PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Tarea 6

13 de diciembre de 2019

2º semestre 2019 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

Rafael Fernández - 17639123

Respuestas

Pregunta 1

Sean G y H grafos simples con *caminos Hamiltonianos.*
Sea $C_G = (g_1, g_2, ..., g_n)$ con $g_i \in V(G), i \in \{1..n\}$ un *Camino Hamiltoniano* en G.
Sea $C_H = (h_1, h_2, ..., h_m)$ con $h_i \in V(H), i \in \{1..m\}$ un *Camino Hamiltoniano* en H.

Sea $I = G \times V$. Por definición de producto cartesiano entre grafos, tenemos los siguientes caminos en I:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= ((g_1, h_1), (g_1, h_2), ..., (g_1, h_m)) \\
C_2 &= ((g_2, h_m), (g_2, h_{m-1}), ..., (g_2, h_1)) \\
C_3 &= ((g_3, h_1), (g_3, h_2), ..., (g_3, h_m)) \\
&\vdots \\
C_n &= \begin{cases} ((g_n, h_1), (g_n, h_2), ..., (g_n, h_m)) & n \text{ impar} \\ ((g_n, h_m), (g_n, h_{m-1}), ..., (g_n, h_1)) & n \text{ par} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Luego, entre cada camino $C_i, C_{i+1}, \forall i \in \{1, ..., n-1\}$, por la definición del producto cruz, existen aristas de la forma:

$$a_{i,i+1} \begin{cases} ((g_i, h_m), (g_{i+1}, h_m)) & i \text{ impar} \\ ((g_i, h_1), (g_{i+1}, h_1)) & i \text{ par} \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos el camino $C = C_1, a_{1,2}, C_2, a_{2,3}, ..., C_{n-1}, a_{n-1,n}, C_n$, el cual es *Hamiltoniano* ya que contiene a todos los vértices de I.

■

Pregunta 2

Pregunta 2.a

Por demostrar:
G es árbol $\Leftrightarrow$ tiene exactamente un ciclo al agregar una arista cualquiera

($\Rightarrow$)
Sea $v_1, v_2 \in V(G)$. Ya que G es aŕbol, existe un camino único $v_2, ..., v_2$ que conecta ambos vértices. Luego, al agregar la arista (v_2, v_1) se habrá formado un ciclo. Ya que el camino que unía a los vértices era único, el ciclo es único. $\blacksquare$.

($\Leftarrow$) Sea G un grafo que al agregar una arista cualquiera se forma exactamente un ciclo. Ya que al agregar una arista (v_1, v_2), $v_1, v_2 \in V(G)$, se forma un ciclo, entonces debe existir un camino $v_2, ..., v_1$ entre ambos vertices. Ya que el ciclo es único, el camino debe ser único. Como elegimos v_1, v_2 genéricos, esto se cumple para todos los vértices, por lo que hay un camino único entre cada par de vértices $\Rightarrow G$ es un árbol. $\blacksquare$.

Pregunta 2.b

Sea T un bosque con k árboles (componentes conexas).
Luego, $|V(T)| = n = \sum_{i=1}^{k} |V(k_i)|$, donde k_i es el i-esimo árbol.
Por la definición alternativa vista en clases, sabemos que cada árbol tiene $|V(k_i)| - 1$ aristas. Ya que no hay caminos entre árboles, no hay aristas entre estos y la cantidad total de aristas es la siguiente:

$$\begin{aligned}
|E(T)| &= \sum_{i=1}^{k} (|V(k_i)| - 1) \\
&= \sum_{i=1}^{k} |V(k_i)| - \sum_{i=1}^{k} 1 \\
&= n - k
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Pregunta 2.c

Sea $G = (V, E)$ un grafo cualquiera. Sea $v \in V(G)$ un vértice de grado $k > 1$.
Sabemos por teorema visto en clases que los árboles son estructuras recursivas ($T - v$ también es árbol).
Luego, para cada uno de los vértices adyacetes a v se tiene un árbol. Sabemos que un árbol no vacío tiene al menos un nodo hoja.

En el caso de que v sea nodo raíz, tiene k hijos y por lo tanto k sub-árboles, lo que implica que tiene al menos k nodos hojas.
En otro caso, v tiene $k - 1$ hijos , lo que significa al menos $k - 1$ hojas Ya que cada árbol tiene por lo menos 1 nodo hoja, tenemos por lo menos $k - 1$ hojas. Luego hay 2 casos:

- Grado del nodo padre de v es 1 $\Rightarrow$ es nodo hoja $\Rightarrow$ al menos k hojas en total.
- Grado nodo padre es mayor a 1 $\Rightarrow$ existe al menos otro sub-árbol hermano de v $\Rightarrow$ al menos k hojas en total.

$\blacksquare$