Ejercicios Teoría de Análisis Numérico

Juan Acuña, Rafael Córdoba y Luis Mantilla

Marzo 2019

1 An example of Montecarlo for integral computation

Considere la integral
$$\int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2y^3} dxdy.$$
La integral debe ser aproximada con un error de $0,001$ con una probabildad de 0.9 (Debe hacer una análisis teórico!).
Definamos la siguiente variable aleatoria,

$$Z\left(\omega_1, \ldots, \omega_N\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i\left(\omega_i\right)$$

Donde $X_i(x, y, z) = 1$ si $z < e^{(-x^2y^3)}$ y 0 de lo contrario con densidad de probabilidad uniforme (ρ) sobre el intervalo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Ahora bien, note que la integral en cuestión se puede encontrar atravez del valor esperado de la variable aleatoria X_i, es decir,

$$\begin{aligned}\langle X_i \rangle &= \int_{\Omega_i} X_i(\omega_i) dP(\omega_i) = \int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} X_i(x, y, z)\rho(x, y, z) dxdydz = \frac{1}{1\cdot 1\cdot 1} \int_{0\leq z\leq f(x,y)} dxdydz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2y^3} dxdy.\end{aligned}$$

Por otra parte, como los $X_i(w_i)$ solo dependen de w_i, tenemos:

$$\langle Z \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int X_i\left(\omega_i\right) dP\left(\omega_1\right) dP\left(\omega_2\right) \ldots dP\left(\omega_i\right) \ldots dP\left(\omega_N\right) = \frac{1}{N} N \int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2y^3} dxdy.$$

Por lo tanto, el valor esperado de la variable aleatoria Z es el valor de la integral en cuestión.
Ahora bien, calculamos el estimado de error con su respectiva probabilidad. Usando la desigualdad de Chebyshev y que los X_i son independientes, $X_i = X$, tenemos:

$$P(|Z - {<}Z{>}| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{N\epsilon^2}$$

Donde $\sigma_X^2 = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle$.
Donde fácilmente podemos observar $\langle X \rangle < 1$. Pues el maximo sobre ese intervalo es 1.
Ahora bien,
$$P(|Z - {<}Z{>}| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma_X^2}{N\epsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{N\epsilon^2} \geq 0.9 = 1 - 0.1 \implies N \geq \epsilon^{-2} * 10$$
Es decir, $N \geq 10.000.000$

Datos:

Definimos I como el valor de la integral con método de MonteCarlo con N variables aleatorias y $P(E < 0.9)$ como la probabilidad experimental dada por repetir el experimento $n = 10000$ veces y calcular la proporción de veces tal que $E < 90$.

N	Integral(I)	Error(E)	P(E<0.9)
10.000.000	0.9289	0.0537	0.99
1.000.000	0.9286	0.2739	0.99
10.000.000/exp(4)	0.9284	0.4192	0.92
100.000	0.9293	0.4950	0.8

b. Usando el método de el punto medio y Taylor análogamente a el caso en una dimensión

$$f(x,y) = f(x_i,y_j) + f'_x(x_i,y_j)(x-x_i) + f'_y(x_i,y_j)(y-y_j) + \frac{1}{2}f''_x(x_i,y_j)(x-x_i)^2 + \frac{1}{2}f''_y(x_i,y_j)(y-y_j)^2 + f''_{xy}(x_i,y_j)(x-x_i)(y-y_j) + \dots$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{i+1}} f(x,y)dxdy - f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}, \frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right)\Delta x\Delta y$$
$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{i+1}} f(x,y)dxdy - \int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_{y_j}^{y_{i+1}} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}, \frac{y_j+y_{j+1}}{2}\right)dxdy$$
$$= \frac{1}{24}f''_x(\eta_x,\eta_y)(h)^3h + \frac{1}{24}f''_y(\eta_x,\eta_y)h(h)^3 \leq \frac{1}{24}(M_x+M_y)h^4$$

Con M_x y M_y son cotas en la segunda derivada de x e y respectivamente.
De donde se sigue que si $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = d$ tenemos un error de $(M_x + M_y)h^3(b-a)(d-c)/24$ con:

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy \sim \sum_{i=0}^{N-1} f(x*_i, y*_i)h^2$$

N	Integral	Error
1.000	0.928853	0.0003
100	0.928	0.003
100.000	0.9	0.3

Con error relativo a 10^{-3}

2 Resolución de un sistema de ecuaciónes usando el metodo del gradiente

Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Veamos que A es definida positiva.

Note que A es simétrica. Ahora veamos que todos los valores propios de A son positivos:

$$det(A-\lambda I) = \left|\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right| = (2-\lambda)[(2-\lambda)^2-1] + (\lambda-2) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4 =$$

$$(2-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 2\right) = (2-\lambda)(\lambda-(2+\sqrt{2}))(\lambda-(2-\sqrt{2})) = 0$$

Es decir

$$\lambda = 2, 2\pm\sqrt{2} \geq 2-\sqrt{2} > 0$$

lo cual muestra que la matriz A es definida positiva.

El método del gradiente es:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - t\nabla f\left(\mathbf{x}_n\right)$$

Sea $f(X) = \frac{1}{2}X^TAX - X^Tb$ con A y b dados anteriormente. Entonces se tiene que $\nabla f(X) = AX + b$ y $Hessf = A$. Ahroa veremos que la funcion f tiene una cota superior en la segunda derivada que denominaremos η:

$$\eta \geq \|Hessf\|_2 = \|A\|_2 = 2 + \sqrt{2}$$

Una vez hallada esta cota podemos definir $t = \frac{1}{\eta}$ con $\eta = 4$ así hallamos un método para resolver el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Veamos cuantas iteraciones necesitamos para tener una distancia de 0,001.

$\mathrm{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - t\nabla f\left(\mathbf{x}_n\right) = \mathbf{x}_n - t\left(A\mathbf{x}_n + b\right) = (Id - tA)\mathbf{x}_n + tb$

$\mathrm{x}_{n+1} = (Id - tA)(\mathbf{x}_{n-1} - t\nabla f\left(\mathbf{x}_{n-1}\right)) + tb = (Id - tA)((Id - tA)\mathbf{x}_{n-1} + tb) + tb$

$= (\text{Id -tA})^2\mathbf{x}_{n-1} + (2Id - tA))(tb)$

$\mathrm{x}_{n+1} = (Id - tA)^3\mathbf{x}_{n-2} + (tb)(3Id - 2tA))...$

$\mathrm{x}_{n+1} = (Id - tA)^n\mathbf{x}_0 + (nId - t(n-1)A)(tb)$

Así tendremos que

$$|A\mathbf{x}_{n+1} - b| = |A(Id - tA)^n\mathbf{x}_0 + A(nId - t(n-1)A)(tb) - b|$$

$\leq |A(Id - tA)^n\mathbf{x}_0| + |A(nId - t(n-1)A)t - Id||b|$

Si tomamos como semilla $(0, 0, 0)$, buscamos que

$$|A\mathbf{x}_{n+1} - b| = 0.001 \leq ||A(nId - \frac{1}{4}(n-1)A)\frac{1}{4} - Id||_2\sqrt{3} = \sqrt{3}||\frac{1}{4}(nA - \frac{1}{4}(n-1)A^2) - Id||_2$$

$$\leq \sqrt{3}||\tfrac{1}{4}(\begin{bmatrix} 2n & -n & 0 \\ -n & 2n & -n \\ 0 & -n & 2n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5(n-1)}{4} & 1-n & \frac{5(n-1)}{4} \\ 1-n & \frac{6(n-1)}{4} & 1-n \\ \frac{5(n-1)}{4} & 1-n & \frac{5(n-1)}{4} \end{bmatrix}) - Id||_2 \leq \sqrt{3}|| \begin{pmatrix} \frac{3n-11}{16} & -\frac{1}{4} & -\frac{n-1}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{n-5}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{n-1}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{3n-11}{16} \end{pmatrix} ||_2$$

Así, tomemos n talque la igualdad se de. En este caso n =25 nos permite acercarnos a 0.001 de la solución.

$x_0 \backslash n$	10	20	100
(0,0,0)	(0.87562, 0.82479, -0.12339)	(0.97457, 0.96403, -0.02542)	(0.99999992,0.99999989, 0.00000008)
(400,-8,6)	-	-	(1.000013, 1.000018, 0.000013)

En esta tabla tenemos unos valores numéricos que nos permiten ver la velocidad de este método.
Verificación: Usando el metodo de Gauss-Jordan, para el algoritmo usaremos la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Por medio del algoritmo se puede encontrar la forma reducida de la matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Por lo cual concluimos que la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]$$