NOMBRE: Rafael Fernández Sánchez NOTA:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC2223 — Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales 2020-2

Tarea 6 – Respuesta Pregunta 1

Demostraremos lo pedido por inducción sobre el **largo de la ejecución.**

Caso Base:

El caso base es una ejecución de largo 1. Tomamos $\rho = [S \to .\alpha][S' \to .S]$ y $v = \epsilon$, dejandonos con una ejecución de la siguiente forma:

$$([S \to .\alpha][S' \to .S], \epsilon) \underset{\mathcal{P}[\mathcal{G}]}{\vdash} ([S' \to S.], \epsilon)$$

Podemos verificar fácilmente que esta es la única ejecución posible de largo 1, ya que las otras opciones (Shift y Expandir) no nos dejarían con $\rho = [S' \to S.]$

Por definición del IPDA, debe existir la regla $S \to \alpha$, por lo que $S \underset{\mathrm{rm}}{\Rightarrow} \alpha = S \overset{*}{\underset{\mathrm{rm}}{\Rightarrow}} \alpha_2\alpha_1 v$, con $\alpha_2 = \epsilon, \alpha_1 = \alpha$ y $v = \epsilon$.

Hipotesis Inductiva:

Asumiremos que para $\rho = [X_1 \to \alpha_1.\beta_1][X_2 \to \alpha_2.\beta_2]...[X_n \to \alpha_n.\beta_n]$ y todo $v \in \Sigma^*$ tal que:

$$(\rho, v) \overset{*}{\underset{\mathcal{P}[\mathcal{G}]}{\vdash}} ([S' \to S.], \epsilon)$$

en $k < N$ pasos, entonces $S \overset{*}{\underset{\mathrm{rm}}{\Rightarrow}} \alpha_n\alpha_{n-1}...\alpha_1 v$.

Caso Inductivo:

Para todos los casos usaremos una ejecución de la forma $(\rho, v) \underset{\mathcal{P}[\mathcal{G}]}{\vdash} (\rho', v') \overset{*}{\underset{\mathcal{P}[\mathcal{G}]}{\vdash}} ([S' \to S.], \epsilon)$, donde la ejecución tiene N pasos y $\rho = [X_1 \to \alpha_1.\beta_1][X_2 \to \alpha_2.\beta_2]...[X_n \to \alpha_n.\beta_n]$

- **Caso Expandir:** Si tenemos $\beta_1 = Y\beta$ y $v' = v$, usando una transición de expandir nos queda $\rho' = [Y \to .\alpha][X_1 \to \alpha_1.Y\beta]...[X_n \to \alpha_n.\beta_n]$. Luego, por **HI** tenemos que $S \overset{*}{\underset{\mathrm{rm}}{\Rightarrow}} \alpha_n\alpha_{n-1}...\alpha_1\epsilon v' = \alpha_n\alpha_{n-1}...\alpha_1 v$. Por lo tanto, $S \overset{*}{\underset{\mathrm{rm}}{\Rightarrow}} \alpha_n\alpha_{n-1}...\alpha_1 v$.

- **Caso Shift:** Si tenemos $\beta_1 = a\beta$ y $v = av'$, siendo a terminal, entonces podemos usar una transición de shift para obtener $\rho' = [X_1 \rightarrow \alpha_1 a.\beta]...[\alpha_n \rightarrow \alpha_n.\beta_n]$. Por **HI** tenemos que $S \overset{*}{\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}} \alpha_n\alpha_{n-1}...\alpha_1 av' = \alpha_n\alpha_{n-1}...\alpha_1 v$. Por lo que $S \overset{*}{\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}} \alpha_n\alpha_{n-1}...\alpha_1 v$.

- **Caso Reducir:** Si tenemos $\beta_1 = \epsilon$, $\beta_2 = X_1\beta$ y $v' = v$, entonces con una transición de reducir tenemos que $\rho' = [X_2 \rightarrow \alpha_2 X_1.\beta_2]...[X_n \rightarrow \alpha_n.\beta_n]$. Por **HI** tenemos $S \overset{*}{\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}} \alpha_n\alpha_{n-1}...\alpha_2 X_1 v'$. Por definición del IPDA, tenemos la regla $X_1 \rightarrow \alpha_1\beta_1$. Además, $\beta_1 = \epsilon$ por lo que $X_1 \rightarrow \alpha_1$. Esto nos deja con $S \overset{*}{\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}} \alpha_n\alpha_{n-1}...\alpha_1 v' = \alpha_n\alpha_{n-1}...\alpha_1 v$. Por lo que $S \overset{*}{\underset{\text{rm}}{\Rightarrow}} \alpha_n\alpha_{n-1}...\alpha_1 v$.

Como se cumple para todos los casos, hemos demostrado lo pedido. ■