

# **Notes in quantum fields**

Rafael Córdoba L.

2 de julio de 2020

This will be a series of notes of the seminar "Seminario Partículas, Campos Simetrías".

**Part I of this notes are strongly basesd in:**

- Bogoliubov. Quantum Fields.
- Reyes A. Notas capitulo 25 Quantum Fields.
- Stefan Weinzierl Introduction to feynman diagramas <https://arxiv.org/pdf/1005.1855.pdf> .

# Índice general

<b>I. Regularización dimensional</b>	<b>5</b>
<b>1. Cálculo de integrales y divergencias</b>	<b>7</b>
1.1. Preliminares . . . . .	7
1.1.1. Integrales . . . . .	8
1.2. Motivación . . . . .	8
1.2.1. Divergencias ultravioleta . . . . .	9
1.3. Regularización dimensional . . . . .	10
1.4. Diagramas de 1-Loop . . . . .	14
1.5. Calculo de integrales . . . . .	14
1.6. 1-loop en QED . . . . .	18
1.7. Regularización de Pauli-Villards . . . . .	21
1.8. Regularización dimensional: Cutoff (Frecuencia de corte) . . . . .	21
1.9. Apendice . . . . .	22
1.9.1. Identidades de la función Gamma . . . . .	22
1.9.2. Integrales . . . . .	22
1.10. Trazas . . . . .	23



**Parte I**

**REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL**



# 1. Cálculo de integrales y divergencias

## Esquema organización

- El termino de 1-loop
- Divergencia en el 1-loop
- Renormalización: Integrales previas
- Renormalizacion dimensional
- Tipos de Loops, 1,2,3 o 4 vértices.
- Contraterminos
- Re-parametrización del Lagrangiano
- Teoría  $\varphi^3$  y  $\varphi^4$

## 1.1. Preliminares

**Definición 1.1.1.** La función  $\Gamma(z)$  de Euler está dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

En particular, la función  $\Gamma$  nos permite extender el factorial  $\bullet!$   $\mapsto \Gamma(\bullet)$ , pues integrando por partes tenemos:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1$$

por tanto, recursivamente tenemos para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Para valores pequeños de  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\Gamma$  toma la forma asintótica (Le Lionnais 1983):

$$\Gamma(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon) \tag{1.1}$$

Donde  $\gamma$  es la constante de Euler-Mascheroni,

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k} - \log \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n - \Gamma \left( \frac{1}{n} \right) \right]$$

Por otra parte,  $f(x)^\varepsilon$  se aproxima como

$$f(x)^\varepsilon = e^{\varepsilon \log f(x)} \sim 1 + \varepsilon \log f(x) + O(\varepsilon^2)$$

## 1. Cálculo de integrales y divergencias

### 1.1.1. Integrales

El volumen de la esfera  $n$ -dimensional (esfera unitaria)  $S^n$  está dado por

$$V(n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

por tanto, el área será:

$$S(n) = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

En particular, al integrar sobre  $\mathbb{R}^n$  (similar a  $\mathbb{R}^3$  en esféricas),

$$\int d^n x = \int_{S^{n-1}} d\Omega \int x^{n-1} dx$$

En particular, si  $n = 3$  entonces:

$$\int d^3 x = \int dx dy dz = \int_{S^2} d\Omega \int x^2 dx = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\phi d\theta \int_0^\infty r^2 dr$$

**Definición 1.1.2.** Al integrar sobre  $k_0$  podemos rotar el contorno de integración en un ángulo de  $90^\circ$  lo cual es equivalente a multiplicar por  $i$ . Por tanto, al hacer

$$\int d^4 k = \int dk^0 \int d^3 k \mapsto i \int dk_4 \int d^3 k \equiv i \int \underbrace{(d^4 k)_E}_{\text{Espacio Euclídeo}}$$

decimos que realizamos una **rotación de Wick**

Al realizar la rotación de Wick el producto de Minkowski se convierte en el Kronecker delta  $\delta$  sobre  $\mu = 1, 2, 3, 4$ .

## 1.2. Motivación

Al resolver las integrales de los diagramas encontramos expresiones que dependen de el 4-vector de momento  $p$  de la forma:

$$\mathcal{M} = \int dk_1 dk_2 \dots dk_c F(p, k)$$

donde  $F(p, k)$  es producto de los propagadores de momento

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \frac{P_{\alpha\beta}(k)}{m^2 - k^2 - i\epsilon}$$

En general queremos resolver integrales de la forma:

$$I(p, L) = \frac{i}{\pi^2} \int dk \prod_{l=1}^L \frac{P(k, p_l)}{m_l^2 - (k + p_l)^2 - i\epsilon} \quad (1.2)$$

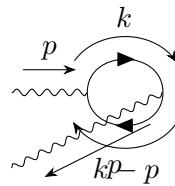
Sin embargo, en el espacio de Fourier  $k$  resulta mas sencillo resolver estas.

### 1.2.1. Divergencias ultravioleta

Las integrales que divergen para valores grandes de  $k$  se dicen divergencias ultravioletas, esto, se debe a el comportamiento de decaimiento el cual no es lo suficientemente rápido para converger por ejemplo,  $1/x^2$  cae mas lento que  $1/x^3$ .

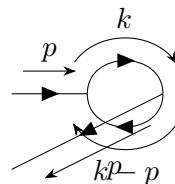
El caso mas simple que encontramos es el caso de 1-loop con  $p$  cuyo momento en la linea superior es  $k$  y en la inferior es  $k - p$ ; la integral en este caso depende de  $\Delta_F(x - y)^2$ , en el espacio de momento,

$$I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dp}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)(m^2 - (k - p)^2 - i\varepsilon)}. \quad (1.3)$$



Donde  $\Delta_F$  es el propagador de Feynman, el problema es que  $\Delta_F$  no esta definida en  $x=y$  por lo que tenemos que introducir una forma apropiada para que se solucione, ahí entran los operadores  $\Lambda_2(x, y)$  quasi-local en el sentido que es cero para todo valor  $x \neq y$  los cuales ayudan a que las integrales anteriormente mencionadas converjan. Hacer uso de este operador se conoce como remover las divergencias ultravioleta por renormalización.

**Ejemplo 1.2.0.1.** Consideremos el lagrangiano  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{m^2}{2}\phi(x)^2 + \lambda\phi(x)^3$  i.e. una teoría  $\lambda\phi^3$ . En el caso mas sencillo de orden 2 tenemos el diagrama de 1-loop llamado el diagrama 'fish',



Para una teoría  $\lambda : \phi^3$ : matriz de scattering será

$$S^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!} \lambda^2 \int d^4x \int d^4y T (:\varphi(x)^3 :: \varphi(y)^3 :)$$

y como vimos, la figura de 1-loop será hacer dos contracciones dando así:

$$\frac{(-i)^2}{2!} (3!\lambda)^2 \int d^4x \int d^4y \Delta_F(x - y)^2 :\phi(x)\phi(y):$$

## 1. Cálculo de integrales y divergencias

Recordando la definición del propagador de Feynman,

$$\Delta_F(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Hay un problema, el operador  $\Delta_F(x - y)$  no está definido para  $x = y$  pues

$$\Delta_F(x) = \frac{\delta(x^2)}{4\pi} + \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{x^2} + \frac{im^2}{8\pi^2} \log\left(\frac{m\sqrt{|x^2|}}{2}\right) - \frac{m^2}{8\pi} \theta(x^2) + \dots$$

Note que las distribuciones  $\delta(x^2), x^{-2}$  son singulares

(Recuerde

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i f(x_i)=0} \frac{\delta(x - x_i)}{f'(x_i)}$$

por tanto, para  $\delta(x^2)$  habrá singularidad en  $x = 0$

Por tanto, necesitamos solucionar esto! Resulta en general mas fácil ver la contribución en el espacio de momentos y por tanto, para el 1-loop tenemos

$$I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \underbrace{\frac{dp}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)}}_{\text{Momentum } p} \underbrace{\frac{dp}{(m^2 - (k-p)^2 - i\varepsilon)}}_{\text{Momentum } k-p}.$$

**Definición 1.2.1.** Analizando la forma de la integral anterior valores grandes de momento  $p$  (espectro ultravioleta),

$$I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dp}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)} \frac{dp}{(m^2 - (k-p)^2 - i\varepsilon)} \sim \int \frac{dp}{p^4}$$

Calculando la integral posterior,

$$\int \frac{dp}{p^4} = \int \frac{dp_0 d^3p}{p^4} = i \int \frac{(d^4p)_E}{p^4} \sim \int_{S^3} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{p^4} \sim \log(p) \Big|_0^\infty$$

por tanto, se dice que el **grado de divergencia superficial** es logarítmico.

## 1.3. Regularización dimensional

En la regularización dimensional replanteamos el problema a uno mas general, cambiamos la integral 4-dimensional de momentos a una integral de dimensión  $n = 4 - 2\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ . Nota: Cambiaremos  $m^2 - i\epsilon$  por  $m^2$  para evitar confusión.

$$\int (d^4p)_E = \underbrace{\int_{\Omega(4)} d\Omega}_{\text{Angular}} \underbrace{\int_0^\infty p^3 dp}_{\text{Radial}} \rightarrow \int d^n p \equiv \underbrace{\mu^{2\epsilon}}_{\text{Cte. Dim.}} \underbrace{\int_{\Omega(n)} d\Omega}_{\text{Angular}} \underbrace{\int_0^\infty p^{n-1} dp}_{\text{Radial}}$$

Donde  $\Omega(n) = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2) \leftarrow$  Área de la esfera ( $n-1$ )-dimensional.

En particular, la constante  $\mu$  se escoge de tal forma que las dimensiones de la integral sean las mismas.

La idea es "separar" los términos divergentes, ilustraremos esto mejor con un ejemplo:

**Ejemplo 1.3.0.1.** Para el caso de 1-loop tenemos la regularización dada por (Ver derivación aquí)

$$\text{reg}_\varepsilon I(k) = \int d^n p = -\left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 \frac{dx}{(m^2 - x(1-x)k^2)^\varepsilon} \quad (1.4)$$

Utilizando la aproximación asintótica de  $\Gamma$ , [1.1] tenemos:

$$\begin{aligned} \text{reg}_\varepsilon I(k) &= -\left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 \frac{dx}{(m^2 - x(1-x)k^2)^\varepsilon} \\ &= -\left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon)\right) \int_0^1 \frac{dx}{(m^2 - x(1-x)k^2)^\varepsilon} \\ &= -\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon)\right) \int_0^1 dx \left[1 - \varepsilon \log\left(\frac{(m^2 - x(1-x)k^2)\pi}{\mu^2}\right)\right] \\ &= -\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon)\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + o(\varepsilon)\right) \int_0^1 dx \left[\varepsilon \log\left(\frac{(m^2 - x(1-x)k^2)\pi}{\mu^2}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} + \gamma + \int_0^1 dx \log\left[\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2}\right] + \log \pi + O(\varepsilon) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{\varepsilon}}_{I_{\text{Singular}}} + \underbrace{\int_0^1 dx \varepsilon \log\left[\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2}\right]}_{I_{\text{finito}}(k, \mu)} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

Ahora bien, en la representación posición,

$$\begin{aligned} \text{reg}_\varepsilon [\Delta_F(x)^2] &= \mathcal{F} \left[ \frac{i\pi^2}{(2\pi)^6} I(k) \right] = \frac{i\pi^2}{(2\pi)^6 (2\pi)^2} \int d^4 k e^{-ik \cdot x} I(k) \\ &= -\frac{i\pi^2}{(2\pi)^6 (2\pi)^2} \int d^4 k e^{-ik \cdot x} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{i\pi^2}{(2\pi)^6 (2\pi)^2} \int d^4 k e^{-ik \cdot x} I_{\text{finito}} \\ &= \frac{1}{16\pi^2 i} \frac{1}{\varepsilon} \delta(x) + \underbrace{\frac{i\pi^2}{(2\pi)^8} \int d^4 k e^{-ik \cdot x} I_{\text{finito}}}_{\tilde{\Delta}_F^2(x)} \\ &= \frac{1}{i} I_{\text{Sing}} \delta(x) + \tilde{\Delta}_F^2(x) \end{aligned}$$

Donde  $\tilde{\Delta}_F^2(x)$  es un término libre de divergencias!

Logramos entonces separar la singularidad en un término, esto en la matriz de scattering se traduce a,

## 1. Cálculo de integrales y divergencias

$$\frac{(-i)^2}{2!}(3!\lambda)^2 \int d^4x \int d^4y \Delta_F(x-y)^2 : \phi(x)\phi(y) : \rightarrow \frac{(-i)^2}{2!}(3!\lambda)^2 \int d^4x \int d^4y \text{reg}_\varepsilon[\Delta_F(x)^2] : \phi(x)\phi(y) :$$

Por tanto, la contribución será:

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{(-i)^2}{2!}(3!\lambda)^2 \int d^4x \int d^4y \text{reg}_\varepsilon[\Delta_F(x-y)^2] : \phi(x)\phi(y) : \\ &= \frac{(-i)^2}{2!}(3!\lambda)^2 \int d^4x \int d^4y \left( \frac{1}{i} I_{Sing} \delta(x-y) + \tilde{\Delta}_F^2(x-y) \right) : \phi(x)\phi(y) : \\ &= \frac{(-i)^2}{2!}(3!)^2 \int d^4x \int d^4y (-i\lambda^2 I_{Sing} \delta(x-y)) : \phi(x)\phi(y) : \\ &\quad + \underbrace{\frac{(-i)^2}{2!}(3!)^2 \int d^4x \int d^4y \lambda^2 \tilde{\Delta}_F^2(x-y) : \phi(x)\phi(y) :}_{\widetilde{S^{(2)}}} \\ &= \underbrace{(-i) \int d^4x \frac{-(3!\lambda)^2}{2!} I_{Sing} : \phi(x)^2 :}_{\text{Termino orden 1}} + \widetilde{S^{(2)}} \end{aligned}$$

Por tanto, para el diagrama  $\phi^3$  la serie de Dyson hasta orden 2:

$$\begin{aligned} S^{(1)} + S^{(2)} &= \mathbf{1} + (-i) \int d^4x \underbrace{\lambda : \phi(x)^3 :}_{-\mathcal{L}_I} + (-i) \int d^4x \underbrace{\frac{-(3!\lambda)^2}{2!} I_{Sing} : \phi(x)^2 :}_{\Delta\mathcal{L}} + \widetilde{S^{(2)}} \\ &= \mathbf{1} + i \int d^4x [\mathcal{L}_I(x) + \Delta\mathcal{L}(x)] + \widetilde{S^{(2)}} \end{aligned}$$

Por tanto, podemos resumir esto en la siguiente definición

**Definición 1.3.1.** Aislar la singularidad mediante la regularización dimensional genera el término singular, este resulta ser equivalente a añadir una contribución  $\Delta\mathcal{L}$ . A este término se le llama **contra-termino** note que el término  $\Delta\mathcal{L}$  es local pero el término  $\phi(x)\delta(x-y)\phi(y)$  es quasi-local.

**Ejemplo 1.3.0.2.** Consideremos el Lagrangiano  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{m^2}{2}\phi(x)^2 + \lambda\phi(x)^4$  i.e. una teoría  $\lambda\phi^4$ .

En esta teoría tenemos (no todos) a orden dos los siguientes diagramas:

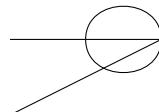


Figura 1.1.: Diagrama 'walnut' de orden 2 en  $\lambda\phi(x)^4$

Con contribución

$$-i96\lambda^2 \Delta_F(x-y)^3 : \phi(x)\phi(y) :$$

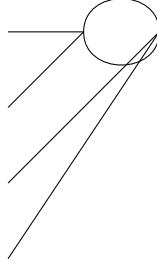


Figura 1.2.: Diagrama 'walnut' de orden 2 en  $\lambda\phi(x)^4$

Con contribución

$$-i72\lambda^2 \Delta_F(x-y)^2 : \phi(x)^2\phi(y)^2$$

Veamos la regularización de este.

Para regularizar el primero debemos regularizar  $\Delta_F^3$  mientras que para el segundo se regulariza  $\Delta_F^2$ .

Al regularizar el diagrama dos obtenemos el término  $A_1\delta(x-y)$  que como vimos se termina convirtiendo en un contra-término de la forma

$$A_1\lambda^2 : \phi(x)^4 :$$

Pero por otra parte, al regularizar  $\Delta_F^3$  (apéndice) tenemos

$$\text{reg}_\varepsilon \Delta_F(x)^3 = -\frac{A_2}{48}\delta(x) - \frac{A_0}{48}\square\delta(x) + \widetilde{\Delta_F^3(x)}$$

Donde  $A_0, A_2$  constantes divergentes para  $\varepsilon \rightarrow 0$  y  $\square$  es el D'lambertiano en  $x$ .

Así, el primer y segundo término se convierten en los contra-términos

$$A_2\lambda^2 : \phi(x)^2 : \quad y \quad -A_0\lambda^2 : \partial_\nu\phi(x)\partial^\nu\phi(x) :$$

respectivamente. Note que estos términos son justamente de la forma del Lagrangiano y por tanto, esto sugiere que podemos agregar estos términos a el Lagrangiano total quedando así:

$$\mathcal{L} + \Delta\mathcal{L} = \frac{1+a_0}{2}\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) - \frac{m^2+a_2}{2}\phi(x)^2 + (\lambda+c)\phi(x)^4$$

Esto, por tanto hará que se quiten las divergencias (olvidándonos de la divergencia de las constantes  $A_i$ ) sin embargo, las relaciones de conmutación cambian ( $\pi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}$ ) Para solucionar esto definimos

## 1. Cálculo de integrales y divergencias

$$\phi \mapsto \phi' \equiv X\phi, \quad m \mapsto m', \quad \lambda \mapsto \lambda'.$$

De tal forma que recuperemos el Lagrangiano de la teoría  $\lambda\phi(x)^4$  i.e.

$$1 + a_0 = X^2 = Z_1, \quad m^2 + a_2 = m'X^2 = m'Z_1, \quad \lambda + c = \lambda'X^2 = \lambda'Z_1^2$$

Así, el Lagrangiano es:

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi'(x)\partial^\mu\phi'(x) - \frac{m'^2}{2}\phi'(x)^2 + \lambda'\phi'(x)^4,$$

$$\varphi = \sqrt{Z_1}^{-1}\phi', \quad m'^2 = \frac{m^2+a_2}{1+a_0}, \quad \lambda' = \frac{c+\lambda}{(1+a_0)^2}$$

**Definición 1.3.2.** De acuerdo a esto decimos que los valores  $m$  y  $\lambda$  son **parámetros desnudos**.

El anterior razonamiento nos permite realizar la siguiente proposición

**Proposición 1.3.0.1.** Un campo renormalizado es aquel donde el propagador tiene el mismo comportamiento a el campo libre cerca a sus polos y la masa renormalizada está definida por la posición del polo

**Nota 1.3.1.** Algunas renormalizaciones de masas o campos no están directamente relacionadas a el problema de las divergencias pero pueden ser necesarias incluso en una teoría donde todas las integrales del espacio de momento son convergentes.

## 1.4. Diagramas de 1-Loop

## 1.5. Calculo de integrales

Comenzamos primero calculando las integrales para el caso  $n = 4$  y extrapolamos para el caso general ( $n$  arbitrario)

Algunas veces cuando se tiene integrales sobre dos variables  $x, y$  alguna de las integrales

$$\int dx \int dy \quad \text{o} \quad \int dy \int dx$$

resulta mas fácil de integrar. Por tanto, resulta una herramienta importante expresar funciones en forma de operadores integrales.

$$f(k) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon} = i \int_0^\infty e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\epsilon)} d\alpha$$

En el caso de la expresión de la derecha decimos que la función  $f(k)$  está en la **representación  $\alpha$** .

**Definición 1.5.1.** La integral de cuadratura Gaussiana es:

$$\frac{i}{\pi^2} \int e^{i(ak^2+2bk)} dk = \frac{1}{a^2} \cdot e^{-ib^2/a}$$

Donde  $a$  es una constante,  $b$  un 4-vector.

*Demostración.*

$$I(a, b) = \int e^{i(-at^2+2bt)} dt$$

$$= \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{ib^2/a} \int e^{-ax^2} dx = \left(\frac{\pi}{ai}\right)^{1/2} e^{\frac{ib^2}{a}}$$

| Completando el cuadrado

Así,

$$\frac{i}{\pi^2} \int e^{i(ak^2+2bk)} dk = \int e^{i(ak_0^2+2b_0k_0)} dk_0 \prod_{i=0}^n \int e^{-i(ak_i^2+2b_ik_i)} dk_i$$

$$= I(-a, b_0)I(a, b_1)I(a, b_2)I(a, b_3) = \frac{\pi^2}{ia^2} e^{\frac{b_0^2-b_1^2-b_2^2-b_3^2}{ia}}$$

■

Similarmente derivando la expresión respecto a  $\beta$  tenemos los siguientes resultados

$$\frac{i}{\pi^2} \int e^{l(ak^2+2bk)} [k^v] dk = \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a} \left[ -\frac{b^v}{a} \right]$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int e^{t(ak^s+2bk)} [k^v k^\mu] dk = \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a} \left[ \frac{2b^v b^\mu + iag^{v\mu}}{2a^2} \right]$$

$$\frac{i}{\pi^2} \int e^{i(ak^2+2bk)} [k^2] dk = \frac{1}{a^2} e^{-tb^2/a} \left[ \frac{b^2 + 2ia}{a^2} \right]$$

Feynman realizó un método para resolver estas las integrales de tipo [1.2] llamada **parametrización de Feynman** donde se encuentra (Click aquí, aun no está acabado) que las integrales resultan ser una combinación lineal de integrales de la forma:

$$\int \frac{dq}{(q^2 - D + i\epsilon)^l}, \quad 3 \leq l \leq$$

y

$$\int \frac{dq}{(q^2 - D + i\epsilon)^l}, \quad l \leq 2$$

donde

$$D(x, p) = (\sum x_l p_l)^2 + \sum x_l (m_l^2 - p_i^2).$$

Sin embargo, la primera si se puede resolver pero la segunda no existe!

## 1. Cálculo de integrales y divergencias

**Proposición 1.5.0.1** (Feynman trick). *Similar a la representación α, podemos escribir*

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_L} = \Gamma(L) \int_0^1 \frac{d^L x}{\left( \sum_{l=1}^L a_l x_l \right)^L}$$

donde  $\sum_l x_l = 1$

*Demostración.* ■

Por tanto, usando  $a_i = (k + p_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon$  en [1.2] tenemos

$$\begin{aligned} I_L(p; L) &= (-1)^L (L-1)! \int_0^1 d^L x J_L(p, x) = (-1)^L (L-1)! \int_0^1 d^L x \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dk P(k, p)}{[Z(p, k, x)]^L} \\ &= (-1)^L (L-1)! \int_0^1 d^L x \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dk P(k, p)}{\left[ \sum_l x_l [(k + p_l)^2 - m_l^2 + i\epsilon] \right]^L} \\ &= (-1)^L (L-1)! \int_0^1 d^L x \frac{i}{\pi^2} \int \underbrace{\frac{dk P(k, p)}{[(k + b)^2 - D + i\epsilon]^L}}_q \end{aligned}$$

Con  $D(x, p) = (\sum_l x_l p_l)^2 + \sum_l x_l (m_l^2 - p_l^2)$ ,  $\sum_l x_l = 1$

por tanto, reparametrizando,

$$J_L(p, x) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq P(q - b, p)}{(q^2 - D + i\epsilon)^L}$$

En general las integrales se pueden expresar como combinación lineal de integrales de la forma

$$\tilde{J}_l(p, x) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq}{(q^2 - D + i\epsilon)^l}, \quad 3 \leq l \leq L \quad (1.5)$$

las cuales al revisar la divergencia superficial notamos que no tienen divergencias (notación con tilde).

**Ejemplo 1.5.0.1.** El caso  $\tilde{J}_3$ .

$$\begin{aligned} \tilde{J}_3 &= \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^4 q}{(q^2 - D + i\epsilon)^3} = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{dq_0 dq}{(q_0^2 - q^2 - D + i\epsilon)^3} = \frac{-i}{\pi^2} \int \frac{dq_0 dq}{(-q_4^2 - q^2 - D + i\epsilon)^3} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int \frac{(dq)_E}{(q_E^2 + D)^3} = \frac{1}{\pi^2} \int_{S^3} \int_0^\infty \frac{q^{3-1} dq}{(q^2 + D)^3} = \frac{1}{\pi^2} \frac{2\pi^{4/2}}{\Gamma(4/2)} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{u du}{(u + D)^3} = \frac{1}{2D} \end{aligned}$$

Note que para  $\tilde{J}_3$  si derivamos respecto a  $D$  tenemos ( $l \geq 3$ ):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{J}_3(p, x; D)}{\partial D} &= (-3)(-1) \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^4 q}{(q^2 - D + i\varepsilon)^4} = -\frac{1}{2D^2} \implies \tilde{J}_4 = \frac{(-1)^3}{3 \cdot 2 \cdot D^2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{J}_3(p, x; D)}{\partial D^2} &= (-3)(-4)(-1)^2 \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^4 q}{(q^2 - D + i\varepsilon)^5} = (-1)(-2) \frac{1}{2D^3} \implies \tilde{J}_5 = \frac{(-1)^6}{3 \cdot 4 \cdot D^3}\end{aligned}$$

Y en general (inducción)

$$\tilde{J}_L(p, x) = \frac{(-1)^{L+1}}{(L-1)(L-2)} \frac{1}{D^{L-2}}$$

Así,

$$\tilde{I}_L(p) = -(L-3)! \int \frac{d^L x}{[D + i\varepsilon]^{L-2}}$$

Veamos estas integrales en el caso  $n$  dimensional para poder realizar la regularización dimensional, finalmente procedemos a demostrar el calculo de [1.4].

Similarmente a la demostración de la cuadratura Gaussiana para el caso  $n$  dimensional tenemos:

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^n p e^{i(ap^2 + 2bp)} = \left(\frac{ia\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a}$$

*Demostración.*  $n = 4 - 2\varepsilon$

$$I(a, b) = \int e^{i(-at^2 + 2bt)} dt = \left(\frac{\pi}{ai}\right)^{1/2} e^{\frac{ib^2}{a}}$$

$$I(-a, b_0) I(a, b_1) \dots I(a, b_{n-1}) = i \left(\frac{\pi}{ai}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{i(b_0^2 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i^2)}{a}} = i \left(\frac{\pi}{ai}\right)^{2-\varepsilon} e^{-ib^2/a}$$

Por otra parte, introduciendo la constante de dimensionalidad  $\mu$  y usando el resultado anterior tenemos

$$\frac{i}{\pi^2} \int d^n p e^{i(ap^2 + 2bp)} = \frac{i^2}{\pi^2} \mu^{2\varepsilon} \left(\frac{\pi}{ai}\right)^{2-\varepsilon} e^{-ib^2/a} = \left(\frac{\mu^2 ai}{\pi}\right)^\varepsilon \frac{1}{a^2} e^{-ib^2/a}$$

■

Retomando la expresión integral de  $\tilde{J}_l$  tenemos

$$reg_\varepsilon J_l(D) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^n p}{(p^2 - D)^l}$$

## 1. Cálculo de integrales y divergencias

Similarmente a el caso  $\tilde{J}_3$  podemos encontrar la expresión general bajo la regularización dimensional

$$\text{reg}_\varepsilon J_l(D) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^n p}{(p^2 - D)^l} = \left(\frac{\mu^2}{\pi}\right)^\varepsilon \frac{(-1)^{l+1} \Gamma(l + \varepsilon - 2)}{D^{l+\varepsilon-2} \Gamma(l)}$$

Veamos ahora la integral de 1-loop.

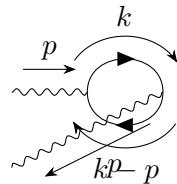
$$\begin{aligned} \text{reg}_\varepsilon I(k) &= \frac{i\mu^{2\varepsilon}}{\pi^2} \int \frac{d^n p}{(m^2 - p^2)(m^2 - (p - k)^2)} \\ &= \frac{i\mu^{2\varepsilon}}{\pi^2} \int d^n p \left( i \int_0^\infty e^{i\alpha(p^2 - m^2)} d\alpha \right) \left( i \int_0^\infty e^{i\beta((p-k)^2 - m^2)} d\beta \right) \quad \Big| \text{Rep. } \alpha, \beta \\ &= \frac{i^3 \mu^{2\varepsilon}}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha d\beta e^{i\beta k^2 - i(\alpha + \beta)m^2} \underbrace{\int d^n p e^{i(\alpha + \beta)p^2 - 2i\beta pk}}_{\left[ \frac{i(\alpha + \beta)\mu^2}{\pi} \right]^\varepsilon \frac{1}{(\alpha + \beta)^2} e^{-i\frac{\beta^2 k^2}{\alpha + \beta}}} \\ &= - \left( \frac{i\mu^2}{\pi} \right)^\varepsilon \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{(\alpha + \beta)^{2-\varepsilon}} e^{i\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}k^2} - i(\alpha + \beta)m^2 \\ &= - \left( \frac{i\mu^2}{\pi} \right)^\varepsilon \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{da}{a^{1-\varepsilon}} e^{-iaZ(x, k^2)} \end{aligned}$$

Y así, usando la integral [??] del apéndice tenemos ( $L = \varepsilon + 2$ ):

$$\text{reg}_\varepsilon I(k) = - \left( \frac{\mu^2}{\pi} \right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 \frac{dx}{[m^2 - x(1-x)k^2]^\varepsilon}$$

## 1.6. 1-loop en QED

One-particle-irreducible graphs. Una vez mas veremos el caso mas sencillo de 1-loop. En QED es el caso de auto-energía del fotón. El método mas conveniente de calcular este es mediante la regularización dimensional pues cutoff haría que el fotón adquiera masa por lo que violaría la gauge-invariance. t'Hooft y Veltman en 1972 realizaron esta.



Cuya contribución es de tipo

$$-\text{tr} [S(y-x)\gamma^\rho S(x-y)\gamma^\sigma] : A_\rho(x)A_\sigma(y) :$$

En particular tenemos

$$\begin{aligned} & - \int d^4 p \text{ Tr} \left[ \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} - \not{q} + m}{(p-q)^2 + m^2} ie\gamma^\rho \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 + m^2} ie\gamma^\sigma \right] \\ & \Pi^{*\rho\sigma}(q) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{\text{Tr} [(\not{p} + m)\gamma^\rho (\not{p} - \not{q} + m)\gamma^\sigma]}{(p^2 + m^2)((p-q)^2 + m^2)} \end{aligned}$$

Usando el Feynman trick, tenemos:

$$\begin{aligned} [(p^2 + m^2)((p-q)^2 + m^2)]^{-1} &= \int_0^1 [(p^2 + m^2)(1-x) + ((p-q)^2 + m^2)x]^{-2} dx \\ &= \int_0^1 [p^2 + m^2 - 2p \cdot qx + q^2x]^{-2} dx \\ &= \int_0^1 [(p - qx)^2 + m^2 + q^2x(1-x)]^{-2} dx \end{aligned}$$

Cambiando la integración de  $p \rightarrow p + qx$ ,

$$\Pi^{*\rho\sigma}(q) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int d^4 p \frac{\text{Tr} [(\not{p} + \not{qx} + m)\gamma^\rho (\not{p} - \not{q}(1-x) + m)\gamma^\sigma]}{[p^2 + m^2 + q^2x(1-x)]^2}$$

Calculemos la traza.

$$\begin{aligned} & \text{Tr} [(\not{p} + \not{qx} + m)\gamma^\rho (\not{p} - \not{q}(1-x) + m)\gamma^\sigma] \\ &= \text{Tr} [(\not{p} + \not{qx})\gamma^\rho (\not{p} - \not{q}(1-x))\gamma^\sigma + (\not{p} + \not{qx})\gamma^\rho (m)\gamma^\sigma + (m)\gamma^\rho (\not{p} - \not{q}(1-x))\gamma^\sigma + m^2\eta^{\rho\sigma}] \\ &= \text{Tr}[(p + qx)_\alpha (p - q(1-x))_\beta \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta \gamma^\sigma + (p + qx)_\alpha \underbrace{\gamma^\alpha \gamma^\rho (m) \gamma^\sigma}_{\# \text{ impar de } \gamma} + (m)(p - q(1-x))_\alpha \underbrace{\gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\sigma}_{\# \text{ impar de } \gamma} + m^2\eta^{\rho\sigma}] \\ &= 4[(p + qx)_\alpha (p - q(1-x))_\beta (\eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\sigma} - \eta^{\alpha\beta} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\alpha\sigma} \eta^{\rho\beta}) + m^2\eta^{\rho\sigma}] \\ &= 4[(p + qx)^\rho (p - q(1-x))^\sigma - (p + qx) \cdot (p - q(1-x))\eta^{\rho\sigma} + (p + qx)^\sigma (p - q(1-x))^\rho + m^2\eta^{\rho\sigma}] \\ &= 4[p^\rho p^\sigma - q^\rho q^\sigma x(1-x) - p^\rho q^\sigma (1-x) + q^\rho p^\sigma x - (p^2 + q \cdot px - p \cdot q(1-x) + q^2 x(1-x))\eta^{\rho\sigma} \\ &+ p^\sigma p^\rho - q^\sigma q^\rho x(1-x) - p^\sigma q^\rho (1-x) + q^\sigma p^\rho x + m^2\eta^{\sigma\rho}] \\ &:= \text{TR} \end{aligned}$$

Realizando la rotación de Wick

## 1. Cálculo de integrales y divergencias

$$\Pi^{*\rho\sigma}(q) = \frac{4e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int (d^4 p)_E \frac{\text{TR}}{[p^2 + m^2 + q^2 x(1-x)]^2}$$

Realizando la regularización dimensional y recordando que para números impares de  $p^\mu$  la integral es 0 y para números pares tenemos las identidades del apéndice,

$$\begin{aligned} \Pi^{*\rho\sigma}(q) &= \\ &= \frac{4e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_{S^d} d\Omega \int p^{d-1} dp \frac{\left[ \frac{2p^2\eta^{\rho\sigma}}{d} - 2q^\rho q^\sigma x(1-x) - (p^2 + q^2 x(1-x))\eta^{\rho\sigma} + m^2\eta^{\rho\sigma} \right]}{[p^2 + m^2 + q^2 x(1-x)]^2} \end{aligned}$$

Usando la integral del apéndice [1.7] con  $\nu^2 = m^2 + q^2 x(1-x)$ ,

$$\begin{aligned} \Pi^{*\rho\sigma}(q) &= \\ &= \frac{2e^2\Omega(d)}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left[ \left(1 - \frac{2}{d}\right)\eta^{\rho\sigma}(m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-1} \Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \right] \\ &\quad + \left[ (2q^\rho q^\sigma x(1-x) - q^2\eta^{\rho\sigma}x(1-x) + m^2\eta^{\rho\sigma})(m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \right] \\ &= \frac{2e^2\Omega(d)}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left[ -\eta^{\rho\sigma}(m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-1} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \right] \\ &\quad + \left[ (2q^\rho q^\sigma x(1-x) - q^2\eta^{\rho\sigma}x(1-x) + m^2\eta^{\rho\sigma})(m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \right] \\ &= \frac{2e^2\Omega(d)}{(2\pi)^4} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx (m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} [2q^\rho q^\sigma x(1-x) - 2q^2\eta^{\rho\sigma}x(1-x)] \\ &= \frac{2e^2\Omega(d)}{(2\pi)^4} [2q^\rho q^\sigma - 2q^2\eta^{\rho\sigma}] \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x(1-x)(m^2 + q^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} \end{aligned}$$

Encontramos en este que la singularidad está en

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)$$

cuando  $d = 4$ . Por otra parte, la parte del Lagrangiano  $\mathcal{L}_{EM}$  tiene contribución

$$\Pi_{\mathcal{L}_{EM}^*\rho\sigma} = -(Z_3 - 1)(q^2\eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)$$

, así, la contribución total será de la forma

$$\Pi^{*\rho\sigma} = (q^2\eta^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma)\pi(q^2)$$

,

$$\pi(q^2) = -\frac{4e^2\Omega(d)}{(2\pi)^4}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\int_0^1 dx x(1-x)(m^2 + q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} - (Z_3 - 1)$$

Ahora bien, para que el residuo del polo del propagador sea el mismo se necesita  $\pi(0) = 0$  por tanto,

$$Z_3 = 1 - \frac{4e^2\Omega(d)}{(2\pi)^4}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\int_0^1 dx x(1-x)(m^2)^{\frac{d}{2}-2}$$

Y así,

$$\pi(q^2) = -\frac{4e^2\Omega(d)}{(2\pi)^4}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\int_0^1 dx x(1-x)\left[(m^2 + q^2x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} - (m^2)^{\frac{d}{2}-2}\right]$$

Usando la aproximación de  $\Gamma$  para  $d \rightarrow 4$ .

$$\begin{aligned} Z_3 - 1 &= -\frac{4e^2\Omega(4)}{(2\pi)^4}\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{1}{2-d/2} - \gamma\right)\int_0^1 dx x(1-x)(m^2)^{\frac{4}{2}-2} \\ &= -\frac{4e^22\pi^2}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{2-d/2} - \gamma\right)\frac{1}{6} = \frac{e^2}{6\pi^2}\left(\frac{1}{d-1}\right) + \gamma\frac{e^22}{3\pi^2} \end{aligned}$$

Note en este caso que no usamos la definición de  $\mu^{2\varepsilon}$  pues el papel que juega la constante  $e^2$  es justamente este, las dimensiones son  $[Masa]^{4-d} = [Masa]^{2\varepsilon}$ .

## 1.7. Regularización de Pauli-Villards

## 1.8. Regularización dimensional: Cutoff (Frecuencia de corte)

La idea mas intuitiva es realizar un corte o un límite superior de frecuencias sobre las cuales se integran con el propósito de evitar la divergencia ultravioleta. Es intuitiva en el sentido en que a medida que la frecuencia aumenta hay menos interacciones y por tanto, en algún punto ( $\Lambda$ ) no afectará a nuestro calculo.

1. Cálculo de integrales y divergencias

## 1.9. Apendice

### 1.9.1. Identidades de la función Gamma

$$\left(1 - \frac{2}{d}\right)\Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) = -\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)$$

### 1.9.2. Integrales

$$\int_0^\infty e^{iA(-D)+i\varepsilon} A^{L-3} dA = -\frac{\Gamma(L-2)}{i^L(D-i\varepsilon)^{L-2}}, \quad L \geq 2 \quad (1.6)$$

$$\int_0^\infty \frac{p^{d-1}}{(p^2 + \nu^2)^2} dp = \frac{1}{2} (\nu^2)^{\frac{d}{2}-2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \quad (1.7)$$

### Integrales n dimensiones

$$\int q^v q^\mu F(q^2) dq = \frac{1}{4} g^{v\mu} \int q^2 F(q^2) dq$$

$$\int q^v q^\mu q^\rho q^\sigma F(q^2) dq = \frac{1}{24} (g^{v\mu} g^{p\sigma} + g^{v\rho} g^{\mu\sigma} + g^{v\sigma} g^{\mu\rho}) \int (q^2)^2 F(q^2) dq$$

En  $d$  dimensiones tenemos:

$$\begin{aligned} p^\mu p^\nu &\rightarrow \frac{1}{d} p^2 \eta^{\mu\nu} \\ p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma &\rightarrow \frac{1}{d(d+2)} (p^2)^2 [\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}] \eta^{\mu\nu} \end{aligned}$$

## 1.10. Trazas

Para productos pares de  $\gamma$  la traza es:

$$\text{Tr}\{\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{2N}}\} = 4 \sum_{\text{Pairings}} \delta_P \prod_{\text{Pares}} \eta_{\text{Paired } \mu s}.$$

Pues

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = -\text{Tr}\{\gamma_\nu \gamma_\mu\} + 2 \text{Tr}\{\eta_{\mu\nu}\} = -\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} + 8\eta_{\mu\nu}$$

En particular tenemos:

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = 4\eta_{\mu\nu}$$

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma\} = 4[\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}]$$

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\kappa \gamma_\eta\} = 4[\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \eta_{\kappa\eta} - (\sigma \leftrightarrow \kappa) + (\sigma \leftrightarrow \eta) - (\nu \leftrightarrow \rho)$$

$$+ (\nu \leftrightarrow \rho, (\sigma \leftrightarrow \kappa)) - (\rho \leftrightarrow \nu, (\sigma \leftrightarrow \eta)) + (\sigma \leftrightarrow \nu) - (\sigma \leftrightarrow \nu, (\sigma \leftrightarrow \kappa)) + \dots]$$

Para productos impares de  $\gamma$  la traza es 0.