Lecture notes on Algebraic Topology

November 12, 2024

Abstract

Un des buts de la topologie algébrique est de fournir des outils algébriques pour l'étude des espaces topologiques. Parmi ces outils, on peut mentionner, par exemple, les groupes d'homologie et les groupes de cohomologie. Un des objectifs principaux de ce cours est d'approfondir les notions d'homologie et de cohomologie à travers l'étude des variétés topologiques et des variétés lisses. L'on supposera connues la définition et les propriétés de base d'homologie et de cohomologie (mais on fera, néanmoins, un petit rappel) et l'on se proposera d'étudier le contenu géométrique de ces notions. Les thèmes phares de ce cours sont la dualité de Poincaré et la théorie de l'intersection.

Contents

1 Introduction

Rappels de homologie...

2 Groupes d'homologie singulière de X

An complex $C.(X)$
$$H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X)$$
, $B_k(X) = Ker\partial_k (= C_0(X) \text{ si } k = 0)$, $Z_k(X) = Im\partial_{k+1}$

Groupes d'homologie singulier d'un point $X = 1$. $H_k(X) = 0$ et $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

2.1 Groupes d'homologie relatifs

Definition 2.1. *A suite exacte homologicque de la paire (X, A) $(A \subset X)$*

$$\cdots \to H_{k+1}(A) \to H_{k+1}(X) \to H_{k+1}(X, A) \to H_k(A) \to H_k(X) \to \dots$$

inclusion $A \hookrightarrow X$ ou, $C_k(X, A) = C_k(X)/C_k(A)$

Example 2.2. *Si $x_0 \in X$, on a $H_k(X, \{x_0\}) = H_k(X, x_0) \cong \tilde{H}_k(X)$, $k \geq 0$.*

Si $f : (X, A) \to (Y, B)$ est une application continue, i.e. $f(A) \subset B$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \to & H_{k+1}(A) & \to & H_{k+1}(X) & \to & H_{k+1}(X, A) & \to & H_k(A) & \to & H_k(X) & \to \dots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
\cdots \to & H_{k+1}(A) & \to & H_{k+1}(X) & \to & H_{k+1}(X, A) & \to & H_k(A) & \to & H_k(X) & \to \dots
\end{array}$$

Si $f : (X, A) \to (Y, B)$ est une application continue t.q. $f : X \to Y$, $df|_A : A \to B$ soient des équicalences d'homoltopie, alors $f_* : H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$ est un isomorphisme pout tout $k \geq 0$

Definition 2.3. *A triplet (X, A, B) topologique $B \subset\subset A \subset X$, le suite exacte homologique associe au triplet est*

$$\cdots \to H_{k+1}(A, B) \to H_{k+1}(X, B) \to H_{k+1}(X, A) \to H_k(A, B) \to \dots$$

ou le premier arrow est induit par $H_k(X, B)$, le docieme par inclusion $H_k(X, B) \subset H_k(X, A)$, le troiseme par la inermedio $H_k(A)$

On obtient la suire exacte associée à une paire topologique (X, A) ou $A \neq \emptyset$, pour les groupes d'homologie reduits:

$$\cdots \to \widetilde{H_{k+1}(A)} \to \widetilde{H_{k+1}(X)} \to H_{k+1}(X, A) \to \widetilde{H_k(A)} \to \dots$$

Second lecture missing... look at notes

3 Complexes de chaines cellulaires

Let X be a CW-complexe. i.e. X est muni de certain particion celluliere.

$$\xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-1-1)}) \xrightarrow{\partial_{k-1}}$$

Theorem 3.1. *LEs groupes d'homologie de ce complexe de chaines cellulaires sont isomorphes aux groupes d'homologie singulier de X.*

3.1 Nombres de Betti

Y espace topologique $i \geq 0$ entier. On suppose les groupes $H_i(Y)$ soit de type fini.

$$H_i(Y) \sim \mathbb{Z}^r \oplus A$$

ou A est un groupe abelien fini. On dit que r est le $i-$**eme nombre de Betti.**
Notation: $b_i(Y)$ de Y

Corollary 3.2. *X CW complexe, $i \geq 0$ entier. On suppose que X ait un nombre fini c_i de $i-$cellulaires. Alors, le groupe $H_i(X)$ est de type fini et*

$$b_i(X) \leq c_i$$

Exercise 3.3. *Soit X un CW-complexe fini (le nombre de cellules de X est fini). Alors,*

$$\sum_i (-1)^i b_i(X) = \sum_i (-1)^i c_i$$

ou c_i est le nombre de $i-$cellules de X.

Definition 3.4. *La somme alternee $\sum_i (-1)^i b_i(X)$ s'appelle la caracteristique d'Euler-Poincaré de X.*

Si voulez de calculer le groupe d'homologie,

$$\xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-1-1)}) \xrightarrow{\partial_{k-1}}$$

on imagine que X est un CW complexe est le groupe...

3.2 Coefficient d'incidence de cellules

X CW-complexe. $\varphi_i : D^k \to X$ application caracteristique d'une cellule c_i, D la boulle. Homéomorphisme $\tilde{\varphi}_i : D^k/S^{k-1} \to \bar{e}_i/(\bar{e}_i \backslash e_i)$ Si vous avez une application continue $f : S^n \to S^n$, $f_* : \tilde{H}_n(S^n) \to \tilde{H}_n(S^n)$ i.e. under isom. $\tilde{H}_n(S^n) = \mathbb{Z} \xrightarrow{\times d} \mathbb{Z} = \tilde{H}_n(S^n)$. Cet entier d s'appelle le **degree** de f.

3.3 Orientation de cellules

Pout chaque cellules de X il y a deux classes d'equivalence d'application caractéristìques:

$$\psi, \varphi : D^k \to X$$
$$\tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\varphi} : D^k/S^{k-1} \to D^k/S^{k-1}$$

de degreé ± 1.

Une **orientation d'une k-cellule de** X est un choix de deux classes d'équivalences d'application caractéristiques de cette cellule.

- σ $k-$cellule
- τ $(k-1)-$cellule

Le **coefficient d'incidence** $[\sigma : \tau]$ est le degreé de l'application caracteristique est une application ceract de σ . Le degreé est definí à signe près.

Si on veaut fixer le signe, on doit fixer des orientationes de σ et τ, et on doit fixer une façon standard pour choisir des générateurs de groupes

- $\tilde{H}_k(\mathbb{S}^k)$, où $\mathbb{S}^k$ est le bord de D^k.
- $\tilde{H}_k(S^k)$, où $S^k = D^k/\mathbb{S}^{k-1}$

Proposition 3.5. *Soit σ une $k-$cellule orientée de X, où $k \geq 1$. Alors,*

$$\partial_k \sigma = \sum_{\tau} \pm[\sigma : \tau]\tau$$

4 Groupes d'homologie simpliciale

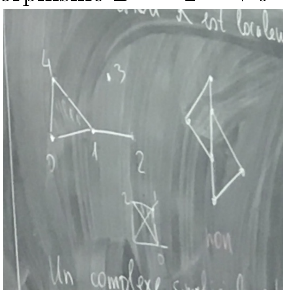
A $k-$simplexe (affine) dans $\mathbb{R}^n$ est une enveloppe convex de $k+1$ points de $\mathbb{R}^n$affinement indépendants.

complexe simplicial géométrique dans $\mathbb{R}^n$ c'est une collection $\mathcal{K}$ de simplexes dans $\mathbb{R}^n$ tel que

- toute face d'un simplexe dans $\mathcal{K}$ est dans $\mathcal{K}$
- l'intersection de deux simplexes dans $\mathcal{K}$ est toujours leur face commune,
- la collection $\mathcal{K}$ est localement finie.

Support $|\mathcal{K}|$ de $\mathcal{K}$ est la réunion de tous les simplexes de $\mathcal{K}$. Un complexe simplicial est un espace topologique X muni d'un Homéomorphisme avec le support d'un complexe simplicial géométrique.

Soit X un complexe simplicial fini. On meueérote tous les sommets ($0-$simplexes) de X pout tout entier $k \geq 0$ et pour tout $k-$ simplexe σ^k de X, on a un homeomorphisme $D^k \sim T^k \to \sigma^k$ qui préserve les ordes de somments.



On obtient un CW-complexe fini dont les cellules sont orientées. Les groupes d'homologie cellulaire de ce CW-complexe s'appellent **groupes d'homologie simpliciale** du complexe simplicial considéré.

Proposition 4.1. *Pour tout $k-$simplexe σ^k de X, on a*

$$\partial\sigma^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{(}i)\Gamma_i(\sigma^k)$$

où $\Gamma_i(\sigma^k)$ est le $i-$ème face de codim 1 de σ^k.

Les groupes d'homologie simplicale de X sont isomorphes aux groupes d'homologie singulière de X.

4.1 Homologie avec des coefficients différents de $\mathbb{Z}$ et cohomologie

Coefficients arbitraires G un groupe abélien. Pour tout X, $k \geq 0$ entier. On veut définir $H_k(X; G)$

Le $k-$**chaîne singulier de** X **à coefficients dans** G comme le combinasion fini

$$\sum_i g_i\sigma_i$$

où $g_i \in G$ et σ_i sont des $k-$simplexes singuliers de X.

Complexe de chaînes $\mathcal{C}(X; G)$:

- Groupes d'homologie $H_k(X; G)$ à coefficient dans G
- Groupes d'homologie reduits $\tilde{H}_k(X; G)$
- Groupes d'homologie relatifs $H_k(X, A; G)$