Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

# Tarea 5

12 de noviembre de 2019

2º semestre 2019 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

Rafael Fernández - 17639123

---

## Respuestas

### Pregunta 1

#### Pregunta 1.a

Para modelar el tiempo de ejecución del algoritmo, definieremos $T(n)$ en base a las veces que se ejecuta la **línea 7**.

En primer lugar, determinaremos cuántas veces se ejecuta el loop exterior (línea 1) dado el argumento $n$.

WHILE1(N)

```
1: i = n
2: while i > 1 do
3:     i = i/2
4: end while
```

De acá se puede ver que $T_1(n) = \lceil \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{n} \rceil = \lceil \log_2 n \rceil$

Ahora determinaremos lo mismo para el loop de la línea 4. En este caso, para extraer el loop del resto del programa, tendremos que pasarle como parámetro $n$ y $i$.

WHILE2(N, I)

```
j = i
while j < n do
    j = 2 * j
end while
```

Acá tenemos que

$$T_2(n, i) = \log_2 \frac{n}{i}$$

ya que el ciclo se ejecuta la cantidad de veces que podemos multiplicar $i$ por 2 hasta que sea mayor o igual a $n$.

Hasta este punto, podemos modelar la cantidad de veces que se ejecuta el WHILE2 estando dentro del WHILE1. Para esto, primero representaremos la variable $i$ de la siguiente forma:

$$i(k, n) = n * \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

donde $k$ es la iteración y $n$ el parámetro de DOSOMETHING.
Luego, podemos representar lo planteado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
T_\alpha(n) &= \sum_{k=1}^{\lceil \log_2 n \rceil} \log_2 \frac{n}{i} \\
&= \sum_{k=1}^{\lceil \log_2 n \rceil} \log_2 \left( \frac{n}{n\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\lceil \log_2 n \rceil} \log_2 2^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\lceil \log_2 n \rceil} (k-1) \\
&= \frac{\lceil \log_2 n \rceil (\lceil \log_2 n \rceil + 1)}{2} - \lceil \log_2 n \rceil \\
&= \frac{\lceil \log_2 n \rceil (\lceil \log_2 n \rceil + 1 - 2)}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\lceil \log_2 n \rceil^2 - \lceil \log_2 n \rceil)
\end{aligned}$$

Finalmente, analizaremos el ciclo más interno del programa.

---

WHILE3(N)

---

```
k = 0
while k < n do
    k = k + 2
end while
```

---

De aquí es fácil ver que

$$T_3(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

Ya que este ciclo es independiente de variables usadas en otros ciclos, la expresión final de $T$ queda:

$$\begin{aligned} T(n) &= T_\alpha(n) \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ &= \frac{1}{2}(\lceil \log_2 n \rceil^2 - \lceil \log_2 n \rceil) \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\lceil \log_2 n \rceil^2 - \lceil \log_2 n \rceil) \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil &\leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lceil \log_2 n \rceil^2 && \text{Para } n \geq 1 \\ &\leq \left(\frac{n+1}{2}\right) \log_2^2 2n \\ &\leq 2n \log_2^2 2n \\ &\leq 2n(\log_2 n + 1)^2 \\ &\leq 2n(2\log_2 n)^2 && \text{Para } n \geq 2 \\ &\leq 8n \log_2^2 n \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que

$$T(n) \in \mathcal{O}(n \log^2 n)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\lceil \log_2 n \rceil^2 - \lceil \log_2 n \rceil) \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil &\geq \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)(\log_2^2 n - \log_2 n) \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\log_2^2 n - \frac{\log_2^2 n}{2}\right) && \text{Para } n \geq 4 \\ &\geq \left(\frac{n}{8}\right) \log_2^2 n \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$T(n) \in \Omega(n \log^2 n)$$

Finalmente, podemos concluir que

$$T(n) \in \Theta(n \log^2 n)$$

**Pregunta 1.b**

Ya que $f \in \Theta(n)$ entonces $\exists c, d \in \mathbb{R}^+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ :

$$c \cdot n \leq f(n) \leq d \cdot n$$

Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} c \cdot i \leq \sum_{i=0}^{n} f(i) \leq \sum_{i=0}^{n} d \cdot i \\
c \cdot \frac{n(n+1)}{2} \leq \sum_{i=0}^{n} f(i) \leq d \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
\frac{c}{2} \cdot (n^2 + n) \leq \sum_{i=0}^{n} f(i) \leq \frac{d}{2} \cdot (n^2 + n) \\
\frac{c}{2} \cdot n^2 \leq \sum_{i=0}^{n} f(i) \leq \frac{d}{2} \cdot (n^2 + n^2) \\
\frac{c}{2} \cdot n^2 \leq \sum_{i=0}^{n} f(i) \leq d \cdot n^2 \\
\frac{c}{2} \cdot n^2 \leq g(n) \leq d \cdot n^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$g(n) \in \Theta(n^2)$$

$$\blacksquare$$

# Pregunta 2

Resolveremos la ecuacición de recurrencia mediante sustitución de variables con $n = 4^k$

$$\begin{aligned}
T(4^k) &= 4T(4^{k-1}) + 4 \cdot 4^k \log_2 2^{2k} && \text{Iteración 1}\\
&= 4T(4^{k-1}) + 2 \cdot 4^{k+1} k\\
&= 4(T(4^{k-2}) + 2 \cdot 4^k (k-1)) + 2 \cdot 4^{k+1} k && \text{Iteración 2}\\
&= 4^2 T(4^{k-2}) + 2 \cdot 4^{k+1}(k-1) + 2 \cdot 4^{k+1} k\\
&= 4^2 T(4^{k-2}) + 2 \cdot 4^{k+1}(2k-1)\\
&= 4^2(4T(4^{k-3}) + 2 \cdot 4^{k-1}(k-2)) + 2 \cdot 4^{k+1}(2k-1) && \text{Iteración 3}\\
&= 4^3 T(4^{k-3}) + 2 \cdot 4^{k+1}(3k-3)
\end{aligned}$$

Luego, para la i-esima llamada de $T$ tenemos que

$$\begin{aligned}
T(4^k) &= 4^i T(4^{k-i}) + 2 \cdot 4^{k+1}\Big(ik - \sum_{j=0}^{i-1} j\Big)\\
&= 4^i T(4^{k-i}) + 2 \cdot 4^{k+1}\left(ik - \frac{(i-1)i}{2}\right)
\end{aligned}$$

Para $i = k-1$ llegamos al caso base en $T(4)$

$$\begin{aligned}
T(4^k) &= 4^{k-1} T(4) + 2 \cdot 4^{k+1}\Big((k-1)k - \frac{(k-2)(k-1)}{2}\Big)\\
&= 3 \cdot 4^{k-1} + 2 \cdot 4^{k+1}(k-1)\Big(k - \frac{(k-2)}{2}\Big)\\
&= 3 \cdot 4^{k-1} + 2 \cdot 4^{k+1}(k-1)\Big(\frac{k}{2} + 1\Big)\\
&= 4^{k-1}\Big(3 + 2 \cdot 4^{k+1}\Big(\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} - 1\Big)\Big)\\
&= 4^{k-1}(3 + 4^2 k^2 + 4^2 k - 2 \cdot 16)\\
&= 4^{k-1}(16k^2 + 16k - 29)
\end{aligned}$$

Reemplazando con $n = 4^k \Rightarrow k = \log_4 n$

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{n}{4}(16\log_4^2 n + 16\log_4 n - 29) \\ &= 4n\log_4^2 n + 4n\log_4 n - \frac{29n}{4} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 4n\log_4^2 n + 4n\log_4 n - \frac{29n}{4} &\leq 4n\log_4^2 n + 4n\log_4 n \\ &\leq 4n\log_4^2 n + 4n\log_4^2 n && \text{Para } n \geq 4 \\ &\leq 8n\log_4^2 n \\ &\leq 8n^2\log_4 n && \text{Ya que } n > \log_4 n \\ &\leq 4n^2\log_2 n \end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que

$$T(n) \in \mathcal{O}(n^2\log_2 n \mid \text{Potencia}_4)$$

- Podemos notar que $n^2\log_2 n$ es asintóticamente no decreciente al ser la multiplicación de $n^2$ y $\log_2 n$, ambas asintóticamente no decrecientes.
- Extendiendo $T(n)$ a los reales y derivando, encontramos que $T(n)$ es asintóticamente no decreciente para $n \geq 4$.
- $(4n)^2\log_2 4n = 16n^2(\log_2 4 + \log_2 n) = 32n^2 + 16n^2\log_2 n$
  $\Rightarrow g(4n) \in \mathcal{O}(n^2\log_2 n) \Rightarrow g$ es 4-armónica.

Entonces, por teorema visto en clases

$$T(n) \in \mathcal{O}(n^2\log_2 n)$$

■