - \vec{p}^2 - r^2 = 0$, so $L I \rightarrow$

$$\int d^4 p \delta(p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2) = \int d^3 p \left. \frac{1}{2p_0} \right|_{p_0 = E_{\vec{p}}} \delta(S(x) - \frac{\delta(x - S(r))}{S'(r)}_{\text{root}})$$

- Lorentz invariant function for 3-vectors is $2E_{\vec{p}} \delta(\vec{p} - \vec{q})$

$$\left(\underbrace{\int \frac{d^3 p}{2E_{\vec{p}}} \delta(\vec{p} - \vec{q})}_{L I} = 1 \right)$$

Relativistic normalized momentum states are then

$$|p\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}'}} |{\vec{p}'}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}'}} a_{\vec{p}'}^+ |0\rangle$$

$$\Rightarrow \langle p|q\rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{p}-\vec{q}) / 2E_{\vec{p}'} \quad (a^+(p) = \sqrt{2E_{\vec{p}'}} a_{\vec{p}}^+)$$

$$\rightarrow 1 = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}'}} |p\rangle \langle p|$$

Ex: Complex Scalar fields $\sim \mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \psi - M^2 \bar{\psi} \psi$

$$\psi = (\phi_1 + i\phi_2) \underbrace{\sqrt{2}}$$

$$\psi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}'}}} (b_{\vec{p}'} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + c_{\vec{p}'}^+ \bar{e}^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}) \quad \text{compensates } + \text{hc } \frac{1}{2} \text{ missing}$$

$$\psi^\dagger = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}'}}} (b_{\vec{p}'}^+ \bar{e}^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} + c_{\vec{p}'} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}) \quad \psi \neq \psi^\dagger \Leftrightarrow b_{\vec{p}'} \neq c_{\vec{p}'}$$

$$[\psi(x), \pi(\vec{y})] = i\delta^3(x - \vec{y}) \quad \text{and} \quad [\psi(\vec{x}), \pi^+(\vec{y})] = 0$$

with complex conjugations and

$$[\psi(x), \psi(\vec{y})] = [\psi(x), \psi^+(\vec{y})] = 0$$

Results $\rightarrow [b_{\vec{p}}, b_{\vec{q}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}') \quad , \quad [c_{\vec{p}}, c_{\vec{q}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}')$

$$\text{and } [b_{\vec{p}}, b_{\vec{q}}^\dagger] = [c_{\vec{p}}, c_{\vec{q}}^\dagger] = [b_{\vec{p}}, c_{\vec{q}}^\dagger] = [b_{\vec{p}}^\dagger, c_{\vec{q}}^\dagger] = 0$$

Creates $b_{\vec{p}}^+$ and $c_{\vec{p}}^+$ both create "particles" of mass M
and spin zero but are thought to be particles and
anti-particle

In contrast, the real scalar field is thought to be its own
antiparticle

The symmetry in the complex scalar field gives rise to a charge

$$Q = \int d^3x (\bar{\Psi} \psi - \bar{\Psi} \psi) = i \int d^3x (\pi \psi - \bar{\Psi} \pi^*)$$

Using \downarrow (and the normal ordering \sim) $Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{p}} - b_{\vec{p}}^+ b_{\vec{p}}) = N_c - N_b$

so Q counts the # of antiparticles - # of particles and

Q is conserved since $[H, Q] = 0$

Heisenberg picture After the quantization, in the Lagrangian

formalism is performed (we choose a preferred time t) it's not

Obviously, it is still longer than just

the particles evolve over time according to the Schrödinger eq.

$$i \frac{d|\vec{p}(t)\rangle}{dt} = H |\vec{p}(t)\rangle \rightarrow |\vec{p}(t)\rangle = e^{-iE_p t} |\vec{p}\rangle$$

In the Heisenberg picture the time dependence is assigned to the operator

$$O_H = e^{iHt} O_S e^{-iHt} \quad \text{so that} \quad \frac{dO_H}{dt} = i[H, O_H]$$

Heisenberg Picture Schrödinger Picture

Notation $\phi(x)$ Schrödinger

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(x) \leftarrow \text{Heisenberg}$$

- $$\bullet \quad \underset{\substack{\uparrow \\ L=0}}{\phi(x)} = \phi(\bar{x}) \quad \bullet \quad [\phi(x), \phi(y)] = [\pi(x), \pi(y)] = 0$$

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\delta^3(x-y)$$

$$\dot{\phi} = i[H, \phi] = -\frac{i}{2} \left[\int y^3 \pi |y|^2 + \nabla \phi \partial_y^2 + m^2 \phi |y|^2, \phi(x) \right] = \underbrace{\int y^3 y^3 (\bar{x}^2 \bar{y}) \pi |y|}_{} =$$

$$\begin{aligned}
\Gamma [\pi^2(y), \phi(x)] &= \pi(y) \pi(y) \phi(x) - \phi(x) \pi(y) \pi(y) \\
&= \pi(y) [\pi(y), \phi(x)] + \pi(y) \phi(x) \pi(y) - \phi(x) \pi(y) \pi(y) \\
&= \pi(y) (-i \delta^3(\vec{x} - \vec{y})) + (-i \delta^3(\vec{x} - \vec{y})) \pi(y) \\
&= -i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \pi(y)
\end{aligned}$$

$$\dot{\pi} = i [\mathbf{H}, \pi] = \frac{1}{2} \left[\int d^3y \pi(y)^2 + \nabla \phi(y)^2 + m^2 \phi(y)^2, \pi(x) \right]$$

$$\begin{aligned}
[\nabla_y \phi(y), \pi(x)] &= \nabla_y \phi(y) \nabla_y \phi(y) \pi(x) - \pi(x) \nabla_y \phi(y) \nabla_y \phi(y) \\
&= \nabla_y \phi(y) (\nabla_y [\phi(y), \pi(x)] + \pi(x) \nabla_y \phi(y)) \\
&\quad - (\nabla_y [\pi(x), \phi(y)] \nabla_y \phi(y) + \nabla_y \phi(y) \pi(x) \nabla_y \phi(y)) \\
&= \nabla_y \phi(y) (\nabla_y \delta^3(\vec{x} - \vec{y})) 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\pi} &= \int d^3y (- \nabla_y \phi(y) \nabla_y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) - m^2 \phi(y)^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{y})) \\
&= \int d^3x (\nabla_y^2 \phi(y) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) - m^2 \phi(y)^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{y})) = \nabla^2 \phi(x) - m^2 \phi(x)^2
\end{aligned}$$

Hence \rightsquigarrow $\partial_x \partial^{\omega} \phi + m^2 \phi = 0$ K-6 equation

We want now the Fourier expansion of $\phi(x)$

using • $[H, a_{\vec{p}}] = -E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$

• $[H, a_{\vec{p}}^+] = E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^+$

$$\text{ad}_x(a_{\vec{p}}) = [H, a_{\vec{p}}]^n \cdot [H, [H, [\dots [H, a_{\vec{p}}] \dots]]] = (-E_{\vec{p}})^n a_{\vec{p}}$$

$e^{ad_x} y e^{-ad_x} = e^{\text{ad}_x} y$

$$e^{iHt} a_{\vec{p}} e^{-iHt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i t [H, a_{\vec{p}}])^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-E_{\vec{p}} t)^n}{n!} a_{\vec{p}} = e^{-i E_{\vec{p}} t} a_{\vec{p}}$$

Proof of

Lie Groups, Lie Algebras and representations

Brian Hall

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = \frac{1}{\hbar \beta} (e^{iHt} \alpha e^{-iHt}) = e^{iHt} i \hbar \alpha e^{-iHt} - e^{iHt} i \hbar H e^{-iHt}$$

$$= i e^{iHt} [H, \alpha] e^{-iHt} = -i E_p \alpha(t)$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = e^{-iE_p t} \alpha_p \quad \checkmark$$

Hence \rightarrow using Heisenberg picture ($O_H = e^{iHt} O_S e^{-iHt}$)

$$\phi(\vec{x}, t) = e^{iHt} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{p}}}} (\alpha_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} + \alpha_{\vec{p}}^+ e^{-i\vec{p}\vec{x}}) e^{-iHt}$$

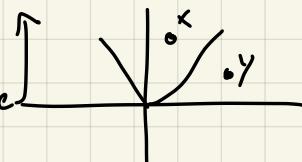
$$\downarrow P = p^\mu x_\mu = E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x}$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{p}}}} (\alpha_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} + \alpha_{\vec{p}}^+ e^{i\vec{p}\vec{x}})$$

Causality: $[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y})$ [What about time?]

- We want $[O_1(x), O_2(y)] = 0$ for all $(x-y)^2 < 0$

Causally Separated Operators (David)



Define $[\phi(x), \phi(y)] = \Delta(x-y)$

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}E_p^3 E_q^3}} \left(a_{\vec{p}}^{-1P} e^{iPx} + a_{\vec{p}}^+ e^{iPx} \right) \left(a_{\vec{q}}^{-1Q} e^{-iQy} + a_{\vec{q}}^+ e^{iQy} \right)$$

$$= \phi(x)\phi(y)$$

$$- \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_q}} (2\pi)^3 \delta(p-q) (e^{-ipx+iqy} - e^{ipx-iqy})$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)})$$

Invariant ✓ Invariant ✓

- If $(x-y) = (t, 0, 0, 0) \rightsquigarrow$

$$\Delta(x-y) \neq 0$$

$$\{\phi(x, 0), \phi(x, t)\} \sim e^{int} - e^{imt}$$

- For Spacelike Separations,

$$(x-y)^2 = -(x-y)^2 < 0 \rightsquigarrow$$

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}} (e^{iP(x-y)} - e^{-iP(x-y)})$$

$$\begin{aligned}
 & (a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} e^{-ipx-iqy} + a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{q}}^+ e^{ipx+iqy} \\
 & + a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{q}} e^{ipx-iqy} + a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{q}}^+ e^{ipx+iqy}) \\
 & - (a_{\vec{p}} a_{\vec{q}} e^{-ipx-iqy} + a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{p}}^+ e^{ipx+iqy} \\
 & + a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{p}} e^{ipx-iqy} + a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{p}}^+ e^{ipx+iqy}) \\
 & = -e^{-ipx+iqy} (a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^+ - a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{p}}^+) \\
 & \quad e^{ipx-iqy} (a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{q}} - a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{p}}) \\
 & = (a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^+ - a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{p}}^+) (e^{-ipx+iqy} - e^{ipx-iqy})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x \leftrightarrow y \text{ same expression} \rightsquigarrow \text{if } P \text{ sign} \\
 & (e^{iP(x-y)} - e^{-iP(x-y)}) = -\Delta(x-y)
 \end{aligned}$$

Propagators Amplitude to find an a point x a prepared particle in y

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_q}} \langle 0 | a_p a_q^\dagger | 0 \rangle e^{i(p \cdot x - q \cdot y)}$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i p \cdot (x-y)} \equiv D(x-y)$$

Propagator.

- For space like separations $(x-y)^2 < 0$ $D(x-y) \sim e^{-m|x-y|}$

Non-vanishing
in space-like separation

- In $(x-y)^2 < 0$ there is no Lorentz invariant way to order events this implies particle can go from $x \rightarrow y$ and $y \rightarrow x$ undistinguishable In any "real measurement" this amplitudes cancel i.e

$$D(x-y) - D(y-x) = \Delta(x-y) = [\phi(x), \phi(y)]$$

With the complex scalar field the interpretation is that particle and anti-particle coexist

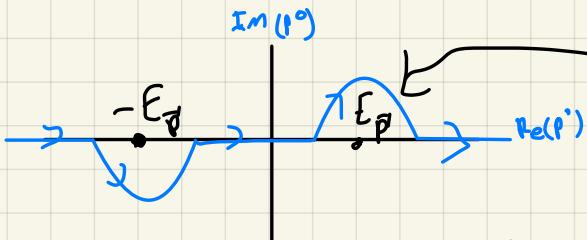
Feynman propagator. $\Delta_F(x-y) = \langle 0 | \bar{\psi}(x) \psi(y) | 0 \rangle = \begin{cases} D(x-y) & x^0 > y^0 \\ D(y-x) & y^0 > x^0 \end{cases}$

↑
Time ordering.

$$\overline{\mathcal{L}} \phi(x)\phi(y) = \begin{cases} \phi(u)\phi(v) & x^o > y^o \\ \phi(v)\phi(u) & y^o > x^o \end{cases}$$

Claim $\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)}$

$\leftarrow p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2$ pole when $p^0 = \pm E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$



$$\frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{(p^0)^2 - \vec{p}^2} = \frac{1}{(p^0 - E_p)(p^0 + E_p)}, \quad \text{Res}\left(\frac{1}{p^2 - m^2}\right) = \pm \frac{1}{2E_p}$$

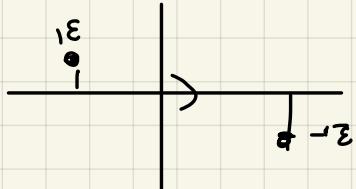
In recognizing over p^0

for $x^o > y^o$ $\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-2\pi i}{2E_p} ; e^{-iE_p(x^o-y^o) + i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} = D(x-y)$

for $x^o < y^o \Rightarrow \Delta_F(x-y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{2\pi i}{(-2E_p)} ; e^{-iE_p(y^o-x^o) + i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} = D(y-x)$

INSTEAD OF Specifying a contour we use a "wick rotation"

$$\Delta_F(x-y) = \int_{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0$$

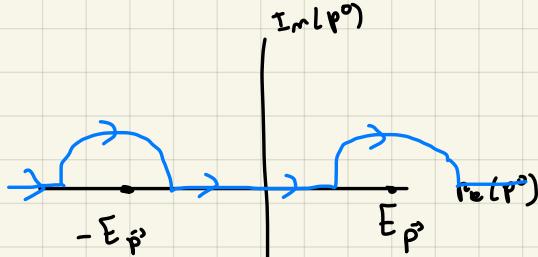


Remark

$\Delta_F(x-y)$ is the Green function for the K-G operator

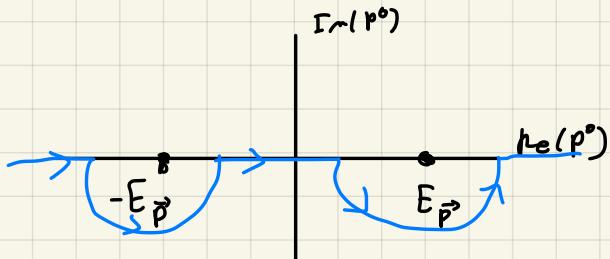
$$(\partial_t^2 - \vec{p}^2 + m^2) \Delta_F(x-y) = \int_{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2} (-\vec{p}^2 + m^2) e^{ip(x-y)} = -i \delta^4(x-y)$$

No contour is picked.



↑ Retarded contour

$$\Delta_R(x-y) = \langle D(x-y) - D(y-x) \rangle_0 \quad \begin{matrix} x^0 > y^0 \\ y^0 > x^0 \end{matrix}$$



Advanced contour

• Retarded : we know information and want to evolve it

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = J(x) \text{ for some background solution } J(x)$$

• Advanced : we know the end point of a field and want to figure out where it came from

NON-relativistic fields. Write the complex scalar field $\psi(\vec{x}, t) = e^{imt} \tilde{\psi}(\vec{x}, t)$

the L-G eq reads :

$$\partial_t^2 \psi - \vec{\nabla}^2 \psi + m^2 \psi = (-m) e^{-int} \tilde{\psi}(\vec{x}, t) + (-im) e^{-int} \dot{\tilde{\psi}}(\vec{x}, t) + \overline{e^{-int} \tilde{\psi}(\vec{x}, t)} \\ - e^{-int} \vec{\nabla}^2 \tilde{\psi}(\vec{x}, t) + \overline{e^{-int} m^2 \tilde{\psi}(\vec{x}, t)} = 0$$

$$= e^{-nt} \left(\tilde{\psi}(\vec{x}, t) - 2im \dot{\tilde{\psi}}(\vec{x}, t) - \vec{\nabla}^2 \tilde{\psi}(\vec{x}, t) \right) = 0$$

The non-relativistic limit has $|\vec{p}| \ll m$

In this limit we drop $\tilde{\psi}$ and hence

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \tilde{\psi}(\vec{x}, t)$$

Schrödinger-like equation for non-relativistic free particles or mass
 (It does Not have a probability interpretation)

Using the Lagrangian (and the limit $\partial_t \Psi \ll m \Psi$)
 of the complex scalar field and dropping the tilde

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi} \dot{\Psi} - \frac{1}{2m} \nabla \bar{\Psi} \nabla \Psi \quad \xleftarrow{\text{Lagrange}} (\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\bar{\Psi} \dot{\Psi} - \dot{\bar{\Psi}} \Psi) - \nabla \bar{\Psi} \cdot \nabla \Psi - m \bar{\Psi} \Psi)$$

The symmetry $\Psi \rightarrow e^{i\omega t} \Psi$ gives a conserved current

$$J^{\mu} = (-\bar{\Psi} \Psi, \frac{i}{2m} (\bar{\Psi} \nabla \Psi - \Psi \nabla \bar{\Psi}))$$

and $T^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*} = \Psi^*$ doesn't depend on first derivatives!

we get $H = \frac{1}{2m} \nabla \Psi^* \nabla \Psi$ and the quantization
 is $[\Psi(\vec{x}), \Psi^*(\vec{y})] = [\Psi^*(\vec{x}), \Psi(\vec{y})] = 0$

$$[\psi(\vec{x}), \psi^*(\vec{y})] = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\psi(\vec{x}) = \int \frac{\delta^3 p}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}} e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}} \xrightarrow{\sim} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^*] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$$

$$H \mid \vec{p} \rangle = \frac{\vec{p}^2}{2m} \mid \vec{p} \rangle \quad \leftarrow \text{vs vnl}$$

Remark. Quantizing the first order Lagrangian gives rise to non-relativistic particles much more

Relativizing QM.

We have operator $\vec{P} = \int \frac{\delta^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} a_{\vec{p}}^* a_{\vec{p}}$, what about \vec{x} ?

Similarly $\sim \vec{P}$ satisfies $\vec{P} \mid \vec{p} \rangle = \vec{p} \mid \vec{p} \rangle$ then $\vec{X} \mid \vec{x} \rangle = \vec{x} \mid \vec{x} \rangle$

In the non-relativistic limit we have $\psi^*(\vec{x}) = \int \frac{\delta^3 p}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^* \vec{e}^* \cdot \vec{T} \cdot \vec{x}$

which creates a phase locked (by δ) in \vec{x} hence $\mid \vec{x} \rangle = \psi^*(\vec{x}) \mid 0 \rangle$
 i.e. $\vec{X} = \int \delta^3 x \vec{x} \psi^*(\vec{x}) \psi(\vec{x})$, satisfies $\vec{X} \mid \vec{x} \rangle = \vec{x} \mid \vec{x} \rangle$

we can construct representations

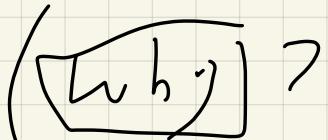
$$|\Psi\rangle = \int d^3x \ \psi(\vec{x}) |\vec{x}\rangle \text{ with } \psi \text{ the "usual" wavefunction}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad x' |\Psi\rangle &= x' \left\langle \int d^3x \ \psi(\vec{x}) \right| \vec{x} \rangle = \left\langle \int d^3x \ \psi(\vec{x}) x' \right| x \rangle = \left\langle \int d^3x \ x' \psi(\vec{x}) \right| \vec{x} \rangle \checkmark \\ \bullet \quad p' |\Psi\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p' a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \psi(\vec{x}) \psi^\dagger(\vec{x}) |0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \cdot \vec{p}' a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'} \psi(\vec{x}) \underbrace{a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}}}_{\delta} |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p' a_{\vec{p}}^\dagger \vec{p} \cdot \vec{p}' e^{-i\vec{p}\vec{x}} \psi(\vec{x}) |0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^\dagger \left(\frac{i}{\partial} \vec{p} \right) e^{-i\vec{p}\vec{x}} \psi(\vec{x}) |0\rangle \\ &\stackrel{\downarrow \text{parts}}{=} - \int \frac{d^3x d^3p}{(2\pi)^3} a_{\vec{p}}^\dagger, e^{-i\vec{p}\vec{x}} \frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial x'} |0\rangle = \int d^3x \left(-i \frac{\partial \psi}{\partial x'} \right) |\vec{x}\rangle \checkmark \end{aligned}$$

- we find operators \vec{x}, \vec{p} so that $[x^k, p^l] |\Psi\rangle = i \delta^{kl} |\Psi\rangle$

- Dynamics are given with the Hamiltonians

$$H = \int d^3x \frac{1}{2\pi} \nabla \psi^\dagger \nabla \psi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-\vec{p}^2}{2m} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}$$



$$\downarrow \\ i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \Psi$$

Interactions. Using fixed background potential $V(\vec{x})$.

$$\mathcal{L} = i \Psi^* \dot{\Psi} - \frac{1}{2m} \nabla \Psi^* \nabla \Psi - V(\vec{x}) \Psi^* \Psi$$

Not so simple because it has no translational symmetry

We consider particle-particle interaction (between)

$$\Delta \mathcal{L} = \Psi^*(\vec{x}) \Psi^*(\vec{x}') \Psi(\vec{x}) \Psi(\vec{x}') \leftarrow \text{Destroys two particles and creates other two}$$

We consider $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \sum_{n \geq 3} \lambda_n \phi^n$ Coupling constants

- The action has units of angular momentum (same as $\hbar = 1$) \sim

$$[S] = 0 \sim [\mathcal{L}] = \frac{[S]}{[\partial^\mu x]} = 0 + 4 = +4$$

$$\text{Since } [\partial_\mu] = 1 \sim [\phi] = 1, [m] = 1, [\lambda_n] = 4 - n$$

Small perturbations are not only $\lambda_n \ll 1$) Not¹

• $[\lambda_3] = 1$ ← Dimensionless parameter is λ_3/E , Edm os muss

E is scale of interest $\rightarrow \lambda_3 \phi_{31}^3$ is a small perturbation

at high energies $E \gg \lambda_3$ but a large perturbation at low energies $E \ll \lambda_3$. This terms are called

Relevant because are most relevant at low energies

In relativistic theory $E > M$ and so we make $\lambda_3 \ll m$

• $[\lambda_n] = 0$ since if $\lambda_n \ll 1$ marginal

• $[\lambda_3] < 0$ for $n \geq 5$ Dimensionless parameter is $\lambda_3 E^{1-n}$

Small at low-energies and large at high energies

Such perturbations are called **irrelevant**

Examples of weakly coupled theories

as small perturbations of the free

Theories that can truly be considered

field theory at all energies

$$1) \phi^4. \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

with $\lambda \ll 1$

\nwarrow terms like

$$c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{q}}^+ c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{q}}^+, \quad c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{q}}^+ c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{q}}^+$$

2) Scalar Yukawa theory \leadsto

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - M^2 \psi^* \psi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - g \psi^* \psi \phi$$

with $g \ll M, m$

Couples a complex scalar ψ to a real scalar ϕ

Has a symmetry of $U(1)$ s.t. $[\overset{\text{conserves charge}}{Q}, H] = 0$

- The particles minus the # of anti-particles is conserved

Has a local minimum $\boxed{\phi=0=\psi}$ but is unbound below for large

$-Q\phi$

The interaction picture \rightarrow we know how to solve one part of the Hamiltonian

Interaction is a hybrid of Schrödinger and Heisenberg

- $H = H_0 + H_{int}$
↑
Solvable \leftarrow Small perturbations

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0 t} |\psi(t)\rangle_S \quad \leftarrow \left(\frac{d|\psi\rangle_S}{dt} = H |\psi\rangle_S \right)$$
$$(O_H(t) = e^{iHt} O_S e^{-iHt})$$

$$(|\psi\rangle_A = e^{iHt} |\psi\rangle_S)$$

The interaction Hamiltonian in the interaction picture is

$$H_I \equiv (H_{int})_I = e^{iH_0 t} (H_{int})_S e^{-iH_0 t}$$

The Schrödinger equations for states in the interaction picture are derived

$$\frac{d |\psi\rangle_s}{dt} = H_s |\psi\rangle_s$$

"

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-iH_0 t} |\psi\rangle_I \right) = (H_0 + H_{int}) e^{-iH_0 t} |\psi\rangle_I$$

$$H_0 e^{-iH_0 t} |\psi\rangle_I + \cancel{e^{iH_0 t} \frac{d}{dt} |\psi\rangle_I} = H_0 e^{-iH_0 t} |\psi\rangle_I + (H_{int})_s e^{-iH_0 t} |\psi\rangle_s$$

$$\frac{d}{dt} |\psi\rangle_I = \underbrace{e^{iH_0 t} H_{int} e^{-iH_0 t}}_{H_I} |\psi\rangle_I = H_I |\psi\rangle_I$$

Dyson formula: Solutions of the Schrödinger Eq. of the interaction picture

is taken $|\psi(t)\rangle_I = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I$

Unitary s.t. • $U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3)$

• $U(t, t) = 1$

$\Rightarrow \frac{d U}{dt} = H_I U$

Since H_I is an operator there are time issues (ordering)

Ex' \downarrow usual solution

$$\exp\left(-\int_{t_0}^t H_I(t') dt'\right) = 1 - \frac{i}{2} \int_{t_0}^t H_I(t') dt' + \frac{(-1)^2}{2!} \left(\int_{t_0}^t H_I(t') dt'\right)^2 + \dots$$

Differentiate $\rightarrow -\frac{1}{2} \left(\int_{t_0}^t H_I(t') dt'\right) H_I(t) - \frac{1}{2} H_I(t) \left(\int_{t_0}^t H_I(t') dt'\right)$

Not OK

OK! (sol: $\frac{du}{dt} = H_I u$)

$$\exp\left(-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'\right)$$

Claim: Solution is $U(t, t_0) = T \exp\left(-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'\right)$

Time ordering

$$T(O_1(t_1) O_2(t_2)) = \begin{cases} O_1(t_1) O_2(t_2) & t_1 > t_2 \\ O_2(t_2) O_1(t_1) & t_2 > t_1 \end{cases} \quad \leftarrow \text{performs first in time}$$

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') + \frac{(-1)^2}{2!} \left[\int_{t_0}^t dt' \int_{t'}^t dt'' H_I(t'') H_I(t') + H_I(t') \right] + \dots$$

we can write

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t') H_I(t'') + \dots$$

Proof [of $U(t, t_0)$ being the soln. of the Schrödinger p.gne]

apply T implies that every thing commutes

$$i \frac{d}{dt} T \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right) \stackrel{!}{=} T \left[H_I(t) \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right) \right]$$

$$= H_I(t) T \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right)$$

\nwarrow
t is the instant time

Scattering: we start with the interacting Hamiltonian as the unknown theory

$$H_{Int} = g \int d^3x \psi^\dagger \psi \phi \quad \rightarrow U(t, t_0) \rightarrow |\psi(t)\rangle \langle \psi(t_0)|$$

but H_{Int} contains creation and annihilation operators for each particle

- $\phi \sim a + a^+$. Create and destroy ϕ particles (**MESONS**)
- $\psi \sim b + c^+$ destroy ψ particles (ψ) and creates anti particles ($\bar{\psi}$) (**NUCLEONS**)
- $\psi^+ \sim b^+ + c$ Create nucleus through b^+ and destroy nucleus through c

Remark: $Q = N_c - N_b$ IS conserved (*In the Yukawa theory & U(1) Sym*)

- H_{int} in first order has $c^+ b^+ a \rightarrow$ this a meson and Create an nucleon-antinucleon pair i.e. $\phi \rightarrow \psi \bar{\psi}$
- $(H_{\text{int}})^2$ gives, for example, $(c^+ b^+ a)(c b a^+)$
i.e. $4 \bar{\psi} \rightarrow \phi \rightarrow \psi \bar{\psi}$

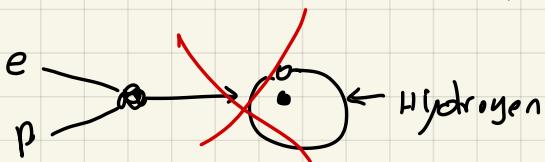
Amplitudes \rightarrow $|I_{\gamma 1} + \omega\rangle$ and final states are eigenstates of the theory
 i.e.) as $t \rightarrow -\infty$ and $|f\rangle$ as $t \rightarrow \infty$ eigenstates
 of H_0

The amplitude going from $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ is

$$\lim_{t_+ \rightarrow \pm\infty} \langle f | U(t_+, t_-) | i \rangle = \langle f | S | i \rangle$$

↑ Scattering
Unitary S operator (S-matrix)

- This formalism can't describe scattering that cope with bound states
i.e. a scattering of an electron and proton that
collide, bind, and leave as a hydrogen atom



Ex: (meson decay) consider $|i\rangle = \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle$ and $|f\rangle = \sqrt{4E_q E_{q_2}} b_q^\dagger c_{q_2}^\dagger |0\rangle$

- $|i\rangle$ contains a single meson of momentum p , the final $|f\rangle$ contains a nucleon - anti-nucleon pair. To leading order in g , it's

$$\langle f | S | i \rangle = -ig \langle f | \int d^4x \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \phi(x) | i \rangle$$

$$= -g \langle S | \int d^4x \ \psi^+(x) \psi(x) \underbrace{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{a_{\vec{k}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{-ikx}}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}} e^{ipx} | 0 \rangle$$

$$\langle S | S | i \rangle = -ig \langle S | \int d^4x \ \psi^+(x) \psi(x) e^{ipx} | 0 \rangle$$

Similarly $\psi \sim b + c^\dagger$, $\psi^+ \sim b^\dagger - c$

\Rightarrow only the b^\dagger, c^\dagger contribute \sim

$$\langle S | S | i \rangle = -ig \langle 0 | \int \int d^4x \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^6} \underbrace{\frac{\sqrt{E_{\vec{k}_1} E_{\vec{k}_2}}}{\sqrt{E_{\vec{k}_1} E_{\vec{k}_2}}}}_{\text{zero order with } S \text{ does not contribute}} c_{\vec{k}_1}^\dagger b_{\vec{k}_2}^\dagger | 0 \rangle e^{i(k_1 + k_2 - p)x}$$

$$= -ig \delta^4(q_1 + q_2 - p) (2\pi)^4$$

- Analysis put on the frame of the mesons $\sim P = (M, 0, 0, 0)$

$\sim \delta$ imposes $\vec{q}_1 = -\vec{q}_2$ (momentum conservation and

$$M = q_1^0 + q_2^0 = 2q_1^0 = 2\sqrt{M + \vec{q}^2}$$

Wick's theorem we want to compute $\langle S | T(H_I(x_1) \cdots H_I(x_n)) | i \rangle$

$$E_x: \phi(x) = \text{real Schrödinger field} \rightarrow \phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$$

$$\int \frac{dp}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}$$

$$\int \frac{dp}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}}^+ e^{+i\vec{p} \cdot \vec{x}}$$

$$IS \quad x^0 > y^0 \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} T \phi(x) \phi(y) &= \phi(x) \phi(y) = \phi^+(x) \phi^+(y) + \phi^-(x) \phi^+(y) + \phi^+(y) \phi^+(x) + [\phi^+(x), \phi^-(y)] \\ &\quad \uparrow \text{normal ordered} \\ &= : \phi(x) \phi(y) : + D(x-y) + \phi^-(x) \phi^-(y) \end{aligned}$$

$$IF \quad y^0 > x^0$$

$$T \phi(x) \phi(y) = : \phi(x) \phi(y) : + D(y-x)$$

$$\text{Hence } \rightsquigarrow T \phi(x) \phi(y) = : \phi(x) \phi(y) : + \Delta_F(x-y)$$

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i k \cdot (x-y)}}{|k^2 - n^2 + i\epsilon|}$$

Definition Contraction of two operators

$$\cdots \overbrace{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)}^{\text{...}} \cdots = \cdots \Delta_F(x_1 - x_2) \cdots$$

Similarly $T(\psi(x)\psi^+(y)) = : \psi(x)\psi^+(y) : + \Delta_F(x-y)$

$$\psi(x)\psi^+(y) = \Delta_F(x-y) \quad \text{and} \quad \overbrace{\psi(x)\psi(y)}^{\text{...}} = \overbrace{\psi^+(x)\psi^+(y)}^{\text{...}} = 0$$

Wicks theorem: $\phi_i = \phi(x_i)$

$$T(\phi_1 \cdots \phi_n) = : \phi_1 \cdots \phi_n : + : \text{all possible contractions:}$$

Cx: $T(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4) = : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : + \overbrace{\phi_1\phi_2}^{\text{...}} : \phi_3\phi_4 : + \overbrace{\phi_1\phi_3}^{\text{...}} : \phi_2\phi_4 : + \overbrace{\phi_1\phi_4}^{\text{...}} : \phi_2\phi_3 : + \cdots$

$$+ \overbrace{\phi_1\phi_2}^{\text{...}} \overbrace{\phi_3\phi_4}^{\text{...}} + \overbrace{\phi_1\phi_3}^{\text{...}} \overbrace{\phi_2\phi_4}^{\text{...}} + \overbrace{\phi_1\phi_4}^{\text{...}} \overbrace{\phi_2\phi_3}^{\text{...}}$$

Nucleon Scattering

$$\psi \psi \rightarrow \psi \psi. \quad |i\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{2E_{\vec{p}_2}} b_{\vec{p}_1}^+ b_{\vec{p}_2}^+ |0\rangle \equiv |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle$$

$$|S\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}'_1}} \sqrt{2E_{\vec{p}'_2}} b_{\vec{p}'_1}^+ b_{\vec{p}'_2}^+ \equiv |\vec{p}'_1, \vec{p}'_2\rangle$$

we see at $\langle S|S|\rangle$ (or precisely $\langle S|S-1|\rangle$ because no scattering is not relevant)

Order g^2 .

$$\frac{(-ig)^2}{2} \int dx_1 dx_2 T(\psi^+(x_1) \psi(x_1) \phi(x_1) \psi^+(x_2) \psi(x_2) \phi(x_2))$$

Using Wick theorem only : $\psi^+(x_1) \psi(x_1) \phi(x_2) \psi(x_2) ; \phi(x_1) \phi(x_2)$ only

Contributes, any other will give zero contribution

On the other hand,

$$\langle p'_1, p'_2 | \psi^+(x_1) \psi(x_1) \psi^+(x_2) \psi(x_2) | p_1, p_2 \rangle =$$

$$\langle p'_1, p'_2 | \psi^+(x_1) \psi^+(x_2) | 0 \rangle \langle 0 | \psi(x_1) \psi(x_2) | p_1, p_2 \rangle$$

$$= (e^{i p'_1 x_1 + i p'_2 x_2} + e^{i p'_1 x_2 + i p'_2 x_1}) (c^{-i p_1 x_1 - i p_2 x_2} + c^{-i p_1 x_2 - i p_2 x_1})$$

$$\langle 0 | \psi(x) | p \rangle = e^{-ip \cdot x}$$

Putting all together

$$\begin{aligned}
 & \frac{(-ig)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 (e^{i(p'_1 x_1 + p'_2 x_2)} + e^{i(p'_1 x_2 + p'_2 x_1)}) (e^{-i(p'_1 x_1 - i p'_2 x_2)} + e^{-i(p'_1 x_2 - i p'_2 x_1)}) \times \\
 & \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{ik(x_1-x_2)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 & = (-ig)^2 \int d^4k \frac{i(2\pi)^8}{(2\pi)^4} \left(J^4(p'_1 - p_1 + k) J^4(p'_2 - p_2 - k) + J^4(p'_1 - p_1 + k) J^4(p'_2 - p_2 + k) \right) \\
 & = (-ig)^2 \left[\frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{(p_2 - p'_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \right] (2\pi)^4 J^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)
 \end{aligned}$$

using $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ and $|p'_1| = |\vec{p}'_1|$ so 4-momentum of the meson is

$$k = (0, \vec{p}' - \vec{p}') \text{ so } k^2 = 0 \rightarrow (p_1 - p'_1)^2 < 0$$

$$= (-ig)^2 \left[\frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 - m^2} + \frac{1}{(p_2 - p'_2)^2 - m^2} \right] (2\pi)^4 J^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)$$

- Remark this term is relevant for $\psi\bar{\psi} \rightarrow \psi\bar{\psi}$, $\bar{\psi}\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}\bar{\psi}$ and $\psi\bar{\psi} \rightarrow \psi\bar{\psi}$. However, the term $\psi\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}\bar{\psi}$ does not exist

because violates conservation of Q charge

Ex: $\psi \phi \rightarrow \psi \phi$ at order g^2

$$\psi^\dagger(x_1) \phi(x_1) \psi(x_2) \phi(x_2) : \underbrace{\psi(x_1) \psi^\dagger(x_1)} + (\psi^\dagger \leftrightarrow \psi)$$

again this term contributes to
• $\bar{\psi} \phi \rightarrow \bar{\psi} \phi$
• $\phi \phi \rightarrow \psi \bar{\psi}$

Feynman diagrams

- Draw an external line for each particle in the initial state
↳ and each particle in the final state ↳

Dotted lines for mesons and solid lines for nucleons

Assign a four momentum p to each line and add an arrow to denote its charge (Incoming arrow for ψ and outgoing for $\bar{\psi}$)
Initial State ↑

and final state the same reverse

- Join the external lines together with trivalent vertices



Feynman Rules

- Add a momentum k to each internal line

- To each vertex, write down a factor of

$$(-i\gamma)(z^{\dagger})^4 J'' \left(\sum_i k_i \right)$$

↑ sum of all momenta k
flowing into the vertex

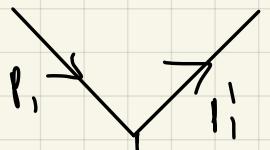
- For each internal dotted line, corresponding to a ϕ particle with momentum k , we write down a factor of

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

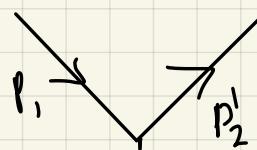
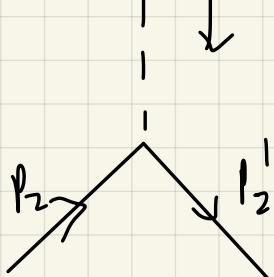
We include the sum factor for solid internal ψ lines, with m replaced by the nucleon mass M

Examples

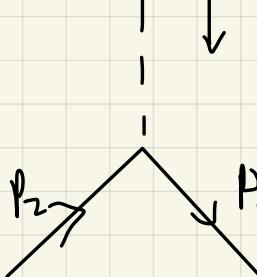
- $\Psi \rightarrow \Psi \Psi$ at order g^2 The two simplest diagrams contributing to this process



$$| K |$$



$$| K |$$



$$(-i)^2 \left[\frac{1}{(p_1 - p_1')^2 - m^2} + \frac{1}{(p_1 - p_2)^2 - m^2} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \quad (1)$$

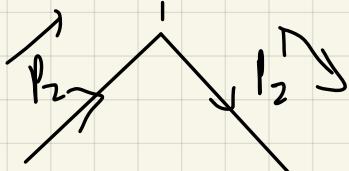
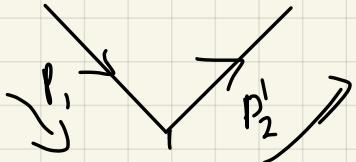
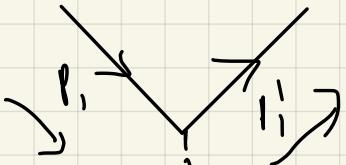
$$\bullet |K| = (p_1 - p_1') = (p_2' - p_2)$$

The mass K doesn't satisfy the usual energy

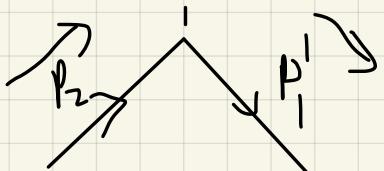
$K^2 \neq m^2$ Is called a

VIRTUAL particle
Said to be off-shell

• External legs $p^2 = M^2$
and solid line on-shell



Contributor order $O(g^4)$



Contributor order $O(g^6)$

Amp,itudes we desire A_{S_1} by stripping off this momentum-conserving
 δ -solution,

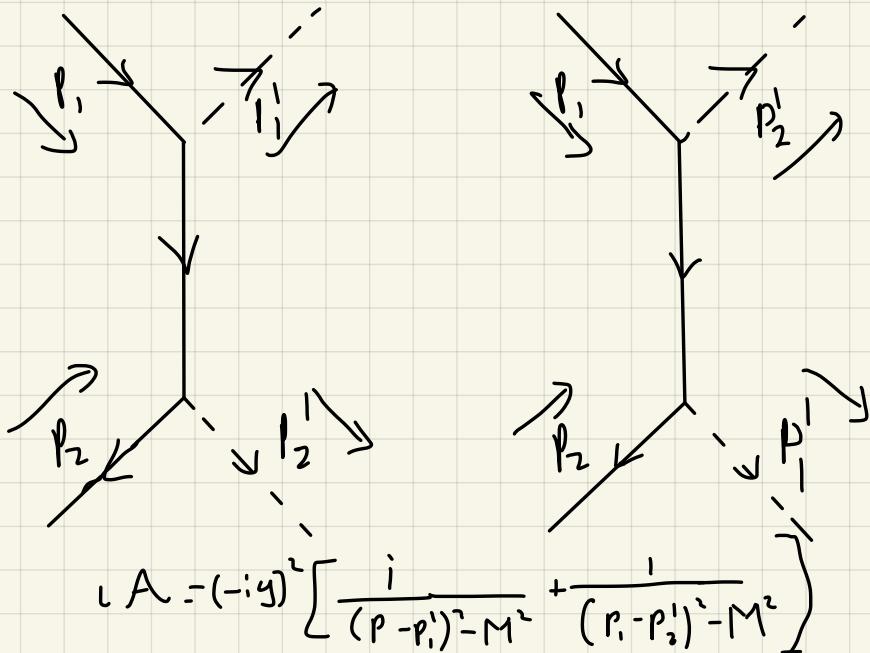
$$\langle S | S-1 | I_1 \rangle = i A_{S_1} (2\pi)^4 \delta^4(P_F - P_1)$$

Feynman rules for (A_S)

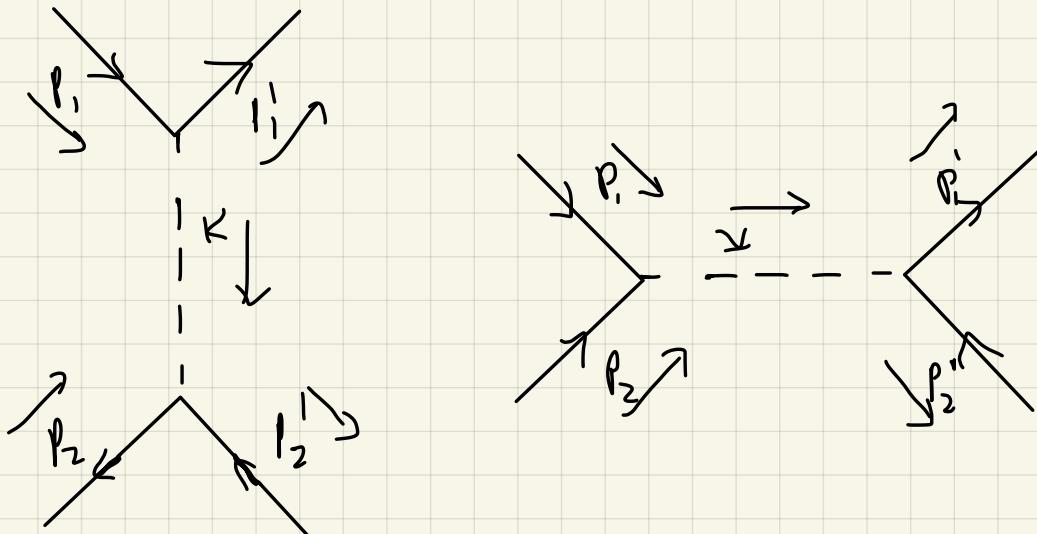
- Draw all possible diagrams with appropriate external legs and impose 4-momentum conservation at each vertex
 - Write down the factor of $(-ig)$ at each vertex
- For each leg, write down the propagator
- Integrate over momentum k flowing through each loop $\frac{p^{\mu}_k}{(2\pi)^4}$

(Diagrams with loop may not determine the momentum of trees do)

Nucleon to meson Scattering : $\psi \bar{\psi} \rightarrow \phi \phi$

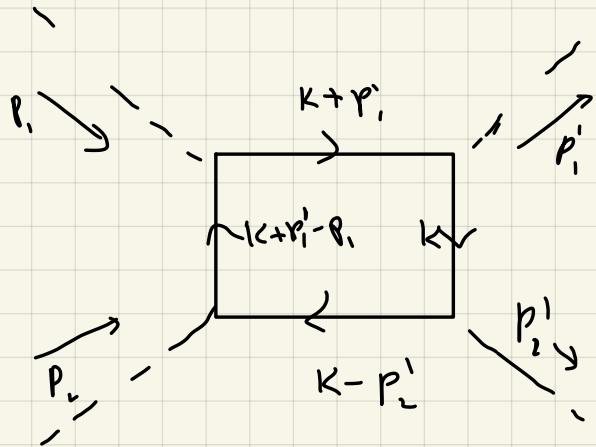


Nucleon - Antinucleon Scattering $\psi \bar{\psi} \rightarrow \psi \bar{\psi}$



$$i\lambda = (-ig)^2 \left[\frac{i}{(p_1 - p'_1)^2 - m^2} + \frac{1}{(p_1 + p_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \right]$$

MC3m scattering: $\phi \phi \rightarrow \phi \phi$



The amplitude is

$$(-ig)^4 \int \frac{d^4 k_L}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2 + i\varepsilon)((k+p'_1)^2 - M^2 + i\varepsilon)} \times \\ \times \frac{1}{((k+p'_1 - p_1)^2 - M^2 + i\varepsilon)((k - p'_2)^2 - M^2 + i\varepsilon)}$$

Momentum Variables

$$|\mathbf{i}\rangle = |\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2\rangle, |\mathbf{f}\rangle = |\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2\rangle$$

$$\bullet S = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 = (\mathbf{P}'_1 + \mathbf{P}'_2)^2 \leftarrow \text{Total center of mass energy of the collision}$$

$$\bullet t = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}'_1)^2 = (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}'_2)^2 \rightarrow \text{Momentum exchanged between particles}$$

$$\bullet u = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}'_1)^2 = (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}'_2)^2$$

$$\begin{aligned} S + t + u &= 4 M^2 \leftarrow \text{all masses equal} \\ &= \sum m_i^2 \leftarrow \text{otherwise} \end{aligned}$$

Sit on a center of mass of two particles \rightsquigarrow

$$\mathbf{P}_1 = (E, 0, 0, \mathbf{p}), \quad \mathbf{P}_2 = (E, 0, 0, -\mathbf{p})$$

The particle scatter at an angle $\Theta \rightsquigarrow$

$$\mathbf{P}'_1 = (E, 0, p \sin \theta, p \cos \theta), \quad \mathbf{P}'_2 = (E, 0, -p \sin \theta, -p \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \text{Here } S &= 4E^2, \quad t = -p^2 \sin^2 \theta - p^2 (m^2 + 1) = -(p^2 + p^2) + 2p^2 \cos \theta \\ &= -\tilde{p}^2 (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

$$u = (0, 0, p \sin \theta, p + p \cos \theta)^2 = -\tilde{p}^2 (1 + \cos \theta)$$

Ex NUCLEON-NUCLEON interaction ($\Psi \Psi \rightarrow \Psi \Psi$)

$$1 (-i\gamma)^2 \left[\frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 - m^2} + \frac{1}{(p_1 - p'_2)^2 - m^2} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)$$

$$= 1 (-i\gamma)^2 \left[\frac{1}{t - m^2} + \frac{1}{u - m^2} \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)$$

↑ ↑
 Involves t-channel u-channel

NUCLEON-Antinucleon interaction ($\Psi \bar{\Psi} \rightarrow \Psi \bar{\Psi}$)

$\lambda \sim \frac{1}{t - m^2} + \frac{1}{s - m^2}$, involves the t and s channel

Yukawa Suppose we fix δ as a source and ϕ a field

$$\text{i.e. } -\vec{\nabla}^2 \phi + m^2 \phi = \delta(\vec{x}) \rightarrow \phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{\phi}(\vec{k})$$

$$(\vec{k}^2 + m^2) \tilde{\phi}(\vec{k}) = 1 \rightarrow \tilde{\phi}(\vec{k}) = \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2} \rightarrow \phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}}}{\vec{k}^2 + m^2}$$

using $\vec{k} \cdot \vec{x} = kr \cos \theta \rightarrow$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 dr d\theta d\theta = \int_{\text{ball}}$$

$$\phi(\vec{r}) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i k r \cos \theta}}{\vec{k}^2 + m^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \int_0^R d\theta dk \frac{k^2 \sin \theta e^{i k r \cos \theta}}{k^2 + m^2}$$

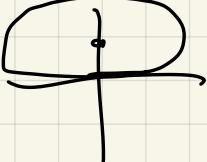
$$u = \cos \theta$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 \int_0^R du dk \frac{k^2}{k^2 + m^2} e^{i k r u}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^R dk \frac{k^2}{k^2 + m^2} \frac{e^{i k r u}}{i k r} \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^R dk \frac{k^2}{k^2 + m^2} \frac{2 \sin(kr)}{kr} = \frac{1}{2\pi r} \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{k e^{ikr}}{k^2 + m^2} \right]$$

Compute int⁺ the upper half plane $k \rightarrow \infty$ and pole at $k = i\mu$



$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi r} \operatorname{Re} \left(\frac{i\mu}{2im} e^{-\mu r} \right) = \frac{1}{4\pi r} e^{-\mu r} \quad \frac{1}{m} \text{ Compton wave length as reson}$$

Remark: The positive of $\phi(x)$ allow us to calculate the interaction
 ψ

say as \int in the potential $-\vec{\nabla}^2 A_0 = \delta^3(x)$ (electrostatic) which giv. $A_0 = \frac{1}{4\pi r}$

The positive of A_0 acts as potential energy for another charged (test)
particle moving in this background

Ex: Take the non-relativistic in $|\vec{p}'| \ll M$ work in the center of mass

$$\vec{p}' = \vec{p}_1' = -\vec{p}_2' \text{ and } \vec{p}'' = \vec{p}_1'' = -\vec{p}_2'' \quad \text{The non-relativistic limit ensures } |\vec{p}'| \ll M \text{ and}$$

by conservation of momentum $|\vec{p}''| \ll M$ This doesn't change the scattering

$$A_{\text{nucleus}} = \frac{1}{2} g^2 \left(\frac{1}{(\vec{p} - \vec{p}')^2 + m^2} + \frac{1}{(\vec{p}'' + \vec{p}''')^2 + m^2} \right) \quad (\text{Nucleon scattering})$$

Interpretation: Consider two particles, scattered by a source \vec{Y} , interacting through $U(\vec{r})$. In non-relativistic QM the amplitude for particles to scatter from momentum states $\pm \vec{p}$ into momentum states $\pm \vec{p}'$ can be computed in perturbation theory. To leading order, known in this context as the Born approximation,

$$\langle \vec{p}' | U(\vec{r}) | \vec{p} \rangle = -i \int d^3 r U(\vec{r}) e^{-i(\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{r}}$$

There's a relative factor of $(2M)^2$ that arises in computing the QFT amplitude A to $\langle \vec{p}' | U(\vec{r}) | \vec{p} \rangle$ that can be traced to the relativistic normalization of states $| \vec{p}_1, \vec{p} \rangle$. Including this factor, and reworking the expressions for the two amplitudes we get

$$\int d^3 r U(\vec{r}) e^{-i(\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{r}} = \frac{-\lambda^2}{(\vec{p} - \vec{p}')^2 + m^2}, \text{ where } \lambda = \frac{g}{2M}$$

Inverting for $U(\vec{r})$

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int d^3 r' U(\vec{r}') e^{i(\vec{p}-\vec{p}') \cdot \vec{r}'} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} - \lambda \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}}{(\vec{p}'-\vec{p})^2 + m^2}$$

$e^{i(\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}') + \vec{p}' \vec{r}')}$

$$\int d^3 r' U(\vec{r}') \delta(\vec{r}-\vec{r}') = U(\vec{r}) = -\lambda^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}}{\vec{p}'^2 + m^2}$$

symmetric

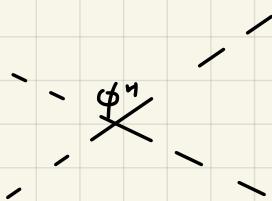
$$= \frac{C\lambda^2}{4\pi r} e^{-mr}$$

Yukawa Potential !!

Rather than being a fundamental concept (force), the force arises from the virtual exchange of other particles. In this case the reason we will see Coulomb force arises from exchange of photons.

ϕ^4 theory $H_{int} - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$ The theory now has a single interaction vertex, which comes with a factor with $(-i\lambda)$, while the other Feynman

rules remain the same. (rather than $\frac{-i}{4\pi} \lambda_{(4)}$)



Consider $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$

$$\frac{-i\lambda}{4\pi} \langle p'_1, p'_2 | \phi(x)\phi(x) \phi(x)\phi(x) | p_1, p_2 \rangle$$

This gives $4!$ corrections which cancels the $\frac{1}{4!}$

Feynman diagrams come with extra combinatoric factors (typically 2 or 4) which are known as symmetry factors that one must take into account

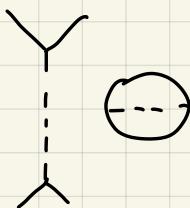
$\lambda = -i\lambda$. In ϕ^4 theory the leading order two-particle scattering occurs with equal probability in all directions translating into a potential between two mesons, we have

$$U(\vec{r}) = \frac{\lambda}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} = \frac{\lambda}{(2\pi)^2} \delta^3(\vec{r})$$

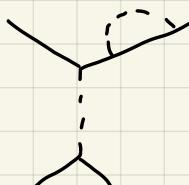
So scattering in ϕ^4 is due to a $\boxed{\text{sum of potentials}}$

Connected and Amputated diagrams.

- we considered Only Connected diagrams where every post is connected to at least one external line. This will be related to the reason why the free theory is not the true vacuum $|0\rangle$ of the interacting theory.



- we do not consider diagrams with loops as external lines
for example



They are related to one particle states of the free theory and not the one-particle states of the interacting theory.

Corry In particular, correctly dealing with these diagrams will account for the fact that particles in interaction QFT are never alone but surrounded by a cloud of virtual particles

The diagrams in which all loops on external legs have been cut-off are called "Amputated"

What we measure:

Fermi Golden rule from eigenstates $|m\rangle$ and $|n\rangle$ with E_m, E_n the theory hamilton (Dyson formula) leads

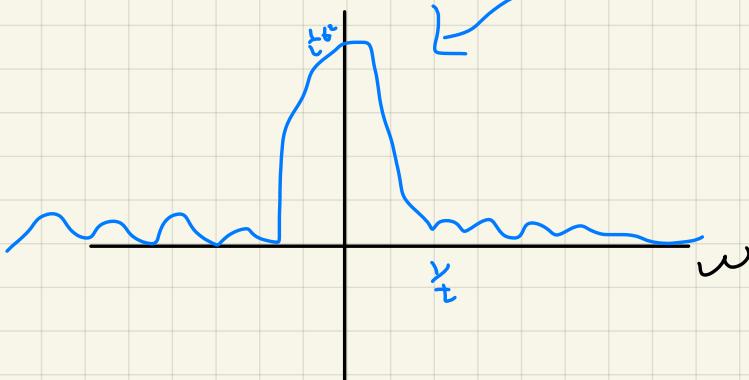
$$\begin{aligned} \langle m | U(t) | n \rangle &= -i \langle m | \int_0^t dt' H_S(t') | n \rangle = -i \int_0^t dt \underbrace{\langle m | e^{iH_0 t} H_{\text{int}} e^{-iH_0 t} | n \rangle}_{w=E_n-E_m} \\ &\stackrel{!}{=} -i \langle m | H_{\text{int}} | n \rangle \int_0^t dt' e^{iwt'} \\ &= -\langle m | H_{\text{int}} | n \rangle \frac{e^{iwt} - 1}{w} \end{aligned}$$

Gives $P_{n \rightarrow n} = |\langle m | U(t) | n \rangle|^2 = |\langle n | H_{int} | n \rangle|^2 |(\frac{e^{i\omega t}}{\omega^2} - 1)(\bar{e}^{-i\omega t} - 1)|$

$$= |\langle m | H_{int} | n \rangle|^2 \frac{4}{\omega^2} \sin^2(\frac{\omega t}{2}) e^{i\omega t} - 1 = e^{i\frac{\omega t}{2}} (\bar{e}^{i\frac{\omega t}{2}} - e^{-i\frac{\omega t}{2}})$$

$$= |\langle n | H_{int} | n \rangle|^2 4 \frac{1 - \cos(\omega t)}{2 \omega^2} = e^{i\frac{\omega t}{2}} 2 \sin(\frac{\omega t}{2})$$

$$= |\langle n | H_{int} | n \rangle|^2 \frac{2(1 - \cos(\omega t))}{\omega^2}$$



Most transitions happen in region between energy states are separated by $\Delta E = \frac{2\pi}{c}$ As $t \rightarrow \infty$ the function in the figure approached a distribution

$$\text{Indeed, } \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} \right) = \pi t \Rightarrow \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \pi t \delta(\omega)$$

Consider now transition to a cluster of states with states $\rho(E)$.

We get \sim

$$P_{n \rightarrow \infty} = \int dE_n \rho(E_n) 2 | \langle m | H_{int} | n \rangle |^2 \left(\frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} \right) \rightarrow 2\pi | \langle m | H_{int} | n \rangle |^2 \rho(E) t$$

which gives constant probability to transitions per unit time around $E_n - E_m$

$$\dot{P}_{n \rightarrow m} = 2\pi | \langle m | H_{int} | n \rangle |^2 \rho(E_m) \quad \text{which} \leftarrow \text{Fermi Golden Rule}$$

What about taking the limit before?

$$-i \langle m | \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) | n \rangle = -i \langle m | H_{int} | n \rangle 2\pi \delta(\omega) \rightarrow P_{n \rightarrow m} = | \langle m | H_{int} | n \rangle |^2 \left(\frac{2}{2\pi} \right)^2 \delta(\omega)$$

We realize that $\lim_{t \rightarrow \infty}$ is wrong because $P_{n \rightarrow m}$ is the prob

to happen in infinite time $t \rightarrow \infty$ we write $(\bar{\pi}_n)^2 |\delta(v)|^2 = \pi |\delta(v)|^2$ \uparrow $t \rightarrow \infty$

$$\text{bc then } \dot{P}_{n \rightarrow n} = 2\pi |\langle m | H_{int} | n \rangle|^2 \delta(v)$$

Integrating over the density of final states gives us Fermi's Golden Rule

Decay Rates: $|i\rangle$ of mass P_I to decay to $|f\rangle$ with mass $P_F = \sum_i P_i$

$$P = \frac{|\langle f | S | i \rangle|^2}{\langle f | f \rangle \langle i | i \rangle} \quad \text{where } \langle ii \rangle = (2\pi)^3 2 E_{\vec{P}_I} \delta^3(\vec{p}) = 2 E_{\vec{P}_I} V$$

$$\text{or } \langle f | f \rangle = \prod_{\text{final states}} 2 E_{\vec{P}_i} V$$

If we take $\vec{P}_I = 0$ and $E_{\vec{P}_I} = m$ we get

$$P = \frac{|A_{fi}|^2}{2mV} (2\pi)^4 \int^4 (P_I - P_F) V T \prod_{\text{final states}} \frac{1}{2 E_{\vec{P}_i} V}$$

where $V\Gamma = (2\pi)^4 \delta^4(0)$ and A_{fi} is what we been computing.

Ex $\lambda = -g$ in π^+/π^- single meson decaying into two nucleons

we can derive by Γ to get the transition per unit time

but we still have to worry about summing all final states

- we **First** integrate over all momenta

$\text{Consider the } V \text{ in the amplitude}$
 $\sqrt{\sum p_i} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3}$ and $\frac{1}{Z E_{p_i}}$ gives the measure invariant

The result is a density of final states giving

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta^4(P_F - P_I) \prod_{\text{final states}} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{Z E_{p_i}}$$

- Second we sum over all final states with discrete numbers of particles.

This gives the decay probability per unit time

$$\begin{aligned}\Gamma = \dot{P} &= \frac{1}{2m} \sum_{\text{final states}} \int d\pi |A_{S_i}|^2 \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{\text{final states}} \int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p_i}} (2\pi)^4 \delta^4(p_F - p_i) |A_{S_i}|^2\end{aligned}$$

Gauss (Γ) is called the width of the particle $I+$ is equal to the reciprocal of the half-life $\tau = \frac{1}{\Gamma}$.

Cross Sections

Collide two beams of particles. The fraction of the time that they

collide is called the Cross Section (σ). If the flux F is defined

to be the # of incoming particles per area per unit time then the total number of scattering events N per unit time is given by

$$N = f \sigma.$$

We know σ from QFT we can further calculate $d\sigma$

"differential cross section" in solid angle (θ, ϕ)

$$d\sigma = \frac{\text{Differential probability}}{\text{Unit time} \times \text{Unit flux}} = \frac{1}{4E_1 E_2 V} |ds_1|^2 d\Omega$$

$\text{F} \xrightarrow[\text{Incoming particles.}]{\text{Flux}}$

Consider a center of mass frame we considering a just single particle

per spatial volume V meaning that the flux is given in terms of 3-velocities

$$\vec{v}_1 \text{ as } F = |\vec{v}_1 - \vec{u}_1| / \sqrt{V} \rightarrow$$

$$d\sigma = \frac{1}{4E_1 E_2} \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |ds_1|^2 d\Omega \quad \text{where} \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m\sqrt{1-v^2}} = \frac{\vec{p}}{p_0}$$

Correlations: Not all physical quantities depend on scattering, we want correlation functions Let $|S\rangle$ be the true vacuum and

assume H such that $H |S\rangle = 0 \quad \langle S | S \rangle = 1$

$$DCS_{1c} \quad G^<(x_1, -, x_n) = \langle S | T \phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n) | S \rangle$$

Heisenberg Pictures

The $G^<$ are called correlation functions (Green Functions)

Claim $\phi_i \otimes (x_i)$ wrt ϕ_{iH} the ϕ_i in Heisenberg Picture

$$G^<(x_1, \dots, x_n) = \langle S | T \phi_{1H} \dots \phi_n H | S \rangle = \langle 0 | \frac{T \phi_{1I} \dots \phi_{nI} S | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}$$

↙
vacuum of HC
free theory

Proof

Take $t_1 > t_2 > \dots > t_n$ then we can drop the T and write + in numerator

$$\langle 0 | U_I(\infty, t_1) \phi_{1I} U_I(t_1, t_2) \phi_{2I} \dots \phi_{nI} U_I(t_n, -\infty) | 0 \rangle, \quad U_I(t_1, t_{k+1}) = \exp \left(-i \int_{t_1}^{t_{k+1}} H_I \right)$$

$$= \langle 0 | U_I(\infty, t_0) \phi_{1H} \dots \phi_{nH} U_I(t_0, -\infty) | 0 \rangle$$

Note that for $\langle \psi |$, $\langle \psi | U_I(t, -\infty) | 0 \rangle = \langle \psi | U(t, -\infty) | 0 \rangle$
 because $H_0 | 0 \rangle = 0$. Now insert the complete constituents of $H = H_0 + H_{int}$

$$\begin{aligned}\langle \psi | U(t, -\infty) | 0 \rangle &= \langle \psi | U(t, -\infty) \left[1 + \sum_{n \neq 0} b_n \langle n | \right] | 0 \rangle \\ &= \langle \psi | \mathcal{R} \rangle \langle \mathcal{R} | 0 \rangle + \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n \neq 0} c^{\dagger} e^{i E_n (t - t')} \langle \psi | n \rangle \langle n | 0 \rangle\end{aligned}$$

Riccati-Labesque lemma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dx \sin e^{i E_n x} = 0$$

Hence $\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi | U(t, t') | 0 \rangle = \langle \psi | \mathcal{R} \rangle \langle \mathcal{R} | 0 \rangle$

Hence, $\frac{\langle 0 | \mathcal{R} \rangle \langle \mathcal{R} | T \underbrace{\phi_{1H} \dots \phi_{nH}}_{\text{}} | \mathcal{R} \rangle \langle \mathcal{R} | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathcal{R} \rangle \langle \mathcal{R} | 0 \rangle \langle 0 | \mathcal{R} \rangle}$

Connected Diagrams and Vacuum Bubbles.

We consider ϕ^4 theory, we represent ϕ particles as straight lines

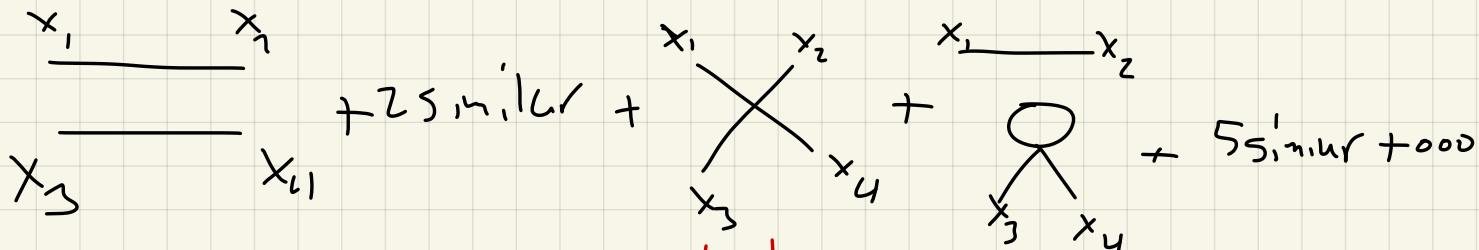
$$\begin{aligned} \langle 0 | S | 0 \rangle &= 1 + 8 + \left(8 + (1) + 8 \cdot 8 \right) + \dots \\ &= \exp(8 + 8 + 1 + \dots) \end{aligned}$$

Vacuum bubbles

One can show that

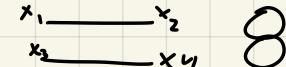
$$\langle S | T \phi_\mu(x_1) \dots \phi_\mu(x_n) | S \rangle = \sum \text{connected Feynman Graphs}$$

Ex: $\langle S | T \phi_\mu(x_1) \dots \phi_\mu(x_n) | S \rangle$



All of this are connected diagrams

Every connected diagram is defined by the requirement that every line is joined to an external leg. An example of a diagram that is not

Concent is  8 Such diagrams \rightarrow Sh. 5.1 to \rightarrow

Feynman diagrams depend on $x_1 \dots x_n$ (Different from S-matrix which were momentum eigenstates and ended up integrating over all of space)
For ϕ^4 the adapted Feynman rules are

- Draw n external points $x_1 \dots x_n$. Construct the usual propagators and vertices. Assign a space-time position y to the end of each line.
- For each $x \rightarrow y$ from $x \neq y$ write down a factor of the Feynman Propagator $\Delta_F(x-y)$
- For each vertex  at y write down a factor of $-i \lambda \delta^{(4)}(y)$

Green functions to S-matrix

$$\hat{G}^n(p_1, \dots, p_n) = \int \left[\prod_{i=1}^n \delta^{(4)}(x_i) e^{-ip_i x_i} \right] G^n(x_1, \dots, x_n)$$

The difference with the S-matrix is that we include Δ_F propagators

for external legs as well as internal legs and 4-momentum to external legs is arbitrary they are not on-shell To return to S_{mix}

We need to cancel off the propagators on the external legs and place

their momenta back on shell

we have

$$\langle p_1^{'}, \dots, p_n^{'} | S^{-1} | p_1, \dots, p_n \rangle = (-i)^{n+n'} \prod_{i=1}^{n'} (p_i'^2 - m^2) \prod_{j=1}^{n'} (p_j^2 - m^2) \tilde{G}^{n+n'}(-p_1^{'}, \dots, -p_n^{'}, p_1, \dots, p_n)$$

LSZ reduction formula

↑ each of the factors vanishes on-shell

This means that we only contribute to diagrams with external legs propagators

- Ignoring unconnected diagrams is related to shifting to the true vacuum LSF
- Framework that deal with the true physical states

In the interacting theory through renormalization

Dirac's Equation: $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$ < spin 0 particles
of non trivial transformations

A similar example is the electromagnetic field

$$A^{\mu}(x) \rightarrow \Lambda_{\nu}^{\mu} A^{\nu}(\Lambda^{-1}x)$$

In general $\phi^a(x) \rightarrow \underbrace{D(\Lambda)}_b^a \phi^b(\Lambda^{-1}x)$

Representation of the Lorentz Group ($D(\Lambda), D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1 \cdot \Lambda_2)$)

How to find reps?

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu} \quad (\text{for infinitesimal}) \quad \omega \rightsquigarrow$$

- $D(\Lambda^{-1}) = D(\Lambda)^{-1}$
- $D(1) = 1 \quad 1$

Condition for a Lorentz transform

$$\Lambda_{\sigma}^{\mu} \Lambda_{\nu}^{\lambda} \gamma^{\sigma \nu} = \gamma^{\mu \lambda}$$



$$\omega^{\mu \nu} + \omega^{\nu \mu} = 0$$

- 4×4 matrix has 6 indep components (6 trans of the Lorentz group, 3 rotations and 3 boosts)

We introduce a basis of these 4×4 anti-symmetric matrices called $(M^A)^{\mu\nu}$, $A = 1, \dots, 6$. We can replace A by $[g\sigma]$ only if symmetric $\sigma, g = 0, \dots, 3$ $\leadsto (M^{g\sigma})^{\mu\nu}_V$, $1 \leq M^0 = -M^0$

Hence \sim define

$$(M^{g\sigma})^{\mu\nu} = \gamma^g{}^\mu \gamma^{\sigma\nu} - \gamma^{\sigma\mu} \gamma^g{}^\nu$$

$$(M^{g\sigma})_V^\nu = \gamma^g{}^\mu \delta_V^\nu - \gamma^{\sigma\mu} \delta_V^\nu$$

Ex

$$(M^0)_V^\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(M^1)_V^\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rotations in (x^1, x^2) plane

We write w_V^ν as linear combination of $M^{g\sigma}$

$$w_V^\nu = \frac{1}{2} \sum_{g\sigma} (M^{g\sigma})_V^\nu$$

Generators of the Lorentz transformations

Obey Lorentz Lie algebra relations,

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = \gamma^{\sigma\tau} M^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\tau} M^{\rho\nu} + \gamma^{\rho\nu} M^{\sigma\mu} - \gamma^{\sigma\mu} M^{\rho\nu}$$

with the generators $\rightarrow \Lambda = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{g\in G} \lambda^g g\right)$

\uparrow Elements of the Lie Algebra
 \nwarrow Roots which transform

The Spinor representation

$$\text{The Clifford algebra} \rightarrow \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 \eta^{\mu\nu} \mathbb{1}$$

$\uparrow \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$
 \downarrow

We need at least 4×4 matrices

2×2 and 3×3 matrices does not satisfy.

- $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

matrices

- $(\gamma^0)^2 = 1$
- $(\gamma^1)^2 = -1$
- $\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

\checkmark satisfy $[\gamma^i, \gamma^j] = 2 \delta^{ij}$

there is a unique representation of the Clifford algebra
(up to unitary equivalence $(V \gamma^\mu V^{-1})$)

$$\text{Consider } S^{\sigma\sigma} = \frac{1}{4} [r^\sigma, r^\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma = \sigma \\ \frac{1}{2} \delta^\sigma \delta^\sigma & \sigma + \sigma \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \gamma^\sigma \gamma^\sigma - \frac{1}{2} \gamma^{\sigma\sigma}$$

$$\text{Claim } [S^{\mu\nu}, r^\sigma] = \gamma^\mu \gamma^\nu r^\sigma - \gamma^\nu \gamma^\mu r^\sigma$$

$$= \frac{1}{2} [\gamma^\mu \gamma^\nu, r^\sigma] \leftarrow \text{for } \sigma \neq \nu$$

$$= \frac{1}{2} r^\sigma [\gamma^\nu, \delta^\sigma] - \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu r^\sigma - \frac{1}{2} [\gamma^\sigma, \gamma^\nu] r^\nu + \frac{1}{2} \gamma^\sigma \gamma^\nu$$

$$= r^\sigma \gamma^\nu \delta - \gamma^\nu r^\sigma$$

Claim: $S^{\mu\nu}$ form a representation of the Lorentz algebra

$$[S^{\mu\nu}, S^{\sigma\tau}] = \gamma^{\nu\sigma} S^{\mu\tau} - \gamma^{\mu\sigma} S^{\nu\tau} + \gamma^{\mu\tau} S^{\nu\sigma} - \gamma^{\nu\tau} S^{\mu\sigma}$$

Take $\sigma \neq \tau$ and using the above claim

$$[S^{\mu\nu}, S^{\sigma\tau}] = \frac{1}{2} [S^{\mu\nu}, r^\sigma r^\tau] = \frac{1}{2} [S^{\mu\nu}, r^\sigma] r^\tau + \frac{1}{2} r^\sigma [S^{\mu\nu}, r^\tau]$$

$$[S^{\mu\nu}, S^{\sigma\tau}] = \frac{1}{2} r^\mu r^\nu \gamma^{\sigma\tau} - \frac{1}{2} r^\nu r^\mu \gamma^{\sigma\tau} + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^{\sigma\tau} - \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^{\sigma\tau}$$

$$[S^{\mu\nu}, S^{\sigma\tau}] = \gamma^{\nu\sigma} S^{\mu\tau} - \gamma^{\mu\sigma} S^{\nu\tau} + \gamma^{\mu\tau} S^{\nu\sigma} - \gamma^{\nu\tau} S^{\mu\sigma}$$

Spinors: The Dirac Spinor $\psi^\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ that acts
 $S^{\mu\nu}$

$$S^+ \quad \psi^\alpha(x) \longrightarrow S(\Lambda)_\beta^\alpha \psi^\beta(\Lambda^{-1}x)$$

- $\Lambda = \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma}\right)$

- $S(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma}\right)$

Are Λ and $S(\Lambda)$ the same?

Rotations: $S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu - \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu$

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ if } j \neq i$$

If $\sigma_{ij} = -\epsilon_{ijk} \varphi^k$ ($i \neq j$, $\sigma_{ii} = -\varphi^3$) then

$$S(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma}\right) = \begin{pmatrix} e^{i \frac{\vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i \frac{\vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}}{2}} \end{pmatrix}$$

where $\sigma_{ii} = -\sigma_{zz} = -\varphi^3$

Proof

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \varphi^k \left(-\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{jmn} \epsilon^{imn} &= 2 \int_j' \rightarrow S(\Lambda) = \exp\left(+\frac{1}{4} 2 \varphi^k \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}\right) \\ &= \exp\left(\frac{\pi i}{2} \varphi^k \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi i}{2} \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}_1} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pi i}{2} \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Consider a rotation, of $2\pi \sim$ around $\vec{\varphi} = (0, 0, 2\pi)$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\pi\sigma^3} & 0 \\ 0 & e^{i\pi\sigma^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\tau}} = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix}$$

Therefore \sim ~~rotation around~~
of 2π

$S(\Lambda)$ ~~not~~ acts on ψ^α as Λ (there are different expressions)

$$\vec{\varphi} = (0, 0, \varphi)$$

$$J_{1,0} = -\epsilon_{ijk} \varphi^k \rightarrow J_{1,0} = -J_{0,1,3} \varphi^3$$

$$\Lambda = C \times p / \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} M^{\mu\nu})$$

$$J_{1,2} M^{12} + J_{2,1} M^{21} = 2 J_{1,1} M^{11}$$

$$M^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} \delta^{\sigma\tau} - \gamma^{\sigma\mu} \delta^{\nu\tau}$$

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^3 & 0 \\ 0 & -\varphi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$



$$(\mathcal{M}^{12})_{11}' = \bar{\gamma}^{1''} \delta^2_{11} - \bar{\gamma}^{2''} \delta^1_{11}$$

$\downarrow v$

$$\mathcal{M}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \varphi^N$$

$B\varphi$
 $_{11}$

$$(\mathcal{M}^{12})_{11}^2 = 0 - (-1) = -1$$

$$\exp \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varphi} & 0 \\ 0 & -\bar{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left(1 + A + \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 0 & -\bar{\varphi} & 0 \\ 0 & -\bar{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}_{z_1} - \frac{A}{3!} - \frac{B}{4!} + \frac{A}{5!} + \frac{B}{6!} \right)$$

$$= \left(1 + A + \frac{B}{2!} - \frac{A}{3!} - \frac{B}{4!} + \frac{A}{5!} + \frac{B}{6!} \right)$$

$$= \left(1 + A \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{\varphi}^n}{(2n+1)!} \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{\varphi}^n}{(2n)!} \right) B \right)$$

$$= \left(1 - B + AS_{11}(\varphi) + B \cos(\varphi) \right) \quad \text{ $\varphi = 2\pi$ }$$

$$= (1 - B + B) = 1$$

$$\Lambda \stackrel{z^{\infty}}{=} I \neq S(\Lambda)$$

Boosts

$$S^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$$

$$\text{writing } \mathcal{R}_{1,0} = -\mathcal{R}_{0,1} = X,$$

$$S(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2} \mathcal{R}_{1,0} S^0\right) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}X_i \sigma^i} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}X_i \sigma^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\vec{X}_i \frac{\sigma_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\vec{X}_i \frac{\sigma_1}{2}} \end{pmatrix}$$

Representations of Λ are Not unitary ($S(\Lambda)^* S(\Lambda) \neq I$)

$$\text{Ex: for rotations } S(\Lambda)^* S(\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_1}{2}} \end{pmatrix} = I$$

For boosts $S(\Lambda)^* S(\Lambda) \neq I$

In general, $S(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) \rightsquigarrow$ The unitary condition is

$$S^{\mu\nu} = -(S^{\mu\nu})^+ = -\frac{1}{4} [(\gamma^\mu)^+, (\gamma^\nu)^+] \quad \text{but}$$

is anti-hermitian if all you are hermitian or anti-hermitian
Eigen

however $(\gamma^0)^2 = 1$ real values and $(\gamma^1)^2 = -1$ imaginary eigenvalues

We pick γ^0 hermitian and γ^1 anti-hermitian Ex Chiral rep

$$(\gamma^0)^2 = \gamma^0 \text{ and } (\gamma^1)^2 = -\gamma^1$$

Construction of an action of the spinor.

Start with some quantity Lorentz invariant \mathcal{O} which?

Define $\psi^*(x) = (\psi^*)^\dagger(x)$ \leftarrow usual adjoint of multi-component object

Try. $\psi^* \psi$, let's see.

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow S(\Lambda) + (\bar{\Lambda}^\dagger x) \\ \psi^*(x) &= \psi^*(\bar{\Lambda}^\dagger x) S(\Lambda)^+ \end{aligned} \quad ? \quad \psi^* \psi \rightarrow \psi^*(\bar{\Lambda}^\dagger x) \underbrace{S(\Lambda)^+ S(\Lambda)}_{\text{if not Lorentz inv}} \psi(\bar{\Lambda}^\dagger x)$$

Now choose a rep of the Clifford algebra with hermitian γ^0 and

anti hermitian γ' (e.g chiral rep)
 $\gamma^0 = (\gamma^0)^*$, $-\gamma' = (\gamma')^*$

we have $\gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 = (\gamma')^+ \leadsto S^{\nu\nu} = \frac{1}{2} [(\gamma^0)^+, (\gamma')^+] = -\gamma^0 S^{\nu\nu} \gamma^0$

$\Rightarrow S(\lambda)^+ = \gamma^0 S(\lambda)^- \gamma^0$

The Dirac adjoint $\rightarrow \bar{\psi}(x) = \psi^+(x) \gamma^0$

Try: $\rightarrow \bar{\psi} \psi = \psi^+(x) \gamma^0 \psi(x) \rightarrow \psi^+(\lambda^{-1}x) S(\lambda)^+ \gamma^0 S(\lambda) \psi(\lambda^{-1}x)$

$$= \psi^+(\lambda^{-1}x) \gamma^0 S(\lambda)^- (\gamma^0)^* S(\lambda) \psi(\lambda^{-1}x)$$

$$= \bar{\psi}(\lambda^{-1}x) \psi(\lambda^{-1}x)$$

Transform as a Lorentz Scalar ✓ Success

Try: $\bar{\psi} \gamma^\nu \psi$ is a Lorentz vector ✓

$$\bar{\psi} \gamma^\nu \psi = \psi^+(x) \gamma^0 \gamma^\nu \psi(x) \rightarrow \psi^+(\lambda^{-1}x) S(\lambda)^+ \gamma^0 \gamma^\nu S(\lambda) \psi(\lambda^{-1}x)$$

$$= \overline{\Psi} S(\lambda)^{-1} r^0 s^0 \gamma^\mu S(\lambda) \psi / \lambda^{-1} X$$

$$= \overline{\Psi} S(\lambda)^{-1} s^\mu S(\lambda) \psi$$

Recall

(with infinitesimal generators)

Lorentz vector

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} M^{\mu\nu}\right) = 1 + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} M^{\mu\nu} + O(z)$$

$$S(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) = 1 + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + o(z)$$

Is  transforms like a vector then $S(\lambda)^{-1} \gamma^\mu S(\lambda) = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu$

$$S(\lambda)^{-1} \gamma^\mu S(\lambda) = \left(1 - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + \dots\right) \gamma^\mu \left(1 + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + \dots\right)$$

$$= \gamma^\mu \left(1 + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \gamma^\mu = \left(1 + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (M^{\mu\nu})_{\nu}^{\lambda}\right) \gamma^\mu$$

$$= \gamma^\mu + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} [\gamma^\mu, S^{\mu\nu}] = \gamma^\mu + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (M^{\mu\nu})_{\nu}^{\lambda} \gamma^\lambda$$

$$\Rightarrow -[\underbrace{S^{\mu\nu}, \gamma^\lambda}_{\gamma^{\mu\sigma}\delta^{\nu\lambda} - \gamma^{\mu\lambda}\delta^{\nu\sigma}}] = (M^{\mu\nu})_{\nu}^{\lambda} \gamma^\lambda = (\gamma^{\mu\sigma} \delta^{\nu}_{\lambda} - \gamma^{\mu\lambda} \delta^{\nu}_{\sigma}) \gamma^\lambda$$

$$= \gamma^{\mu\sigma} \gamma^\nu - \gamma^{\mu\nu} \gamma^\sigma$$

Try: $\overline{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi$ transform as a Lorentz tensor ($\begin{array}{l} S(\Lambda^{-1}) \gamma^\mu \gamma^\nu S(\Lambda) \\ = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \gamma^\alpha \gamma^\beta \end{array}$)

The Lorentz invariant action:

$$S = \int d^4x \overline{\psi}(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x)$$

Lorentz invariant
Dirac action
Make the action real under complex conjugation

• First order derivatives !!!

Taking E-L with respect to $\overline{\psi} \rightsquigarrow (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$ Dirac Equation

$$\psi \rightsquigarrow (i \partial_\mu \overline{\psi} \gamma^\mu + m \overline{\psi}) = 0$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} = (\partial_\mu \overline{\psi}), \quad r^\mu = \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \psi} = -\overline{\psi} m$$

• First Order derivatives
yet Lorentz invariant !!!

Using the eq of motion \rightsquigarrow

$$(\gamma^\nu \partial_\nu + m)(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = (\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu - m^2)\psi = 0$$

Recall: $\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \partial_\mu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu \rightsquigarrow -(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) = 0$

Klein-Gordon

Notation: $A_\mu \gamma^\mu = \cancel{A}$ (slash)

Dirac Equation

$$(\cancel{D} - m)\psi = 0$$

Chiral Spinors. we used the chiral rep of the Clifford algebra

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

which gives rotations and boosts as

$$S(\Lambda_{\text{rot}}) = \begin{pmatrix} e^{i \vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i \vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \end{pmatrix}, \quad S(\Lambda_{\text{boost}}) = \begin{pmatrix} e^{i \vec{x} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i \vec{x} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \end{pmatrix}$$

Block Diagonal  we can further reduce hence

the S representation is reducible (It decomposes in two irreducible rep)

acting on u_{\pm} which, in the chiral rep are defined by.

$$\psi = \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix} \quad \text{Weyl spinors or Chiral spinors}$$

they transform

$$u_{\pm} \rightarrow e^{i \vec{\varphi} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \quad (\text{under rotations})$$

$$u_{\pm} \rightarrow e^{\pm i \vec{x} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \quad (\text{under boosts})$$

Remark: U_+ is in the $(\frac{1}{2}, 0)$ rep of the Lorentz group while U_- is in $(0, \frac{1}{2})$

The Dirac Spinor ψ lies in $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ representation.

Weyl Equation:

Decomposing in the Weyl Spinors we have:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \gamma^0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (\not{D} - m) \psi =$$

$$= \psi^+ \begin{pmatrix} (\not{D} - m) U_- \\ (\not{D} - m) U_+ \end{pmatrix} = (U_+, U_-) \begin{pmatrix} (\not{D} - m) U_- \\ (\not{D} - m) U_+ \end{pmatrix} = \psi^+ \gamma^0 \not{D} \psi - m U_+ U_- - m U_- U_+$$

$$= \psi^+ \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \not{\partial}_N \psi - m (U_+^+ U_- + U_-^+ U_+) + \psi^+ \not{\partial}_N \psi$$

$$= (U_+, U_-) \cdot \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \not{\partial}_N \begin{pmatrix} U_+ \\ U_- \end{pmatrix} - m (U_+^+ U_- + U_-^+ U_+)$$

$$+ (U_+, U_-) \cdot \not{\partial}_N (U_+)$$

$$= U_+^+ \overline{\sigma}^i \not{\partial}_N U_+ + U_-^+ \sigma^i \not{\partial}_N U_- - m (U_+^+ U_- + U_-^+ U_+)$$

where $\sigma^i = (1, \sigma^i)$ and $\overline{\sigma}^i = (1, -\sigma^i)$

- A massive Fermion requires U_+ and U_- , since they couple on M term
- A massless fermion can be described by U_+ (or U_-) with the rest of mass

$$i \bar{\sigma}^1 \not{D}_\mu U_+ = 0 \quad \text{or} \quad i \sigma^1 \not{D}_\mu U_- = 0 \quad \text{Weyl equations}$$

Degrees of Freedom: The Dirac fermion has 4 complex or 8 real components

In Classical mechanics the # of degrees is equal to the dim of the configuration space or half the dimension of the phase space.

In field theory they are at least 1 dim for each point in space (hence infinite)

It make sense to count Degrees of Freedom per Spatial point

Ex: φ \leftarrow scalar field single degree of freedom

Interpretation: It only gives rise to one type of particle

ψ \leftarrow complex scalar field has two degrees of freedom

Interpretation: two particles ψ and its antiparticle $\bar{\psi}$

What about the Dirac spinor? Hint: There are Not 8 particles

Sol: The momentum conjugate to a spinor Ψ is $\Pi_\Psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = i\Psi^+$

not proportional to time derivative of Ψ . Hence, the phase spinor is parametrized by Ψ and Ψ^+ (while scalar field is φ and $\dot{\varphi}$) therefore Ψ has 4 real degrees of freedom \rightarrow Two spins (up and down) and particle, antiparticle. Similarly we can find 2 degrees of freedom in Weyl fermion

γ^5 (name because goes in Euclidean place $\tilde{\gamma}^A = (\gamma^1, i\gamma^5)$)

We rely in the block diagonal properties of γ^5 : What about other representations? i.e. $\gamma^\mu \rightarrow U \gamma^\mu U^\dagger$ and $\Psi \rightarrow U \Psi$

We can introduce $\gamma^5 = -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \rightarrow \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ and $(\gamma^5)^2 = 1$

With $\tilde{\gamma}^A = (\gamma^1, i\gamma^5)$, $A=0,1,3,4$ they satisfy $\{\tilde{\gamma}^A, \tilde{\gamma}^B\} = 2\gamma^{AB}$
 $\bullet [S_{\mu\nu}, \gamma^5] = 0$

Since $(\gamma^5)^2 = 1 \rightarrow$ we can define a Lorentz invariant projection op

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) \leftarrow \frac{1}{4}(1 + (\gamma^5)^2 \pm 2\gamma^5) = P_{\pm}^2 = P_{\pm}$$

Projectors

$$P_+ P_- = \frac{1}{4}(1 - (\gamma^5)^2) = 0 \quad \text{← orthogonal}$$

Ex: In the Chiral Rcp

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow P_{\pm} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \leftarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{Proj to (+)} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{Proj to (-)} \end{cases}$$

Therefore $\psi_{\pm} = P_{\pm}\psi$ ψ_+ is called "Left-handed" spinor

ψ_- is "Right-handed" spinor

Parity: ψ_{\pm} are related by parity, recall $\Lambda^{\mu}, \Lambda^{\nu}, \gamma^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu}$

we considered only continuously connected to the identity what about discrete?

time reversal T $x^0 \rightarrow -x^0, x^i \rightarrow x^i$

parity P $x^0 \rightarrow x^0, x^i \rightarrow -x^i$

Under parity $U_{\pm} \xrightarrow{\text{rot}} e^{i \frac{\vec{\Phi} \cdot \vec{\tau}_1}{2}} U_{\pm}$ and $U_{\pm} \xrightarrow{\text{loop}} e^{i \vec{x} \cdot \vec{\tau}_1} U_{\pm}$

reverse the same

changes U_{\pm} by U

Hence $P \cdot U_{\pm} \rightarrow U_{\mp}$, $\Psi_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) \psi$

$$\Psi_{\pm}(\vec{x}, t) \rightarrow \Psi_{\mp}(-\vec{x}, t)$$

we can write thus $P \Psi(\vec{x}, t) \rightarrow \gamma^0 \Psi(-\vec{x}, t)$

And $[P, \text{Dirac equation}] = 0$; e.

$$(i\partial - m) \gamma^0 \Psi(-\vec{x}, t) = (i\gamma^0 \partial_t + i\gamma^1 \partial_x - m) \gamma^0 \Psi(-\vec{x}, t) = \gamma^0 (i\gamma^0 \partial_t - i\gamma^1 \partial_x - m) \Psi$$

$\stackrel{\text{loop}}{=} 0$

Chiral interaction $P \bar{\Psi} \Psi(\vec{x}, t) \rightarrow \bar{\Psi} \Psi(-\vec{x}, t)$

Transforms as a vector with spatial changing sign $\begin{cases} P \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi(\vec{x}, t) \rightarrow \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi(-\vec{x}, t) \\ P \bar{\Psi} \gamma^i \Psi(\vec{x}, t) \rightarrow \bar{\Psi} \gamma^i \gamma^0 \gamma^0 \Psi(-\vec{x}, t) = -\bar{\Psi} \gamma^i \Psi(-\vec{x}, t) \end{cases}$

We can form another Lorentz scalar $\bar{\psi} \gamma^5 \psi$ and $\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi$

$$P \bar{\psi} \gamma^5 \psi (\vec{x}, +) \rightarrow \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \psi (-\vec{x}, +) = -\bar{\psi} \gamma^5 \psi (-\vec{x}, +)$$

$$P \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi (\vec{x}, +) \rightarrow \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^0 \psi (-\vec{x}, +) = \begin{cases} -\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi (-\vec{x}, +), & \mu = 0 \\ \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi (-\vec{x}, +), & \mu = 1 \end{cases}$$

Hence $\bar{\psi} \gamma^5 \psi$ transforms as a pseudo scalar while $\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi$ transforms as an axial vector

$\bar{\psi} \psi$ scalar

$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ vector

$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi$ tensor

$\bar{\psi} \gamma^5 \psi$. pseudoscalar

$\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi$. axial vector

Lorentz invariance typically breaks symmetry of parity, invariance although not always (e.g. $\phi \bar{\psi} \gamma^5 \psi$ does not break parity if ϕ is pseudoscalar)

Majorana Fermions ψ^* is complex implying $\psi = \psi^+$, is not Lorentz invariant
 However, consider the "Majorana basis" for the Clifford algebra

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -\sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}$$

They are special because they are pure imaginary ($\gamma^\mu = -\gamma^\mu$)
 which means that $S^\mu = \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \Rightarrow S(\lambda)$ are real

we can then impose $\psi = \psi^*$ which preserves Lorentz transform
Majorana Spinor

what about general reps? we ask only $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ and $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$

In this case we define conjugate charge of Dirac spinor ψ as

$$\psi^{(c)} = C \psi^* \quad \text{R} \psi \times \psi \text{ s.t } C^\dagger C = 1$$

$$\psi^{(c)} \rightarrow C S(\lambda)^* \psi^* = S(\lambda) C \psi^* = S(\lambda) \psi^{(c)}$$

Also $\psi^{(c)}$ satisfies Dirac eq, so ψ does

Generally we impose 1 more invariant condition on the Dirac spinor,

to yield a Majorana Spinor $\psi^{(c)} = \psi$

Same as its
anti particle

Ex Majorana basis $\rightarrow C_{mj} = 1$

$$\text{Chiral basis } \rightarrow C_{chiral} \bar{\psi} \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 u^2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi \stackrel{\text{Majorana}}{=} \begin{pmatrix} u_+ \\ -\sigma^2 u_+^* \end{pmatrix}$$

But this imposes to impose the Majorana condition (otherwise $u_- = 0$)

Symmetries

$$\text{Spacetime: } \delta \psi = \epsilon^\mu \partial_\mu \psi \rightarrow T^{\nu\mu} \bar{\psi} \epsilon^\mu \partial^\nu \psi - \gamma^{\mu\nu} \chi = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi$$

$$\text{Dirac} \Rightarrow \chi = 0$$

$$\Rightarrow E = \int \vec{j} \cdot \vec{T} = \int \vec{b} \times i \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \int \vec{\delta} \times \vec{\psi}^\dagger \gamma^0 (-i \vec{\gamma}^0 + m) \psi$$

Lorentz: $\delta \psi^\alpha = -\omega_{\nu}^{\alpha} \times^{\nu} \partial_\nu \psi^\alpha + \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^{\alpha}_\rho \psi^\rho$

$$\frac{1}{2} \mathcal{R}_{\mu\nu}(M^{\mu\nu})^{\alpha}_\rho$$

$$= -\omega^{\nu\alpha} \left[x_\nu \partial_\nu \psi^\alpha - \frac{1}{2} (S_{\mu\nu})^{\alpha}_\rho \psi^\rho \right]$$

$$\Rightarrow (\bar{\psi})^{\sigma\nu} = x^\rho T^{\nu\sigma} - x^\sigma T^{\nu\rho} - i\bar{\psi} \gamma^\nu S^{\sigma\rho} \psi \leftarrow \text{Quantization gives Spin } \frac{1}{2}$$

Internal vector: $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi \rightarrow j_\nu^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

Check $\partial_\mu j_\nu^\mu = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) \stackrel{\text{Eq of motion}}{=} i m \bar{\psi} \psi - i m \bar{\psi} \psi = 0$

$$Q = \int d^3x \bar{\psi} \gamma^5 \psi = \int d^3x \psi^\dagger \psi \leftarrow \begin{array}{l} \text{Electric charge or} \\ \text{particle number} \end{array}$$

for fermions

Axial symmetry when $m=0$ the Dirac lagrangian has an extra internal symmetry

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha \gamma^5} \psi \quad \text{and} \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\alpha \gamma^5} \quad \text{where the second follows}$$

From the first because $e^{-i\omega \vec{r}^s} r^0 = r^0 e^{i\omega \vec{r}^s}$

This gives $\mathcal{J}_A^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ conserved only when $m=0$
 ↳ "Axial"

$$\partial_\mu \mathcal{J}_A^\mu = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^5 \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \partial_\mu \psi = 2im \bar{\psi} \gamma^5 \psi$$

Plane waves. $(\gamma^\mu p_\mu - m) \psi = 0$ Start with $\psi = u(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}$

$$\Rightarrow (\gamma^\mu p_\mu - m) u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} -m & p_\mu \omega \\ p_\mu \bar{\omega} & -m \end{pmatrix} u(\vec{p}) = 0$$

Claim $u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \omega} \xi_1 \\ \sqrt{p \cdot \bar{\omega}} \xi_2 \end{pmatrix}$ for any 2-component spinor ξ which we have learned.

Proof $u(\vec{p})^\dagger = (u_1, u_2) \rightarrow -p \cdot \bar{\omega} u_2 = m u_1$ ↴ Try $u_1 = (p \cdot \omega) \xi^1$ for one spinor
 $- (p \cdot \bar{\omega}) u_1 = m u_2$ ↴ ξ^1

$$\Rightarrow u_2 = m \xi^1 \text{ from second eq} \Rightarrow u(\vec{p}) = A \begin{pmatrix} (p \cdot \omega) \xi^1 \\ m \xi^1 \end{pmatrix} \text{ where } A = \frac{1}{m} \text{ and } \xi = \sqrt{p \cdot \omega} \xi^1$$

Negative Frequency Sol $\psi = u(\vec{p}) e^{ip \cdot x}$ Substitutes in the Dirac which oscillate
 in time as $\psi \sim e^{-i\omega t}$ are called positive frequency solutions (Because its ω

compute the energy using T^0 we find positive) and similar for $\psi = e^{iE\tau}$

similar as before $\psi(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p^0} \gamma_3 \\ -\sqrt{p^0} \bar{\gamma}_3 \end{pmatrix}$ with γ_3 a 2-component spinor normalized.

Examples consider the positive frequency solution with mass M

and 3-momentum $\vec{P}=0$

$$\psi(\vec{p}) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} \quad \text{← 2-component spinor}$$

• Rotations act (on the 2-spinor) as $\xi \rightarrow e^{i \frac{\vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}}{2}} \xi$

• The ξ spinor defines the spin (A field with spin up

along a given direction is described by the eigenvector of the corresponding Pauli matrix with eigenvalue +1 (or -1 for down).

Ex: $\xi = (1, 0)$ describes a field with spin up along the z-axis
 $\xi^T = (0, 1)$ // // down //

Consider now $\xi^T = (1, 0)$ and boost around the x^3 -axis with
 $p = (E, 0, 0, p^3)$. The solution to the Dirac equation becomes

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \sigma} & (1) \\ \sqrt{p \sigma} & (0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p^3} & (1) \\ \sqrt{E+p^3} & (0) \end{pmatrix}$$

$$p \cdot \sigma = E \cdot 1 - p \cdot \sigma^3 \stackrel{(1,0)}{\Rightarrow} \sqrt{E \cdot 1 - p} \stackrel{?}{=} \sqrt{E - p^3} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow E - p \stackrel{(1,0)}{\Leftrightarrow} E \cdot 1 - p \cdot 1 \stackrel{(1,0)}{\Leftrightarrow} E \stackrel{(1,0)}{=} E - p \quad \checkmark$$

Also, for a massless particle we have $u(\vec{p}) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Similarly } \xi^T = (0, 1) \rightarrow u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \sigma} & (0) \\ \sqrt{p \cdot \sigma^3} & (1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E+p^3} & (0) \\ \sqrt{E-p^3} & (1) \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Helicity: The helicity is the projection of the angular momentum along the direction of momentum

$$h = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \vec{p}^i \vec{s}^j k = \frac{1}{2} \hat{\vec{p}} \cdot \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}$$

- For $\xi^T = (1, 0)$ the helicity is $h = \frac{1}{2} \leftarrow$ Right-handed
- For $\xi^T = (0, 1)$ the " is $h = -\frac{1}{2} \leftarrow$ Left-handed

Some formulae. We introduce a basis for ξ and γ

such that $\xi^{r+s} \xi^s = \delta^{rs}$ and $\gamma^{r+s} \gamma^s = \delta^{rs}$

- $\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$, $\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$

Ex: For the positive frequency solution we can write

$$u^r(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^r \\ \sqrt{p \cdot \sigma} \gamma^r \end{pmatrix}$$

We can take inner product of u (the 4-component spinor) . . . :

1) $U^r \cdot U \leftarrow$ not Lorentz invariant

$$U^r(\vec{p}) \cdot U^s(\vec{p}) = \left(\xi^{r+} \sqrt{p \sigma}, \xi^{s+} \sqrt{p \sigma} \right) \begin{pmatrix} \sqrt{p \sigma} & \xi^s \\ \sqrt{p \sigma} & \xi^s \end{pmatrix}$$

$$= 2 \xi^{r+} p_0 \xi^s = 2 p_0 \delta^{rs}$$

2) $\bar{U} \cdot U \leftarrow$ Lorentz invariant

$$\bar{U}^r(\vec{p}) \cdot U^s(\vec{p}) = \left(\xi^{r+} \sqrt{p \sigma}, \xi^{r+} \sqrt{p \sigma} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p \sigma} & \xi^s \\ \sqrt{p \sigma} & \xi^s \end{pmatrix} =$$

$$= 2 m \delta^{rs}$$

Analogous, for the radiative frequency solutions:

$$V^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \sigma} & \gamma^s \\ -\sqrt{p \sigma} & \gamma^s \end{pmatrix}, \quad 1) V^{r+}(\vec{p}) \cdot V^s(\vec{p}) = 2 p_0 \delta^{rs}$$

$$2) \bar{V}^r(\vec{p}) \cdot V^s(\vec{p}) = -2 m \delta^{rs}$$

• $\bar{U}^r(\vec{p}) \cdot V^s(\vec{p}) = \left(\xi^{r+} \sqrt{p \sigma}, \xi^{r+} \sqrt{p \sigma} \right) \gamma^0 \begin{pmatrix} \sqrt{p \sigma} & \gamma^s \\ -\sqrt{p \sigma} & \gamma^s \end{pmatrix}$

$$= \xi^{r+} \sqrt{(p \bar{v})(p \sigma)} \gamma^s - \xi^{r+} \sqrt{(p \bar{\sigma})(p v)} \gamma^s = 0$$

- $\bar{v}^s(\vec{p}) \cup (\vec{p}) = 0$

- $U^{r+}(\vec{p}) \cup^s (-\vec{p}) = (\xi^{r+} \sqrt{v \bar{v}}, \xi^{r+} \sqrt{p \bar{\sigma}}) \begin{pmatrix} \sqrt{p' \sigma} \gamma^s \\ -\sqrt{p' \bar{\sigma}} \gamma^s \end{pmatrix}$
 $= \xi^{r+} \sqrt{(p \sigma) p' \bar{v}} \gamma^s - \xi^{r+} \sqrt{(p \bar{\sigma})(p' \bar{v})} \gamma^s$

$$(p \bar{v})(p' \bar{v}) = (p_0 + p, \sigma') (p_0 - p, \bar{\sigma}') = p_0^2 - p_0 p' = m^2$$

$$(p \bar{v})(p' \bar{\sigma}) = m^2$$

$$= \xi^{r+} m \gamma^s - \xi^{r+} m \gamma^s = 0 = U^{r+}(\vec{p}) \cup^s (-\vec{p}) = 0$$

Outer products.

Claim $\sum_{s=1}^2 U^s(\vec{p}) \bar{U}^s(\vec{p}) = p' + m$

$$\sum_{s=1}^2 \psi^s(\vec{p}) \bar{\psi}^s(\vec{p}) = \rho - m$$

Proof

$$\sum_{s=1}^2 \psi^s(\vec{p}) \bar{\psi}^s(\vec{p}) = \sum_{s=1}^2 \left(\underbrace{\sqrt{p\sigma} \xi^s}_{\text{Left side}} \right) \left(\underbrace{\sqrt{p\sigma} \xi^{s\dagger}, \sqrt{p\omega} \xi^s}_{\text{Right side}} \right) \begin{pmatrix} \sigma \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\sum_{s=1}^2 \xi^s \xi^{s\dagger} = 1$$

$$= \begin{pmatrix} m & p\omega \\ p\bar{\omega} & m \end{pmatrix} = \rho + m$$

Quantization of the field

we quantize $\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (\rho - m) \psi(x)$

Try.

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i \bar{\psi} \gamma^0 = i \psi^+$$

To advance the theory we promote ψ and ψ^+ to operators satisfying

$$[\psi_\alpha(\vec{x}), \psi_\beta(\vec{y})] = [\psi_\alpha^\dagger(\vec{x}), \psi_\beta^\dagger(\vec{y})] = 0$$

$$[\psi_{\omega}(\vec{x}), \psi_{\vec{p}}^+(\vec{r})] = \delta_{\omega, \vec{p}} \delta^3(\vec{x} - \vec{r})$$

Since we deal a free theory where any classical solution is a sum of plane waves,

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[b_{\vec{p}}^s u^s(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + c_{\vec{p}}^{s+} v^s(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right]$$

(real particles associated to V spinor)

$$\psi^+(\vec{x}) = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[b_{\vec{p}}^{s+} u^s(\vec{p})^+ e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} + c_{\vec{p}}^s v^s(\vec{p})^+ e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right]$$

Circulate particles associated to the spinor $u^s(\vec{p})$

Claim: $[b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^{s+}] = (2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$

$$[c_{\vec{p}}^r, c_{\vec{q}}^{s+}] = \textcircled{-}(2\pi)^3 \delta^{rs} \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$$

We cannot define $|0\rangle$ as $c_{\vec{p}}^r |0\rangle = 0$ because $c_{\vec{p}}^{s+} |0\rangle$ will have negative norm

We define $|0\rangle$ as $C_p^{r^+}|0\rangle = 0$ and excited states $C_p^s|0\rangle$

Proof. (Verification)

$$[\psi(\vec{x}), \psi^+(\vec{y})] = \sum_{r,s} \int \frac{\delta^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4E_q E_p}} \left([b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^s]^+ \right) u^r(\vec{p}) u^s(\vec{q}) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{p} - \vec{y} \cdot \vec{q})}$$

$$+ [C_p^{r^+}, C_q^s] v^r(\vec{p}) v^s(\vec{q}) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{p} - \vec{y} \cdot \vec{q})}$$

$$= \sum_s \int \frac{\delta^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(u^s(\vec{p}) \bar{u}^s(\vec{p}) r^s e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} + v^s(\vec{p}) \bar{v}^s(\vec{p}) r^s e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right)$$

$$= \int \frac{\delta^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left((p_r + m) r^s e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} + (p_s - m) r^s e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right)$$

$$= \int \frac{\delta^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left((p_0 r^0 + p_1 r^1 + m) r^0 + (p_0 r^0 - p_1 r^1 - m) r^1 \right) e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}$$

$$= \int \frac{\delta^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

The Hamiltonian:

$$\mathcal{H} = \nabla \psi^+ - \mathcal{L} = i\psi^+ \partial_x \psi - \bar{\psi}(x) (-\vec{p} - m) \psi(x)$$

$$= \psi^+_x (-\partial_x \gamma^1 + m) \psi(x)$$

$$H = \int d^3x \ \hat{H}$$

Note that

$$(-i\gamma^0 p_0 + m) \Psi = \sum_s \frac{\delta^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[b_{\vec{p}}^s (-i\gamma^0 p_0 + m) u^s(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + c_{\vec{p}}^{s+} (\gamma^0 p_0 + m) v^s(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right]$$

Using • $(\gamma^0 p_0 - m) u(\vec{p}) = (\gamma^0 p_0 + \gamma^1 p_1 - m) u(\vec{p}) = 0$

$$\Rightarrow (-i\gamma^0 p_0 + m) u^s(\vec{p}) = \gamma^0 p_0 u^s(\vec{p})$$

• $(\gamma^0 p_0 + m) v(\vec{p}) = 0$

$$\Rightarrow (\gamma^0 p_0 + m) v^s(\vec{p}) = -\gamma^0 p_0 v^s(\vec{p})$$

$$\Rightarrow = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} \gamma_0 \left[b_{\vec{p}}^s u^s(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} - c_{\vec{p}}^{s+} v^s(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right]$$

$$H = \int d^3x \ \psi^\dagger \gamma^0 (-i\gamma^1 \partial_1 + m) \psi = \int \frac{d^3x d^3 p_0}{(2\pi)^6} \underbrace{\sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2E_{\vec{q}}}}}_{4!} \left[b_{\vec{q}}^{r+} u(\vec{q}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} + c_{\vec{q}}^r v^r(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \right]$$

Sum implicit.

$$\times \left[b_{\vec{p}}^s u^r(\vec{p}) e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}} - c_{\vec{p}}^s v^r(\vec{p}) e^{-i \vec{p} \cdot \vec{x}} \right]$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left[b_{\vec{p}}^{r+} b_{\vec{p}}^s [u^r(\vec{p})^+ u^s(\vec{p})] - c_{\vec{p}}^r c_{\vec{p}}^{s+} [v^r(\vec{p})^+ v^s(\vec{p})] \right]$$

$$- b_{\vec{p}}^{r+} c_{-\vec{p}}^{s+} [u^r(\vec{p})^+ v^s(-\vec{p})] + c_{\vec{p}}^r b_{-\vec{p}}^s [v^r(\vec{p})^+ u^s(-\vec{p})]$$

using • $u^r(\vec{p})^+ u^s(\vec{p}) = v^r(\vec{p})^+ v^s(\vec{p}) = 2p_0 \delta^{rs}$

• $u^r(\vec{p})^+ v^s(-\vec{p}) = v^r(\vec{p})^+ u^s(-\vec{p}) = 0$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left[b_{\vec{p}}^{r+} b_{\vec{p}}^r 2p_0 - c_{\vec{p}}^r c_{\vec{p}}^{r+} 2p_0 \right] = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(b_{\vec{p}}^{s+} b_{\vec{p}}^s - c_{\vec{p}}^s c_{\vec{p}}^{s+} \right)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(b_{\vec{p}}^{s+} b_{\vec{p}}^s - c_{\vec{p}}^s c_{\vec{p}}^{s+} + (2\pi)^3 \delta^3(0) \right)$$

$\left[1, b_{\vec{p}}^{s+} \right] = E_{\vec{p}} b_{\vec{p}}^{s+}$ If we think of c^+ as creation, there's no problem. We still find

$$[H, C_{\vec{p}}^{s+}] = E_{\vec{p}} C_{\vec{p}}^{s+}$$

However, this convention mixes the states
of negative norm

But if we interpret C as creation \rightarrow

$$[H, C_{\vec{p}}^s] = -E_{\vec{p}} C_{\vec{p}}^s$$

makes the Hamiltonian
non bounded !!!

What then? The minus is important!

The Fermionic Quantization The key piece of the above

culmination is that we do not consider Spin ($\frac{1}{2}$) - which
gives fermions. \rightarrow They obey Fermi-Dirac statistics

Theorem (spin-statistics) Integer spin must be quantized as
bosons, while half integer spin fields must be quantized as
fermions

Bosons:

$$[a_{\vec{p}}^+, a_{\vec{q}}^-] = 0 \Rightarrow a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{q}}^+ |0\rangle \equiv |\vec{p}, \vec{q}\rangle = |\vec{q}, \vec{p}\rangle$$

Fermions: $\{A, B\} \equiv AB - BA$ and ask

$$\{ \psi_\alpha(\vec{x}), \psi_p(\vec{y}) \} = \{ \psi_\alpha^+(\vec{x}), \psi_p^+(\vec{y}) \} = 0$$

$$\{ \psi_\alpha(\vec{x}), \psi_p^+(\vec{y}) \} = \delta_{\alpha p} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

With these \leadsto the anti-commutators relations give

$$\{ b_{\vec{p}}^+, b_{\vec{q}}^{s+} \} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$$

$$\{ c_{\vec{p}}^r, c_{\vec{q}}^{s+} \} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$$

$$\text{and } \{ b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^s \} = \{ c_{\vec{p}}^r, c_{\vec{q}}^s \} = \{ b_{\vec{p}}^r, c_{\vec{q}}^{s+} \} = \{ b_{\vec{p}}^r, c_{\vec{q}}^s \} = \dots = 0$$

we finally get

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left[b_{\vec{p}}^{s+} b_{\vec{p}}^s - c_{\vec{p}}^s c_{\vec{p}}^{s+} \right] = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[b_{\vec{p}}^{s+} b_{\vec{p}}^s + c_{\vec{p}}^{s+} c_{\vec{p}}^s - (c_{\vec{p}}^s)^2 \right]$$

The anti-commutator save us from the unboundedness of the Hamiltonian.

Fermi-Dirac Statistics

We desire to satisfy $b_{\vec{p}}^s |0\rangle = c_{\vec{p}}^s |0\rangle = 0$

$$\text{In particular, } -[H, b_{\vec{p}}^r] = -E_{\vec{p}} b_{\vec{p}}^r \text{ and } [H, b_{\vec{p}}^{r+}] = E_{\vec{p}} b_{\vec{p}}^{r+}$$

$$- [H, c_{\vec{p}}^r] = -E_{\vec{p}} c_{\vec{p}}^r \text{ and } [H, c_{\vec{p}}^{r+}] = E_{\vec{p}} c_{\vec{p}}^{r+}$$

Just as in the bosonic case $b_{\vec{p}}^{r+}$, $c_{\vec{p}}^{r+}$ create particle and anti-particles \leadsto

$$|\vec{p}, r\rangle = b_{\vec{p}}^{r+} |0\rangle$$

The two particle states now satisfy

$$|\vec{p}_1, r_1; \vec{p}_2, r_2\rangle \equiv b_{\vec{p}_1}^{r_1+} b_{\vec{p}_2}^{r_2+} |0\rangle = - |\vec{p}_2, r_2; \vec{p}_1, r_1\rangle$$

In particular, we have the Pauli-exclusion principle

$$|\vec{p}, \gamma, \vec{p}, \gamma\rangle = 0$$

If we want to know the spin of the particle we can use the momentum operator to confirm that $|\vec{p}=0, r\rangle$ does carry angular momentum $\frac{1}{2}$ as expected

Dirac Hole interpretation

Dirac originally viewed his equation as a relativistic Schrödinger eq with ψ as the wave function for a single particle with spin.

$$(i\vec{\alpha} - m)\psi = \frac{i\partial\psi}{\partial E} = -i\vec{\beta}\vec{\nabla}\psi + m\vec{p}\psi \equiv \hat{H}\psi$$

$\vec{\alpha} = -\gamma^0\vec{\gamma} \quad \text{and} \quad \vec{\beta} = \gamma^0$

↑
Interpreted
as one particle Hamiltonian

With this interpretation the solutions

$$\psi = u(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \Rightarrow \frac{i\partial\psi}{\partial E} = E_{\vec{p}}\psi$$

$$\Psi = \gamma(\vec{p}) e^{i p \cdot x} \Rightarrow i \frac{\partial}{\partial x_i} = -\Sigma_{\vec{p}} \Psi$$

which look like positive and negative energy solutions. However the spectrum is again unbounded. Dirac gave an interpretation:

"Since the electrons are fermions (a fact which is put in by hand to Dirac's theory) they obey the Pauli-exclusion principle"

So we stipulate that in the true vacuum of the universe, all the negative energy states are filled. Only the positive energy solutions are accessible.

These filled negative energy states are referred to as the **Dirac Sea**. Although we might be worried about the infinite negative charge of the vacuum, Dirac argued that only charge differences would be observable.

Suppose that a negative energy state is excited leaving a hole
 The hole would have all properties of the electron, except it
 would carry positive charge !!

Dirac concluded that it's a new particle called Positron

and in the presence of an electron they both annihilates

Dirac predicted anti-matter !!

Propagators we desire spinors $\psi(\vec{x}, t)$ s.t. $\frac{\partial^4}{\partial t^4} \psi = [H, \psi]$

We solve by the expansion

$$\psi(x) = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[b_{\vec{p}}^s u^s(\vec{p}) e^{-ipx} + c_{\vec{p}}^{s+} v^s(\vec{p}) e^{ipx} \right]$$

$$\psi^+(x) = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[b_{\vec{p}}^{s+} u^s(\vec{p})^+ e^{ipx} + c_{\vec{p}}^s v^s(\vec{p})^+ e^{-ipx} \right]$$

we define the fermionic propagator to be

$$i S_{\alpha p} = \{ \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_p(x) \} \quad \leftarrow \text{we sometimes write } i S(x-y) = \{ \psi(x), \bar{\psi}(y) \}$$

(4×4 matrix)

$$\begin{aligned} i S(x-y) &= \int \frac{d^3 p_0 \delta^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_q}} \left[\left\{ b_{\vec{p}}^s, b_{\vec{q}}^{r+} \right\} u^s(\vec{p}) \bar{u}^r(\vec{q}) e^{-i(p-x-q-y)} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ c_{\vec{p}}^{s+}, c_{\vec{q}}^r \right\} v^s(\vec{p}) \bar{v}^r(\vec{q}) e^{i(p-x-q-y)} \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[u^s(\vec{p}) \bar{u}^s(\vec{p}) e^{-i p \cdot (x-y)} + v^s(\vec{p}) \bar{v}^s(\vec{p}) e^{i p \cdot (x-y)} \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left[(p+m) e^{-i p \cdot (x-y)} + (p-m) e^{i p \cdot (x-y)} \right] \\ &= (i \not{D}_x + m) [D(x-y) - D(y-x)] , \quad D(x-y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i p \cdot (x-y)} \end{aligned}$$

- For space-like separated points $(x-y)^2 < 0 \rightarrow D(x-y) = D(y-x) = 0$

in the Bosonic theory it was a big deal since implies

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 , \quad (x-y)^2 < 0$$

which imposes our theory to be causal. However, for fermions

$$\{ \psi_\alpha(x), \psi_p(y) \} = 0, \quad (x-y)^2 < 0$$

outside the light cone what happens to causality?

Stay the same, if we accept our theory to not fermionic operators being observable

- Away from singularities \rightarrow

$$\begin{aligned} (i\cancel{D}_x - m) S(x-y) &= (i\cancel{D}_x - m)(i\cancel{D}_x + m)(D(x-y) - D(y-x)) \\ &= (\cancel{D}_x^2 + m^2)(D(y-x) - D(x-y)) = 0 \end{aligned}$$

SO with mass on shell
 $\cancel{p}^2 = m^2$

Feynman propagator

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \overline{\psi}_p(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (\not{p} + m)_{\alpha p} e^{-ip(x-y)}$$

$$\langle 0 | \overline{\psi}_p(y) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (\not{p} - m)_{\beta p} e^{ip(x-y)}$$

The Feynman propagator $S_F(x-y)$ is defined by

$$S_F(x-y) = \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle & , x^0 > y^0 \\ \langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle & , y^0 > x^0 \end{cases}$$

necessary for Lorentz inv

when $(x-y)^2 < 0$ there is no invariant way to define

the order of x and y . In this case the minus sign implies

$\{ \psi(x), \bar{\psi}(y) \} = 0$ outside the light cone

$$S_F(x-y) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{\gamma^\mu p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

which satisfy $(i\not{x} - m) S_F(x-y) = i \delta^4(x-y)$ so that
 S_F is the Green function of the Dirac operator

Remark. Under \overline{I} any string of operators occurs the minus sign while bosonic op. commute inside \overline{I} , fermions anti-commute

We have the same under normal order $\langle \psi_1 \psi_2 \rangle = - \langle \psi_2 \psi_1 \rangle$

Wick theorem:

$$\overline{\psi(x) \bar{\psi}(y)} = \overline{T}(\psi(x) \bar{\psi}(y)) - \psi(y) \bar{\psi}(x) = S_F(x-y)$$

Yukawa theory \rightarrow consider a Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi + \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \rightarrow \phi \bar{\psi} \psi$$

proper version of the baby Yukawa theory looked before
(In the Standard model couplings like this appear between

Fermions and the Higgs boson In this context Fermions

can be leptons (such as the electron) or quarks)

We refer as $\phi \leftarrow$ mesons $\rightarrow [\phi] = 1$
 $\psi \leftarrow$ nucleons \leftarrow spin. $\rightarrow [\psi] = \frac{3}{2} \rightarrow [\lambda] = 0$

Ex: Putting Spin on Nucleon Scattering

$$\text{Study } \psi\psi \rightarrow \psi\psi \quad |i\rangle = \sqrt{4E_p E_q} b_{\vec{p}}^{s+} b_{\vec{q}}^{r+} |0\rangle = |\vec{p}, s, \vec{q}, r\rangle$$

$$|f\rangle = \sqrt{4E_{p'} E_{q'}} b_{\vec{p}'}^{s'+} b_{\vec{q}'}^{r'+} |0\rangle = |\vec{p}', s', \vec{q}', r'\rangle$$

(Caution): Since b annihilation have comb of minus signs.

$$\langle f | = \sqrt{4E_{p'} E_{q'}} \langle 0 | b_{\vec{q}'}^{r'} b_{\vec{p}'}^{s'}$$

We want to calculate λ^2 terms for the S-matrix $\langle f | s - | i \rangle$

$$\left(\frac{-i\lambda}{2}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 T(\bar{\psi}(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_2) \phi(x_1) \phi(x_2))$$

in the Interaction Picture

The contribution is only comes from

$$\underbrace{\bar{\psi}(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_2)}_A \phi(x_1) \phi(x_2)$$

as final and initial states do not have mesons.

Let's see $A|1\rangle$

now by $\psi_{\vec{q}, \vec{p}}$ $\bar{\psi}(\vec{x}_2)$

$$A|1\rangle = \text{C} \int \frac{d^3 r_1 d^3 r_2}{(2\pi)^6} [\bar{\psi}(\vec{x}_1) \psi^r(\vec{q})] [\bar{\psi}(\vec{r}_1) \cdot \psi^s(\vec{p}_1)] e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \frac{b_{\vec{q}}^* b_{\vec{p}_1}^* b_{\vec{q}}^{s+r_1}}{\sqrt{4E_{\vec{q}} E_{\vec{p}_1}}} \\ = \frac{-i}{2\sqrt{E_{\vec{p}} E_{\vec{q}}}} ([\bar{\psi}(\vec{x}) \psi^r(\vec{q}')] [\bar{\psi}(\vec{r}_2) \psi^s(\vec{p})] e^{-i(p x_2 - q x_1)} - [\bar{\psi}(\vec{x}_1) \psi^s(\vec{p})] [\bar{\psi}(\vec{x}_2) \psi^r(\vec{q})]) \\ \times e^{-i(p x_1 - q x_2)} |0\rangle$$

Let's see $\langle s | A|1\rangle$

$$\langle 0 | b_{\vec{q}}^* b_{\vec{p}}^* [\bar{\psi}(\vec{x}_1) \psi^r(\vec{q}')] [\bar{\psi}(\vec{x}_2) \psi^s(\vec{p})] |0\rangle = \frac{e^{i(p' x_1 + q' x_2)}}{2\sqrt{E_{\vec{p}} E_{\vec{q}}}} [\bar{\psi}^s(\vec{p}') \psi^r(\vec{q}')] \\ \times [\bar{\psi}^r(\vec{q}') \psi^s(\vec{p})] - \frac{e^{i(p' x_2 + q' x_1)}}{2\sqrt{E_{\vec{p}} E_{\vec{q}}}} [\bar{\psi}^r(\vec{q}') \psi^r(\vec{q}')] [\bar{\psi}^s(\vec{p}') \psi^s(\vec{p})]$$

And similarly for the other

We have \rightarrow

ϕ propagator

$$\langle S_1 S_{-1} | \rangle = \frac{(-i\lambda)^2}{\pi} \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 r \frac{e^{ik(x_1 - x_2)}}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \left([\bar{u}^S(\vec{p}'')] [u^S(\vec{p}')] [\bar{u}^r(\vec{q}')] [u^r(\vec{q}')] e^{ix_1(p' - q) + ix_2(q' - p)} \right.$$

$$\left. - [\bar{u}^S(\vec{p}') [u^r(\vec{q}')] [\bar{u}^r(\vec{q}')] [u^S(\vec{p}')] e^{ix_1(p' - q) + ix_2(q' - p)} \right]$$

$$= \int d^4 x \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^4} \frac{(-i\lambda)^2}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon} ([\bar{u}^S(\vec{p}'')] [u^S(\vec{p}')] [\bar{u}^r(\vec{q}')] [u^r(\vec{q}')] \delta''(q' - q + k) \delta''(p' - p - k)$$

$$- [\bar{u}^S(\vec{p}'') [u^r(\vec{q}')] [\bar{u}^r(\vec{q}')] [u^S(\vec{p}')] \delta''(p' - q + k) \delta''(q' - p - k)]$$

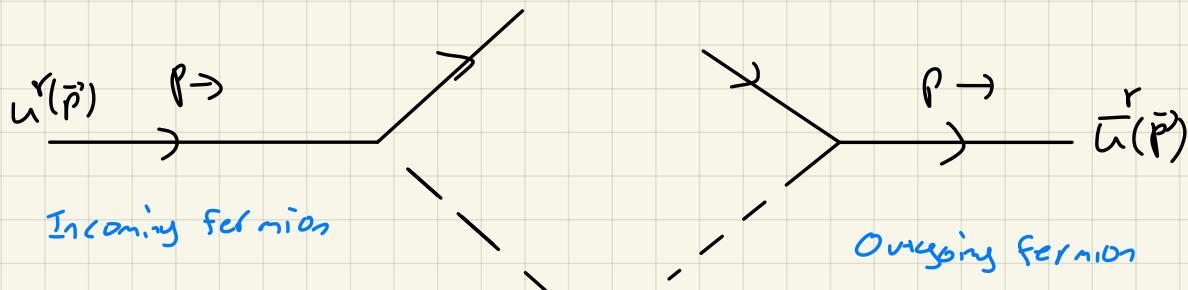
Finally, writing $A \sim \langle f | S_{-1} | \rangle = iA(2\pi)^4 \delta''(p + q - p' - q')$ we have

$$A = (-i\lambda)^2 \left(\frac{[\bar{u}^S(\vec{p}'')] [u^S(\vec{p}')] [\bar{u}^r(\vec{q}')] [u^r(\vec{q}')] }{(p' - p)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \right)$$

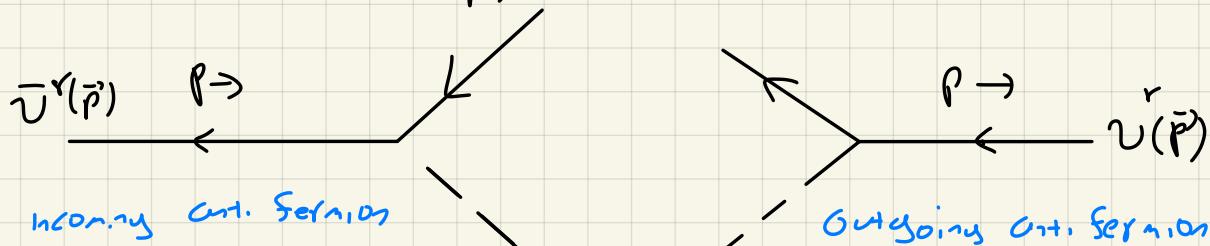
$$- \left(\frac{[\bar{u}^S(\vec{p}') [u^r(\vec{q}')] [\bar{u}^r(\vec{q}')] [u^S(\vec{p}')] }{(q' - p)^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \right)$$

Feynman Rules for Fermions

- To each incoming fermion with momentum \vec{p} and spin r , we associate $u^r(\vec{p})$. For outgoing fermions we associate $\bar{u}^r(\vec{p})$.



- To each incoming anti-fermion with momentum \vec{p} and spin r , we associate a spinor $\bar{v}^r(\vec{p})$. For outgoing anti-fermions we associate $v^r(\vec{p})$.



- Each vertex gets a factor of $(-, \lambda)$
- Each internal line gets a factor of the relevant propagator

$$\overline{\text{---}} \quad \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{for scalars}$$

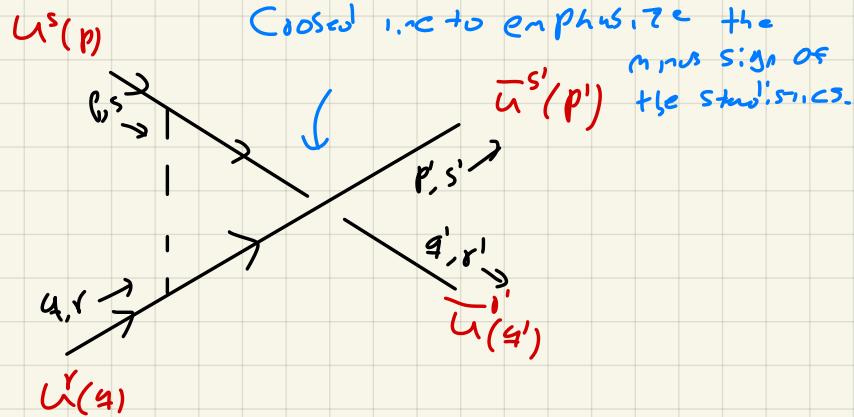
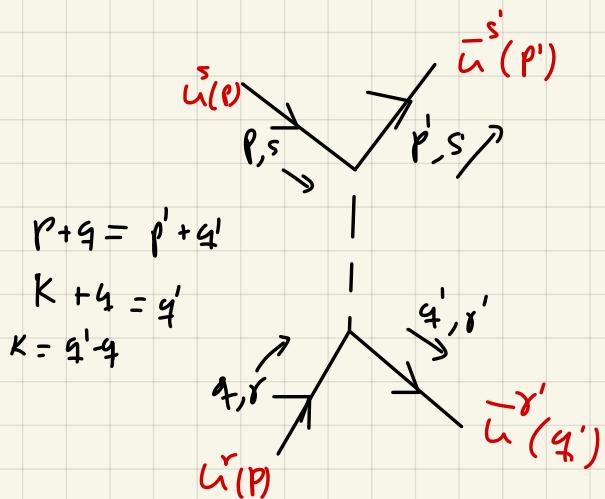
$$\overline{\text{---}} \quad \frac{i(p+m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad \text{for fermions}$$

The matrix indices are contracted at each vertex, either with the free field propagators or external spinors u, \bar{u}, v, \bar{v}

- Impose momentum conservation at each vertex, and integrate over undetermined loop momenta
- Add extra minus signs for sign factors.

Examples

NUCLEON Scattering The two lowest order Feynman diagrams are



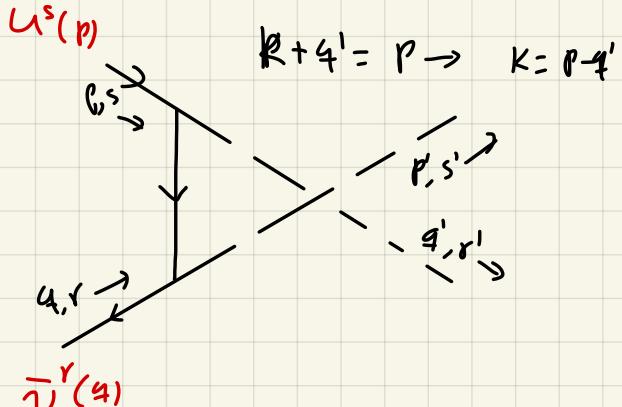
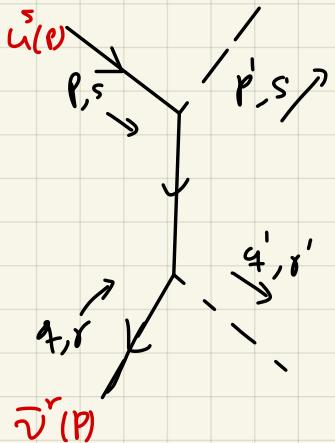
Using the Feynman rules we have

$$\lambda = (-i\lambda)^2 \left(\frac{[\bar{u}^s(p') u^s(p)]}{(p-p')^2 - \mu^2} [\bar{u}^r(q') u^r(q)] - \frac{[\bar{u}^s(p') u^r(q)] [\bar{u}^r(q) u^s(p)]}{(p-q')^2 - \mu^2} \right)$$

meson propagator

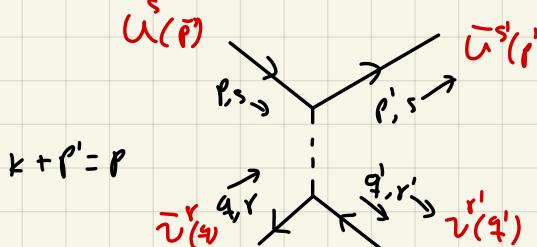
Nucleon to Meson Scattering

$$4\bar{4} \rightarrow \phi\phi$$

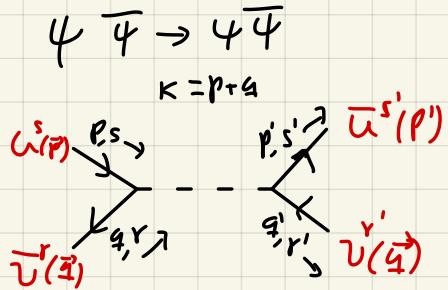


$$\mathcal{A} = (-i) \vec{\lambda} \left(\frac{\bar{U}'(\vec{p})_1 (\vec{p}-\vec{p}' + m) u^s(\vec{p})}{(\vec{p}-\vec{p}')^2 - m^2 + \varepsilon} + \frac{\bar{U}'(\vec{q})_1 (\vec{p}-\vec{q}' + m) u^s(\vec{p})}{(\vec{p}-\vec{q}')^2 - m^2 + \varepsilon} \right)$$

Nucleon - Antinucleon Scattering



$$k + p' = p$$



$$\lambda = (-, \lambda)^2 \left(\frac{\text{Red} \left[\bar{U}^{s'}(\vec{p}) \cdot U^s(\vec{p}) \right] \left[\bar{U}^r(\vec{q}) \cdot V^r(\vec{q}) \right]}{(\vec{p} - \vec{p}')^2 - \mu^2} + \frac{i \left[\bar{V}^r(\vec{q}) \cdot U^s(\vec{p}) \right] \left[\bar{U}^{s'}(\vec{p}') \cdot V^r(\vec{q}') \right]}{(\vec{p} + \vec{q})^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right)$$

Let's see the initial conditions for states to see the minus sign

$$|1\rangle = \sqrt{4E_p E_{\vec{q}}} b_p^{s+} c_{\vec{q}}^{r+} |0\rangle = |\vec{p}, s, \vec{q}, r\rangle$$

$$|f\rangle = \sqrt{4E_{\vec{p}'} E_{\vec{q}'}} b_{\vec{p}'}^{s'+} c_{\vec{q}'}^{r'+} |0\rangle = |\vec{p}', s', \vec{q}', r'\rangle$$

The ordering of b^\dagger and c^\dagger is crucial, it reflects $4\bar{4} \rightarrow \psi\bar{\psi}$

as opposed to $\psi\bar{\psi} \rightarrow 4\bar{4}$ which would differ by a minus sign

The first term cancels:

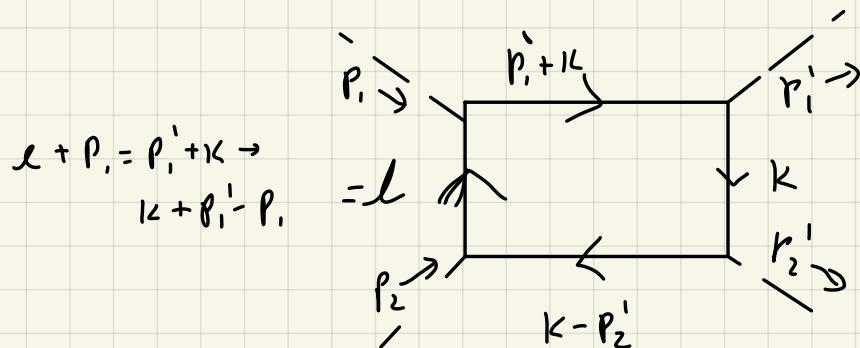
$$\langle S | \bar{\psi}(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \psi(x_2) b_p^{s+} c_{\vec{q}}^{r+} | 0 \rangle \sim \langle S | [\bar{U}^r(\vec{q}) \psi(x_1)] [\bar{\psi}(x_2)] U^s(\vec{p}) c_{\vec{q}}^{s+} b_p^{r+} | 0 \rangle$$

$$\sim \langle S | [\bar{U}^r(\vec{q}) \psi(x_1)] [\bar{\psi}(x_2)] U^s(\vec{p}) | 0 \rangle$$

$$\sim \langle 0 | c_{\vec{q}'}^{r'} b_{\vec{p}'}^{s'} c_{\vec{q}'}^{m+} b_{\vec{p}'}^{n+} [\bar{U}^r(\vec{q}) \bar{V}^r(\vec{q}')] [\bar{U}^s(\vec{p}) U^s(\vec{p}')] | 0 \rangle$$

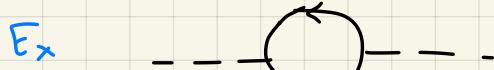
$$\sim \text{Red} [\bar{U}^r(\vec{q}) \bar{V}^r(\vec{q}')] [\bar{U}^{s'}(\vec{p}')] U^s(\vec{p})]$$

Meson Scattering. $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ (Leading contribution at one loop)



$$i\lambda = \cancel{(-i\lambda)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \frac{k + m}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \frac{k + p_i' + m}{(k + p_i')^2 - m^2 + i\epsilon} \times \frac{k + p' - p_i + m}{(k + p_i' - p)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{k - p_2' + m}{(k - p_2)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

loops give rises to minus.



$$\overline{\psi}_\alpha(x) \psi_\alpha(x) \overline{\psi}_p(y) \psi_p(y) = - \overline{\psi}_p(y) \overline{\psi}_\alpha(x) \psi_\alpha(x) \overline{\psi}_p(y)$$

$$= - \text{Tr} (S_F(y-x) \Gamma_F(x-y))$$

Yukawa Potential: we saw that exchange of real scalar particles

Gives rise to a universally attractive Yukawa potential between two spin zero particles what about spin $\frac{1}{2}$?

- We want to take the non-relativistic limit and compare with QM

In the non-relativistic $p \rightarrow (r, \vec{p}')$ and

$$U(\vec{p}') = \left(\frac{\sqrt{p \cdot \sigma} \xi}{\sqrt{p' \cdot \sigma} \xi} \right) \rightarrow \sqrt{m} \left(\frac{\xi}{\xi} \right)$$

$$v(\vec{p}') = \left(\frac{\sqrt{p \cdot \sigma} \xi}{-\sqrt{p' \cdot \sigma} \xi} \right) \rightarrow \sqrt{m} \left(\frac{\xi}{-\xi} \right)$$

In this lim. the contractions $\psi \bar{\psi} \rightarrow \psi \psi$ become

$$\bar{u}^s u^s = 2m \delta^{ss} \text{ and the amplitude}$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \psi &= -i(-1)^j (2m) \left(\frac{\delta^{s_1 s_2} \delta^{r_1 r_2}}{(\vec{p} - \vec{p}')^2 + \mu^2} - \frac{\delta^{s_1 s_2} \delta^{r_1 r_2}}{(\vec{p}' - \vec{q})^2 + \mu^2} \right) \end{aligned} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{Spin is conserved in the} \\ \text{non-relativistic} \\ \text{limit} \end{matrix}$$

The momentum dependence is the same as in the bosonic case
 $\Rightarrow U(r) = -\frac{\lambda e^{-mr}}{4\pi r} \leftarrow \text{Yukawa potential}$

Similarly, for $4\bar{\psi} \rightarrow 4\bar{\psi}$, there are [2] minus signs which cancel each other. The first is the extra overall sign due to the statistics. The second comes from the non-relativistic limit of the spin contractor

$$\bar{u}^s v^s = -2 m \delta^{ss'}$$

Pseudo-Scalar Coupling

We could use the interaction lagrangian as a pseudo scalar i.e.

$$\mathcal{L}_{yuk} = -\lambda \phi \bar{\psi} \gamma^5 \psi. \quad (\text{i.e. } P \phi(\vec{x}, t) \rightarrow -\phi(-\vec{x}, t))$$

The Feynman rule for the interaction vertex is now changed to a factor $(-i)\lambda$

Ex:

$$4\psi \rightarrow 4\bar{\psi}, A =$$

$$A = -i\lambda^2 \left(\frac{[\bar{u}^s(\vec{p}') \gamma^5 u^s(\vec{p})][\bar{u}^r(\vec{q}') \gamma^5 u^r(\vec{q})]}{(p-p')^2 - \mu^2} - \frac{[\bar{u}^s(\vec{p}') \gamma^5 u^r(\vec{q})][\bar{u}^r(\vec{q}') \gamma^5 u^s(\vec{p})]}{(p-q')^2 - \mu^2} \right)$$

What happens in the non-relativistic limit? $\bar{u}^s \gamma^5 u^s \rightarrow 0$ we must go to

the next order $\sim \bar{u}^s(\vec{p}') r^s u^s(\vec{p}) \rightarrow m \xi^{s\top} (\vec{p} - \vec{p}') \vec{\sigma} \xi^s$. So

the leading order amplitude in this limit is

$$\frac{1}{i\omega - \lambda)^2} \rightarrow i m(-\lambda)^2 \left[\frac{\xi^{s\top} (\vec{p} - \vec{p}') \vec{\sigma} \xi^s}{(\vec{p} - \vec{p}')^2 + \mu^2} \right] \left[\xi^{r\top} (\vec{p} - \vec{p}) \vec{\sigma} \xi^r \right]$$

Quantum Electrodynamics

Recall the Lagrangian for the Maxwell theory, in the absence of sources

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \leftarrow \text{field strength}$$

$$E-L \rightarrow \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) = -\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

By definition, F satisfies the Bianchi identity

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

If we define $A' = (\phi, \vec{A}) \rightarrow \vec{E}' = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

and $\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \quad \nwarrow$ This gives the Maxwell equations

$$\Rightarrow F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_x & B_y \\ -E_y & B_x & 0 & -B_z \\ -E_z & -B_y & B_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}$$

And the equations of motion gives $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ and

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

Gauge The field A_μ has 4 components yet the photon has only two degrees of freedom which are called the polarizations what is the redundancy?

- A_0 has no kinetic energy hence $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ determines $\phi = A_0$.

by $\vec{\nabla} A_0 + \nabla \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow A_0(x) = \int d^3x' \frac{(\nabla \cdot \vec{B}_{\text{ext}})(x')}{4\pi |x - x'|}$

So A_0 is not independent. ~ 3 degrees of freedom

- The symmetry group!

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x) \quad \text{for any function } \lambda.$$

Only that λ goes off quickly on the spatial $\vec{x} \rightarrow \infty$.

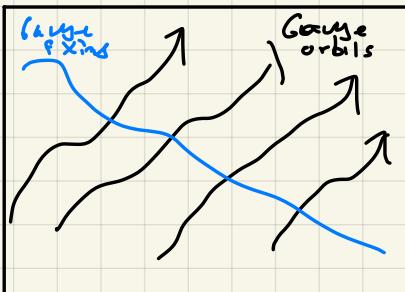
Hence \sim

$$F_{\mu\nu} \rightarrow D_\mu (A_\nu + D_\nu \lambda) - D_\nu (A_\mu + D_\mu \lambda) = F_{\mu\nu} \leftarrow \begin{matrix} \text{Infinite number of symmetries} \\ \uparrow \\ \text{Redundancy} \end{matrix}$$

A_μ is not physical $A_\mu + D_\mu \lambda$ is the same.

We take then the space of these equivalencies

Enlarged phase space foliated by gauge orbits as shown
foliated by gauge orbits



All states that lie along a given line can be reached by a gauge transformation and are identified. We pick a representative. Different representatives of a physical state are called different gauges.

- Lorentz Gauge. $\partial_\mu A^\mu = 0 \leftarrow$ Lorentz invariant

Given a gauge $A'_\mu \rightarrow \xi(x) = \partial_\mu (A')^\mu \rightarrow A_\mu = A'_\mu + \partial_\mu \lambda$ where
 $\partial_\mu \partial^\mu \lambda = -\xi$

This gauge do not pick a unique representative (i.e
 choice $\partial_\mu \partial^\mu \lambda = 0$ has non trivial solutions)

- Coulomb Gauge $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. \leftarrow 3 components and one constraint

Since A_0 is dependent of $\nabla A \rightarrow A_0 = 0$

Uniqueness not valid in presence of charge matter

2 degrees of freedom

El principio gauge. Ejemplo: Electrodinámica escalar.

El principio gauge, que presentaremos a continuación, es un principio físico de gran generalidad que, además de dar nuevas luces acerca de la electrodinámica nos permite formular una serie de teorías, de las cuales el electromagnetismo será el "caso más simple". Dichas teorías, conocidas como "teorías gauge", nos permitirán eventualmente desarrollar un modelo capaz de incorporar la fenomenología de las interacciones electromagnética, débil y fuerte → El modelo estándar de partículas elementales.

Para introducir el principio, haremos uso de un modelo (al que llamaremos "electrodinámica escalar") que tiene la virtud de permitirnos hacer referencia directa a los 2 ejemplos de campos clásicos que hemos estudiado hasta el momento: el campo escalar y el campo electromagnético.

Comencemos recordando el Lagrangiano del campo escalar complejo, al que llamaremos \mathcal{L}_φ :

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^\mu \varphi^* - m^2 \varphi \varphi^*. \quad (1)$$

Como sabemos, este Lagrangiano da lugar a la ecuación de Klein-Gordon, $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi = 0$.

Recordemos algunos aspectos relevantes del campo descrito por \mathcal{L}_φ :

- i) Como consecuencia de la simetría de \mathcal{L}_φ bajo transformaciones de traslación espacio-temporales, obtenemos conservación de energía y momento lineal. En particular, la densidad de energía del campo está dada por

$$\mathcal{H}(x) = \dot{\varphi}(x) \dot{\varphi}(x)^* + \vec{\nabla} \varphi(x) \cdot \vec{\nabla} \varphi^*(x) + m^2 \varphi(x)^* \varphi(x). \quad (2)$$

Esta densidad, al ser integrada sobre todo el espacio, da lugar a la energía del campo,

$$H = \int \mathcal{H}(x) d^3x = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} E_p (a_p^* a_p + b_p^* b_p). \quad (3)$$

En esta expresión, $a(p)$ y $b(p)$ son los coeficientes de Fourier de $\varphi(x)$ que, como sabemos, pasarán a ser operadores de aniquilación de partículas "tipo a" o "tipo b" tras cuantizar la teoría.

- ii) Otra simetría presente en esta teoría es una simetría "interna" de tipo $U(1)$, que corresponde a transformaciones de fase de la forma

$$\varphi \mapsto \varphi' = e^{i\theta} \varphi. \quad (4)$$

- Llamamos a este tipo de simetría una "simetría interna" porque no es una transformación de espacio-tiempo (como sí lo son, por ejemplo, las traslaciones o las rotaciones).
- Decimos, además, que se trata de una transformación de tipo $U(1)$ porque en efecto, si denotamos con \mathcal{M} el espacio de todas las funciones φ sobre las que extremizamos la acción, entonces (4) se puede expresar en términos de una acción

$$\text{de grupo: } U(1) \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

$$e^{i\theta}, \varphi \mapsto e^{i\theta}\varphi$$

La cantidad conservada que se desprende de esta simetría (vía el teorema de Noether) es la integral sobre el espacio de la componente cero del 4-vector (único salvo una constante multiplicativa),

$$j^\mu = -i(\varphi \partial_\mu \varphi^* - \varphi^* \partial_\mu \varphi), \quad (5)$$

es decir,

$$Q := \int d^3x j^0(x) = \int \frac{d^3p}{2E_p} (a(p)^* a(p) - b(p)^* b(p)). \quad (6)$$

En la versión cuantizada de la teoría, Q se convierte –como ya hemos mencionado– en el operador de carga eléctrica.

Observaciones

- Teniendo en cuenta (5) y (6), así como el hecho de que $\partial_\mu j^\mu = 0$, vemos que si llegásemos a pensar en la posibilidad de describir materia en términos de un campo escalar complejo φ , entonces dicho campo (en su versión cuantizada) podría describir partículas masivas, que vienen en dos tipos de carga (que por lo tanto podríamos llamar “carga eléctrica”).
- Por la observación anterior, y por lo que sabemos de electro-dinámica clásica, si quisiéramos proponer una forma de acoplar este tipo de “materia” a la radiación (i.e. al campo EM), lo natural sería agregar al Lagrangiano un término de la forma

$$\mathcal{L}_I \sim j^\mu A_\mu. \quad (7)$$

El principio gauge nos permitirá obtener el término de acople (o de "interacción") (7) de forma muy natural. Pasemos entonces a discutir dicho principio.

Comencemos por observar que la razón por la cual el Lagrangiano \mathcal{L}_φ en la ec. (1) es invariante bajo las transformaciones (4) es simplemente porque cada vez que aparece φ en \mathcal{L}_φ , también aparece φ^* , de tal forma que las fases se cancelan. Así, por ejemplo, para el término de masa tenemos:

$$\begin{aligned} m^2 \varphi'^*(x) \varphi'(x) &= m^2 (\underbrace{e^{i\theta} \varphi}_{}^*) (\underbrace{e^{i\theta} \varphi}_{}) = m^2 e^{-i\theta} e^{i\theta} \varphi^*(x) \varphi(x) \\ &= m^2 \varphi^*(x) \varphi(x). \end{aligned}$$

Lo mismo sucede con el término cinético, ya que al θ ser una constante, tenemos $\partial_\mu \varphi'(x) = \partial_\mu (e^{i\theta} \varphi(x)) = e^{i\theta} \partial_\mu \varphi(x)$, de manera que (nuevamente) tenemos una cancelación de fases.

¿Qué sucede si en lugar de una transformación global como la descrita por (4) consideramos una transformación local?

Con esto nos referimos a transformaciones de la forma

$$\varphi(x) \mapsto \varphi'(x) = e^{-ie\Lambda(x)} \varphi(x), \quad (8)$$

donde " e " es una constante y $x \mapsto \Lambda(x)$ una función suave, pero por demás arbitraria de x ?

Está claro que debido a la presencia de operadores de derivación (∂_μ) en \mathcal{L}_φ , este último no puede ser invariante.

Veamos cuál es el efecto de la transformación (8) sobre el Lagrangiano:

Con $\varphi'(x) = e^{-ie\Lambda(x)} \varphi(x)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'_\varphi &= \frac{1}{2} \partial^\mu (e^{-ie\Lambda} \varphi) \partial_\mu (e^{ie\Lambda} \varphi^*) - \frac{1}{2} m^2 (e^{-ie\Lambda} \varphi)(e^{ie\Lambda} \varphi) \\
 &= \frac{1}{2} (-ie(\partial^\mu \Lambda) e^{-ie\Lambda} \varphi + e^{-ie\Lambda} \partial^\mu \varphi) (ie(\partial_\mu \Lambda) e^{ie\Lambda} \varphi^* + e^{ie\Lambda} \partial_\mu \varphi^*) - \frac{1}{2} m^2 |\varphi|^2 \\
 &= \frac{1}{2} (-ie[\partial^\mu \Lambda] \varphi + \partial^\mu \varphi) (ie[\partial_\mu \Lambda] \varphi^* + \partial_\mu \varphi^*) - \frac{1}{2} m \varphi \varphi^* \\
 &= \frac{1}{2} e^2 (\partial_\mu \Lambda) (\partial^\mu \Lambda) \varphi \varphi^* + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi^* - \frac{1}{2} m \varphi \varphi^* \\
 &\quad + \left(\frac{ie}{2} \right) (\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*) (\partial^\mu \Lambda). \tag{9}
 \end{aligned}$$

Obtenemos, por lo tanto, $\varphi \mapsto \varphi' = e^{-ie\Lambda} \varphi \rightsquigarrow \mathcal{L}_\varphi \mapsto \mathcal{L}'_\varphi$, con

$$\mathcal{L}'_\varphi = \mathcal{L}_\varphi + \frac{e^2}{2} (\partial^\mu \Lambda \partial_\mu \Lambda) \varphi \varphi^* + j_\mu \partial^\mu \Lambda, \tag{10}$$

donde

$$j_\mu := \frac{ie}{2} (\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*) \tag{11}$$

es justamente la corriente conservada asociada a transformaciones U(1) globales (como en (4)).

Observemos que uno de los términos que aparecen, $j_\mu \partial^\mu \Lambda$, es similar al que conocemos de la electrodinámica clásica para el acople "radiación-materia" (cf. (7)), es decir, un término de la forma $j_\mu A^\mu$, donde A^μ es el vector potencial, en términos del cual podemos expresar el campo EM : $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Por lo tanto, es de esperar que sea posible "compensar" el efecto de una transformación gauge local como (8) introduciendo términos de la forma

$$j_\mu A^\mu \longrightarrow \text{para compensar } j_\mu \lambda^\mu, \quad (12)$$

así como

$$A^\mu A_\mu \varphi \varphi^* \longrightarrow \text{para compensar } (\partial_\mu \lambda)(\partial^\mu \lambda) \varphi \varphi^*. \quad (13)$$

Para poder generar esta "compensación" será necesario considerar, al mismo tiempo que $\varphi \mapsto e^{-ie\lambda} \varphi$, una transformación gauge del campo electromagnético que, como sabemos, es de la forma $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$.

Por lo tanto, vamos a añadir al Lagrangiano inicial \mathcal{L}_φ el siguiente "Lagrangiano de interacción":

$$\mathcal{L}_I = \alpha (A^\mu A_\mu) \varphi \varphi^* + \beta j_\mu A^\mu, \quad (14)$$

donde α y β son constantes a determinar.

Ejercicio.

- a) Mostrar que la exigencia de invarianza del Lagrangiano $\mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_I$ bajo una transformación simultánea de la forma

$$\varphi \mapsto e^{-ie\lambda} \varphi \quad (15)$$

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$$

nos lleva de forma única a la escogencia $\alpha = \frac{e^2}{2}$, $\beta = -1$, $\chi(x) = \Lambda(x)$.

- b) Mostrar que, para esa escogencia, tenemos

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_I \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} D^\mu \varphi (D_\mu \varphi)^* - \frac{1}{2} m^2 \varphi \varphi^*, \quad (16)$$

donde $D^\mu \varphi := (\partial^\mu + ieA^\mu)\varphi$ (derivada covariante).

La Electrodinámica de Maxwell en formulación covariante.

En unidades Gaussianas, las ecs. de Maxwell son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j}$$

En la versión covariante, la densidad de carga ρ y la densidad de corriente \vec{j} forman parte de un mismo 4-vector: $j^\nu = (c\rho, \vec{j})$.

Definiendo las componentes del "tensor de Faraday" $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ como

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (*)$$

es fácil ver que las ecs. (*) toman la siguiente forma, más compacta:

ecs. inhomogéneas $\rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$

ecs. homogéneas $\rightarrow \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \partial^\nu F^{\rho\tau} = 0$,

donde $\epsilon_{\mu\nu\rho\tau}$ es el tensor antisimétrico ($\epsilon_{0123} = 1 = -\epsilon_{0213}$, etc.).

Las ecs. homogéneas también se pueden escribir de la forma

$$\partial^\nu F^{\rho\tau} + \partial^\rho F^{\tau\nu} + \partial^\tau F^{\nu\rho} = 0, \text{ para } \nu \neq \rho \neq \tau.$$

- Recordando que es posible expresar los campos \vec{E} y \vec{B} en términos de potenciales ϕ y \vec{A} a través de

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad y \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

y que la libertad gauge de la teoría se manifiesta en el hecho de que \vec{E} y \vec{B} permanecen invariantes bajo transformaciones de la forma

$$\phi \mapsto \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t},$$

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi,$$

es entonces natural considerar el campo $A_\mu := (\phi, \vec{A})$, de donde se sigue que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (**)$$

Así mismo, cabe observar que la ec. de continuidad toma ahora la forma $\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0)$.

En resumen (y pasando ahora a unidades naturales), tenemos:

- Ecs. Maxwell: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$
 $\epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \partial^\nu F^{\rho\tau} = 0$

- Tensor de Faraday. $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

- Transformaciones gauge. $A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi$

- Ec. continuidad $\partial_\mu j^\mu = 0$.

→ Buscamos ahora un Lagrangiano a partir del cual podamos obtener las ecs. de movimiento, para así proceder a cuantizar, de forma análoga a como hicimos en el caso del campo escalar.

Si consideramos la dinámica del campo E.M. inducida por una distribución j^μ de cargas/corrientes (vistas como fuentes externas), podemos escribir:

$$\mathcal{L}_{EM}(A_\mu, \partial^\nu A_\mu; j_\nu) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \underbrace{j_\mu A^\mu}_{\text{término fuente...}} + \underbrace{j_\mu A^\mu}_{\text{acoplamiento "radiación-materia"}}$$

Mientras que las ecuaciones homogéneas se siguen directamente de la definición (***) (ejercicio), las inhomogéneas se obtienen como solución a las ecs. de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(A_\mu)} = \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \xrightarrow{\text{EJERCICIO!}} \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu.$$

Por ahora estamos interesados en la cuantización del campo E.M. en el vacío, así que tomaremos $j^\nu = 0$.

- Variables canónicas: Cada componente del campo A_μ tiene su variable de momento canónico conjugado asociada, Π^μ :

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\mu)}$$

La forma más eficiente de calcular Π^μ es calculando la derivada $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\mu)}$ en general, y luego tomar $\sigma=0$.

Veamos:

- Para el primer término del Lagrangiano, tenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= -\frac{1}{4} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} (\partial_\alpha A_\beta \partial_\mu A_\nu - \partial_\alpha A_\beta \partial_\nu A_\mu - \partial_\beta A_\alpha \partial_\mu A_\nu + \partial_\beta A_\alpha \partial_\nu A_\mu). \end{aligned}$$

- Ahora bien,

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma A^\tau)} (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} (\partial_\alpha A_\beta) (\partial_\mu A_\nu)) = 2 \partial^\tau A^\tau,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma A^\tau)} \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) &= -\frac{1}{4} (2 \partial^\tau A^\tau - 2 \partial^\tau A^\sigma - 2 \partial^\sigma A^\tau + 2 \partial^\sigma A^\sigma) \\ &= F^{\tau\sigma} = -F^{\sigma\tau}. \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} = -F^{oi} = E^i,$$

$$\pi^o = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = -F^{oo} = 0 \quad !$$

$\pi^o = 0 \rightarrow$ Problemas, ya que quisiéramos poder postular relaciones de commutación de la forma $[\hat{A}^o, \hat{\pi}^o] \dots$ pero cómo obtener el operador $\hat{\pi}^o$ si la "variable clásica" π^o es zero?

Teorema de Poynting / Radiación

Como hemos visto, las ecuaciones de Maxwell se pueden obtener a partir de un Lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu.$$

Podemos obtener -vía transformada de Legendre- la densidad Hamiltoniana \mathcal{H}_{EM} que corresponde a \mathcal{L}_{EM} . La integral $\int d^3x \mathcal{H}_{EM}$ debe ser entonces interpretada como la energía del campo EM, en interacción con "fuentes" (cargas y corrientes) determinadas por $j^\mu = (\rho, \vec{j})$.

En unidades naturales, esta energía está dada por

$$H_{EM} = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \|\vec{E}(x)\|^2 + \frac{1}{2} \|\vec{B}(x)\|^2 - \vec{j}(x) \cdot \vec{A}(x) \right).$$

Tal como hicimos en el caso del campo escalar, es posible obtener cantidades conservadas haciendo uso del teorema de Noether, siempre y cuando el Lagrangiano sea invariante bajo un grupo dado de transformaciones. Consideremos por lo tanto la invariancia de \mathcal{L}_{EM} bajo traslaciones espacio-temporales (para esto debemos asumir que no hay cargas ni corrientes $\rightarrow j^\mu = (0, 0, 0, 0)$).

La forma general del tensor de energía-momento (obtenido vía teorema de Noether bajo la hipótesis de invarianza translacional) es

$$T^{\mu\nu} = \left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^{(i)})} \partial^\nu \psi^{(i)} \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L},$$

donde $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi^{(i)}, \partial_\mu \Psi^{(i)})$ es un Lagrangiano general.

La ley de conservación que se obtiene, hemos visto, es de la forma

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

de tal forma que la integral (sobre $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$) de la componente $T^{\alpha i}$ nos da una de las 4 cantidades conservadas. En el caso del campo EM, tenemos ($j^\mu = 0$):

$T_{EM}^{\mu\nu} = F^{\mu\sigma} F_\sigma^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$, donde se cumple la ley de conservación:

$$\partial_\mu T_{EM}^{\mu\nu} = 0.$$

Las diferentes componentes se pueden clasificar de la siguiente forma ($T^{\mu\nu} = T^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu}$):

$$1) (T_{EM})_0^0 = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \equiv u(x) \rightarrow \text{densidad de energía.}$$

$$2) (T_{EM})_i^i = -(\vec{E} \times \vec{B}) \equiv -c \vec{P}(x) \rightarrow \vec{P} = (P^1, P^2, P^3) : \text{vector de densidad de momento lineal.}$$

$$3) (T_{EM})_0^i = +(\vec{E} \times \vec{B})^i \equiv \frac{1}{c} S^i(x) \rightarrow \vec{S} = (S^1, S^2, S^3) : \text{vector de Poynting.}$$

$$4) (T_M)^k_i = E^k E^i + B^k B^i - \frac{1}{2} \delta^{ik} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \rightarrow \text{Tensor de "stress" de Maxwell.}$$

En términos de estas cantidades tenemos que, en el vacío, la ley de conservación $\partial_\mu T_{EM}^{\mu\nu} = 0$ toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x) + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0,$$

así que podemos ver al vector de Poynting \vec{S} como un (campo vectorial) que representa la densidad de flujo de energía.

En presencia de fuentes ($j^m \neq 0$) ya no tenemos la misma ley de conservación. Sin embargo aún podemos calcular $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ y ver qué resulta:

$$\rightarrow \partial_\mu \bar{T}_{EM}^{\mu\nu} + \bar{F}^\nu_\alpha j^\alpha = 0.$$

El término $v=0$ toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} = 0,$$

una ecuación de balance. Considerando una región Ω (volumen) y la superficie que lo rodea ($\partial\Omega$), tenemos:

$$\int_{\Omega} d^3x \frac{\partial}{\partial t} u(x) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3x u(x) = \frac{d}{dt} U_{campo} \quad (\text{variación de la energía del campo})$$

$$\int_{\Omega} d^3x \vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{d}{dt} U_{mec} \quad (\text{variación de la energía mecánica de las partículas en el interior de } \Omega)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} (U_{campo} + U_{mec}) = - \int_{\partial\Omega} \vec{S} \cdot d\vec{A} \quad \text{"Teorema de Poynting"}$$

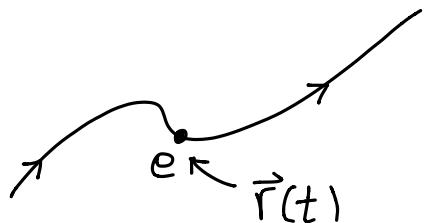
Esto nos muestra que, en efecto, \vec{S} representa el flujo de energía.

Scattering clásico de radiación (Thomson)*

Como sabemos de electrodinámica clásica, una carga eléctrica acelerada radia campos electromagnéticos.

Repasemos brevemente cómo se llega a esta conclusión a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Para esto, consideremos una partícula de carga "e" que sigue una trayectoria $t \mapsto \vec{r}(t)$



A lo largo de su trayectoria, dicha partícula da lugar a una densidad de carga, así como a una densidad de corriente. Estas están dadas por las siguientes expresiones:

$$\rho(x) = \rho(t, \vec{x}) = e \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}(t))$$

$$\vec{j}(x) = \vec{j}(t, \vec{x}) = e \vec{v}(t) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}(t)) \quad [\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)]$$

Usando el gauge de Lorenz ($\partial_\mu A^\mu = 0$) vemos que para las ecs. de Maxwell inhomogéneas, se tiene:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad \leftrightarrow \quad \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu \\ \hookrightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{=0 \text{ (gauge de Lorenz)}}) &= \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu} \end{aligned}$$

(*) Los cálculos de estas notas los haremos en unidades Gaussianas.

Esto quiere decir que \vec{A}' satisface la ecuación de onda (ec. de Klein-Gordon con $m=0$!) con \vec{j}' como término fuente.

Una ecuación de este tipo se puede solucionar fácilmente usando técnicas de funciones de Green.

En nuestro caso, se trata de resolver la siguiente ecuación,

$$\partial_\mu j^\mu G(x, x') = \delta^{(4)}(x - x'),$$

una de cuyas soluciones está dada por

$$G_R(x, x') = \frac{1}{2\pi} \Theta(x^0 - x'^0) \delta((x - x')^2)$$

Una vez conocida la función de Green apropiada para este problema (en este caso G_R , la "función de Green retardada"), podemos obtener la solución de la ec. de onda en presencia de una fuente a partir de

$$\vec{A}'(x) = \int d^4x' G_R(x - x') j'(x').$$

En nuestro caso, podemos escribir ρ, \vec{j} de forma covariante:

$$j'(x) = e\gamma \int d\tau u'(\tau) \delta^{(4)}(x - r(\tau)) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{tiempo propio} \\ d\tau = \frac{ds}{\gamma}, \\ r(\tau) = (c s, \vec{r}(s)), \end{array}$$

Verifiquemos que, en efecto, esta es la versión $u(\tau) = (\gamma, \gamma \vec{v}(s))$.

covariante de las expresiones para ρ y \vec{j} que introdujimos en la página anterior.

Para comenzar, notemos que τ es un parámetro de integración que representa el tiempo propio de la partícula. Si observamos el movimiento de la partícula desde un marco de referencia "S", con una variable de tiempo que llamaremos

"s", entonces la relación entre s y τ está dada por el factor de dilatación temporal (instantáneo) γ . Es decir, debemos tener

$$d\tau = \frac{ds}{\gamma}, \quad \text{donde} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + v(s)^2/c^2}}$$

Con estas convenciones, la trayectoria de la partícula, escrita en forma covariante ("línea de mundo") será

$$r(\tau) = (c s, \vec{r}(s)).$$

El 4-vector de velocidad correspondiente ($u = dr/d\tau$) es

$$u(\tau) = (c \gamma, \gamma \vec{v}(s)).$$

Con esto podemos evaluar la componente j^0 , así como las componentes j^k ($k=1,2,3$) en el marco de referencia S:

$$\begin{aligned} \rightarrow j^0(t, \vec{x}) &= ec \int \frac{ds}{\gamma} u^0(s) \delta^{(1)}(ct - cs) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}(s)) \\ &= ec \int \frac{ds}{\gamma} c \sigma \cdot \frac{1}{c} \cdot \delta^{(1)}(t-s) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}(s)) \\ &= ec \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}(t)) = c \rho(t, \vec{x}), \quad \underline{\text{ok}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j^k(t, \vec{x}) &= ec \int \frac{ds}{\gamma} \delta^k v^k(s) \delta^{(1)}(ct - cs) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}(s)) \\ &= e v^k(t) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}(t)). \quad \underline{\text{ok}} \end{aligned}$$

De vuelta al potencial:

$$\begin{aligned}
 \vec{A}^v(x) &= \int d^4x' G_R(x-x') \frac{4\pi}{c} j^v(x') \\
 &= \frac{4\pi}{c} \int d^4x' G_R(x,x') ec \int d\sigma u^v(\sigma) \delta^{(4)}(x'-r(\sigma)) \\
 &= \frac{4\pi}{c} \int d^4x' \int d\sigma \frac{ec}{2\pi} \Theta(x^0-x'^0) \delta((x-x')^2) u^v(\sigma) \delta^{(4)}(x'-r(\sigma)) \\
 &= ze \int d\sigma \Theta(x^0-\tau(\sigma)) \delta^{(1)}((x-r(\sigma))^2) u^v(\sigma) \quad (\text{recordar la relación entre } s \text{ y } \sigma!)
 \end{aligned}$$

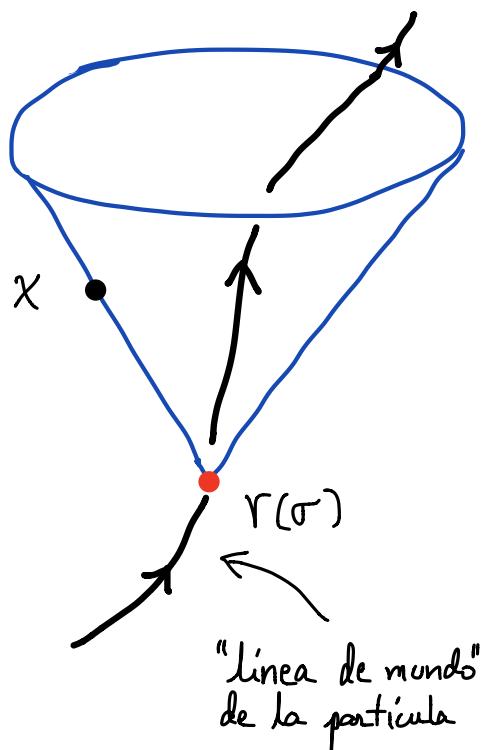
Antes de evaluar la integral, detengámonos un momento para discutir la fórmula que hemos obtenido:

$$\vec{A}^v(x) = ze \int d\sigma \Theta(x^0-\tau^0(\sigma)) \delta^{(1)}((x-r(\sigma))^2) u^v(\sigma) \quad (*)$$

La partícula de carga e recorre una trayectoria $r(\sigma)$ en el espacio-tiempo. Su velocidad $u(\sigma)$ da lugar a una corriente eléctrica, que actúa como fuente en las ecuaciones de Maxwell.

En cada momento, la partícula está generando un campo E.M. Dicho campo, por supuesto, se propaga a una velocidad c . Por lo tanto, es de esperarse que el campo $\vec{A}^v(x)$ detectado por un observador en el punto x sea causado por la carga e cuando esta se encontraba en algún lugar, en el pasado, tal que x se encuentre en el cono de luz futuro del punto de emisión.

Para interpretar los diferentes términos que aparecen en el integrando de (*), hagamos referencia al siguiente diagrama:



- El término $\delta^{(1)}((x-r(\sigma))^2)$ hace que $r(\sigma)$ contribuya a $A^\nu(x)$ si y solo si x está en el cono de luz de $r(\sigma)$.
- De hecho, x debe estar, en realidad, en el cono de luz **futuro** de $r(\sigma)$. Esto es lo que garantiza la presencia del término $\theta(x^\nu - r^\nu(\sigma))$.

Para resolver la integral, basta con hacer uso de la identidad

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x_i)}{|f'(x_i)|},$$

donde $\{x_i\}_i$ es el conjunto de puntos en los que se anula $f \rightarrow f(x_i) = 0$

En nuestro caso tenemos $f(\sigma) = (x - r(\sigma))^2$, así que

$$\begin{aligned} f'(\sigma) &= \frac{df}{d\sigma} = -2(x - r(\sigma)), \underbrace{\frac{dr^\mu}{d\sigma}(\sigma)}_{= u^\mu(\sigma)} = -2(x - r(\sigma)) \cdot u(\sigma) \\ &= u^\mu(\sigma) \end{aligned}$$

Notemos ahora que $x - r(\sigma)$ es un vector nulo (tipo luz), mientras que $u(\sigma)$ es de tipo tiempo (asumimos que la partícula cargada es masiva). Esto implica que, para todos los x y σ que cumplen la condición de cono de luz, tendremos $(x - r(\sigma)) \cdot u(\sigma) > 0$

Para verificar la anterior afirmación basta con evaluar el producto de los 2 vectores en el marco de reposo de la partícula.

Ahora debemos encontrar los ceros de $f(\sigma)$. Del gráfico es claro que solo hay uno, al que denominaremos τ_0 .

Ahora sí podemos evaluar la integral:

$$\tilde{A}(x) = 2e \int d\sigma \Theta(x^0 - r^0(\sigma)) \delta^{(1)}((x - r(\sigma))^2) u^\nu(\sigma)$$

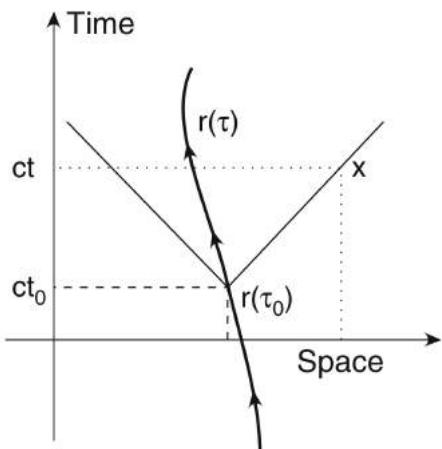
$$= 2e \int d\sigma \Theta(x^0 - r^0(\tau_0)) \frac{\delta^{(1)}(\sigma - \tau_0)}{2(x - r(\tau_0)) \cdot u(\tau_0)} u^\nu(\tau_0)$$

$$= e \frac{u^\nu(\tau_0)}{u(\tau_0) \cdot (x - r(\tau_0))}$$

Este potencial se conoce como el potencial de Liénard-Wiechert:

$$A^\mu(x) = e \frac{u^\mu(\tau_0)}{u(\tau_0) \cdot (x - r(\tau_0))},$$

donde τ^0 es aquella coordenada temporal (tiempo propio) de la partícula, tal que se cumple la condición de cono de luz.



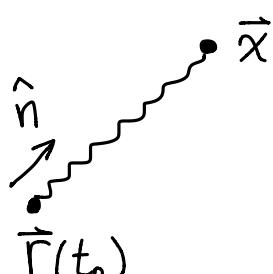
Este gráfico, tomado del cap. 3 del libro "Classical Field Theory" (F. Scheck), ilustra claramente el significado de todas las variables.

En el sistema S tenemos $\mathbf{u} = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$, $\vec{r} = (ct_0, \vec{r}(t_0))$, donde estamos considerando ambos vectores evaluados en el tiempo "retardado" t_0 .

Tenemos, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}) &= \mathbf{u}^\circ (\mathbf{x}^\circ - \mathbf{r}^\circ) - \vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{r}}) \\ &= \mathbf{r}(\mathbf{x}^\circ - ct_0) - \mathbf{r} \vec{\mathbf{v}} \cdot (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{r}})\end{aligned}$$

$\rightarrow \mathbf{x}$ debe estar en elcono de luz futuro de $\mathbf{r}(t_0) = (ct_0, \vec{r}(t_0))$.
 ↳ esta condición determina el valor de t_0 :



$$\begin{aligned}\mathbf{x}^\circ &= ct \\ c(t-t_0) &= \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{r}}(t_0)\| \equiv R \\ \text{positivo} &\quad \rightarrow t = t_0 + R/c\end{aligned}$$

$$c(t-t_0) = R$$

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} R$$

Con esto llegamos a las expresiones finales para los potenciales ϕ y $\vec{\mathbf{A}}$:

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{e}{R} \left. \frac{1}{1 - \frac{1}{c} \vec{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \right|_{\text{ret}}$$

$$\vec{\mathbf{A}}(t, \vec{x}) = \frac{e}{R} \left. \frac{\vec{\mathbf{v}}/c}{1 - \frac{1}{c} \vec{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \right|_{\text{ret}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{st} + \vec{E}_{rad}, \quad E_{st} \propto \frac{1}{R^2}, \quad E_{rad} \propto \frac{1}{R}$$

$$\vec{E}_{rad}(t, \vec{x}) = \frac{e}{R} \left. \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{v}/c) \times \dot{\vec{v}})}{c^2 (1 - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \hat{n})^3} \right|_{ret}$$

$$\frac{v}{c} \ll 1 \implies \vec{E}_{rad} \approx \frac{e}{R} \left. \frac{1}{c^2} \hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{v}}) \right|_{ret}$$

$$\text{Vector de Poynting} \rightarrow \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times (\hat{n} \times \vec{E}) \approx \frac{c}{4\pi} \|\vec{E}\|^2 \hat{n}$$

Scattering (Thomson)



\vec{E}_{in} : campo incidente

$$\text{Ec. movimiento: } e \vec{E}_{in} = m \dot{\vec{v}}$$

$$\text{Potencia radiada: } \text{Flujo incidente: } \frac{c}{4\pi} \|\vec{E}_{in}\|^2 \hat{k}$$

$$dP = \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

$$= \frac{c}{4\pi} R^2 d\Omega \|\vec{E}_{rad}\|^2 \quad \theta: \text{ángulo entre } \hat{n} \text{ y } \dot{\vec{v}}$$

$$= d\Omega R^2 \frac{c}{4\pi} \frac{e^2}{R^2} \frac{1}{c^4} \left\| \hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{v}}) \right\|_{ret}^2 = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta d\Omega$$

$$\rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \theta = \frac{e^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{e^2}{m^2} \|\vec{E}_{in}\|^2 \sin^2 \theta$$

$$= \frac{e^4}{m^2 c^4} \frac{c}{4\pi} \|\vec{E}_{in}\|^2 \sin^2 \theta \quad r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta, \quad G_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2$$

QED → Operador de Scattering a orden 2.

- Necesitamos:
- 1) Expansiones de Fourier de los campos.
 - 2) Relaciones de commutación.
 - 3) Lagrangiano de interacción.

• El campo de Dirac

$$\Psi_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma=1}^2 \int \frac{d^3 \vec{p}}{2E_p} \left(a_\sigma(p) u_\alpha^{(\sigma)}(p) e^{-ip \cdot x} + b_\sigma^\dagger(p) v_\alpha^{(\sigma)}(p) e^{ip \cdot x} \right)$$

$$\bar{\Psi}_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma=1}^2 \int \frac{d^3 \vec{p}}{2E_p} \left(a_\sigma^\dagger(p) \bar{u}_\alpha^{(\sigma)}(p) e^{-ip \cdot x} + b_\sigma(p) \bar{v}_\alpha^{(\sigma)}(p) e^{ip \cdot x} \right)$$

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^\circ, \quad (\not{p} - m) u^{(\sigma)}(p) = 0, \quad (\not{p} + m) v^{(\sigma)}(p) = 0.$$

Relaciones de anticommutación:

$$\{a_\sigma(p), a_{\sigma'}^\dagger(q)\} = 2E_p \delta_{\sigma,\sigma'} \delta(\vec{p} - \vec{q}), \quad \{b, b^\dagger\} = 2E \delta \dots, \text{ etc.}$$

Propagador:

$$S_F(x-y) = \langle 0 | \tilde{T}(\Psi(x) \Psi(y)) | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x-y)}$$

- El campo electromagnético:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k}{2\omega_k} \sum_{\lambda=0}^3 \left(\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) c_\lambda(k) e^{-ik \cdot x} + \varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(k) c_\lambda^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right)$$

CCR:

$$[c^{(\lambda)}(k), c^{(\lambda')\dagger}(k')] = -2\omega_k g^{\lambda\lambda'} \delta(k-k')$$

Condición de Lorentz \rightarrow " $\langle \psi | \partial_\mu A^\mu(x) | \psi \rangle = 0$ "

$|\psi\rangle$: "estado físico"

$$\Rightarrow (c^{(0)}(k) - c^{(3)}(k)) |\psi\rangle = 0$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EM} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2$$

\uparrow "gauge-fixing term"

$\hookrightarrow \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle = -\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \left(g^{\mu\nu} + \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right)$

$\lambda = 1 \rightarrow$ "gauge de Feynman"

Propagador:

$$D_F^{\mu\nu}(x-y) = \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle$$

- Lagrangiano de interacción:

$$\mathcal{L}_I = -e : \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) A_\mu(x) :, \text{ donde } e = \text{carga del electrón} \quad (e < 0)$$

$\hookrightarrow \mathcal{H}_I(x) = e : \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) A_\mu(x) : \rightarrow \mathcal{H}_I = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H}_I(x)$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n T(H_I(x_1) \dots H_I(x_n)) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}}{n!}$$

Orden 2 $\rightarrow S^{(2)}$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow S^{(2)} &= (-ie)^2 \int dx \int dy T(:\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x): : \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) A_\nu(y):) \\ &= -e^2 \int dx \int dy T(:\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x): : \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y):) T(A_\mu(x) A_\nu(y)) \end{aligned}$$

\rightarrow el operador T se puede separar de esta forma debido a que los ψ 's y los A 's comutan entre sí.

\rightarrow Calculamos los diferentes términos por aparte.

$$T(A_\mu(x) A_\nu(y))$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow T(A_\mu(x) A_\nu(y)) &= :A_\mu(x) A_\nu(y): + \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle \\ &= :A_\mu(x) A_\nu(y): + D_{\mu\nu}(x-y) \end{aligned}$$

$$T(:\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x): : \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y):)$$

$$T(:\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x): : \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y):) =$$

$$= (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\sigma\tau} \tilde{T}(:\bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x): : \bar{\psi}_\sigma(y) \psi_\tau(y):)$$

↑ aquí podemos usar el operador de ordenamiento temporal "fermiónico", porque tenemos números pares de operadores fermiónicos

haciendo uso del teorema de Wick...

$$= (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\sigma\tau} \times$$

$$\times \left(: \overline{\Psi}_\alpha(x) \overline{\Psi}_\beta(x) \overline{\Psi}_\sigma(y) \Psi_\tau(y) : + : \overline{\Psi}_\alpha(x) \overline{\Psi}_\beta(x) \overline{\Psi}_\sigma(y) \overline{\Psi}_\tau(y) : \right.$$

$$\left. + : \overline{\Psi}_\alpha(x) \overline{\Psi}_\beta(x) \overline{\Psi}_\sigma(y) \Psi_\tau(y) : + : \overline{\Psi}_\alpha(x) \overline{\Psi}_\beta(x) \overline{\Psi}_\sigma(y) \Psi_\tau(y) : \right)$$

$$^{(*)} = (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\sigma\tau} \left(: \overline{\Psi}_\alpha(x) \overline{\Psi}_\beta(x) \overline{\Psi}_\sigma(y) \Psi_\tau(y) : - S_{\tau\alpha}(y-x) : \overline{\Psi}_\beta(x) \overline{\Psi}_\sigma(y) : \right.$$

$$\left. + S_{\beta\sigma}(x-y) : \overline{\Psi}_\alpha(x) \Psi_\tau(y) : - S_{\tau\alpha}(y-x) S_{\beta\sigma}(x-y) \right)$$

$$= : \overline{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) \overline{\Psi}(y) \gamma^\nu \Psi(y) : + : \overline{\Psi}(y) \gamma^\nu S(y-x) \gamma^\mu \Psi(x) :$$

$$+ : \overline{\Psi}(x) \gamma^\mu S(x-y) \gamma^\nu \Psi(y) : - \text{Tr} (S(y-x) \gamma^\mu S(x-y) \gamma^\nu).$$

(*) : Aquí hemos hecho uso de la identidad

$$\overline{\Psi}_\alpha(x) \Psi_\beta(y) = - \overline{\Psi}_\beta(y) \overline{\Psi}_\alpha(x),$$

que es consecuencia de :

$$\tilde{T}(AB) = :AB: + \overline{AB}$$

$$\tilde{T}(BA) = :BA: + \overline{BA} \rightsquigarrow \tilde{T}(AB) + \tilde{T}(BA) = AB\theta(t_A - t_B) - BA\theta(t_B - t_A)$$

$$+ BA\theta(t_B - t_A) - AB\theta(t_A - t_B)$$

$$:AB: = - :BA:$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow 0 = \overline{AB} + \overline{BA}.$$

Reglas (preliminar) :

$$\overline{A_\mu(x)} A_\nu(y) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \bullet \\ x \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \quad y$$

$$\overline{\Psi_\mu(x)} \overline{\Psi_\nu(y)} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \bullet \\ x \end{array} \leftarrow \leftarrow \begin{array}{c} \bullet \\ y \end{array}$$

$$A_\mu(x) (\text{libre}) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}$$

$$\Psi(x) (\text{libre}) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}$$

$$\overline{\Psi(x)} (\text{libre}) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

$$e \gamma^\mu (\text{vértice}) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

Juntando lo que tenemos:

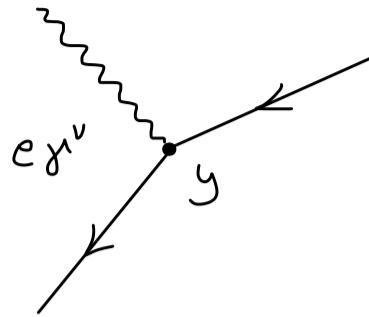
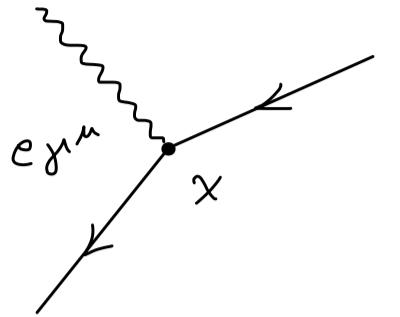
$$"T(:\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi:\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi:) T(AA)" =$$

$$= \left(: \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) \bar{\Psi}(y) \gamma^\nu \Psi(y) : + : \bar{\Psi}(y) \gamma^\nu S(y-x) \gamma^\mu \Psi(x) : \right. \\ \left. + : \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu S(x-y) \gamma^\nu \Psi(y) : - \text{tr}(S(y-x) \gamma^\mu S(x-y) \gamma^\nu) \right) \times \\ \times \left(: A_\mu(x) A_\nu(y) : + D_{\mu\nu}(x-y) \right)$$

→ 8 términos en total.

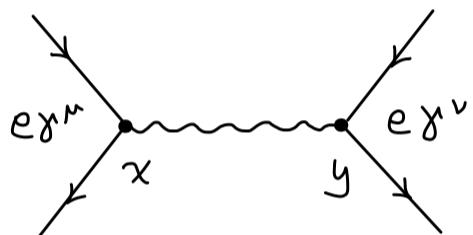
Representación gráfica →

$$\textcircled{1} \quad : \overline{\psi(x)} \gamma^\mu \psi(x) \overline{\psi(y)} \gamma^\nu \psi(y) : : A_\mu(x) A_\nu(y) :$$



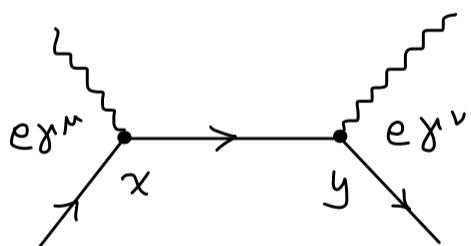
(disonexos)

$$\textcircled{2} \quad : \overline{\psi(x)} \gamma^\mu \psi(x) \overline{\psi(y)} \gamma^\nu \psi(y) : D_{\mu\nu}(x-y)$$



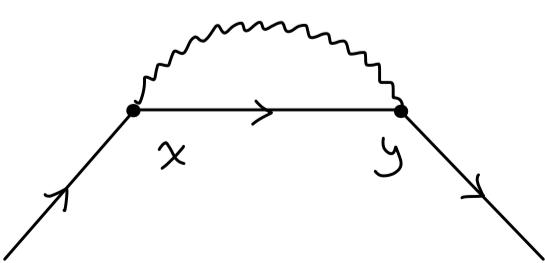
(ejemplo: scattering e-e)

$$\textcircled{3} \quad : \overline{\psi(y)} \gamma^\nu S(y-x) \gamma^\mu \psi(x) : : A_\mu(x) A_\nu(y) :$$



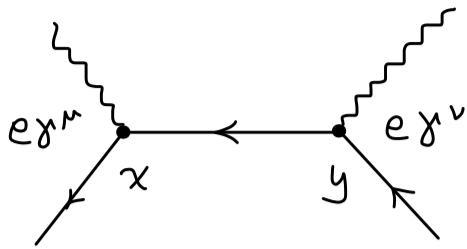
(ej: $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$)

$$\textcircled{4} \quad : \overline{\psi(y)} \gamma^\nu S(y-x) \gamma^\mu \psi(x) : D_{\mu\nu}(x-y)$$

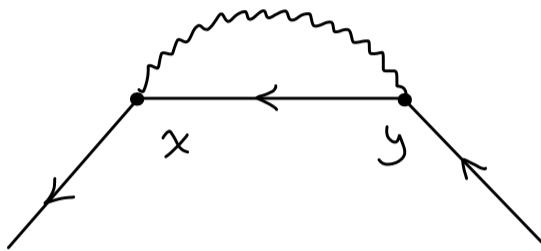


(autoenergía)

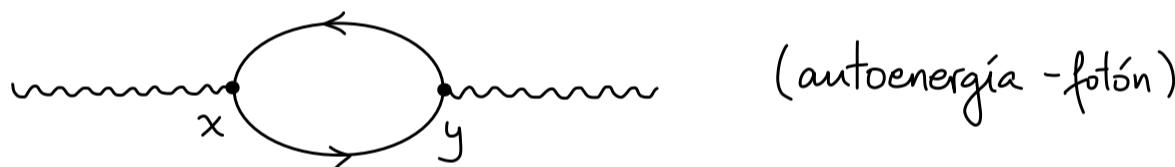
$$\textcircled{5} \quad : \overline{\psi(x) \gamma^\mu S(x-y) \gamma^\nu \psi(y)} : : A_\mu(x) A_\nu(y) :$$



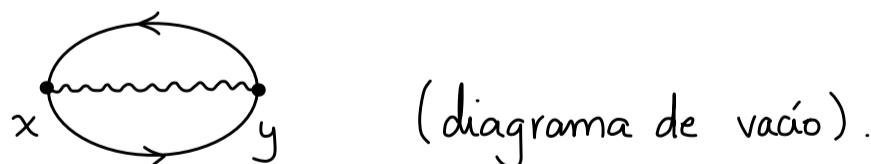
$$\textcircled{6} \quad : \overline{\psi(x) \gamma^\mu S(x-y) \gamma^\nu \psi(y)} : D_{\mu\nu}(x-y)$$



$$\textcircled{7} \quad - \text{tr} \left(S(y-x) \gamma^\mu S(x-y) \gamma^\nu \right) : A_\mu(x) A_\nu(y) :$$



$$\textcircled{8} \quad - \text{tr} \left(S(y-x) \gamma^\mu S(x-y) \gamma^\nu \right) D_{\mu\nu}(x-y)$$



Diagramas de Feynman - La teoría $\lambda\phi^4$.

Habiendo discutido el teorema de Wick, podemos pasar a considerar una teoría interactuante y obtener expresiones para el operador de scattering a órdenes bajos en teoría de perturbaciones.

Por simplicidad consideraremos una teoría escalar real, con una interacción de tipo $\lambda\phi^4$. A continuación listamos los elementos necesarios para realizar los cálculos:

- Serie de Dyson: $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T(H_I(t_1) \cdots H_I(t_n))$
 - Expansión del campo (escalar, real) en "modos de Fourier" \rightarrow

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{2E_p} \left(f_p(x) a_p + f_p^*(x) a_p^\dagger \right); \quad f_p(x) = \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{3/2}} \Big|_{p \equiv E_p}$$
 - Relaciones de commutación (CCR) $\rightarrow [a_p, a_q^\dagger] = 2E_p \delta(\vec{q} - \vec{p})$
 - Propagador de Feynman:

$$\Delta_F(x-y) := \langle 0 | T(\varphi(x) \varphi(y)) | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$
 - Hamiltoniano de interacción $\rightarrow H_I = \int \mathcal{H}_I(x) d^3 \vec{x}; \quad \mathcal{H}_I(x) = \lambda : \varphi(x)^4 :$
 - Teorema de Wick
- //
- Escogemos esta interacción porque da lugar a un modelo sencillo y físicamente consistente.

Comencemos entonces por estudiar los términos de orden más bajo en la serie de Dyson. Para tener un verdadero proceso de scattering, hay que considerar los elementos matriciales del operador $S - \mathbb{1}$, así que el orden más bajo está dado por $n=1$.

$$S^{(1)} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x \lambda : \varphi(x)^4 : = -i \lambda \int d^4x : \varphi(x)^4 :$$

El término $: \varphi(x)^4 :$ contiene 4 operadores φ evaluados en x , sin contracciones. Cada vez que aparezca un "punto" (aquí es x), introduciremos un vértice. El número de "puntos" corresponde al número de integraciones o, si lo queremos, al orden en teoría de perturbaciones. Cada operador de campo $\varphi(x)$ sin contraer será representado con una "pata externa" anclada al vértice que representa a x .

Así, tenemos:

$$: \varphi(x)^4 : \longleftrightarrow \begin{array}{c} \varphi(x) \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad x \\ \diagup \quad \diagdown \\ \varphi(x) \quad \varphi(x) \end{array}$$

Consideremos ahora un proceso de scattering de la forma

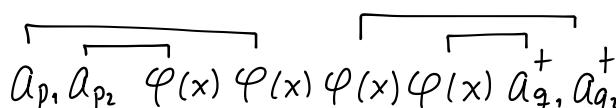
$$\begin{array}{ccc} p_1 & \longrightarrow & q_1 \\ \text{"in"} & \diagdown \quad \diagup & \longrightarrow \\ p_2 & & q_2 \end{array} \quad \text{"out"} \longrightarrow | \text{in} \rangle = a_{p_1}^+ a_{p_2}^+ | 0 \rangle \\ | \text{out} \rangle = a_{q_1}^+ a_{q_2}^+ | 0 \rangle$$

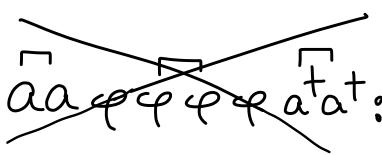
El elemento matricial que queremos calcular es el siguiente:

$$\langle \text{in} | S^{(1)} | \text{out} \rangle = \langle 0 | a_{p_1} a_{p_2} (-i\lambda) \int d^4x : \varphi(x)^4 : a_{q_1}^+ a_{q_2}^+ | 0 \rangle$$

Para esto hacemos uso del teorema de Wick (en la versión independiente de t), teniendo en cuenta que $a_{p_1} a_{p_2}$ y $a_{q_1}^+ a_{q_2}^+$ ya están en orden normal. Como al final tomamos el valor esperado con el vacío, sólo hace falta considerar los términos con el máximo número de contracciones.

Uno de ellos es, por ejemplo,


solo contracciones entre grupos distintos!

 este no 

Es fácil ver que todas las contracciones de 4 pares van a resultar siendo equivalentes, siendo estas un total de $24 = 4!$

Tenemos entonces que

$$\langle \text{in} | S^{(4)} | \text{out} \rangle = (-i\lambda) 4! \int d^4x \left[(\hat{a}_{p_1}^\dagger \varphi(x)) (\hat{a}_{p_2}^\dagger \varphi(x)) (\varphi(x) \hat{a}_{q_1}^\dagger) (\varphi(x) \hat{a}_{q_2}^\dagger) \right]$$

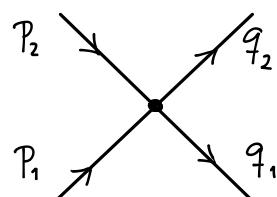
Los términos que hay que calcular son de 2 tipos:

$$\rightarrow \hat{a}_p^\dagger \varphi(x) = \langle 0 | a_p \varphi(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3\vec{\kappa}}{2E_\kappa} f_\kappa^*(x) \underbrace{\langle 0 | a_p a_\kappa^\dagger | 0 \rangle}_{2E_\kappa \delta(\vec{p} - \vec{\kappa})} = f_p^*(x) \quad \text{"in"}$$

$$\rightarrow \varphi(x) \hat{a}_q^\dagger = \langle 0 | \varphi(x) a_q^\dagger | 0 \rangle = \int \frac{d^3\vec{\kappa}}{2E_\kappa} f_\kappa(x) \underbrace{\langle 0 | a_\kappa a_q^\dagger | 0 \rangle}_{2E_\kappa \delta(\vec{q} - \vec{\kappa})} = f_p(x) \quad \text{"out"}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \langle \text{in} | S^{(4)} | \text{out} \rangle &= \frac{(-i\lambda) 4!}{((2\pi)^{3/2})^4} \underbrace{\int d^4x e^{i\vec{x} \cdot (p_1 + p_2 - q_1 - q_2)}}_{(2\pi)^4 \mathcal{S}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)} \\ &= \frac{(-i\lambda)(4!)}{(2\pi)^2} \mathcal{S}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \end{aligned}$$



$\circ \circ \bullet \bullet \bullet \circ \circ$



son todos iguales $\rightarrow 4! = 24$ posibilidades.

Volviendo a la serie de Dyson,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T(H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)),$$

A orden 2 tenemos:

$$S^{(2)} = \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \int dx \int dy T(:\varphi(x)^4: ::\varphi(y)^4:)$$

Usemos el teorema de Wick para buscar una representación diagramática de $S^{(2)}$.

Aquí un punto clave es tener en cuenta multiplicidades, de forma similar a lo que vimos con $S^{(1)}$.

Como ejemplo, consideremos la siguiente expresión:

$$:\theta_1 \theta_2 \theta_3: :AB:$$

Usando el teorema de Wick, tenemos:

$$\begin{aligned} :\theta_1 \theta_2 \theta_3: :AB: &= :\overline{\theta_1 \theta_2 \theta_3} AB: + :\overline{\theta_1 \theta_2} \overline{\theta_3} AB: + :\overline{\theta_1 \theta_3} \overline{\theta_2} AB: + :\overline{\theta_2 \theta_3} \overline{\theta_1} AB: \\ &+ :\overline{\theta_1 \theta_2} \overline{\theta_3} AB: + :\overline{\theta_1 \theta_3} \overline{\theta_2} AB: + :\overline{\theta_2 \theta_3} \overline{\theta_1} AB: \\ &+ :\overline{\theta_1} \overline{\theta_2 \theta_3} AB: + :\overline{\theta_1} \overline{\theta_3} \overline{\theta_2} AB: \\ &+ :\overline{\theta_2} \overline{\theta_1 \theta_3} AB: + :\overline{\theta_2} \overline{\theta_3} \overline{\theta_1} AB: \\ &+ :\overline{\theta_3} \overline{\theta_1 \theta_2} AB: + :\overline{\theta_3} \overline{\theta_2} \overline{\theta_1} AB: \end{aligned}$$

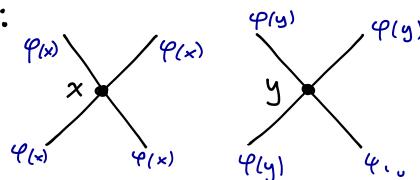
Ahora, supongamos que $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$. En ese caso, la expresión anterior toma la forma

$$\begin{aligned}
 :\theta\theta\theta::AB &= :\theta\theta\theta AB: + \left(:\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{\theta}AB: + :\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{\theta}AB: + :\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{AB}: \right) \\
 &\quad + \left(:\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{\theta}AB: + :\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{\theta}AB: + :\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{\theta}AB: \right) \\
 &\quad + \left(:\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{AB}: + :\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{AB}: \right. \\
 &\quad \left. + :\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{AB}: + :\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{AB}: \right. \\
 &\quad \left. + :\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{AB}: + :\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{\theta}\overline{AB}: \right) \\
 &= :\theta^3AB: + 3\langle 0|\theta A|0\rangle :\theta^2: B + 3\langle 0|\theta B|0\rangle :\theta^2: A \\
 &\quad + 6\langle 0|\theta A|0\rangle\langle 0|\theta B|0\rangle\theta.
 \end{aligned}$$

Así, al calcular $S^{(2)}$ será conveniente tener en cuenta todos los factores combinatorios que aparecerán por el hecho de que $\varphi(x)^4$ es de la forma $\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4$, con $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4$.

Veamos los términos que obtenemos para $T(\varphi(x)^4 : \varphi(y)^4 :)$ al aplicar el teorema de Wick →

1) $:\varphi(x)^4\varphi(y)^4:$ → al considerar elementos matriciales, se verá que este primer término dará lugar a diagramas "disconexos", ya que no hay aquí contracciones entre operadores $\varphi(x)$ y $\varphi(y)$. Por ahora representaremos este término de la siguiente forma:



2) Términos que contienen una sola contracción. Son de la forma

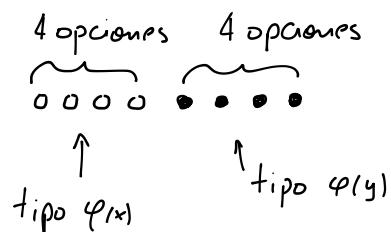
$$\begin{aligned}
 :\varphi(x)\varphi(x)\varphi(x)\varphi(x)\varphi(y)\varphi(y)\varphi(y)\varphi(y): &= \langle 0|T(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle :\varphi(x)^3\varphi(y)^3: \\
 &= \Delta_F(x-y):\varphi(x)^3\varphi(y)^3:
 \end{aligned}$$

Veamos cuántos términos de estos hay. Para escoger una contracción que involucra un término $\varphi(x)$ y un término $\varphi(y)$, tenemos:

4 opciones para escoger $\varphi(x)$ y 4 para escoger $\varphi(y)$

$$\rightarrow 4^2 = 16$$

Representemos así la situación:

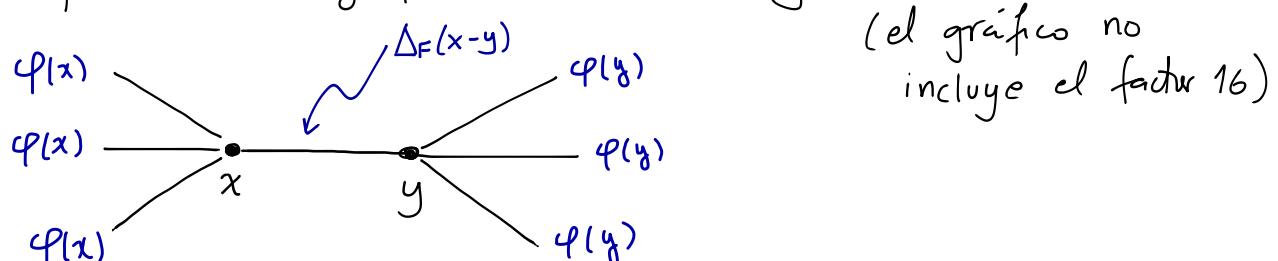


Así que las contribuciones con una contracción nos dan, en total:

$$16 \Delta_F(x-y) : \varphi(x)^3 \varphi(y)^3 :$$

$$(4 \text{ opciones}) \times (4 \text{ opciones}) = 16$$

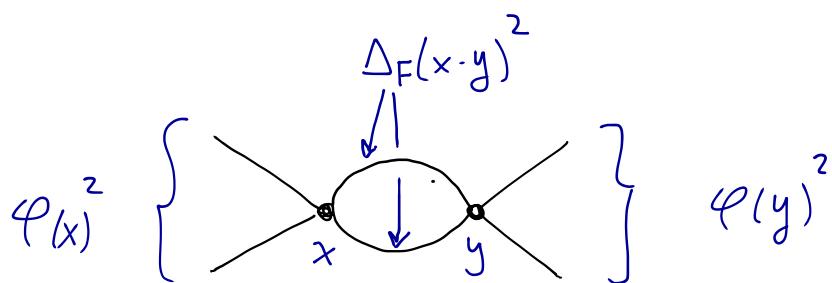
término que representamos gráficamente de la siguiente forma:



→ cada coordenada (x, y, \dots) da lugar a un vértice, etiquetado por la coordenada dada. Cada contracción $\varphi(x)\varphi(y)$ corresponde a un propagador $\Delta_F(x-y)$ y se representa como una linea que une los vértices x e y . Los términos no contraídos dan lugar a "patas externas" que serán luego contraídas con operadores de creación/destrucción correspondientes a los estados iniciales/finales.

3) Términos con 2 contracciones. Son de la forma

$$\Delta_F(x-y)^2 : \varphi(x)\varphi(x) \varphi(y)\varphi(y) : \text{ y dan lugar al diagrama}$$



En este caso el cálculo del factor combinatorio requiere algo más de cuidado. Veamos:

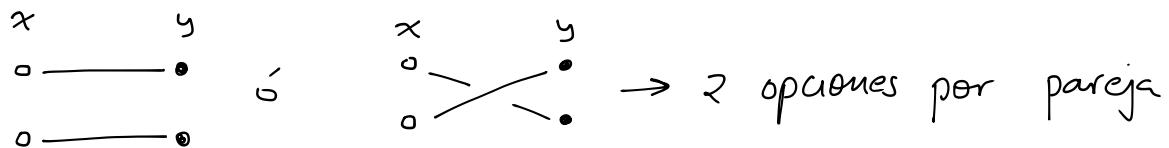
$x \quad y$
 $\bullet\bullet\bullet\bullet \quad \bullet\bullet\bullet$

- De cada grupo, escojo 2 de 4. Teniendo que las escogencias dentro de cada grupo son indistinguibles, tenemos $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 6$ por grupo. Explicitamente, las escogencias por grupo se ven así:

x

0 0 0 0	$\rightarrow 6 = \binom{4}{2}$ opciones.	$\rightarrow x + y \rightarrow \binom{4}{2}^2$ escogencias																								
<table border="1" style="width: 100px; height: 100px; border-collapse: collapse;"> <tr><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>x</td><td></td><td>x</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>x</td><td>x</td></tr> </table>	x	x			x		x		x			x		x	x			x		x			x	x		
x	x																									
x		x																								
x			x																							
	x	x																								
	x		x																							
		x	x																							

- Cada escogencia de pareja debe ser contruida:



$$\rightarrow \text{total} = \binom{4}{2}^2 \times 2! = \frac{3^2 4^2}{2!} = 72$$

$\hookrightarrow 72 \Delta_F(x-y)^2 : \varphi(x)^2 \varphi(y)^2 :$

4) Términos que involucran 3 contracciones. El patrón es claro:

- De c/grupo, escogemos 3 de 4 (indist.) $\rightarrow \binom{4}{3}$ por grupo $\rightarrow \binom{4}{3}^2$ total $(x+y)$

- Para c/escogencia, debemos "conectar" tres de x (blancos) con tres de y (negros):

$\begin{array}{c} \circ-\bullet \\ \circ-\bullet \\ \circ-\bullet \end{array}, \begin{array}{c} \circ-\circ \\ \circ-\bullet \\ \circ-\bullet \end{array}, \begin{array}{c} \circ-\circ \\ \circ-\circ \\ \circ-\bullet \end{array}, \text{etc} \rightarrow \text{pero esto es justo el n\'umero de permutaciones del conjunto } \{1, 2, 3\}$

$$\rightarrow 3!$$

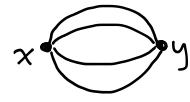
$$\# \text{ total de t\'erminos} = \binom{4}{3}^2 3! = \frac{4^2 3^2 2^2}{3!}. \text{ Gr\'aficamente, } \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---}$$

$\hookrightarrow 96 \Delta_F(x-y)^3 \varphi(x) \varphi(y)$

5) Por último, los términos con 4 contracciones:

$$\binom{4}{4}^2 4! = \frac{4^2 3^2 2^2}{4!} = 4! = 24 \quad \text{Gráficamente} \rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ x \bullet \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \text{---}$$

$$\hookrightarrow 24 \Delta_F(x-y)^4$$



Finalmente, podemos escribir:

$$T(\varphi(x)^4 \varphi(y)^4) = \varphi(x)^4 \varphi(y)^4 + 16 \Delta_F(x-y) \varphi(x)^3 \varphi(y)^3$$

$$+ 72 \Delta_F(x-y)^2 \varphi(x)^2 \varphi(y)^2 + 96 \Delta_F(x-y)^3 \varphi(x) \varphi(y) + 24 \Delta_F(x-y)^4$$

$$= \begin{array}{c} \text{---} \\ x \bullet \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \text{---} + 16 \begin{array}{c} \text{---} \\ x \bullet \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} + 72 \begin{array}{c} \text{---} \\ x \bullet \text{---} \\ \text{---} \end{array} + 96 \begin{array}{c} \text{---} \\ x \bullet \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$$+ 24 \begin{array}{c} \text{---} \\ x \bullet \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$$K = \# \text{ líneas internas} \rightarrow K! \binom{4}{K}^2$$

Cuantización del campo electromagnético.

Previamente hemos visto que la prescripción de "cuantización canónica" no se puede aplicar directamente al caso del campo electromagnético, ya que el momento conjugado de A_0 se anula: $\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{A}_0)} = -F^{00} = 0$.

→ Intentaremos ahora entender (al menos parcialmente) cuál es el origen del problema.

Notemos que de $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ se sigue que, en el vacío, se debe cumplir

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0. \quad (1)$$

Esta ecuación se puede reescribir de tal forma que se evidencie su similitud con la ecuación de Klein-Gordon:

$$\rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0.$$

Podemos escoger un gauge en el que se cumpla $\partial_\mu A^\mu = 0$ (condición de Lorenz), quedando así en evidencia el hecho de que cada una de las componentes A_μ satisface la ec. de Klein-Gordon, para $m=0$.

Notemos ahora que la función de Green $G(x)$ que corresponde al operador de Klein-Gordon, es invertible. De hecho, por definición tenemos

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G(x) = -i \delta(x), \quad (2)$$

de tal forma que, al tomar la transformada de Fourier, obtenemos:

$$\tilde{G}(p) \propto \frac{1}{p^2 - m^2}. \quad (3)$$

En el caso del campo electromagnético, tenemos (ec. (1)):

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu - \partial_\nu (\partial_\mu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu g_{\mu\nu} A^\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\mu = 0$$

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) A^\mu = 0, \quad (4)$$

con $\square = \partial_\mu \partial^\mu$.

- Afirmación: el operador $g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu$ no es invertible.

- Consideremos, de forma general, dos operadores de proyección P y Q , que sean "ortogonales" y tales que $P+Q = \mathbb{1}$.

→ Proyecciones: $P^2 = P$, $Q^2 = Q$.

→ Ortag.: $QP = PQ = 0$.

Entonces,

(i) Ni P ni Q son invertibles.

(ii) Si λ es una constante, $\lambda \neq 0$, entonces $P + \lambda Q$ es invertible.

Veamos: (i) → Si $P^2 = P$, entonces P no puede tener inverso.

Asumir que sí: $\exists G$ t.q. $PG = \mathbb{1}$. Pero entonces

$$\mathbb{1} = PG = P^2 G = P(PG) = P\mathbb{1} = P.$$

(ii) Por otro lado, vemos que para $\lambda \neq 0$ se tiene

$$(P + \lambda Q)^{-1} = P + \frac{1}{\lambda} Q.$$

De hecho, tenemos

$$(P + \frac{1}{\lambda} Q)(P + \lambda Q) = P^2 + \lambda PQ + \frac{1}{\lambda} QP + Q^2 = P + Q = \mathbb{1}.$$

Consideremos ahora las proyecciones longitudinales y transversales de un 4-vector A sobre el 4-vector k .

Tenemos:

$$\text{Proy}_k^{\text{long}} A : \quad A_v^l := (A^\mu k_\mu) \frac{k_v}{k^2} \quad (5)$$

$$\text{Proy}_k^{\text{tr}} A : \quad A_v^t := A_v - A_v^l = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) A^\mu$$

→ Tenemos operadores de proyección

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}^{\text{long}}(k) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad \mathcal{P}_{\mu\nu}^{\text{tr}}(k) = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (6)$$

Podemos representar el operador $g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu$ en el espacio de Fourier, obteniendo $g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu = k^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$. Esto demuestra la afirmación anterior: " $g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu$ no es invertible".

• Relación con transformaciones gauge:

En el espacio de Fourier, una transformación gauge $A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi$ toma la forma

$$\tilde{A}_\nu(k) \mapsto \tilde{A}'_\nu(k) = \tilde{A}_\nu(k) - i k_\nu \tilde{\chi}(k). \quad (7)$$

Definiendo $\tilde{\xi}(x) := \partial_\mu A^\mu(x)$, tenemos, en el espacio de Fourier,

$$\tilde{A}_\nu = \tilde{A}_\nu^{\text{long}} + \tilde{A}_\nu^{\text{tr}}; \quad k^\nu \tilde{A}_\nu^{\text{tr}} = 0$$

$$\Rightarrow k^\nu \tilde{A}_\nu^l = \frac{k^\nu k_\nu k_\mu \tilde{A}^\mu}{k^2} = k_\mu \tilde{A}^\mu \equiv -i \tilde{\xi}(k) \quad (8)$$

Aquí, la función $\tilde{\xi}(k)$ es la transformada de Fourier de $\tilde{\xi}(x)$, de tal forma que tenemos $\tilde{\xi}(k) = (\partial_\mu A^\mu)(k) = i k_\mu \tilde{A}^\mu(k)$.

Lo mismo aplica para la relación entre $\chi(x)$ y $\tilde{\chi}(k)$: $\partial_\mu \chi(x) = i k_\mu \tilde{\chi}(k)$.

¿Cómo se comportan las componentes long. y transv. de A bajo transformaciones gauge?

• Componente transversal:

$$\tilde{A}_v^{tr}(k) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \tilde{A}^\mu(k) = \tilde{A}_v^{tr}(k) - i \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) k^\mu \tilde{\chi}(k)$$

$k_\mu - k_\nu = 0$

$$\rightarrow \tilde{A}_v^{tr} = \tilde{A}_v^{tr} \text{ (no cambia).}$$

• Componente longitudinal:

$$\tilde{A}_v^{long} = (\tilde{A}^\mu k_\mu) \frac{k_\nu}{k^2} = \tilde{A}_v^{long} - i k^\mu \tilde{\chi}(k) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

$$= \tilde{A}_v^{long} - i \tilde{\chi}(k) k_\nu$$

$$\Rightarrow \tilde{\zeta} \stackrel{(8)}{=} i k^\nu \tilde{A}_\nu^{long} = \tilde{\zeta} - i k^2 \tilde{\chi}(k). \quad (9)$$

Vemos entonces que los grados de libertad "en exceso" debidos a la simetría gauge están contenidos en el "campo" $\tilde{\zeta} = \partial_\mu A^\mu$ que, por tanto, no es físico.

Como se hará claro a continuación, el hecho de que estemos describiendo grados de libertad "extra" está relacionado con el problema, que habíamos ya mencionado $\rightarrow \Pi^0 = F^{00} = 0$, es decir, que no hay un momento canónico asociado a A_0 .

Una forma de abordar el problema es considerando el "espacio" de todos los potenciales gauge, \mathcal{A} . Este no es un espacio vectorial, pero sí posee una estructura afín, convexa.

Consideremos además el "grupo gauge" definido como

$\mathcal{G} = \{ g : M \rightarrow U(1) \mid g(x) \rightarrow 1, x \rightarrow \infty \}$, donde M = espacio de Minkowski

La acción de \mathcal{G} sobre \mathcal{A} está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ g, A_\mu &\mapsto g \cdot A_\mu = g A_\mu g^{-1} - (\partial_\mu g) g^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

que, para $g = e^{iX(x)}$, se reduce a $g \cdot A_\mu = A_\mu - i \partial_\mu X$

De esta forma, podemos considerar al espacio cociente \mathcal{A}/\mathcal{G} como el espacio de configuración de la teoría. Esta es una de las formas de abordar el problema.

Otra forma de entender el problema, en lugar de considerar clases de equivalencia, consiste en considerar una condición local, de la siguiente forma: $\Phi(A_\mu) = 0$.

Una condición de este tipo define una especie de "superficie" de ligadura, o restricción, sobre los campos A_μ . Estas ecs. no deben ser consideradas, por lo tanto, como ecuaciones dinámicas.

Podemos entender esto en términos de las ecuaciones de Maxwell:

• Ecs. homogéneas: $\epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0 \iff \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$ (Faraday)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

• Ecs. inhomogéneas (en el vacío):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \iff \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$$
 (Ampère-Maxwell)
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$
 (Coulomb)

Ahora bien, escribiendo los campos \vec{E} y \vec{B} en términos de A^μ :

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla} A^\circ - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, podemos reescribir las 2 ecs. que involucran derivadas en t como

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} - \vec{\nabla} A^\circ \quad \leftarrow \text{Notemos que en estas ecuaciones solo aparecen las variables canónicas y sus momentos conjugados.}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

→ Pero no hay una ecuación para $\frac{\partial A^\circ}{\partial t}$!

La única ec. de Maxwell que no hemos usado es la ley de Coulomb. Pero ésta no involucra ninguna derivada resp. a t , así que la interpretamos como una **restricción**:

$$\Gamma := \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \stackrel{!}{=} 0 \quad \{ , \} : \text{corchete de Poisson}$$

Se puede mostrar que $\{\Gamma, H\} = 0$, así que la evolución del sistema tiene lugar dentro de la "superficie" restringida definida por $\Gamma \equiv 0$. Dirac desarrolló una teoría que permite cuantizar satisfactoriamente sistemas que, como este, presentan ligaduras de forma intrínseca. Nosotros optaremos por una tercera opción, que consistirá en fijar un gauge, por medio de la introducción de un nuevo término en el Lagrangiano.

La solución que consideraremos aquí consiste en lo siguiente:

- El operador $\square = \partial_\mu \partial^\mu$, y por lo tanto $g_{\mu\nu} \square$, posee un inverso.
- Si escogemos el gauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, entonces desaparece el segundo término al lado izquierdo de

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial^\nu) A^\mu = 0, \quad (11)$$

solucionando así el problema de "no invertibilidad".

→ Fijar el gauge, de tal forma que se preserve la invarianza de Lorenz

$$\rightarrow \mathcal{L}_{EM} \longrightarrow \mathcal{L} := \mathcal{L}_{EM} + \underbrace{\mathcal{L}_{g.f.}}_{\text{"gauge fixing term"}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (12)$$

Veamos cuál es el efecto de haber añadido el término "g.f." al Lagrangiano.

En primer lugar, veamos qué efecto tiene la adición de este término sobre el problema original ($\Pi_0 = 0$):

Ahora tenemos:

$$\begin{aligned} \Pi^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{A}_0)} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\dot{A}_0)}}_{= -F^{00}} - \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{A}_0} (\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &= -F^{00} = 0 \\ &= -\frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A^\mu) \end{aligned} \quad (13)$$

Claramente, las restantes 3 componentes, Π^1, Π^2 y Π^3 , siguen siendo las mismas que habíamos obtenido previamente:

$$\Pi^i = F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \quad (14)$$

Las relaciones (13), (14) nos permiten volver sobre el problema de cuantización y, ahora sí, proponer relaciones de conmutación a tiempos iguales, de la forma

$$\left[\hat{A}_\mu(x), \hat{\pi}^\nu(y) \right] = i \delta_\mu^\nu \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (15)$$

Observaciones:

- Las relaciones de conmutación (15) son completamente análogas a las que ya hemos discutido previamente para el campo escalar. Por ejemplo, en el caso del campo escalar real, partimos del Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^m \varphi - m^2 \varphi^2. \quad (16)$$

Esto nos lleva a la ecuación de movimiento

$$(\partial_\mu \partial^m + m^2) \varphi(x) = 0, \quad (17)$$

de tal forma que el momento canónico asociado a $\varphi(x)$ está dado por

$$\pi(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}(x) = \dot{\varphi}(x). \quad (18)$$

Por otro lado, para el Lagrangiano $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2$, que incluye el "gauge fixing term", obtenemos la siguiente ecuación de movimiento:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x) - (1 - \frac{1}{\alpha}) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0 \quad (19)$$

Notemos que si en (19) imponemos la condición de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, entonces tendremos $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0$. Es decir, si de alguna forma logramos "forzar" la condición de Lorenz (o si escogemos $\alpha = 1$), entonces tenemos que cada una de las componentes del campo A deberá satisfacer la ec. de Klein-Gordon (para $m=0$):

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x) = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (20)$$

Como el campo A tiene 4 componentes, tenemos ahora 4 momentos canónicos asociados, dados por las ecs. (13) y (14):

$$\begin{aligned} \pi^\mu(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}(x) &\rightarrow \pi^0 = -\frac{1}{\alpha} (\partial_\nu A^\nu), \\ \pi^i = F^{i0} &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \quad (i=1,2,3) \end{aligned}$$

Comparando los 2 casos, tenemos entonces:

	Campo escalar φ	Campo electromagnético A
Componentes:	Uno $\rightarrow \varphi$	Cuatro $\rightarrow A_0, A_1, A_2, A_3$
Momento(s): conjugadas	$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$	$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}$
Relaciones de comutación (a tiempos iguales):	$[\hat{\varphi}(x), \hat{\pi}(y)]_{x^0=y^0} = i\delta(\vec{x}-\vec{y})$	$[\hat{A}_\mu(x), \hat{\pi}^\nu(y)]_{x^0=y^0} = i\delta_\mu^\nu \delta(\vec{x}-\vec{y})$
	(los demás comutadores iguales a cero $\rightarrow [\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] = 0 = [\hat{\pi}, \hat{\pi}]$)	(los demás iguales a cero $\rightarrow [\hat{A}, \hat{A}] = 0 = [\hat{\pi}, \hat{\pi}]$)

- En la relación de commutación $[\hat{A}_\mu(x), \hat{\pi}^\nu(y)]_{x^0=y^0} = i\delta_\mu^\nu \delta(\vec{x}-\vec{y})$, la inclusión del término δ_μ^ν al lado derecho tiene lugar en

analogía a las relaciones $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$, familiares de mecánica cuántica. Nótese, sin embargo, la posición de los índices: δ_μ^ν (y no $\delta_{\mu\nu} \circ \delta^{\mu\nu}$). Esto debe ser así para respetar la estructura covariante de toda la expresión (los índices que van abajo/arriba al lado izquierdo deben también ir abajo/arriba al lado derecho). Además, de la definición del momento canónico como $\dot{\pi}^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\nu}$ se sigue que el índice de $\dot{\pi}^\nu$ va arriba (y no abajo) $\rightarrow A_\mu \leftrightarrow \pi^\nu$.

La segunda observación tiene la siguiente consecuencia importante:

Recordando que los índices se pueden subir/bajar haciendo uso de la métrica tenemos, por ejemplo, que $g_{\mu\nu} = g_{\sigma\nu} \delta_\mu^\sigma$ (recordar que $g^{\mu\nu}$ es la matriz inversa de $g_{\mu\nu}$, y que -por definición- $\delta_\sigma^\mu := g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma}$, de tal forma que $g_{\sigma\nu} \delta_\mu^\sigma = g_{\sigma\nu} g^{\sigma\tau} g_{\tau\mu} = g_{\sigma\nu} g^{\sigma\mu} = g_{\mu\nu}$). De esta forma, si multiplicamos la relación

$$[\hat{A}_\mu(x), \hat{\pi}^\sigma(y)] = i \delta_\mu^\sigma \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

por $g_{\sigma\nu}$, obtenemos

$$[\hat{A}_\mu(x), \hat{\pi}_\nu(y)] = i g_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (21)$$

Dejaremos como ejercicio mostrar que, en el "gauge" $\alpha=1$, las relaciones de commutación a tiempos iguales toman la siguiente forma:

$$[\dot{A}_\mu(x), A_\nu(y)]_{x^0=y^0} = i g_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (22)$$

→ Las ecuaciones (20) y (22) nos dicen que (para $\alpha=1$), cada una de las componentes A_μ se comporta como un campo escalar:

- Por un lado, (20) nos dice que $\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0$ para $\mu=0,1,2,3$
- Por otro lado, la implementación del postulado de cuantización canónica a tiempos iguales (cf. ecs. (15)/(22)) en el gauge $\alpha=1$, nos dice que cada A^μ satisface las relaciones de commutación de un campo escalar ($[\hat{\phi}(x), \dot{\hat{\phi}}(y)]_{x^0=y^0} = i\delta(\vec{x}-\vec{y})$).

En un sentido estricto, sin embargo, esto solo es cierto para las componentes espaciales! En efecto, la presencia de la métrica $g_{\mu\nu}$ en (22), hace que para A^0 las relaciones de commutación tengan el signo equivocado:

$$[\hat{A}^0(x), \hat{A}^0(y)]_{x^0=y^0} = -i\delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad (23)$$

¿Qué implicaciones físicas tiene esto?

→ Recordemos que el "campo" $\vec{s}(x) = \partial_\mu A^\mu(x)$ no puede ser físico, ya que es sobre este que se ve reflejada cualquier transf. gauge. Para lograr una reducción a los grados de libertad físicos, nos hace falta aún imponer la condición de Lorenz (que es justa $\partial_\mu A^\mu = 0$). Sin embargo, se puede mostrar que dicha condición no se puede imponer sobre los operadores:

La identidad $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$ no es compatible con las

relaciones de commutación. De hecho, a partir de (15)/(22) podemos obtener la forma general de las relaciones de commutación,

$$[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(y)] = -ig_{\mu\nu} \Delta_0(x-y; m=0) \quad (24)$$

Si asumimos que $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$, entonces de (24) obtenemos

$$0 = [\partial_\mu \hat{A}(x), \hat{A}_\nu(y)] = -ig_{\mu\nu} \partial_\mu \Delta_0(x-y; m=0) \neq 0$$

→ contradicción!

Más abajo veremos que la solución a este problema está en imponer una versión más débil de la condición de Lorenz, a saber, que $\langle \psi | \partial_\mu \hat{A}^\mu | \psi \rangle = 0$ para los estados físicamente realizables.

¿Qué quiere decir esto? Notemos que la presencia de $g_{\mu\nu}$ en el lado derecho de (24) implica que \hat{A}^0 satisface las CCR $[\hat{A}_0(x), \hat{A}_0(y)] = -i \Delta_0(x-y; m=0)$.

Comparando nuevamente con el caso del campo escalar q , vemos que el signo $(-)$ que acompaña a Δ_0 es incorrecto (para q , así como para A_1, A_2 y A_3 , es $(+)$). Lo anterior nos permite escribir estados de un fotón (correspondientes a \hat{A}^0) cuya norma resulta ser negativa! (veremos un ejemplo más adelante).

Para poder completar la discusión sobre la cuantización del campo EM, y para poder llegar a un resultado concreto al respecto que nos permita avanzar con nuestro programa, debemos antes realizar un análisis de los modos de Fourier del campo A_μ .

Expansión de Fourier del campo electromagnético

Consideremos el campo (por ahora clásico) A_μ , en el gauge de Lorenz, de tal forma que cada componente $A_\mu(x)$ sea solución de la ec. de Klein-Gordon (para $m=0$) : $\partial_\nu \partial^\nu A_\mu(x) = 0$ ($0 \leq \mu \leq 3$).

El operador de onda $\partial_\nu \partial^\nu$ tiene soluciones en ondas planas de la forma $e^{-ik \cdot x}$, donde $k^2 \equiv k_\mu k^\mu = 0$ (recordar que $m=0$).

De esta forma, podemos proponer soluciones para $\partial_\nu \partial^\nu A_\mu = 0$ en ondas planas, así:

$$A_\mu(x) = C_\mu e^{-ik \cdot x}, \quad k_\mu k^\mu = 0. \quad (25)$$

Observemos que la dependencia de x va en la onda $e^{-ik \cdot x}$, mientras que el coeficiente C_μ ha de ser visto como la componente " μ " de un 4-vector. Hasta este punto podríamos afirmar que la ec. (25) describe 4 campos (A_0, A_1, A_2, A_3) que son independientes (por supuesto A_μ debe satisfacer las ecs. de Maxwell en el vacío, pero esto es justo lo que garantiza (25)). Sin embargo, al imponer una condición "gauge", la situación cambia, de tal forma que los coeficientes C_μ ya no serán independientes entre sí. Según nuestra discusión previa, esto tiene sentido, ya que al imponer un gauge ayudamos a eliminar los grados de libertad redundantes. Veamos como se lleva a cabo esta reducción al imponer el gauge de Lorenz.

Para una solución de las ecs. de Maxwell de la forma (25), i.e.

$A_\mu(x) = C_\mu e^{ik \cdot x}$ (con $k_\mu k^\mu = 0$), la imposición de $\partial^\mu A_\mu = 0$ nos

lleva a:

$$0 \stackrel{!}{=} \partial^\mu A_\mu = \partial^\mu (C_\mu e^{-ik \cdot x}) = -i k^\mu C_\mu e^{-ik \cdot x}$$

$$\Rightarrow k^\mu C_\mu = 0. \quad (26)$$

En el caso del campo escalar real, las soluciones en ondas planas eran de la forma $\varphi(x) = a_p e^{-ip \cdot x}$, con $p_\mu p^\mu = m^2$.

Aquí tenemos $A_\mu(x) = C_\mu e^{-ik \cdot x}$, de tal forma que C_μ es el coeficiente de Fourier que corresponde a la onda $e^{-ik \cdot x}$. Como tal, debe ser una función de k : $C_\mu = C_\mu(k)$.

Ahora, lo que nos dice (26) es que la dependencia de k debe ser tal que se cumpla $k^\mu C_\mu(k) = 0$.

¿Qué significado tiene esta condición? Para responder esta pregunta es conveniente introducir una base de vectores que dependa de k .

El 4-vector $C(k) = (C^0(k), C^1(k), C^2(k), C^3(k)) \in \mathbb{C}^4$ (los coef. de Fourier son números complejos).

Introduzcamos, por lo tanto, una base para este \mathbb{C}^4 , así:

$$\{ \varepsilon^{(0)}(k), \varepsilon^{(1)}(k), \varepsilon^{(2)}(k), \varepsilon^{(3)}(k) \} \quad (27)$$

Entonces, si la base es $\{ \varepsilon^{(\lambda)}(k) \}_{\lambda=0,1,2,3}$, el 4-vector $C(k)$ se puede expandir en esta base. A los coeficientes de la expansión los llamaremos $c^{(\lambda)}(k)$, de tal forma que se tenga

o, escribiendo la misma expansión por componentes,

$$C_\mu(k) = \sum_{0 \leq \lambda \leq 3} C^{(\lambda)}(k) \Sigma_\mu^{(\lambda)}(k). \quad (29)$$

Ya estamos en posición de interpretar la condición (26). En efecto, si descomponemos el campo en componentes longitudinales y transversales, por medio de los operadores de proyección definidos en (5),

i.e. $P_{\mu\nu}^{\text{tr}}(k) = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$, $P_{\mu\nu}^{\text{long}}(k) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$, entonces tendremos

$$C_v = C_v^{\text{tr}} + C_v^{\text{long}} \equiv P_{v\mu}^{\text{tr}} C^\mu + P_{v\gamma}^{\text{long}} C^\mu. \quad (30)$$

Como ya hemos visto, una transformación gauge $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$ solo va a afectar la componente longitudinal. En el espacio de Fourier la transformación gauge toma la forma

$$C_\mu \mapsto C_\mu + i k_\mu \tilde{\chi}^{(\kappa)}. \quad (31)$$

Como el término $i k_n \tilde{x}(k)$ es longitudinal, vemos que se tendrá

$$\begin{aligned} C_\mu^{\text{tr}} &\mapsto C_\mu^{\text{tr}}, \\ C_\mu^{\text{long}} &\mapsto C_\mu^{\text{long}} + i k_\mu \tilde{\chi}(\kappa). \end{aligned} \quad (32)$$

Lo que veremos a continuación es que si en (29) hacemos una escogencia adecuada, tanto de los vectores base $\vec{e}^{(\lambda)}(k)$ como de los coeficientes $C^{(\lambda)}(k)$, será posible eliminar los grados de libertad longitudinales, con lo cual la condición $k^{\mu}C_{\mu} = 0$ se convertirá en la condición de transversalidad familiar para la propagación de ondas E.M. ()

Entonces \rightarrow la escogencia de la base $\{\varepsilon^{(\lambda)}\}_\lambda$, en conjunto con la escogencia de los coeficientes $C^{(\lambda)}(k)$, debe estar guiada por los siguientes requerimientos:

- 1) Debe ser (o, mejor dicho, conviene que sea) tal que facilite la interpretación física. Aquí será relevante recordar que los campos \vec{E} y \vec{B} (en ausencia de cargas/corrientes) siempre son transversales, queriendo decir con esto que son perpendiculares al vector \vec{k} , que determina la dirección de propagación de las ondas y es, además, la parte espacial del 4-vector $k = (k^0, \vec{k})$.
- 2) Debe ser tal que se cumpla $k^\mu C_\mu(k) = 0$.
- 3) Debe permitir implementar la reducción a los grados de libertad físicos. En particular, deben surgir relaciones entre los coeficientes $C^{(\lambda)}(k)$, que den lugar a dicha reducción.

Definición y propiedades de la base $\{\varepsilon^{(\lambda)}(k)\}_\lambda$

\rightarrow Como en la descomposición de Fourier k satisface $k_\mu k^\mu = 0$, tenemos $k = (\omega_k, \vec{k})$

$$\hookrightarrow \varepsilon^{(\lambda)}(k) = \varepsilon^{(\lambda)}(\vec{k})$$

$$\omega_k = \|\vec{k}\| \quad \text{(i.e. } E = \|\vec{p}\| c \text{)}$$

- $\lambda = 1, 2$: $\varepsilon_0^{(\lambda)}(\vec{k}) = 0, \quad k^i \varepsilon_i^{(\lambda)}(\vec{k}) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Es decir,} \quad & \varepsilon^{(1)}(\vec{k}) := (0, \vec{\varepsilon}^{(1)}(\vec{k})) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}^{(1)}(\vec{k}) = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}^{(2)}(\vec{k}) = 0 \end{array} \right. \\ & \varepsilon^{(2)}(\vec{k}) := (0, \vec{\varepsilon}^{(2)}(\vec{k})) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\bullet \underline{\lambda = 0}: \quad \varepsilon^{(0)}(\vec{k}) := (1, 0, 0, 0) \quad (34)$$

$$\bullet \underline{\lambda = 3}: \quad \varepsilon^{(3)}(\vec{k}) := (0, \frac{\vec{k}}{\omega_k}) \quad (35)$$

→ Propiedades de la base y consecuencias de su definición:

- El vector $\varepsilon^{(0)}(\vec{k})$ es "time-like", mientras que los vectores $\varepsilon^{(i)}(\vec{k})$ ($i=1,2,3$) son "space-like". La base es "ortogonal" en el sentido que satisface la siguiente relación:

$$\varepsilon^{(\lambda)}(\vec{k}) \cdot \varepsilon^{(\lambda')}(\vec{k}) = g^{\lambda\lambda'}. \quad (36)$$

Además satisface la siguiente identidad (aplica convención de suma):

$$\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) g_{\lambda\lambda'} \varepsilon_\nu^{(\lambda')}(\vec{k}) = g_{\mu\nu}. \quad (37)$$

- Para $\lambda=1,2$, tenemos $k^\mu \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) = 0$. Por otro lado, para $\lambda=0$ tenemos $k^\mu \varepsilon_\mu^{(0)}(\vec{k}) = k^0 \equiv \omega_k$, mientras que para $\lambda=3$ resulta $k^\mu \varepsilon_\mu^{(3)}(\vec{k}) = \frac{k^i k_i}{\omega_k} = -\frac{\|\vec{k}\|^2}{\omega_k} = -\omega_k$
- Sobre la condición de Lorenz, la anterior propiedad nos lleva a

$$\begin{aligned} k^\mu C_\mu(k) &= k^\mu \sum_{\lambda=0}^3 C^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \\ &= C^{(0)}(k) \underbrace{k^\mu \varepsilon_\mu^{(0)}(k)}_{=\omega_k} + C^{(1)}(k) \underbrace{k^\mu \varepsilon_\mu^{(1)}(k)}_{=0} + C^{(2)}(k) \underbrace{k^\mu \varepsilon_\mu^{(2)}(k)}_{=0} + C^{(3)}(k) \underbrace{k^\mu \varepsilon_\mu^{(3)}(k)}_{=-\omega_k} \\ &= \omega_k (C^{(0)}(k) - C^{(3)}(k)). \end{aligned} \quad (38)$$

↪ Si escogemos $C^{(0)}(k) = C^{(3)}(k)$, obtenemos la condición $k^\mu C_\mu = 0$.

- La escogencia $C^{(0)} = C^{(3)}$ está plenamente justificada desde un punto de vista físico, ya que esto corresponde justamente a eliminar los grados de libertad longitudinales que, como ya hemos visto, no son físicos:

→ Esto se puede comprobar con el siguiente cálculo sencillo:

$$\begin{aligned}
 C_\nu^{\text{long}} &= P_{\nu\mu}^{\text{long}} C^\mu = P_{\nu\mu}^{\text{long}} \left(\sum_{0 \leq n \leq 3} C^{(n)}(\kappa) \varepsilon^{n(n)}(\kappa) \right) \\
 &= \sum_n C^{(n)}(\kappa) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \varepsilon^{n(n)}(\kappa) = \sum_n C^{(n)}(\kappa) \frac{k_\nu}{k^2} k^\mu \varepsilon^{(n)}_\mu(\kappa) \\
 &= k_\nu \frac{\omega_n}{k^2} (C^{(0)}(\kappa) - C^{(3)}(\kappa)). \tag{39}
 \end{aligned}$$

Escribamos ahora el campo $A(x)$ en términos de sus modos de Fourier. Tenemos ($A = (A^\circ, \vec{A})$)

$$A(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega_k} \left(C(\kappa) e^{-ik \cdot x} + C(\kappa)^* e^{ik \cdot x} \right) \Big|_{k^\circ = \omega_k}$$

→ Tanto $A(x)$ como $C(\kappa)$ son 4-vectores. Si reescribimos esta expansión por componentes y hacemos uso de la base $\{\varepsilon^{(n)}\}_n$, obtenemos:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega_k} \left(C_\mu(\kappa) e^{-ik \cdot x} + C_\mu(\kappa)^* e^{ik \cdot x} \right) \Big|_{k^\circ = \omega_k} \tag{40}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega_k} \sum_{n=0}^3 \left(C^{(n)}(\kappa) \varepsilon^{(n)}_\mu(\kappa) e^{-ik \cdot x} + C^{(n)*}(\kappa) \varepsilon^{(n)*}_\mu(\kappa) e^{ik \cdot x} \right) \Big|_{k^\circ = \omega_k}$$

Observaciones:

- Como la expansión (40) es —por construcción— real, no hay nada que nos obligue a escoger una base $\varepsilon^{(n)}_\mu(\kappa)$ cuyas componentes sean reales. Esto es relevante, en particular, si deseamos considerar estados de polarización circular. Sin embargo, en lo que sigue seguiremos trabajando con la base real definida por (33)–(35).

- Como era de esperarse, los coeficientes $C^{(\lambda)}(k)$ y $C^{(\lambda)*}(k)$ pasaron, al cuantizar, a jugar el rol de operadores de creación/aniquilación de fotones. En particular, un vector de la forma $\hat{C}^{(\lambda)}(k)|0\rangle$ representará un estado de un fotón con momento \vec{k} , energía $\omega_k = \|\vec{k}\|$ y polarización λ .
- Aunque aparentemente los grados de libertad "no físicos" ($\lambda=0, \lambda=3$) siguen presentes en la teoría, la forma de eliminarlos será a través de la implementación de la condición de Lorenz a nivel cuántico (cf. (26), (38), (39))

→ Los estados físicos $|\Psi\rangle$ de la teoría serán aquellos que satisfagan la condición

$$(\hat{C}^{(0)}(k) - \hat{C}^{(3)}(k)) |\Psi\rangle = 0 \quad (41)$$

Las relaciones de commutación.

Finalmente, partiendo de la expansión de Fourier (40), y postulando las relaciones de commutación (15) (ver también (21) – (24)), llegaremos a las siguientes relaciones de commutación (ejercicio):

$$\begin{aligned} [\hat{C}^{(\lambda)}(k), \hat{C}^{(\lambda')*}(k')] &= -2\omega_k \delta(\vec{k}-\vec{k}'), \\ [\hat{C}^{(\lambda)}(k), \hat{C}^{(\lambda')}(k')] &= 0 = [\hat{C}^{(\lambda)*}(k), \hat{C}^{(\lambda')*}(k')] \end{aligned} \quad (42)$$

La ecuación de Dirac.

Vamos a discutir algunos aspectos relevantes de la ecuación de Dirac.

Recordemos que Dirac, al deducir su ecuación, estaba buscando una ecuación relativista de primer orden que, de cierta forma, se podía pensar como una "raíz cuadrada" de la ec. de Klein-Gordon (ver notas "El origen de las ecuaciones relativistas", p. 7)

$$E^2 = m^2 + \vec{p}^2 \rightarrow \text{Con } E = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} = -i \vec{\nabla} \quad \text{obtenemos}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 = m^2 \rightsquigarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi = 0 \quad (\text{Klein-Gordon})$$

"Raíz cuadrada" ? $\rightarrow E = \pm \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \quad E > 0$

$$\rightarrow E - \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} = 0 \rightsquigarrow \text{proponer } \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} = \beta + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$$

$$\rightarrow \beta \alpha_i + \alpha_i \beta = 0, \quad \beta^2 = m^2, \quad \alpha_i^2 = 1, \quad \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\Rightarrow (E + \beta + \vec{\alpha} \cdot \vec{p})(E - \beta - \vec{\alpha} \cdot \vec{p}) = E^2 - m^2 - \vec{p}^2$$

$\alpha_i, \beta \rightarrow \underline{\text{matrices}}$!

Ahora, el mismo argumento, pero en notación covariante :

Combinación lineal de los operadores $\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3 \rightarrow \alpha^\mu \partial_\mu$; $\alpha^\mu = i \gamma^\mu$

$$E^2 = m^2 + \vec{p}^2 \rightarrow m = + \sqrt{E^2 - \vec{p}^2} = i \gamma^\mu \partial_\mu$$

porque
 $i \partial_\mu$ es
autoadjunto.

$$\Rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0.$$

Entonces, como $0 = E^2 - m^2 - \vec{p}^2 = (\sqrt{E^2 - \vec{p}^2} + m)(\sqrt{E^2 - \vec{p}^2} - m)$, la condición que se debe satisfacer es:

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0.$$

Pero

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) = -\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu - m^2$$

¿Cómo hacer entonces para que se cancelen los términos cruzados?

$$\text{Por ejemplo } \rightarrow \gamma^1 \gamma^2 \partial_1 \partial_2 + \gamma^2 \gamma^1 \partial_2 \partial_1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (*)$$

Para soluciones Ψ suaves se tendrá $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$, así podemos reescribir (*) como

$$(\gamma^1 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^1) \partial_1 \partial_2 = 0 \implies \gamma^1 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^1 = 0$$

La condición es, por lo tanto,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

donde " $\{ , \}$ " denota el anti-comutador

$$\{A, B\} := AB + BA$$

→ Nótese que entonces tendremos

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu &= \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu) = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu \\ &= g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu \end{aligned}$$

Exploraremos ahora algunas de las propiedades de la ec. de Dirac. →

- La primera pregunta que nos hacemos es acerca de las posibles representaciones de las matrices γ^{μ} .

→ Necesitamos 4 matrices. $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$,

que satisfagan relaciones $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}$

Lo que tenemos aquí es un ejemplo de lo que se conoce como álgebra de Clifford. La teoría de representaciones de estas álgebras es interesante, y de gran relevancia en física.

En un curso más avanzado sería recomendable estudiarla. Aquí nos vamos a conformar con exhibir un par de conjuntos de matrices que satisfacen las propiedades requeridas.

Comencemos por recordar que, para las matrices de Pauli se tiene:

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1}_2, \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k$$

Qué hay acerca de $\{\sigma_i, \sigma_j\}$?

$$\text{Veamos: } \{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i$$

$$= \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} + i\epsilon_{jik} \sigma_k$$

$$= 2\delta_{ij} \rightarrow \text{se parece a lo que buscamos}$$

→ Pero necesitamos una cuarta matriz. ¿Qué tal $\sigma_0 = \mathbb{1}_2$?

→ no funciona porque necesitamos $\{\sigma^0, \sigma^i\} = 0$!

Sin embargo, notemos que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \mathbb{1}_2$ y que

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{funciona!}$$

Además, si $\sigma^2 = 1$, entonces $\begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vemos que el siguiente conjunto de matrices hace la tarea:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & -\sigma^{(i)} \\ \sigma^{(i)} & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad (i=1,2,3; \sigma^{(i)} = \text{Pauli}). \quad (*)$$

Por razones que se harán evidentes más adelante, llamaremos a esta representación la representación de "altas energías".

Otra representación posible se conoce como la representación "estándar":

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{0}_2 \\ \mathbb{0}_2 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_2 & \sigma^{(i)} \\ -\sigma^{(i)} & \mathbb{0}_2 \end{pmatrix}$$

- Busquemos ahora soluciones en forma de "ondas planas". Estas serán el análogo de las funciones $f_p(x) = \left. \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{3/2}} \right|_{p^0 \equiv E_p}$ que conocemos para la ecuación de Klein-Gordon.



$$\text{Ansatz: } \Psi_p(x) = u(p) e^{-ipx} + v(p) e^{ipx} \quad (**) \quad \text{(*)}$$

Para que la función $\Psi_p(x)$ sea solución de la ec. de Dirac, debemos exigir $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi_p(x) = 0$. Esto nos lleva a

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) (U(p)e^{-ip \cdot x} + V(p)e^{ip \cdot x}) = 0$$

$$\rightarrow (\gamma^\mu p_\mu - m) U(p) e^{-ip \cdot x} - (\gamma^\mu p_\mu + m) V(p) e^{ip \cdot x} = 0$$

Por independencia lineal de las funciones $e^{\pm ip \cdot x}$, la igualdad se cumple si y sólo si

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) U(p) = 0 \quad y \quad (\gamma^\mu p_\mu + m) V(p) = 0.$$

- Veamos ahora cómo se ven las ecuaciones anteriores en el marco de reposo si trabajamos en la representación "estándar":

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) U(p) \Big|_{\vec{p}=0} = 0 \longrightarrow (\gamma^\mu p_0 - m) U(\vec{p}) = 0, \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \right] m U(\vec{p}) = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow u_3 = u_4 = 0 !$$

$$\Rightarrow U(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \varphi \text{ un espinor de 2 componentes !}$$

$$\rightarrow \varphi \in \mathbb{C}^2$$

$$\text{Escribimos } \varphi = \lambda_+ \varphi^{(+)} + \lambda_- \varphi^{(-)}, \quad \varphi^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Algo similar sucede con } V(\vec{p}=0) \rightarrow V(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}$$

- Cómo pasamos ahora a un marco arbitrario?

→ Tenemos que saber cómo actúa una transf. de Lorentz sobre un espinor $U(p)$, $V(p)$.

Sin embargo, hay algo muy sencillo que podemos hacer para "adivinar" la respuesta:

Teniendo en cuenta que $(\gamma^\mu p_\mu \mp m)(\gamma^\nu p_\nu \pm m) = p^2 - m^2 = 0$, podemos inferir, a partir de $(\gamma^\mu p_\mu - m)U(p) = 0$ y $(\gamma^\mu p_\mu + m)V(p) = 0$, que $U(p)$ y $V(p)$ pueden ser de la forma

$$U(p) \sim (\gamma^\mu p_\mu + m)U(0), \quad V(p) \sim (\gamma^\mu p_\mu - m)V(0)$$

Esto resulta siendo cierto, de tal forma que al incluir factores de normalización adecuados, obtenemos:

$$U(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{p^0 + m}} (\gamma^\mu p_\mu + m \mathbb{1}_4) \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V(\vec{p}) = \frac{-1}{\sqrt{p^0 + m}} (\gamma^\mu p_\mu - m \mathbb{1}_4) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Con todo lo anterior, la expansión de Fourier de Ψ toma la forma:

$$\Psi_\alpha(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 \vec{p}}{2p^0} \left(a^{(r)}(\vec{p}) U_\alpha^{(r)}(\vec{p}) f_p(x) + b^{(r)*}(\vec{p}) V_\alpha^{(r)}(\vec{p}) f_p^*(x) \right)$$

$$\alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Ecuación de Dirac y el grupo de Lorentz

Habiendo recordado (nuestra versión) del argumento original con el que Dirac obtuvo su ecuación, pasaremos ahora a establecer una interesante relación entre la ec. de Dirac y las 2 representaciones irreducibles que el grupo (recubridor) de Lorentz posee en dimensión 2.

- El grupo (ortocrono, propio) de Lorentz se define como

$$\overset{\uparrow}{L}_+ = \{ \Lambda \in M_+(R) \mid \Lambda^T g \Lambda = g, \Lambda^0 \geq 1, \det \Lambda = 1 \}.$$

Los elementos de $\overset{\uparrow}{L}_+$ se pueden escribir en términos de los generadores infinitesimales J_i, K_i :

$$\overset{\uparrow}{L}_+ \ni \Lambda = e^{-\theta \vec{J} \cdot \hat{n}} e^{\lambda \vec{K} \cdot \hat{v}}, \text{ donde } (\hat{n}, \theta) \rightarrow \text{rotación} \\ (\lambda, \hat{v}) \rightarrow \text{"boost"}$$

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} J_k.$$

Previamente hemos discutido la relación que existe entre $SU(2)$ y $SO(3)$. El grupo $SU(2)$ es el "recubridor universal" de $SO(3)$, y se cumple que $SU(2)/\mathbb{Z}_2 = SO(3)$, es decir, los grupos están en relación $2 \leftrightarrow 1$.

Algo similar sucede con $\overset{\uparrow}{L}_+$. En este caso el recubridor universal de $\overset{\uparrow}{L}_+$ resulta siendo el grupo $SL(2, \mathbb{C})$:

$$SL(2, \mathbb{C}) := \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1 \} \cong Sp(2, \mathbb{C}).$$

Para ver que una matriz $A \in SL(2, \mathbb{C})$ en efecto representa una transformación de Lorentz, consideremos la extensión al espacio de Minkowski de la representación matricial de un vector:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \longleftrightarrow \bar{X} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = x^0 \mathbb{1} + \vec{x} \cdot \vec{\sigma}.$$

Fácilmente verificamos que $x_\mu x^\mu = \text{Det } \bar{X}$.

Consideremos la acción:

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{C}) \times M &\longrightarrow M \\ A, \bar{X} &\mapsto \bar{X}' := A \bar{X} A^+ \end{aligned}$$

La condición para que una matriz \bar{X} represente un vector en M (espacio de Minkowski) es que sea autoadjunta.

Como $(\bar{X}')^+ = (A \bar{X} A^+)^+ = A \bar{X}^+ A^+ = \bar{X}$, vemos que la acción está bien definida.

Para ver que representa una transformación de Lorentz, calculamos:

$$x^\mu x_\mu = \text{Det } \bar{X}' = \text{Det } (A \bar{X} A^+) \stackrel{\text{Det } A = 1}{\downarrow} = \text{Det } \bar{X} = x^\mu x_\mu$$

\Rightarrow transf. Lorentz.

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & & \searrow \\ SL(2, \mathbb{C}) & \ni & \pm A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}_+ & \ni & \Lambda(A) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x^\mu & \xrightarrow{\wedge} & x^\mu \\ \uparrow & & \downarrow \\ \bar{X} & \xrightarrow{\pm A} & \bar{X}' \end{array} \quad \bar{X}' = A \bar{X} A^+$$

Explicitamente, la relación entre las matrices Λ y A está dada por:

$$\Lambda = e^{-\theta \vec{J} \cdot \hat{n}} e^{\lambda \vec{\kappa} \cdot \hat{v}} \longleftrightarrow A(\Lambda) = \pm e^{i\theta \hat{n} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} e^{\lambda \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \hat{v}}$$

Por las propiedades de las matrices de Pauli, tenemos:

$$e^{i\theta \hat{n} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} = \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma}$$

$$e^{\lambda \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \hat{v}} = \cosh \frac{\lambda}{2} + \sinh \frac{\lambda}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{v}$$

- $SL(2, \mathbb{C})$ y el "tensor ϵ ".

Definimos $\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $A \in SL(2, \mathbb{C})$, entonces se verifica fácilmente que:

$$A^T \epsilon A = \epsilon \quad (*)$$

Notese que $\epsilon^T = \epsilon^{-1} = -\epsilon$

Si definimos, en \mathbb{C}^2 , una forma antisimétrica a través de:

$$\langle u, v \rangle := u^T \epsilon v = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

Vemos entonces que $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle \iff A^T \epsilon A = \epsilon$.

Por esta razón decimos que ϵ es un "tensor invariante".

De hecho, salvo un múltiplo, ϵ es el único tensor invariante de $SL(2, \mathbb{C})$.

Veamos. tratemos de construir una forma (R-bilinal) que sea invarianté →

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle := u^T \chi v, \quad \text{con} \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} \\ \chi_{21} & \chi_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{por encontrar})$$

$$\text{Queremos } \langle\langle Au, Av \rangle\rangle = \langle\langle u, v \rangle\rangle \quad \forall A \in SL(2, \mathbb{C}), \quad \forall u, v \in \mathbb{C}^2$$

Esto es equivalente a $A^T \chi A = \chi$.

$$\text{Pero } \varepsilon \varepsilon^T = \mathbb{1}, \quad A^T \varepsilon A = \varepsilon, \quad \varepsilon^T = \varepsilon^{-1} = -\varepsilon$$

$$\hookrightarrow \chi = A^T \chi A = (A^T \varepsilon) \varepsilon^T \chi A = (\varepsilon A^{-1}) \varepsilon^T \chi A$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{-1} \chi = A^{-1} \varepsilon^T \chi A \Rightarrow A(\varepsilon^{-1} \chi) = (\varepsilon^{-1} \chi) A.$$

Como la representación $u \mapsto Au$ es irreducible (ejercicio), se sigue que $\varepsilon^{-1} \chi = c \mathbb{1}$, para alguna constante (lema de Schur).

→ Nótese que, en particular, cualquier forma invarianté debe ser antisimétrica!

- Representaciones irreducibles 2-dimensionales de $SL(2, \mathbb{C})$.

Tipo I : $\rho : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow GL(2, \mathbb{C})$ (forma equivalente:
 $A \longmapsto \rho(A) := A$ $A \mapsto \rho'(A) := (A^T)^{-1}$)

usar \uparrow
 $A^T \varepsilon A = \varepsilon$

Tipo II : $R : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow GL(2, \mathbb{C})$ (forma equivalente:
 $A \longmapsto R(A) := \hat{A} := (A^+)^{-1}$ $A \mapsto R'(A) := \hat{A}^* = A^*$)

→ Las representaciones " A " y " \hat{A} " son irreducibles, no unitarias e inequivalentes!
 (ejercicio!)

• Paridad: A pesar de que $A \neq \hat{A}$, estas dos representaciones están relacionadas a través de la transformación de PARIDAD:

$$P((x^0, \vec{x})) = (x^0, -\vec{x})$$

Sea $\hat{X}^P = P(\hat{X})$, i.e., si $\hat{X} = x^0 \mathbf{1} + \vec{x} \cdot \vec{\sigma}$, entonces

$$\hat{X}^P = x^0 \mathbf{1} - \vec{x} \cdot \vec{\sigma}.$$

Notemos ahora lo siguiente:

Para las matrices de Pauli vale $\rightarrow \varepsilon^{-1} \sigma_i^* \varepsilon = -\sigma_i$.

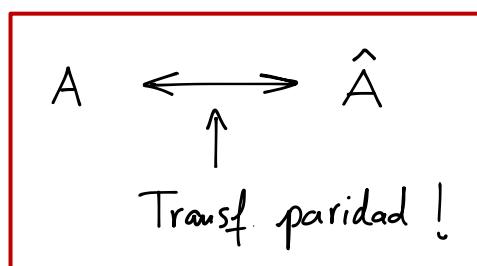
Vemos entonces que

$$\hat{X}^P = \varepsilon^{-1} \hat{X}^* \varepsilon$$

Ahora bien

$$\hat{A} = (A^\dagger)^{-1} = ((A^\dagger)^{-1})^* = (\varepsilon^{-1} A \varepsilon)^* = \varepsilon^{-1} A^* \varepsilon = A^P$$

$$A^\dagger \varepsilon A = \varepsilon$$



• Conexión con la ecuación de Dirac.

Primero notemos que si $A = e^{i\theta \hat{n} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} e^{\lambda \vec{\sigma} \cdot \hat{v}}$, entonces

$$\hat{A} := (A^\dagger)^{-1} = \varepsilon^{-1} A^* \varepsilon = e^{i\theta \hat{n} \frac{\vec{\sigma}}{2}} e^{-\lambda \vec{\sigma} \cdot \hat{v}}.$$

En efecto, usando $\varepsilon^{-1} \nabla_i^* \varepsilon = -\sigma_i$, tenemos:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \varepsilon^{-1} A^* \varepsilon = \varepsilon^{-1} e^{-i\theta \vec{\sigma}^* \cdot \hat{n}} e^{\lambda \vec{\sigma}^* \cdot \hat{v}} \varepsilon \\ &= \varepsilon^{-1} e^{-i\theta \frac{\vec{\sigma}}{2}^* \cdot \hat{n}} (\varepsilon \varepsilon^{-1}) e^{\lambda \frac{\vec{\sigma}}{2}^* \cdot \hat{v}} \varepsilon \\ &= e^{i\theta \hat{n} \frac{\vec{\sigma}}{2}} e^{-\lambda \vec{\sigma} \cdot \hat{v}}.\end{aligned}$$

Consideremos ahora los 2 tipos de espinores:

$$\text{Tipo I : } \xi \xrightarrow{A} A\xi ; \quad \text{Tipo II : } \eta \xrightarrow{A} \hat{A}\eta$$

$$\xi \in \mathbb{C}^2 \qquad \qquad \qquad \eta \in \mathbb{C}^2$$

Definimos ahora

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Mostraremos ahora que Ψ satisface la ecuación de Dirac, en el espacio de momento.

Para $\Lambda = e^{\lambda \vec{k} \cdot \hat{v}}$ tenemos:

$$\text{i) } \vec{v} = \|\vec{v}\| \hat{v}, \quad \gamma = 1/\sqrt{1-v^2}, \quad \cosh \lambda = \gamma = E/m \quad \leftarrow \quad E = \gamma m$$

$$\tanh \lambda = \gamma \|\vec{v}\| = \|\vec{p}\|/m \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

$$\text{ii) } A(\Lambda) = e^{\lambda \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \hat{v}} = \cosh \frac{\lambda}{2} + \sinh \frac{\lambda}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{v}$$

$$\text{iii) } \hat{A}(\Lambda) = e^{-\lambda \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \hat{v}} = \cosh \frac{\lambda}{2} - \sinh \frac{\lambda}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{v}$$

Usando $\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cosh x}{2}}$, $\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}$, podemos escribir

$$\cosh\lambda = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}, \quad \sinh\lambda = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} = \sqrt{\frac{E-m}{2m}}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \cosh\frac{\lambda}{2} \pm \sinh\frac{\lambda}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{v} &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \mathbb{1}_2 \pm \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \vec{\sigma} \cdot \hat{v} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\frac{\sqrt{E+m} \pm \vec{\sigma} \cdot \hat{v} \sqrt{E-m}}{\sqrt{E+m}} \right) \sqrt{E+m} \\ &= \frac{(E+m) \pm \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}. \end{aligned}$$

Ahora, si interpretamos la acción de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre ζ y η como la acción de un "boost" (para $\Lambda = e^{\lambda \vec{u} \cdot \hat{v}}$) sobre espinores $\zeta(0)$ y $\eta(0)$ que representan grados de libertad (de spin) en el sistema de reposo, tenemos:

$$\zeta(p) = A(p) \zeta(0) = \frac{(E+m) + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2(E+m)}} \zeta(0)$$

$$\eta(p) = \hat{A}(p) \eta(0) = \frac{(E+m) - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2(E+m)}} \eta(0).$$

Si tenemos en cuenta que

$$(E+m \pm \vec{\sigma} \cdot \vec{p})(E+m \mp \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = 2m(E+m),$$

Megamos a

$$(E+m - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \xi(p) = \sqrt{2m(E+m)} \xi(0) \quad (*)$$

$$(E+m + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \eta(p) = \sqrt{2m(E+m)} \eta(0) \quad (**)$$

El punto importante ahora es que en el sistema de reposo no podemos distinguir espinores de tipo I de los de tipo II

$$\rightarrow \eta(0) = \xi(0)$$

Con esto, tenemos que $(*) \equiv (**)$, así que

$$(E+m - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \xi(p) = (E+m + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \eta(p)$$

\Rightarrow

$$(E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \xi(p) = -m \xi(p) + (E + m + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \eta(p)$$

$$= -m \frac{(E+m + \vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{\sqrt{2(E+m)}} \eta(0) + (E+m + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \frac{(E+m - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \eta(0)}{\sqrt{2(E+m)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \left(-mE - m^2 - m\vec{\sigma} \cdot \vec{p} + E^2 + 2mE + m^2 - \vec{p}^2 \right) \eta(0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} (mE + m^2 - m\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \eta(0)$$

$$= m \eta(p)$$

Un resultado similar se obtiene para η , dando lugar

a las siguientes ecuaciones \longrightarrow

$$\bar{\zeta}(p) = \frac{E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} \eta(p)$$

$$\eta(p) = \frac{E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} \bar{\zeta}(p)$$

Escritas en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} -m & E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\zeta}(p) \\ \eta(p) \end{pmatrix} = 0.$$

$$\text{Con } \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \Psi = \begin{pmatrix} \bar{\zeta} \\ \eta \end{pmatrix},$$

la ecuación toma la forma

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi = 0.$$

Esta es la ecuación de Dirac en el espacio de momento!

Hasta ahora, lo que hemos aprendido acerca de la relación entre la ecuación de Dirac y el grupo $SL(2, \mathbb{C})$, se puede resumir de la siguiente forma:

- 2 representaciones irreducibles de $SL(2, \mathbb{C})$ (espinores "tipo I" y "tipo II")

► Tipo I: $\rho : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$
 $A \longmapsto \rho(A) := A \quad (\text{una repn. equivalente es } A \mapsto (A^T)^{-1})$

► Tipo II: $R : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$
 $A \longmapsto R(A) \equiv \hat{A} := (A^\dagger)^{-1} \quad (\text{repn. equiv: } A \mapsto A^*)$

Las relaciones entre estas representaciones se pueden obtener usando la relación $\mathcal{E} = A^T \mathcal{E} A$, donde $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es el tensor invariante.

- La transformación de paridad $P(x^0, \vec{x}) = (x^0, -\vec{x})$ toma la forma

$$\bar{\chi}^P = \mathcal{E}^{-1} \bar{\chi}^* \mathcal{E},$$

donde $\bar{\chi} = x^0 \mathbb{1}_2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{x}$ es la representación, como matriz 2×2 , del cuádrivector $x = (x^0, \vec{x})$.

Esto nos permite ver que los espinores tipo I y II están relacionados entre sí a través de una transformación de paridad $\rightarrow \hat{A} = \mathcal{E}^{-1} A^* \mathcal{E}$

- Si $\xi \equiv \phi_R$ es un espinor de tipo I y $\eta \equiv \phi_L$ uno de tipo II, con $\phi_R(p) = A(p) \phi_R(0)$ y $\phi_L(p) = \hat{A}(p) \phi_L(0)$, hemos dejado como ejercicio mostrar que $\Psi = \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}$ es un espinor de Dirac (en el espacio p), es decir, que se cumple

$$(g^\mu p_\mu - m)\Psi = 0.$$

Conviene resaltar ahora que estas representaciones, a pesar de ser irreducibles, no son unitarias. Esto es consecuencia del hecho de que el grupo $SL(2, \mathbb{C})$ no es compacto.

Para una representación unitaria de un grupo G , digamos

$U: G \rightarrow GL(\mathbb{C}^n)$
 $g \mapsto U(g)$, se tiene (por definición) que con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ siendo el producto hermítico usual en \mathbb{C}^n , se cumple

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle U(g)\vec{x}, U(g)\vec{y} \rangle \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n, g \in G.$$

Por lo tanto, la cantidad $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ (para \vec{x}, \vec{y} fijos) es un invariante bajo la acción del grupo.

Dado que ninguna de las representaciones (ρ ó R) es unitaria, no podemos usar el producto hermítico usual en \mathbb{C}^2 para buscar invariantes. Sin embargo, si podemos explotar la relación existente entre las 2 representaciones ($\hat{A} = \bar{\varepsilon}^{-1} A^* \varepsilon$) para construir invariantes.

Recordemos que si $A = e^{i\theta \frac{\vec{\sigma}}{2}} e^{\lambda \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \hat{v}}$, entonces $\hat{A} = e^{i\theta \frac{\vec{\sigma}}{2}} e^{-\lambda \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \hat{v}}$. Si $\vec{\zeta} = \begin{pmatrix} \vec{\zeta}_1 \\ \vec{\zeta}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ entenderemos, como es usual, que $\vec{\zeta}^+$ es un vector fila: $\vec{\zeta}^+ = (\vec{\zeta}_1^*, \vec{\zeta}_2^*)$. Así, tenemos que $\vec{\zeta}^+ \vec{\zeta} \in \mathbb{C}$.

Como ambos espines se representan en un espacio $\cong \mathbb{C}^2$, podemos fijar el espacio de representación (\mathbb{C}^2) y trabajar con ambas repns (A y \hat{A}) sobre el mismo espacio.

En ese caso, para $\phi_R, \phi_L \in \mathbb{C}^2$, tenemos:

$$A \in SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \begin{aligned} \phi_R &\text{ transforma como } \phi'_R = A \phi_R \\ \phi_L &\text{ transforma como } \phi'_L = \hat{A} \phi_L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces, } \phi'^\dagger_R \phi'_L &= (A \phi_R)^\dagger (\hat{A} \phi_L) = \\ &= \phi_R^\dagger A^\dagger \hat{A} \phi_L = \phi_R^\dagger \left(e^{i\theta \hat{n} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} e^{\lambda \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \hat{v}} \right)^\dagger \left(e^{i\theta \hat{n} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} e^{\lambda \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \hat{v}} \right) \phi_L \\ &= \phi_R^\dagger \phi_L \rightarrow \text{invariante!} \end{aligned}$$

Algo similar sucede con la combinación $\phi_L^\dagger \phi_R \rightarrow$ también invariante

Ahora bien, teniendo en cuenta que $\Psi = \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}$, podemos intentar buscar una combinación de estos 2 invariantes que se pueda expresar en términos de Ψ . Esto es fácil:

$$\phi_R^\dagger \phi_L + \phi_L^\dagger \phi_R = (\phi_R^\dagger, \phi_L^\dagger) \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} = (\phi_R^\dagger, \phi_L^\dagger) \underbrace{\begin{pmatrix} 0_2 & 1\!\!1_2 \\ 1\!\!1_2 & 0_2 \end{pmatrix}}_{\gamma^0 \text{ (en la repm de altas energías!)}} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi_R^\dagger \phi_L + \phi_L^\dagger \phi_R = \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi$$

Esto motiva la siguiente definición:

$$\bar{\Psi} := \Psi^\dagger \gamma^0$$

→ El resultado importante de este análisis es que la combinación

$$\bar{\Psi} \Psi$$

es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

Es natural, por lo tanto, buscar construir un Lagrangiano para la ecuación de Dirac, partiendo de este invariante (cuadrático en Ψ ...)

- Lagrangiano para el campo de Dirac.

Para el campo escalar hemos visto que el término de masa es de la forma $\sim m^2 \varphi^* \varphi$.

En el caso del campo de Dirac, podemos intentar algo de la forma $\sim m \bar{\Psi} \Psi$. Escribimos m (y no m^2) puesto que la ec. de Dirac es de primer orden (" $\sqrt{p^2 + m^2}$ ")

Vamos a comprobar que el siguiente Lagrangiano en efecto da lugar a la ecuación de Dirac:

$$\mathcal{L}_D(x) = \frac{i}{2} \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) - m \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \quad (*)$$

Observaciones:

- Una notación compacta para expresiones como la que aparece en \mathcal{L}_D es la siguiente:

$$f \overleftrightarrow{\partial} g := f(\partial g) - (\partial f)g$$

Con esta notación, el Lagrangiano se puede reescribir como

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi} \left(\frac{i}{2} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \Psi.$$

- Así como hemos mostrado que $\bar{\Psi} \Psi$ es invariante, se puede mostrar que $\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ transforma como un 4-vector y que $\bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi$ es invariante.

Las ecs. de Euler-Lagrange, aplicadas a \mathcal{L}_D , nos dan:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \bar{\psi}} = \frac{i}{2} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = -\frac{i}{2} \gamma^\mu \psi \quad \Rightarrow \quad (\frac{i}{2} \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0.$$

→ Si realizamos la variación con respecto a ψ (y no a $\bar{\psi}$), obtenemos la ec. de Dirac "conjugada":

$$(\frac{i}{2} \gamma^\mu \partial_\mu + m \bar{\psi}) = 0.$$

- Teniendo un Lagrangiano para ψ , podemos pasar a considerar el momento canónico conjugado, así como las relaciones de commutación que deberá satisfacer el campo al ser cuantizado.

→ Momento canónico: $\Pi(x) := \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_0 \psi)} = \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \gamma^0 = \frac{i}{2} \psi^\dagger(x) \underbrace{\gamma^0}_{=1} \gamma^0$

→ $\boxed{\Pi(x) = \frac{i}{2} \psi^\dagger(x).}$

Postulado de cuantización canónica:

Como veremos más adelante, la cuantización del campo de Dirac por medio de commutadores lleva a problemas con la (micro-) causalidad de la teoría.

→ Postulamos:

$$\boxed{\left[\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y) \right] \Big|_{x^\circ=y^\circ} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x}-\vec{y}).}$$

El concepto de partícula de Wigner.

Anteriormente enunci为我们 el teorema de Wigner y mencionamos cómo, en algunos casos, las simetrías se pueden implementar a través de representaciones unitarias del grupo relevante.

Hay dos aspectos que dejaremos de lado por el momento, que son los siguientes:

(i) En realidad, el teorema de Wigner nos dice cómo implementar una operación de simetría que corresponde a un elemento $g \in G$. Un estudio más cuidadoso nos mostraría que (para el caso unitario) la relación $\tilde{T}(g_1 g_2) = \tilde{T}(g_1) \tilde{T}(g_2)$ se puede garantizar tan sólo salvo un factor de fase. En lenguaje técnico, esto quiere decir que el grupo G actuará sobre \mathcal{H} a través de una **representación proyectiva**. Si el tiempo lo permite, más adelante discutiremos este punto en detalle.

(ii) En el caso de una simetría que se implemente mediante operadores antiunitarios, veremos que es posible representar dichos operadores en términos de operadores unitarios, seguidos de una operación de conjugación compleja.

Por el momento, pasaremos a estudiar el grupo de rotaciones $SU(2)$ y su relación con el **spin** del electrón, o más generalmente, de cualquier partícula masiva.

El grupo $SU(2)$

Recordemos la definición del grupo $SU(2)$:

$$SU(2) = \{ M \in GL(2, \mathbb{C}) \mid M^T M = \mathbb{1}_2, \det M = 1 \}$$

Una matriz compleja 2×2 , genérica, es de la forma

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Veamos entonces qué condiciones deben cumplir los parámetros a, b, c, d si queremos que M sea un elemento de $SU(2)$.

- $\det M = 1 \iff ad - bc = 1 \quad (1)$

- $M^T M = \mathbb{1}_{2 \times 2} \iff$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & \bar{a}b + \bar{c}d \\ \bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{d} & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} \iff$$

$$|a|^2 + |c|^2 = 1 \quad (2)$$

$$|b|^2 + |d|^2 = 1 \quad (3)$$

$$\bar{a}b + \bar{c}d = 0 \quad (4)$$

Podemos ahora usar las ecs. (1)-(4) para obtener:

- Multiplicando (4) por $c \rightsquigarrow c\bar{a}b + |c|^2d = 0$

$$\rightsquigarrow c\bar{a}b + (1 - |a|^2)d = 0 \quad (\text{usando (2)}),$$

$$c\bar{a}b + d = |a|^2d,$$

$$c|a|^2b + ad = |a|^2ad \stackrel{(1)}{=} |a|^2 + |a|^2bc \Rightarrow ad = a\bar{a}$$

Por lo tanto, si $a \neq 0$, debemos tener $d = \bar{a}$.

Por otro lado, si $a=0$, de (2) y (4) obtenemos

$$|c|^2 = 1 \quad \text{y} \quad \bar{c}d = 0 \Rightarrow d = |c|^2 d = c\bar{c}d = 0 \Rightarrow d=0.$$

Conclusión: $d = \bar{a}$, en general.

Las ecs (1)-(4) se simplifican entonces a:

$$\begin{aligned} |a|^2 - bc &= 1, & |b|^2 + |a|^2 &= 1 \\ |a|^2 + |c|^2 &= 1, & \bar{a}(b + \bar{c}) &= 0 \end{aligned}$$

Se sigue de la última ec. que $a \neq 0 \Rightarrow b = -\bar{c}$.

Ahora bien, si $a=0$, tendremos

$b\bar{c} = -1$, $|b|=1=|c|$, así que b es de la forma $b = e^{i\theta}$ y entonces $c = -e^{-i\theta} \Rightarrow b = -\bar{c}$, en general.

Los cálculos anteriores nos muestran que todo elemento de $SU(2)$ debe ser de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ tales que } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (5)$$

— //

Nuestro siguiente objetivo es establecer una relación entre el grupo $SU(2)$ y el grupo de rotaciones $SO(3)$.

Recordemos que los elementos de $SO(3)$ corresponden a transformaciones R del espacio Euclídeo que preservan los ángulos entre vectores, y sus normas y la orientación del espacio →

$$SO(3) = \left\{ R \in M_3(\mathbb{R}) \mid \langle R\vec{x}, R\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3; \text{ Det } R = +1 \right\},$$

dónde $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^3 x^i y^i$.

Para relacionar $SU(2)$ con $SO(3)$, haremos uso del siguiente "truco":

Vamos a representar cualquier vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ como una matriz hermitiana de 2×2 :

$$\begin{array}{ccc} \text{Vectores en } \mathbb{R}^3 & \longleftrightarrow & \text{Matrices hermitianas } 2 \times 2 \\ \vec{x} = (x^1, x^2, x^3) & \longleftrightarrow & \mathbb{X} = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Notemos ahora el siguiente hecho:

$\|\vec{x}\|^2 = -\text{Det } \mathbb{X}$

. Así mismo, se tiene: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbb{X}^+ \mathbb{Y})$
(ejercicio)

Para $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, consideremos la transformación

$$\mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}' = A \mathbb{X} B$$

Pregunta: ¿Qué condiciones debemos imponer sobre las matrices A, B de tal forma que \mathbb{X}' siga representando un vector $\vec{x}' \in \mathbb{R}^3$?

Esto equivale a pedir que \mathbb{X}' siga siendo una matriz hermitiana:

$$(A \mathbb{X} B)^+ = A \mathbb{X} B \iff \mathbb{X}' \text{ representa un vector } \vec{x}' \in \mathbb{R}^3$$

Esto nos lleva a la condición

$B^+ X A^+ = A X B$, que debe cumplirse para toda matriz hermítica X

En particular, estamos buscando transformaciones que preserven el producto interior, es decir, que correspondan a transformaciones ortogonales.

Teniendo en cuenta que $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(X^\dagger Y)$, debemos pedir que se cumpla:

$$\text{Tr}(X'^\dagger Y') = \overline{\text{Tr}}(X^\dagger Y), \text{ es decir,}$$

$$\text{Tr}((A X B)^\dagger (A Y B)) = \overline{\text{Tr}}(X Y) \longrightarrow$$

$$\text{Tr}(X Y) = \overline{\text{Tr}}(B^+ X A^+ A Y B) = \overline{\text{Tr}}(X A^+ A Y B B^+).$$

Es claro que podemos hacer que se cumpla la condición si asumimos $A' = A^+$ y $B' = B^+$, es decir, $A, B \in U(2)$. Así mismo obtenemos $\det(AB) = 1$ (usando $\|x\|^2 = -\det X$).

Así, podemos usar el grupo $SU(2)$ para generar transformaciones

$$X \mapsto X' = g X g^{-1}; g \in SU(2)$$

que, como hemos justificado, corresponden a transformaciones ortogonales de los vectores respectivos.

De hecho, se puede mostrar que al escoger transformaciones $X \mapsto g X g^{-1}$ con $g \in SU(2)$, obtenemos rotaciones para los vectores correspondientes.

Tenemos entonces una aplicación $\phi: \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$

$$g \mapsto \phi(g) \equiv R_g$$

definida de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} \vec{x} & \xrightarrow{g} & \vec{x}' = g\vec{x}g^{-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vec{x} & \dashrightarrow & \vec{x}' = R_g \vec{x} \end{array} \quad \begin{array}{l} \bullet \vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^3 \\ \bullet g \in \mathrm{SU}(2) \\ \bullet R_g \in \mathrm{SO}(3). \end{array}$$

Comentarios:

- Como veremos luego, esta aplicación $\phi: \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ es sobreductiva.
- Además, es fácil ver que se trata de un homomorfismo de grupos: $\phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$.
- Sin embargo, ϕ no es inyectiva. De hecho, notemos que $g \in \mathrm{SU}(2) \Rightarrow -g \in \mathrm{SU}(2)$ y, por la def. misma de ϕ , es evidente que $\phi(g) = \phi(-g)$.
- $\mathrm{Ker} \phi \cong \mathbb{Z}_2$ (el grupo de 2 elementos)
- Teniendo en cuenta la ec. (5), vemos que una posible parametrización está dada por

$$\alpha = e^{i(\psi+\varphi)} \cos \frac{\theta}{2}, \beta = e^{i(\psi+\varphi)} \sin \frac{\theta}{2} \quad (6)$$

Esta parametrización es particularmente adecuada para representar el homomorfismo $\phi: \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ de manera explícita, ya que los parámetros θ, φ, ψ se pueden relacionar fácilmente con ángulos de rotación (i.e. ángulos de Euler).

- Otra forma muy útil de parametrizar los elementos de $SU(2)$ es:

$$SU(2) \ni g = e^{-\frac{i\theta}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma}}, \quad (7)$$

donde \hat{n} es un vector unitario en \mathbb{R}^3 , $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (matrices de Pauli).

→ Ejercicio. Mostrar que se cumple la siguiente identidad:

$$e^{-\frac{i\theta}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma}} = \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} (\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) \quad (8)$$

→ Ejercicio. Mostrar que, si en (7) se escoge $\hat{n} \equiv \hat{n}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$,

entonces se tendrá $\phi(g) \equiv R = e^{\theta \hat{n}_\varphi \cdot \vec{J}}$, con $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$, J_i siendo los generadores infinitesimales de $SO(3)$.

Las representaciones unitarias de SU(2).

Resumiendo el análisis anterior, hemos visto que es posible parametrizar las matrices de SU(2) de la siguiente forma:

$$\text{SU}(2) \ni \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha = e^{i(\psi+\phi)} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \beta = e^{i(\psi-\phi)} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (9)$$

- Dado que la condición $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ nos muestra que SU(2) es homeomorfo a la 3-esfera S^3 , podemos ver dicha parametrización como una parametrización de S^3 , con coordenadas (ψ, ϕ, θ) .

- Recordemos el homomorfismo $\phi: \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$.

Bajo este homomorfismo, los parámetros (ψ, ϕ, θ) pueden ser interpretados en términos de una rotación en \mathbb{R}^3 .

- Aquí, nuestro interés está en estudiar cómo implementar simetría rotacional en mecánica cuántica.

$\text{SO}(3) \ni R \leftarrow$ ¿Cómo asignar a este elemento un operador actuando en un espacio de Hilbert?

→ Representaciones de grupos

→ $T: G \rightarrow \text{GL}(V)$

$g \mapsto T(g)$, de tal forma que $T(g_1 \cdot g_2) = T(g_1)T(g_2)$

Una aplicación T con esta propiedad se denomina **representación** del grupo G . El espacio vectorial V es entonces un **espacio de representación** para G .

Lo anterior está relacionado con el teorema de Wigner sobre simetrías (al menos para simetrías implementables a través de operadores lineales unitarios):

Teorema de Wigner (caso unitario) →

G : grupo de simetría, \mathcal{H} : Espacio de Hilbert.

$$\hookrightarrow G \longrightarrow \text{Operadores unitarios en } \mathcal{H}$$

$$g \mapsto U(g)$$

En general, sólo podremos garantizar que se cumpla

$$U(g_1 g_2) = \underbrace{\alpha(g_1, g_2)}_{\substack{\hookrightarrow \text{factor de fase}}} U(g_1) U(g_2) \quad (10)$$

→ representación proyectiva de G .

Este sería el caso, en particular con el grupo $SO(3)$ (consecuencia de $\ker \phi = \mathbb{Z}_2$)

→ Estos factores se pueden eliminar si pasamos a un grupo \tilde{G} relacionado con G de forma similar a como $SU(2)$ se relaciona con $SO(3)$: $\phi: SU(2) \rightarrow SO(3)$ homom., sobreject.

→ Podemos considerar a $SU(2)$ como el grupo de simetría rotacional en mecánica cuántica.

Pregunta: ¿Hay cosas que se puedan hacer con $SU(2)$ que no se puedan hacer con $SO(3)$? R/ SI

→ En mecánica cuántica es necesario considerar al grupo $SU(2)$ (y no a $SO(3)$) como el grupo de simetrías rotacionales. Este es un hecho fundamental, que está detrás de nuestro entendimiento del spin del electrón.

Buscamos homomorfismos $D: SU(2) \rightarrow GL(\mathcal{H})$

$$g \mapsto D(g)$$

- ¿Sobre qué espacios \mathcal{H} podemos hacer esto?
- ¿Cómo encontrar todos los posibles "D's"?

1er intento: $SU(2)$ actúa naturalmente sobre $\mathbb{C}^2 \rightarrow$ Tomar $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

$$D: SU(2) \rightarrow GL(\mathbb{C}^2) \quad (\text{es lo más sencillo posible})$$

$$g \mapsto D(g) := g$$

Para $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, tomando una base de $\mathbb{C}^2 \rightarrow \{|+\rangle, |-\rangle\}$,

con $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, tenemos:

$$D(g)|+\rangle = g|+\rangle = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\bar{\beta} \end{pmatrix} = \alpha|+\rangle - \bar{\beta}|-\rangle$$

$$D(g)|-\rangle = g|-\rangle = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \beta|+\rangle + \bar{\alpha}|-\rangle.$$

Para un vector arbitrario $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$, $|\psi\rangle = \psi_+|+\rangle + \psi_-|-\rangle$, tenemos:

$$|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2 = 1.$$

$$D(g)|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\psi_+ + \beta\psi_- \\ -\bar{\beta}\psi_+ + \bar{\alpha}\psi_- \end{pmatrix} = (\alpha\psi_+ + \beta\psi_-)|+\rangle + (-\bar{\beta}\psi_+ + \bar{\alpha}\psi_-)|-\rangle.$$

• Claramente (dado que $D(g) \equiv g$!) tenemos una representación de $SU(2)$, esta se llama la **representación fundamental**.

• Además, la representación es **unitaria**:

Para el producto hermítico de \mathbb{C}^2 definido por

$$(U(g)\psi, U(g)\varphi) = (g\psi, g\varphi) =$$

$$= (\underbrace{g^T g}_{= \mathbb{1}_2} \psi, \varphi) = (\psi, \varphi) \Rightarrow \text{Unitaria}$$

notaciones equivalentes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\parallel} = \bar{x}a + \bar{y}b,$$

tenemos:

$$(g\psi, g\varphi) = (g^T g \psi, \varphi) = (\psi, \varphi)$$

$$(\psi, \varphi) = \langle \psi | \varphi \rangle, \text{ para } |\psi\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, |\varphi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

→ Se preservan las probabilidades de transición: $|\langle \Psi | \varphi \rangle|^2 = |\langle U(g) \Psi | U(g) \varphi \rangle|^2$

Ahora, consideremos la misma representación, pero en términos de los generadores infinitesimales:

$$SU(2) \ni g = e^{-i\theta \hat{n} \cdot \vec{\sigma}} , \quad \hat{n} = (n_1, n_2, n_3) , \quad \|\hat{n}\| = 1 , \quad \hat{n} \cdot \vec{\sigma} = n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_2 + n_3 \sigma_3 \\ \theta \in [0, \pi] \\ = \begin{pmatrix} n_3 & n_1 + i n_2 \\ n_1 - i n_2 & -n_3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{Matrices de Pauli})$$

Satisfacen: $\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i \epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2} \quad (11)$

De la misma forma, para $SO(3)$, tenemos:

$$SO(3) \ni g = e^{\theta \hat{n} \cdot \vec{J}} , \quad J_1, J_2, J_3: \text{generadores infinitesimales.}$$

Satisfacen: $\left[J_i, J_j \right] = \epsilon_{ijk} J_k$

- Al describir grados de libertad de spin $1/2$, los observables correspondientes serán (combinaciones lineales de) las matrices de Pauli. Las relaciones de commutación (11) dan lugar a incertidumbres en la medición simultánea de 2 de ellas: $\Delta \sigma_i \Delta \sigma_j > 0 \quad (i \neq j)$.
- Tanto los generadores infinitesimales de $SO(3)$, $\{J_i\}_i$, como los de $SU(2)$, $\{\sigma_i\}_i$, dan lugar a una estructura de álgebra de Lie.

Definición Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es un espacio vectorial, junto con una operación $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$

$$A, B \mapsto [A, B]$$

que es lineal en cada entrada y tal que:

$$(i) [A, B] = -[B, A]$$

$$(ii) [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \text{ (identidad de Jacobi)}$$

Ejemplo El espacio de funciones suaves sobre el espacio de fase de un sistema clásico, $C^\infty(P)$, con el corchete de Poisson, es un ejemplo de álgebra de Lie:

$$(C^\infty(P), \{ \cdot, \cdot \}) \rightarrow [f, g] \equiv \{ f, g \} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right),$$

$$f, g \in C^\infty(P); (q, p) \in P$$

— / —

Para $SU(2)$, tenemos:

Si $g \in SU(2)$, con $g = e^A$, entonces,

$$(i) g^T g = \mathbb{1}_2 \Rightarrow A = A^+$$

$$(ii) \text{Det } g = 1 \Rightarrow \text{Tr}(A) = 0.$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \text{Lie}(SU(2)) &= \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A = A^+, \text{Tr } A = 0 \} \\ &= \text{espacio generado por } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \end{aligned}$$

En este caso, $[A, B] = AB - BA$.

De forma análoga al caso de representaciones de un grupo, tenemos la noción de representación de un álgebra de Lie:

$$T: \mathfrak{g} \longrightarrow gl(V) = \{L: V \rightarrow V \mid L \text{ lineal}\}$$

$$A \longmapsto T(A)$$

- tal que
- T lineal
 - $[T(A), T(B)] = T([A, B]) , \forall A, B \in \mathfrak{g}$

$\rightarrow T$ es una representación de \mathfrak{g} .

———— // —————

Pregunta: Dada un álgebra de $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$, cómo encontrar todas las posibles representaciones $T: \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$?

En el caso de $SU(2)$, tenemos, por ejemplo:

- $\dim V = 2 \rightarrow V^{(1/2)} := \mathbb{C}^2$

Representación: $T^{(1/2)}: \text{Lie}(SU(2)) \longrightarrow gl(\mathbb{C}^2)$

$$\frac{\sigma_i}{2} \longmapsto T^{(1/2)}\left(\frac{\sigma_i}{2}\right) = \frac{\sigma_i}{2}$$

- $\dim V = 3 \rightarrow V^{(1)} := \mathbb{C}^3$

Representación $T^{(1)}: \text{Lie}(SU(2)) \longrightarrow gl(\mathbb{C}^3)$

$$\frac{\sigma_i}{2} \longmapsto T^{(1)}\left(\frac{\sigma_i}{2}\right) = i J_i ,$$

dónde J_1, J_2, J_3 son los generadores infinitesimales de $SO(3)$

Para $\dim V > 3$?

Aunque en este momento no podemos explicar por qué, si podemos dar una construcción explícita de una representación

$T^{(s)}$ sobre $V^{(s)} \cong \mathbb{C}^{2s+1}$, con $s = \underbrace{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots}_{\text{ya las vimos}}$

Es decir, representaciones de $\text{Lie}(SU(2))$ sobre espacios de matrices en $\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \mathbb{C}^4, \dots$

Para $s \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ ($s = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$) consideraremos el espacio \mathbb{C}^{2s+1} , con una base ortonormal de vectores $\{|s, s_3\rangle\}_{s=-s, -s+1, \dots, s}$.

Por ejemplo, para $s = \frac{1}{2}$ tendremos $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ ($\rightarrow V^{(\frac{1}{2})} = \mathbb{C}^2$).

Si $s=1, 2s+1=3 \rightarrow V^{(1)} = \mathbb{C}^3$, con base $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$

En general, $V^{(s)} \cong \mathbb{C}^{2s+1}$, con base (ortonormal)

$\{|s, -s\rangle, |s, -s+1\rangle, \dots, |s, s\rangle\}$, con $\langle s, s_3 | s, s'_3 \rangle = \delta_{s_3, s'_3}$
 \uparrow $2s+1$ vectores.

Ahora, definimos:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\pm &= \frac{1}{2} (\tilde{J}_1 \pm i \tilde{J}_2), \quad T^{(s)} : \text{Lie}(SU(2)) \longrightarrow \text{gl}(V^{(s)}) \\ \frac{\tilde{J}_3}{2} &\longmapsto T^{(s)}\left(\frac{\tilde{J}_3}{2}\right) \equiv J_3^{(s)}, \\ \tilde{J}_\pm &\longmapsto T^{(s)}(\tilde{J}_\pm) \equiv J_\pm^{(s)}, \end{aligned}$$

donde $J_3^{(s)} |s, s_3\rangle := s_3 |s, s_3\rangle$

$$J_\pm^{(s)} |s, s_3\rangle := \sqrt{s(s+1) - s_3(s_3 \pm 1)} |s, s_3 \pm 1\rangle$$

Ejercicio: calcular explícitamente las matrices $J_1^{(s)}, J_2^{(s)}, J_3^{(s)}$ para $s = \frac{1}{2}, 1$ y verificar las relaciones de commutación.

Habiendo obtenido representaciones del álgebra de Lie $\text{Lie}(\text{SU}(2))$, podemos ahora construir representaciones del grupo, tomando la función exponencial de los elementos de representación del álgebra de Lie:

Para $g = e^{-i\theta \hat{n} \cdot \vec{\sigma}} \in \text{SU}(2)$, definimos

$$\boxed{D^{(s)}(g) := e^{-i\theta \hat{n} \cdot \vec{\sigma}^{(s)}}}$$

$$\begin{aligned} D^{(s)}: \text{SU}(2) &\longrightarrow \text{Gl}(V^{(s)}) \\ g &\mapsto D^{(s)}(g) \end{aligned}$$

→ $D^{(s)}$ es una representación irreducible, unitaria, del grupo $\text{SU}(2)$, sobre un espacio de representación $V^{(s)}$ de $\dim = 2s+1$

→ $V^{(s)}$ es el espacio de estados que describe los grados de libertad de spin de una partícula (masiva) de $\text{spin} = s$.

→ Notemos que la representación $V^{(s)}$ está determinada por el valor s del spin.

Así mismo, los vectores base de $V^{(s)}$ llevan 2 "etiquetas" → $|s, s_3\rangle$, la primera es fija (s), es decir, no cambia bajo la acción del grupo, mientras que la segunda (s_3) sí lo hace:

$$D^{(s)}(g)|s, s_3\rangle = \sum_{s_3'=-s}^s D^{(s)}_{s_3', s_3}|s, s_3'\rangle.$$

Por esta razón escribiremos $|[s], s_3\rangle$, de tal forma que $[s]$ sirva tan sólo como "etiqueta" de la representación.

Ya vimos cuáles son las representaciones unitarias e irreducibles del grupo $SU(2)$. Vimos también cómo es posible expresar dichas representaciones en términos de los generadores infinitesimales del grupo. Una base para los generadores infinitesimales está dada, por ejemplo, por las matrices de Pauli, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, que a su vez generan el espacio de matrices 2×2 de traza igual a cero.

Para una partícula de spin "s", habíamos asociado una representación de $SU(2)$, que llamamos $D^{(s)}$ (ó $T^{(s)}$ a nivel infinitesimal), en un espacio $V^{(s)} \cong \mathbb{C}^{2s+1}$.

$$\text{Base de } V^{(s)} \rightarrow \left\{ |[s], s_3\rangle \right\}_{s_3 = -s, -s+1, \dots, s}$$

Etiqueta fija, que determina el valor del spin.

- El valor de s_3 depende del sistema de referencia (por ejemplo, corresponde a la proyección del spin a lo largo del eje z), mientras que el valor de s permanece fijo.
- El spin "s" es una "etiqueta" de la representación $V^{(s)}$.
- Como hemos visto, si conocemos una representación unitaria del álgebra de Lie, podemos obtener, a partir de la aplicación exponencial, una representación unitaria del grupo de Lie correspondiente

Ahora vamos a estudiar el espacio de estados de una partícula cuántica relativista, siguiendo un procedimiento similar al que se usó para estudiar los grados de libertad rotacionales (~spin).

Es usual iniciar el estudio de sistemas cuánticos relativistas con una discusión detallada de las ecs. de Klein-Gordon y de Dirac. Sin embargo, estas ecs. no tienen, a priori, una interpretación física consistente (esto sólo sucede una vez son reinterpretadas en términos de "campos cuánticos"). Por esta razón comenzaremos más bien estudiando los espacios de representaciones del grupo de Poincaré que, como veremos, dan lugar a una interpretación adecuada de sistemas cuánticos relativistas elementales.

El espacio de estados de una partícula relativista de spin "s" y masa "m" ($m > 0$):

Recordemos el grupo de Poincaré, \mathcal{P} , que contiene, en particular, al grupo de rotaciones, al grupo de Lorentz L^+ y al grupo de traslaciones espacio-temporales:

$$\mathcal{P} = \{(\Lambda, a) \mid \Lambda \in L_+^\uparrow, a \in \mathbb{R}^4\}, \text{ con regla de multiplicación}$$

$$(\Lambda', a') \cdot (\Lambda, a) = (\Lambda' \Lambda, \Lambda' a + a') \quad (12)$$

Por el teorema de descomposición sabemos que todo $\Lambda \in L_+^\uparrow$ se puede escribir en la forma $\Lambda = L(\vec{v}) R$, donde $L(\vec{v})$ es una transf. pura ("boost") y R una rotación.

¿Cómo podemos construir un espacio de Hilbert sobre el que actúe el grupo de Poincaré?

Idea principal: cada escogencia de "parámetros" o "etiquetas" (m, s) , donde $m > 0$ representa la masa de una partícula y $s \in \frac{\mathbb{N}}{2}$ su spin, determina una representación unitaria, irreducible del grupo de Poincaré.

A diferencia del ejemplo anterior con $SU(2)$, los espacios de representación correspondientes serán de dimensión infinita. Esto es consecuencia del hecho de que el grupo de Poincaré no es compacto.

Wigner: 40's → cálculo de las representaciones.

Buscamos operadores unitarios $U(\Lambda, a)$ actuando de forma irreducible en un espacio de Hilbert, de tal forma que se respete la regla de multiplicación (12) → (\mathcal{H})

$$U((\Lambda, a) \cdot (\Lambda', a')) = U((\Lambda, a)) U((\Lambda', a')). \quad (13)$$

Para comenzar el análisis vamos a considerar solamente elementos de \mathcal{P} de la forma $(\Lambda, 0)$, es decir, comenzamos restringiéndonos a sólo $L^+ < \mathcal{P}$.

Notación → $U(\Lambda) \equiv U(\Lambda, 0)$.

En este momento no estamos en posición de construir las representaciones, pero si podemos describirlas. Comenzamos entonces por describir una base en el espacio de estados. Para esto, requerimos 2 parámetros m y s , cuyo significado ya hemos mencionado:

- Masa → $m \in \mathbb{R}, m > 0$
- Spin → $s \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$

→ Cada escogencia (m, s) determina una representación...

→ Base para el espacio de estados → dada por vectores de la forma

$$|[s], [m]; p, s_z\rangle \quad (14)$$

↑ componente 3 del spin
momento lineal de la partícula

- Los vectores de la forma (14) dan lugar a una base impropia del espacio de Hilbert, de forma similar a una base impropia $\{|p\rangle\}_p$: $\langle x | p \rangle = e^{ipx}$ de ondas planas en el caso de $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$.
- Por ahora no especificaremos el espacio de Hilbert. Para nuestros propósitos será suficiente con saber que los vectores de la forma (14) dan lugar a una base impropia.

Para $|[m], [s]; p, s_3\rangle$ asumiremos que $s_3 \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}$ y que p es un 4-vector que pertenece al hiperboloide de masa m : $\underline{p^2 = m^2}$.

El papel que juega en este contexto el parámetro m^2 es similar al que juega el parámetro $j(j+1)$ en la teoría del momento angular, donde se tiene que

$$\mathbf{J}^2 |j, j_3\rangle = j(j+1) |j, j_3\rangle.$$

El operador \mathbf{J}^2 , que commuta con los demás generadores infinitesimales de momento angular, se conoce como "operador de Casimir". En el caso que estamos estudiando, este papel lo toma el operador \mathbf{P}^2 , que al actuar sobre los vectores de la base, nos da

$$\mathbf{P}^2 | \rangle = m^2 | \rangle.$$

$\rightarrow \vec{P} = (\vec{P}^0, \vec{P}) \rightarrow$ operadores de energía y momento: $\vec{P} = (P^0, \vec{P}^1, \vec{P}^2, \vec{P}^3)$, $P^0 = \text{op. de energía}$.

Vemos entonces que la relación relativista entre masa, energía y momento lineal, no es otra cosa que una relación entre valores propios de operadores de representación, para una escogencia de operador de Casimir que corresponde al valor de m .

Tendremos entonces

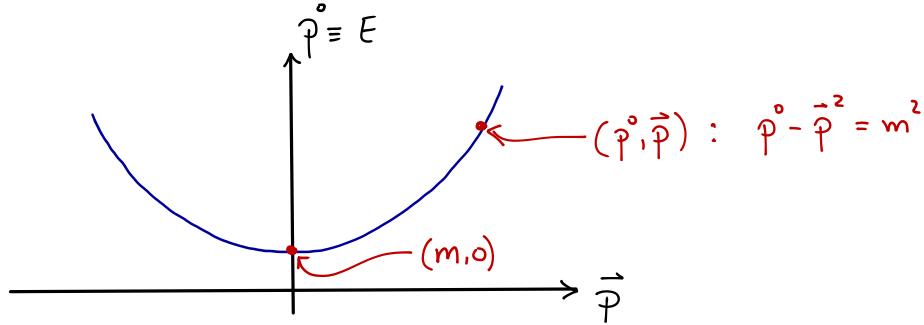
$$\vec{P}^0 |[m], [s]; p, s_3\rangle = p^0 |[m], [s]; p, s_3\rangle, \quad (15)$$

$$\vec{P}^0 |[m], [s]; p, s_3\rangle = E |[m], [s]; p, s_3\rangle,$$

$$\text{con } E^2 - \vec{p}^2 = m^2. \quad (16)$$

Como E y \vec{p} están correlacionados, podemos también escribir \vec{P} en (14), (15), en lugar de $P = (E, \vec{p})$.

Podemos representar la relación (16) en términos del "hiperbolóide de masa m ":



Así, la transformación de un vector $|[m], [s]; p, s_3\rangle$ se queda visualizar en términos de una transf. dentro de dicho hiperbolóide.

Así, por ejemplo, el punto $(m, 0)$ sobre el hiperbolóide representa a cualquier estado que sea superposición de los vectores $\{|[m], [s]; \vec{p}, s_3\rangle\}_{s_3 = -s, \dots, s}$, donde $\vec{p}^o \equiv (m, \vec{0})$, es decir, un estado de reposo de la partícula.

→ Si $L(\vec{v})$ es una transformación pura de Lorentz tal que

$$L(\vec{v})(m, \vec{0}) = (\vec{p}^o, \vec{p}), \quad (17)$$

donde por lo tanto se debe tener $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$, entonces tendremos que
 ↴ podemos también escribir $L(\vec{v}) \equiv L_p$

$$U(L(\vec{v})) |[m], [s]; \vec{p}, s_3\rangle = |[m], [s]; p, s_3\rangle. \quad (18)$$

Por otro lado, es claro que para una partícula (masiva) en estado de reposo, descrita por un vector de estado de la forma $|[m], [s], \vec{p}, s_3\rangle$ ($\vec{p}^o \equiv (m, \vec{0})$), el efecto de una rotación debe ser exactamente el que hemos estudiado, en términos de irreps de $SU(2)$:

$$U(R) |[m], [s]; \vec{p}, s_3\rangle = \sum_{s'_3} D^{(s)}(R)_{s'_3, s_3} |[m], [s]; \vec{p}, s'_3\rangle, \quad (19)$$

donde $R \in L^{\uparrow}_+$ es una rotación: $R = \begin{pmatrix} 1 & \vec{R} \\ \vec{R} & R \end{pmatrix}$, $R \in SO(3)$

Nos hace falta ver cómo actúa una transf. $U(\Lambda)$, para Λ arbitrario, sobre un estado genérico $|[m], [s], p, s_3\rangle$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow U(\Lambda) |[m], [s]; p, s_3\rangle &\stackrel{(18)}{=} U(\Lambda) U(L_p) |[m], [s]; \overset{\circ}{p}, s_3\rangle \\ &= U(\Lambda L_p) |[m], [s]; \overset{\circ}{p}, s_3\rangle \\ &= U(L_{\Lambda p}) U(L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p) |[m], [s]; \overset{\circ}{p}, s_3\rangle. \end{aligned}$$

Ahora, la combinación $L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p$ es justamente una rotación (ejercicio!) que se denomina rotación de Wigner →

$$R_w := L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p. \quad (20)$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} U(\Lambda) |[m], [s]; p, s_3\rangle &= U(L_{\Lambda p}) \sum_{s'_3} D(R_w) |[m], [s]; \overset{\circ}{p}, s'_3\rangle \\ &= \sum_{s'_3} D(R_w) |[m], [s]; \Lambda p, s'_3\rangle \end{aligned}$$

Esta es la regla de transformación (i.e. representación) que estábamos buscando:

$$U(\Lambda) |[m], [s]; p, s_3\rangle = \sum_{s'_3} D(R_w) |[m], [s]; \Lambda p, s'_3\rangle \quad (21)$$