Lecture notes on
Algebraic Topology

November 12, 2024

Abstract

Un des buts de la topologie algébrique est de fournir des outils algébriques pour l'étude des espaces topologiques. Parmi ces outils, on peut mentionner, par exemple, les groupes d'homologie et les groupes de cohomologie. Un des objectifs principaux de ce cours est d'approfondir les notions d'homologie et de cohomologie à travers l'étude des variétés topologiques et des variétés lisses. L'on supposera connues la définition et les propriétés de base d'homologie et de cohomologie (mais on fera, néanmoins, un petit rappel) et l'on se proposera d'étudier le contenu géométrique de ces notions. Les thèmes phares de ce cours sont la dualité de Poincaré et la théorie de l'intersection.

Contents

1 Introduction

Rappels de homologie...

2 Groupes d'homologie singulière de X

An complex $C.(X)$

$$H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X)$$

, $B_k(X) = Ker\partial_k (= C_0(X)$ si $k = 0)$, $Z_k(X) = Im\partial_{k+1}$

Groupes d'homologie singulier d'un point $X = 1$. $H_k(X) = 0$ et $H_0(X) = FF$.

2.1 Groupes d'homologie relatifs

Definition 2.1. *A suite exacte homologicque de la paire (X, A) $(A \subset X)$*

$$\cdots \to H_{k+1}(A) \to H_{k+1}(X) \to H_{k+1}(X, A) \to H_k(A) \to H_k(X) \to \ldots$$

inclusion $A \hookrightarrow X$ ou, $C_k(X, A) = C_k(X)/C_k(A)$

Example 2.2. *Si $x_0 \in X$, on a $H_k(X, \{x_0\}) = H_k(X, x_0) \cong \tilde{H}_k(X)$, $k \geq 0$.*

Si $f : (X, A) \to (Y, B)$ est une application continue, i.e. $f(A) \subset B$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{k+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{k+1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_{k+1}(X, A) \arrow[r] \arrow[d] & H_k(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_k(X) \arrow[r] & \ldots \\
\cdots \arrow[r] & H_{k+1}(A) \arrow[r] & H_{k+1}(X) \arrow[r] & H_{k+1}(X, A) \arrow[r] & H_k(A) \arrow[r] & H_k(X) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Si $f : (X, A) \to (Y, B)$ est une application continue t.q. $f : X \to Y$, $df|_A : A \to B$ soient des équicalences d'homoltopie, alors $f_* : H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$ est un isomorphisme pout tout $k \geq 0$

Definition 2.3. *A triplet (X, A, B) topologique $B \subset\subset A \subset X$, le suite exacte homologique associe au triplet est*

$$\cdots \to H_{k+1}(A, B) \to H_{k+1}(X, B) \to H_{k+1}(X, A) \to H_k(A, B) \to \ldots$$

ou le premier arrow est induit par $H_k(X, B)$, le docieme par inclusion $H_k(X, B) \subset H_k(X, A)$, le troiseme par la inermedio $H_k(A)$

On obtient la suire exacte associée à une paire topologique (X, A) ou $A \neq \emptyset$, pour les groupes d'homologie reduits:

$$\cdots \to \widetilde{H_{k+1}(A)} \to \widetilde{H_{k+1}(X)} \to H_{k+1}(X, A) \to \widetilde{H_k(A)} \to \ldots$$