NOMBRE: Rafael Fernández Sánchez NOTA:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2223 — Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales 2020-2

Tarea 5 – Respuesta Pregunta 2

2.1

Sea L subconjunto infinito de $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$. Demostraremos que L no es libre de contexto utilizando el Lema de bombeo para lenguajes libres de contexto:

$\forall N > 0$, podemos elegir $z \in L$, $z = a^m b^m c^m$ con $m > N$. La palabra z siempre existirá en el lenguaje ya que L es inifnito, por lo que $|L| > N$, lo que implica que $\exists z = a^m b^m c^m \in L, m > N$. Luego, cumplimos la condición de que $|z| \geq N$, ya que $|z| = 3m > N$.

Luego, tenemos que revisar los posibles valores que podría tomar el *string* de la forma $uvwxy$, con $vx \neq \epsilon$ y $|vwx| \leq N$. Tenemos dos casos:

- **vwx es subpalabra de a^m, b^m o c^m:**
  Llamaremos j al símbolo tal que vwx es subpalabra de j^m y llamaremos k y l a los símbolos restantes tal que vwx no es subpalabra de k^m ni l^m. Luego, $v = j^p, w = j^q, x = j^r, p + q + r \leq N < m$. Bombeando, obtenemos una porcion de la palabra de la forma $j^{pi} j^q j^{ri}$, donde si elegimos $i = m$, obtenemos una porcion de la palabra de la forma $j^{pm} j^q j^{rm}$ y ya que $(pm + q + rm) \neq m$ y $p + r > 0$, entonces tenemos un "desequilibrio" entre j y k y l, por lo que $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \notin L$.

- **vwx NO es subpalabra de a^m, b^m o c^m:**
  Esto significa que tenemos dos símbolos distintos en vwx, los cuales llamaremos j y k. Notemos que no pueden estar los tres símbolos ya que para esto necesitaríamos que $|vwx| \geq m + 2$. El símbolo que no pertenece a z lo llamaremos l. Luego, podemos "desestabilizar" la palabra bombeando con v^i o x^i, $i > 1$, ya que alguna necesariamente debe contener el símbolo j o k, lograremos que $\#_j(z) \neq \#_l(z)$ o bien $\#_k(z) \neq \#_l(z)$, lo cual, en ambos casos, produce que $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \notin L$.

2.2

$\forall N > 0$, podemos elegir $z \in L, z = 1010^2 10^4 ... 10^{2^N} \# 0101^2 01^4 ... 01^{2^N}$.

Usaremos los nombres de j y k tal que $z = j\#k$.

Luego, tenemos varios casos para las descomposiciones de la forma $u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y$:

- **$|v| \neq |x|$:**
  En este caso al bombear con $i = 1$ generaríamos que $|j| \neq |k|$, por lo que la palabra generada no prodría pertenecer a L.

- **$\# \in vx$:**
  En este caso, al bombear con $i = 1$ generaríamos que existan 2 símbolos $\#$ en la palabra, por lo que no puede pertenecer a L.

- **$\# \in uy$:**
  Esto implica que $vwx \in j$ o $vwx \in k$, por lo que al bombear con $i = 1$, provocamos que $|j| \neq |k|$, por que la nueva palabra no pertence a L.

- **$\# \in w$ y $|v| = |x|$:**
  LLamaremos como α a la cantidad de simbolos en w que van después de $\#$. Si $|u| > \alpha$, entonces podemos bombear con $i = |u|$ veces. Ya que x es una secuencia que será repetida y u debe contener símbolos distintos para $|u| > 1$, entonces eventualmente encontraremos que algún símbolo calza.

  De manera similar, si llamamos β a la cantidad de símbolos en w que estan antes del $\#$, y tenemos que $|y| > \beta$, entonces podemos usar $i = |y|$ para generar una secuencia que repetida que corresponde en un segmento a la inversa de la palabra correspondiente en k, pero que al repetirla no podrá seguir el patrón ya que elegimos una estructura para z que no es cíclica.