

Cálculo de la parametrix de la ecuación de transmisión de calor sobre variedades Riemannianas

Rafael F. Córdoba L.
Código: 201630880

5 de diciembre de 2020

La mecánica clásica introdujo el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales en la física matemática. En particular, el estudio de ecuaciones diferenciales parciales (PDEs) se desarrolló en conjunto con el estudio de la ecuación de transmisión de calor, de onda, de Laplace, etc. Cuyo estudio enriqueció ambos campos, la matemática y la física mediante la tecnificación de herramientas funcionales.

Bajo el contexto histórico, el estudio de las PDEs se desarrolla naturalmente sobre \mathbb{R}^3 y, posteriormente, se generalizó en dimensiones arbitrarias. El estudio de variedades y, particularmente variedades Riemannianas, introdujo espacios más generales en donde se realizaron generalizaciones de las PDEs clásicas de la física-matemática.

En variedades Riemannianas el análogo del operador de Laplace (Δ) se conoce como el operador de Laplace-Beltrami (L-B). En coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) el operador L-B es

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_{x^i} \left(\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_{x^j} \right)$$

nótese que al introducir las coordenadas Riemannianas normales (en donde g toma la forma diagonal $g = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$) se recupera el operador de Laplace del espacio euclidiano \mathbb{R}^n

$$\Delta = -\partial_{x^i} (\delta^{ij} \partial_{x^j}) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$$

Por otra parte, en una variedad Lorentziana (cuya signatura es $(-1, 1, \dots, 1)$) el operador L-B bajo las coordenadas (t, x^1, \dots, x^n) tomará la forma ($g = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$$

y, por lo tanto, la ecuación de calor sobre una variedad Riemanniana estará dada por

$$(\partial_t + \Delta)u(p, t) = 0 \quad (1)$$

donde $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$. mientras que la ecuación de onda sobre una variedad Lorentziana será

$$\Delta u(p, t) = 0 \quad (2)$$

A lo largo del curso se estudiaron la ecuación 1 y 2 sobre el espacio euclidiano \mathbb{R}^n , sus problemas de frontera y su existencia. Sin embargo, estudiar la solución de 1 sobre una variedad Riemanniana M requiere definir una función globalmente lo cual en general no suele ser una construcción fácil y, por tanto, sería útil realizar (sobre la variedad) una aproximación de la solución. Esta aproximación, en muchos casos del análisis geométrico suele ser suficiente y, se conoce como el método de la parametrix para la ecuación de calor.

Definición 1. La **parametrix** de una PDE es una aproximación del núcleo de la PDE. La parametrix del operador de calor es una función $H(t, x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times M \times M)$ que satisface las condiciones siguientes

$$(\partial_t + \Delta_y)H \in C^0(\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times M \times M) \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M H(t, x, y) f(y) dy = f(x) \quad (4)$$

Recuerde que la solución de 1 sobre \mathbb{R}^n está dada por

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x - y) \varphi(y) dy$$

donde

$$G(t, x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi \cdot t})^n} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (5)$$

es el núcleo de Poisson o núcleo de 1. El problema sobre M es definir la distancia entre dos puntos $|x - y|$ y generar una función global sobre M . Por lo tanto, se realizará la construcción de esta.

Definición 2. El **radio de inyectividad** es el radio máximo $\varepsilon = \varepsilon(x)$ tal que el mapa exponencial \exp_x genera un difeomorfismo entre la bola $B_\varepsilon(0) \subset T_x M$ y su imagen (vecindad de x , V_x).

En [1] se muestra que sobre una variedad Riemanniana M , este $\varepsilon(x)$ es una función suave y, por lo tanto, si $y \in V_x$ se define $r(x, y) < \varepsilon(x)$ como la distancia de la geodésica que une los puntos x e y . Por lo tanto, sobre $U_\varepsilon = \{(x, y) \in M \times M : y \in V_x, r(x, y) < \varepsilon\}$ el mapa

$$G(t, x, y) \equiv (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x, y)}{4t}} \quad t \in \mathbb{R}^+, (x, y) \in U_\varepsilon$$

es suave, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times U_\varepsilon)$ pero aun así no es una función global.

Lema 1. Sea $f, g \in C^\infty(M)$ entonces

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g - 2\langle df, dg \rangle + f\Delta g$$

Demostración. En coordenadas Riemannianas normales,

$$\Delta(fg) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 fg}{(\partial x^i)^2} = -g \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2} - 2 \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}}_{\langle df, dg \rangle} - f \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{(\partial x^i)^2}$$

■

Para encontrar la parametrix de 1 se realiza el *antzats*¹ de S_k sobre U_ε como una modificación de 5.

$$S_k(t, x, y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2(x, y)}{4t}} (u_0(x, y) + \dots + u_k(x, y)t^k) \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

donde $u_j \in C^\infty(U_\varepsilon)$, $j = 0, 1, \dots, k$ son funciones para determinar. Introduciendo este *ansatz* en 1 tenemos las condiciones 6 y 7

$$\frac{\partial S}{\partial t} = G(t, x, y) \left(\left(-\frac{n}{2t} + \frac{r^2}{4t^2} \right) (u_0 + \dots + t^k u_k) + (u_1 + 2u_2 t + \dots + k u_k t^{k-1}) \right) \quad (6)$$

y, usando el lema,

$$\Delta_y S = (\Delta G) (u_0 + \dots + u_k t^k) - 2 \langle dG, d(u_0 + \dots + u_k t^k) \rangle + G \Delta (u_0 + \dots + u_k t^k) \quad (7)$$

¹Solución estimada a una ecuación inicial que describen un problema físico o matemático (Wikipedia)

Sobre coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned}
\langle dG, d(u_0 + \dots + u_k t^k) \rangle &= \left\langle \frac{\partial G}{\partial r} dr + \frac{\partial G}{\partial \theta} d\theta, d(u_0 + \dots + u_k t^k) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial G}{\partial r} dr, \frac{\partial u_0}{\partial r} dr + \frac{\partial u_0}{\partial \theta} d\theta + \dots + t^k \frac{\partial u_k}{\partial r} dr + t^k \frac{\partial u_k}{\partial \theta} d\theta \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial G}{\partial r} dr, \frac{\partial u_0}{\partial r} dr + \dots + t^k \frac{\partial u_k}{\partial r} dr \right\rangle \\
&= \frac{\partial G}{\partial r} \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \dots + t^k \frac{\partial u_k}{\partial r} \right) \\
&= -\frac{r}{2t} \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \dots + t^k \frac{\partial u_k}{\partial r} \right) G
\end{aligned}$$

Teorema 2. Sea r la coordenada radial en coordenadas polares exponenciales centradas en p . Sea $T = \partial_r$, $D = \det(d \exp_p)$ y Δ_S el Laplaciano sobre la esfera S de distancia r_0 . Entonces, si $q \in S$ y $f \in C^\infty(M)$,

$$\Delta f(q) = -\nabla_T \nabla_T f(q) + \Delta_S f(q) - \left(\frac{n-1}{r} + D^{-1} \nabla_T D \right) \nabla_T f(q)$$

Demostración. La prueba es una aplicación rutinaria de coordenadas polares. Véase [1].

■

Por lo tanto, en coordenadas normales ($\nabla_T = \partial_r$)

$$\Delta G = -\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} - \left(\frac{n-1}{r} + D^{-1} \partial_r D \right) \frac{\partial G}{\partial r} = \left(\frac{n}{2t} - \frac{r^2}{4t^2} \right) G + \frac{r}{2t} \frac{D'}{D} G$$

De esta forma, sumando 6 y 7 junto con sus expansiones, tenemos

$$(\partial_t + \Delta_y) S = G(u_1 + \dots + k t^{k-1} u_k + \frac{r}{2t} \frac{D'}{D} (u_0 + \dots + t^k u_k) \quad (8)$$

$$+ \frac{r}{t} \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \dots + t^k \frac{\partial u_k}{\partial r} \right) + \Delta_y u_0 + \dots + t^k \Delta_y u_k \quad (9)$$

Ahora bien, sí se impone

$$r \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{r}{2} \frac{D'}{D} u_0 = 0 \implies u_0 = k D^{-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$$r \frac{\partial u_i}{\partial r} + \left(\frac{r}{2} \frac{D'}{D} + i \right) u_i + \Delta_y u_{i-1} = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (11)$$

la expresión 9 estará dada por

$$(\partial_t + \Delta) S_k = G t^k \Delta_y u_k(x, y)$$

La cual no es exactamente 1 pero resultará que es "suficientemente buena".

Se procede a construir S_k . Para encontrar los $u_i, i \neq 0$ resolvemos primero

$$r \frac{\partial u_i}{\partial r} + \left(\frac{r}{2} \frac{D'}{D} + i \right) u_i = 0 \implies u_i = k(\theta, r) r^{-i} D^{-1/2}$$

y, por tanto, la ecuación 11 bajo la escogencia previa de u_i es equivalente a

$$\frac{\partial k}{\partial r} = -D^{1/2} (\Delta_y u_{i-1}) r^{i-1}$$

así, integrando a lo largo de la geodésica (camino que une los puntos x e y) $x(s)$.

$$u_i(x, y) = -r^{-i}(x, y) D^{-\frac{1}{2}}(y) \int_0^r D^{\frac{1}{2}}(x(s)) \Delta_y u_{i-1}(x(s), y) s^{i-1} ds.$$

De esta forma, es posible definir los $\{u_i \in C^\infty(U_\varepsilon)\}_{i=0}^k$ inductivamente.

Como es usual, para extender esta familia de funciones $\{u_i\}$ junto con G se define la función de golpe (bump) $\eta \in C^\infty(M \times M)$ como

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) \in M \times U_\varepsilon^c \\ 1 & (x, y) \in M \times U_{\varepsilon/2} \\ g(x, y) & d.l.c \end{cases}$$

donde $g(x, y)$ conecta suave estas dos regiones. Por lo tanto, es posible extender S_k sobre $M \times M$ mediante $H_k = \eta S_k \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times M \times M)$

Lema 3. $H_k(t, x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times M \times M), k > n/2$ es una parametrix de la ecuación 1.

Demostración. Para determinar la condición 3 se revisan las tres regiones $U_{\varepsilon/2}, U_\varepsilon \setminus U_{\varepsilon/2}, U_\varepsilon^c$. Claramente, para valores en $\mathbb{R}^+ \times U_\varepsilon^c$, H_k se anula y, por lo tanto, $(\partial_t + \Delta_y) H_k = 0$. Sobre $\mathbb{R}^+ \times U_{\varepsilon/2}$ tenemos

$$(\partial_t + \Delta_y) H_k = (\partial_t + \Delta_y) S_k = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} t^k e^{-\frac{x^2}{4t}} \Delta_y u_k \underbrace{\rightarrow}_{t \rightarrow 0} 0$$

y, sobre $\mathbb{R}^+ \times U_\varepsilon \setminus U_{\varepsilon/2}$

$$(\partial_t + \Delta_y)H_k = \eta \partial_t S_k + \underbrace{\Delta_y(\eta S_k)}_{\text{Lema 1}} = \eta(\partial_t + \Delta_y)S_k - 2\langle d\eta, dS_k \rangle + (\Delta_y \eta)S_k = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \phi(t, x, y)$$

Donde $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times M \times M)$ es la multiplicación de g con G .

Para determinar la condición 4 se debe tener

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) \underbrace{(u_0 + \dots + t^k u_k(x, y))}_{h(t, x, y)} f(y) dy = f(x)$$

Se realizan primero unos calculos.

$$\begin{aligned} I(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_i(x, y) f(y) dy \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B_{\varepsilon/2}(x)} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_i(x, y) f(y) dy + \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B_{\varepsilon/2}(x)^c} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_i(x, y) f(y) dy \end{aligned}$$

Note que la segunda integral tiende a 0 cuando $t \rightarrow 0$. Para la primera integral se puede realizar un cambio de coordenadas bajo el mapa exponencial y, así, trabajar sobre el caso euclidiano.

$$\begin{aligned} I(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B_{\varepsilon/2}(x)} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_i(x, y) f(y) dy \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{B_{\varepsilon/2}(0) \subset T_x M} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{r^2(0, v)}{4t}} u_i(x, \exp_x v) f(\exp_x v) D(v) dv^1 \dots dv^n \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{T_x M} \underbrace{\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{r^2(0, v)}{4t}}}_{\text{Nucleo Poisson}} u_i(x, \exp_x v) f(\exp_x v) D(v) dv^1 \dots dv^n \end{aligned}$$

donde se extendió u_i afuea de $B_{\varepsilon/2}$ como $u_i = 0$. La última integral es una integral sobre \mathbb{R}^n y, por tanto, se puede entender como la integral del núcleo de Poisson junto con la función $u_i \cdot f \cdot D$. De acuerdo a las propiedades del núcleo de Poisson vease [2],

$$I(x) \rightarrow u_i(x \exp_x 0) f(\exp_x 0) D(0) = u_i(x, x) f(x).$$

$D(0) = 1$. Y, por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) u_0(x, y) f(y) dy = f(x)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) t^i u_i(x, y) f(y) dy = 0, \quad i > 0$$

Por lo tanto, sumando todo en $h(t, x, y)$ se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} \eta(x, y) (u_0 + \cdots + t^k u_k(x, y)) f(y) dy = f(x)$$

La determinación del núcleo de 1 está dada por el siguiente teorema ■

Sea $K_k = (\partial_t + \Delta_y) H_k$ y sea $Q_k = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda+1} K_k^{*\lambda}$

Teorema 4. Para $k > 2 + \frac{n}{2}$ sea $e(t, x, y) = H_k(t, x, y) - Q_k * H_k(t, x, y)$ i.e.

$$e(t, x, y) = H_k(t, x, y) + \left[H_k * \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda} K_k^{*\lambda} \right] (t, x, y) \quad (12)$$

entonces $e(t, x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times M \times M)$ es independiente de k y es el núcleo de la ecuación de transmisión de calor.

Demostración. Vease [1]. ■

Note que el núcleo estará generado por la parametrix H_k y, por lo tanto, la expresión 12 del núcleo se podrá aproximar según su serie. De esta forma, se encontró el núcleo de la ecuación 1 sobre la variedad Riemanniana M de donde se puede encontrar la solución de la ecuación de transmisión de calor para empezar a estudiar las propiedades de esta solución.

Referencias

- [1] Steven Rosenberg. *The Laplacian on a Riemannian Manifold: An Introduction to Analysis on Manifolds*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1997.
- [2] Giniatouline Andrei. *Introducción a las ecuaciones de la física matemática*. Ediciones Uniandes-Universidad de los Andes, 2011.

- [3] James Eells and J. H. Sampson. Harmonic mappings of riemannian manifolds. *American Journal of Mathematics*, 86(1):109–160, 1964.
- [4] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [5] Parametrix method - encyclopedia of mathematics. https://encyclopediaofmath.org/wiki/Parametrix_method.