Práctica 1. Resolución numérica de problemas de contorno 1D.

El objetivo de esta práctica es realizar un programa en python que aproxime la solución del siguiente problema de contorno:

$$\begin{aligned} u(x) - \nu u''(x) &= f(x),\ x \in (a,b) \\ u(a) &= u_a \\ u(b) &= u_b, \end{aligned}$$

siendo $a = 0$, $b = 1$, $\nu = 2.0$, $f(x) = 5e^{-(x-0.5)^2}$, $u_a = u_b = 0$.

Para ello procederemos de la siguiente forma:

- En primer lugar, se discretizará el intervalo $[0,1]$ usando 100 particiones, esto es, $\Delta x = 0.01$.
- Se usará la fórmula
$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{(\Delta x)^2},$$
para aproximar el valor de la segunda derivada en los puntos x_i, interiores al intervalo $[a,b]$.
- De esta forma el problema se reduce a resolver el sistema lineal $A \cdot U = B$, donde A es una matriz tridiagonal dada por
$$a_{0,0} = 1.0, \quad a_{n,n} = 1.0,$$
$$a_{i,i} = 1.0 + \frac{2\nu}{(\Delta x)^2},\ a_{i,i+1} = -\frac{\nu}{(\Delta x)^2},\ a_{i,i-1} = -\frac{\nu}{(\Delta x)^2}, \quad i = 1, \cdots, n-1.$$
$$U = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_n],$$
$$B = [u_a, f(x_1) + u_a \cdot \frac{\nu}{(\Delta x)^2}, f(x_2), \dots, f(x_{n-1}) + u_b \cdot \frac{\nu}{(\Delta x)^2}, u_b].$$
Recuerde que u_0 y u_n son valores conocidos.
- Descargue el fichero *practica1.py* en el campus virtual con las diferentes implementaciones para este problema.

1. Modifique los programas anteriores para resolver el problema de contorno
$$\begin{aligned} u(x) - \nu u''(x) &= f(x),\ x \in (a,b) \\ u(a) &= u_a \\ u'(b) &= u'_b \end{aligned}$$
siendo, $a = 0$, $b = 1$, $\nu = 2.0$, $f(x) = 5e^{-(x-0.5)^2}$, $u_a = 1$, $u'_b = 0$. Óbsérvese que la matriz del sistema lineal resultante no es simétrica.

2. Utilice los programas anteriores para aproximar el siguiente problema de evolución

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= f(x,t),\ x \in (a,b),\ t \in (0,T] \\
u(a,t) &= u_a \\
u(b,t) &= u_b \\
u(x,0) &= 0,
\end{aligned}$$

   siendo, $a = 0$, $b = 1$, $\nu = 2.0$, $f(x,t) =$, $f(x,t) = 5e^{-(x-0.5)^2}$, $u_a = u_b = 0$, $T = 2.0$. Usar para ello una malla con $\Delta x = 0.01$ y $\Delta t = 0.05$. Deberá implementar dos funciones python, una que utilice un algoritmo iterativo y otra que use un algoritmo directo para la resolución de los sistemas lineales resultantes.

3. Modifique los programas anteriores para resolver el siguiente problema de evolución:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= f(x,t),\ x \in (a,b),\ t \in (0,T] \\
u(a,t) &= u_a \\
\frac{\partial u}{\partial x}(b,t) &= u_b' \\
u(x,0) &= 0,
\end{aligned}$$

   siendo, $\nu = 2.0$, $f(x,t) =$, $f(x) = 5e^{-(x-0.5)^2}$, $u_a = 1$, $u_b' = 0$ y $L = 1.0$, $T = 2.0$. Usar para ello una malla con $\Delta x = 0.01$ y $\Delta t = 0.05$. Al igual que en el problema anterior deberá implementar dos funciones python que usen un algoritmo iterativo y directo (respectivamente) para la resolución de los sistemas lineales resultantes.

4. Realice una implementación del θ-método visto en clase para el problema 2.