Práctica 3. Resolución numérica de problemas de contorno 2D.

El objetivo de esta práctica es realizar funciones en python para la aproximación de los siguientes problemas de contorno:

$$\begin{aligned} u(x,y) - \nu\Delta u(x,y) &= f(x,y),\ (x,y) \in \Omega = (0,L_x) \times (0,L_y) \\ u(x,y) &= u_0,\ (x,y) \in \Gamma_0 = \{(x,0),\ x \in [0,L_x]\}, \\ u(x,y) &= u_1,\ (x,y) \in \Gamma_1 = \{(L_x,y),\ y \in [0,L_y]\}, \\ u(x,y) &= u_2,\ (x,y) \in \Gamma_2 = \{(x,L_y),\ x \in [0,L_x]\}, \\ u(x,y) &= u_3,\ (x,y) \in \Gamma_2 = \{(0,y),\ y \in [0,L_y]\}, \end{aligned} \tag{0.1}$$

siendo $\nu = 2.0$, $f(x,y) = 5e^{-((x-0.5)^2+(y-0.5)^2)}$, $u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0$, $L_x = 1.0$ y $L_y = 1.0$.

$$\begin{aligned} u(x,y) - \nu\Delta u(x,y) &= f(x,y),\ (x,y) \in \Omega = (0,L_x) \times (0,L_y) \\ u(x,y) &= u_0,\ (x,y) \in \Gamma_0 = \{(x,0),\ x \in [0,L_x]\}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= u_n,\ (x,y) \in \Gamma_1 = \{(L_x,y),\ y \in [0,L_y]\}, \\ u(x,y) &= u_2,\ (x,y) \in \Gamma_2 = \{(x,L_y),\ x \in [0,L_x]\}, \\ u(x,y) &= u_3,\ (x,y) \in \Gamma_2 = \{(0,y),\ y \in [0,L_y]\}, \end{aligned} \tag{0.2}$$

siendo $\nu = 2.0$, $f(x,y) = 5e^{-((x-0.5)^2+(y-0.5)^2)}$, $u_0 = u_2 = u_3 = 0$, $u_n = 0$, $L_x = 1.0$ y $L_y = 1.0$,

- Implementar una función python para la aproximación del problema (0.1) usando el método de diferencias finitas centradas de segundo orden y el algoritmo LU para matrices sparse. A modo de ejemplo pueden utilizarse los valores $\delta_x = \delta_y = 0.01$. Idem para $\delta_x = \delta_y = 0.001$.
- Idem para el problema (0.2)

Consideramos ahora el siguiente problema de evolución:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) - \nu\Delta u(x,y,t) &= f(x,y,t),\ (x,y) \in \Omega = (0,L_x) \times (0,L_y),\ t \in (0,T] \\ u(x,y,t) &= \bar{u}_0,\ (x,y) \in \Gamma_0 = \{(x,0),\ x \in [0,L_x]\}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,t) &= u_n,\ (x,y) \in \Gamma_1 = \{(L_x,y),\ y \in [0,L_y]\}, \\ u(x,y,t) &= \bar{u}_2,\ (x,y) \in \Gamma_2 = \{(x,L_y),\ x \in [0,L_x]\}, \\ u(x,y,t) &= \bar{u}_3,\ (x,y) \in \Gamma_2 = \{(0,y),\ y \in [0,L_y]\}, \\ u(x,y,0) &= u_0(x,y)\ (x,y) \in \Omega, \end{aligned} \tag{0.3}$$

siendo $\nu = 2.0$, $f(x,y,t) = 5e^{-((x-0.5)^2+(y-0.5)^2)}$, $u_0 = u_2 = u_3 = 0$, $u_n = 0$, $T = 2.0$, $L_x = 1.0$ y $L_y = 1.0$.

- Implementar una función python para la aproximación del problema (0.3) usando el método de diferencias finitas centradas de segundo orden para la discretización en espacio, el método de Euler implícito y el algoritmo LU para matrices sparse para resolver el sistema lineal resultante en cada iteración de tiempo tomando $\delta_x = \delta_y = 0.01$ y $\delta_t = 0.1$ Idem para $\delta_x = \delta_y = 0.001$ y $\delta_t = 0.05$.

- Idem para el θ-método.