Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 1

24 de agosto de 2019

2º semestre 2019 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

Rafael Fernández - 17639123

Respuestas

Pregunta 1

Por Demostrar:

$$\sum_{i=0}^{n} i(-1)^i = (-1)^n \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso Base:

$$0 + (-1)^1 * 1 = 1 = (-1)^1 * \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil$$

Hipotesis Inductiva: Suponemos que la siguiente ecuación es cierta:

$$\sum_{i=0}^{n} i(-1)^i = (-1)^n \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \forall n \in \mathbb{N}$$

Tesis Inductiva:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i(-1)^i = (-1)^{n+1}\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i(-1)^i + (-1)^{n+1}(n+1) = \tag{2}$$

$$(-1)^n\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - (-1)^n(n+1) = \tag{3}$$

$$(-1)^n(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - (n+1)) = \tag{4}$$

$$(-1)^{n+1}((n+1) - \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil) = \tag{5}$$

Caso n **es par**:
Sea $n = 2k$

$$(-1)^{2k+1}((2k+1) - \left\lceil\frac{2k}{2}\right\rceil) = \tag{6}$$

$$(-1)^{2k+1}((2k+1) - k) = \tag{7}$$

$$(-1)^{2k+1}(k+1) = \tag{8}$$

$$(-1)^{2k+1}\left\lceil\frac{2k+1}{2}\right\rceil = (-1)^{n+1}\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

Caso n **es impar**:
Sea $n = 2k+1$

$$(-1)^{2k+2}((2k+2) - \left\lceil\frac{2k+1}{2}\right\rceil) = \tag{11}$$

$$(-1)^{2k+2}((2k+2) - (k+1)) = \tag{12}$$

$$(-1)^{2k+2}(k+1) = \tag{13}$$

$$(-1)^{2k+2}\left\lceil\frac{2k+1}{2}\right\rceil = (-1)^{n+1}\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

Pregunta 2

Sea S el conjunto de todos los Strings definidos por:
$0 \in S$
$1 \in S$
$x \in S, y \in S \Rightarrow xy \in S$

Nota: De esta definición se desprende que $L \subset S$

Sea la función $Unos : S \rightarrow \mathbb{N}$ definida por:
$Unos(0) = 0$
$Unos(1) = 1$
$Unos(xy) = Unos(x) + Unos(y)$

Por Demostrar:

$$\exists n \in \mathbb{N} | Unos(x) = 2n + 1 \Leftrightarrow x \in L, x \in S$$

Sentido $\Rightarrow$:

Por Demostrar:

$$\exists n \in \mathbb{N} | Unos(x) = 2n + 1 \Rightarrow x \in L, x \in S$$

Hipotesis Inductiva: Suponemos que la siguiente implicancia es cierta:

$$\exists n \in \mathbb{N} | Unos(x) = 2n + 1 \Rightarrow x \in L, x \in S$$

Caso Base:
$s = 1, Unos(s) = 1 = 2 * 0 + 1, s \in L$ por definición

Tesis Inductiva:
Sea $s \in S$

Caso en que s es de la forma $0x$:
$Unos(0x) = 2n + 1 = Unos(x)$, por lo tanto,
$x \in L$ por HI y $0x \in L$ por definición

Caso en que s es de la forma $x0$:
$Unos(x0) = 2n + 1 = Unos(x)$, por lo tanto,
$x \in L$ por HI y $x0 \in L$ por definición

Caso en que s es de la forma $x1y$:
$Unos(x1y) = 2n + 1 \Rightarrow Unos(xy)$ es par $\Rightarrow Unos(x) + Unos(y)$ es par,
Se puede tener un $x|Unos(x)$ es impar y un $y|Unos(y)$ es impar. Luego,
$x, y \in L$ por HI y $x1y \in L$ por definición.

Sentido $\Leftarrow$:

Por Demostrar:

$$x \in L \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}|Unos(x) = 2n + 1$$

Hipotesis Inductiva: Suponemos que la siguiente implicancia es cierta:

$$x \in L \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}|Unos(x) = 2n + 1$$

Caso Base:
$s = 1, s \in L, Unos(s) = 1 = 2 * 0 + 1$

Tesis Inductiva:
1. $x \in L \Rightarrow 0x \in L$:
$Unos(x) = 2n + 1$
$Unos(0x) = 0 + Unos(x) = 2n + 1$

2. $x \in L \Rightarrow x0 \in L$:
$Unos(x) = 2n + 1$
$Unos(x0) = Unos(x) + 0 = 2n + 1$

3. $x, y \in L \Rightarrow x1y \in L$:
$Unos(x1y) = Unos(x) + 1 + Unos(y)$
$Unos(x1y) = 2p + 1 + 1 + 2q + 1; p, q \in \mathbb{N},$ por HI.
$Unos(x1y) = 2p + 2q + 2 + 1$
$Unos(x1y) = 2p + 2q + 2 + 1$
$Unos(x1y) = 2(p + q + 1) + 1$
$Unos(x1y) = 2r + 1, r \in \mathbb{N}$