NOMBRE: Rafael Fernández Sánchez NOTA:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2223 — Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales 2020-2

# Tarea 7 – Respuesta Pregunta 1

## 1.1

Sea $k \geq 1$. Sea L el lenguaje definido por la expresión regular $R = ab^*$. Como está definido por una expresión regular, sabemos que $L$ es regular. Sea

$$\mathcal{G} : S \to Sb \mid a$$

Primero demostraremos que $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = L$ y luego que $\mathcal{G}$ no es $LL(k)$.

### $\mathcal{L}(\mathcal{G}) \subseteq L$

Demostraremos por inducción sobre el largo de la derivación.

- **Caso Base:**
  $S \Rightarrow a$. Podemos ver que $a \in L$
  $S \Rightarrow Sb \Rightarrow ab$. Podemos ver tambien que $ab \in L$
- **Hipótesis Inductiva:** Para $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ en $n$ pasos, $w \in L$.
- **Tesis Inductiva:** Asumiremos **HI**. Luego, tenemos que una derivación de $n+1$ pasos debe ser de la forma $S \Rightarrow Sb \overset{*}{\Rightarrow} w'$. Por **HI**, sabemos que $S \overset{*}{\Rightarrow} w, w \in L$. Luego, $Sb \overset{*}{\Rightarrow} wb = w'$. A cada palabra en $L$ podemos agregarle una $b$ y seguirá estando en $L$, debido a la clausura de Kleene. Luego, $w' \in L$. Como es la unica forma de generar una palabra en $n+1$ pasos, hemos demostrado lo pedido.

### $L \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{G})$

Demostraremos por inducción sobre el largo de $w$.

- **Caso Base:** Para $w \in L, |w| = 1$, tenemos que la unica opcion es $w = a$. Tomando la derivación $S \Rightarrow a$, podemos ver que $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$.
- **Hipótesis Inductiva:** Para $w \in L, |w| = n$, se cumple que $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$
- **Tesis Inductiva:** Demostraremos para un $w' = wb, |w'| = n+1$. Por **HI**, sabemos que $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$, por lo que existe la derivación $S \overset{*}{\Rightarrow} w$. Luego, podemos tomar $S \Rightarrow Sb \overset{*}{\Rightarrow} wb = w'$. Como hemos encontrado una derivación para $w'$, entonces $w' \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Con esto, hemos demostrado que $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = L$, por lo que $\mathcal{G}$ define un lenguaje regular.

Finalmente, podemos ver que $\mathcal{G}$ es reducida y recursiva por la izquierda. Por el teorema visto en clases, sabemos entonces que $\mathcal{G}$ no es $LL(k)$ $\forall k \geq 1$.

Por lo tanto, demostramos que para todo $k$ existe una GLC $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ es regular y $\mathcal{G}$ no es $LL(k)$■.

## 1.2

Sea $L$ un lenguaje regular. Luego, existe un autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$. Asociado a este autómata, podemos definir una gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma', P, S)$, con

$$
\begin{aligned}
&V = Q \\
&\Sigma' = \Sigma \\
&P = \{X \to aY \mid \ \forall a \in \Sigma, \forall X, Y \in Q, X \xrightarrow{a} Y \in \delta \ \wedge Y \notin F\} \cup \\
&\quad \{X \to a \mid \ \forall a \in \Sigma, \forall X, Y \in Q, X \xrightarrow{a} Y \in \delta \ \wedge Y \in F\} \\
&S = q_0
\end{aligned}
$$

A continuación demostraremos que $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = L$.

### $\mathcal{L}(\mathcal{G}) \subseteq L$

Primero demostramos que para cada derivación $X \overset{*}{\Rightarrow} w$ en $n$ pasos, existe una secuencia $p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \xrightarrow{a_3} ... \xrightarrow{a_n} p_n$ en $\mathcal{A}$, donde $p_n \in F$ y $p_0$ **no necesariamente** es igual a $q_0$.

- **Caso Base:** Para $X \Rightarrow a$ (deriva en un paso), tenemos que existe la regla $X \to a$. Luego, construcción de $\mathcal{G}$ debe existir una transición $X \xrightarrow{a} Y \in \delta$ tal que $Y \in F$.
- **Hipótesis Inductiva:** Asumiremos lo que queremos demostrar para una derivación con $n$ pasos.
- **Tesis Inductiva:** Para $X \Rightarrow a_0 Y \overset{*}{\Rightarrow} w$, una derivación de $n+1$ pasos, tenemos que debe existir la transición $X \xrightarrow{a_0} Y$ en $\mathcal{A}$. Por **HI**, sabemos que existe una secuencia para la derivación $Y \overset{*}{\Rightarrow} w$. Uniendo ambas secuencias, tenemos que existe la secuencia $X \xrightarrow{a_0} Y \xrightarrow{a_1} ... \xrightarrow{a_n} Z, Z \in F$.

Habiendo demostrado eso, sabemos que para cada $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ de $\mathcal{G}$, existe una secuencia en $\mathcal{A}$ que termina en un estado final. Ya que $S = q_0$. Tenemos que esas secuencias son ejecuciones en $\mathcal{A}$, donde cada letra en $w$ coincide con cada transición de esa ejecución, por lo que $w \in L$.

### $L \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{G})$

Demostraremos que para secuencia de estados $p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \xrightarrow{a_3} ... \xrightarrow{a_n} p_n$ de $\mathcal{A}$, con $p_n \in F$, existe una derivación $S \overset{*}{\Rightarrow} w = a_1 a_2 ... a_n$ en $\mathcal{G}$. Usaremos inducción sobre el largo de la ejecución.

- **Caso Base:** Para una secuencia $p_0 \xrightarrow{a} p_1, p_1 \in F$, por construcción de $\mathcal{G}$ existe una regla de la forma $p_0 \to a$
- **Hipótesis Inductiva:** Asumiremos lo que queremos demostrar para una secuencia con $n$ pasos.
- **Tesis Inductiva:** Para $p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \xrightarrow{a_3} ... \xrightarrow{a_{n+1}} p_{n+1}$, tenemos que por construcción de $\mathcal{G}$, debe existir la regla $p_0 \to a_1 p_1$. Por **HI**, sabemos que para el resto de la secuncia (que es de largo $n$) existe una derivación $p \overset{*}{\Rightarrow} w = a_2 a_3 .... a_{n+1}$. Luego, $p_0 \Rightarrow a_1 p_1 \overset{*}{\Rightarrow} a_1 a_2 ... a_{n+1}$ es una derivación válida en $\mathcal{G}$.

Ahora, para una ejecución de aceptación de $\mathcal{A}$ sobre $w$, como sabemos que $S = q_0$, tendremos que existe una derivación $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ en $\mathcal{G}$, por lo que hemos demostrado que $L \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Por último, demostraremos que $\mathcal{G}$ es una gramática $LL(1)$.

Sean dos derivaciones

$$S \overset{*}{\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}} uY\beta \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} u\gamma_1\beta \overset{*}{\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}} uv_1$$

$$S \overset{*}{\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}} uY\beta \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} u\gamma_2\beta \overset{*}{\underset{\text{lm}}{\Rightarrow}} uv_2$$

Notemos que cada regla solo agrega terminales a la izquierda, por lo que $\beta = \epsilon$. Sabemos que $\mathcal{A}$ es DFA. Luego, como cada regla fue creada a partir de una transición y ya que desde un estado en $Q$ solo se puede llegar con una misma letra a un solo estado (y no múltiples), entonces si tenemos $v_1|_1 = v_2|_1$ implica que $\gamma_1 = \gamma_2$.

Dicho de otra forma, si tenemos las reglas $X \to aY$ y $X \to bZ$ y sabemos que $a = b$, entonces $Y = Z$ ya que las transiciones de $\mathcal{A}$ dada una letra, solo pueden llegar a un estado de destino por el hecho de ser DFA.

Por lo tanto, $G$ es $LL(1)$ y hemos demostrado que para todo lenguaje regular $L$, existe una GCL $\mathcal{G}$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ y $\mathcal{G}$ es una gramática $LL(k)$ para algún $k$.

$\blacksquare$