Ρομποτική Ι: Ανάλυση Έλεγχος και Εργαστήριο

Δάσκος Ραφαήλ - Α.Μ.: 03116049

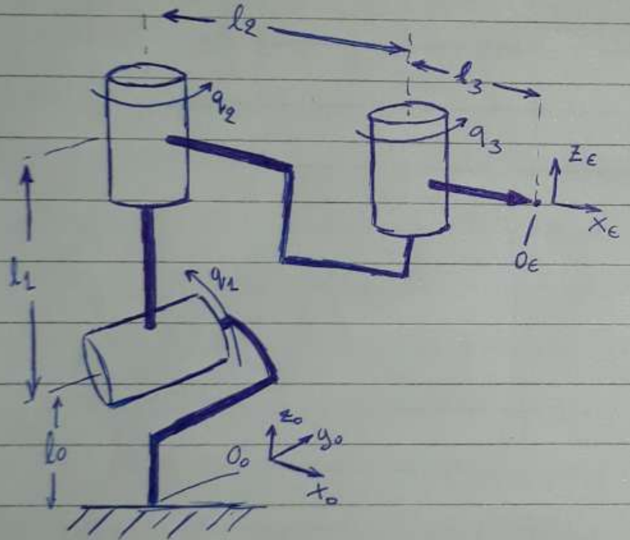
Σ.Η.Μ.Μ.Υ. - Ε.Μ.Π.

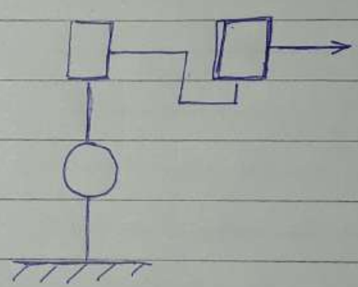
Εξαμηνιαία Εργασία

7ο εξάμηνο - 2019 - 2020

Ροή Σ: Σήματα, Έλεγχος, Ρομποτική

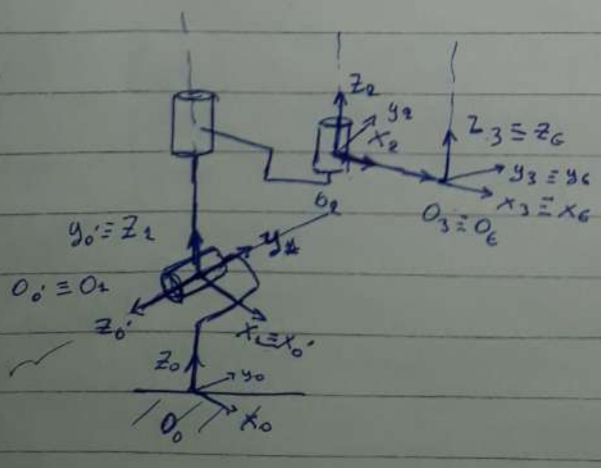
Ρομποτικός Χειριστής τριών στροφικών βαθμίδων





Α. Θεωρητική Ανάλυση

1. τοποθετούμε τα πλαίσια αναφοράς των συνδέσμων του βραχίονα σύμφωνα με τη μέθοδο Denavit-Hartenberg



Με βάση αυτά τα πλαίσια προσδιορίζουμε τον πίνακα παραμέτρων D-H:

	d_i	θ_i	a_i	α_i
$0'$	l_0	0	0	$\pi/2$
1	0	q_1	0	$-\pi/2$
2	l_1	q_2	l_2	0
$3{:}\varepsilon$	0	q_3	l_3	0

2. Για τον υπολογισμό της ευθείας κινηματικής ανάλυσης παίρνουμε:

$$A^0_\varepsilon(q_1,q_2,q_3) = tra(z,l_0)\,rot(x,\pi/2)\,rot(z,q_1)\,rot(x,-\pi/2)\,rot(z,q_2)\,tra(z,l_1)\,tra(x,l_2)$$
$$rot(z,q_3)\,tra(x,l_3)$$

Θα υπολογίσουμε και τα ενδιάμεσα A^0_1, A^0_2 γιατί θα μας βοηθήσουν και στη συνέχεια.

$$A^0_{0'} = tra(z,l_0)\,rot(x,\pi/2) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & b_{0'} & r_{00'} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{\begin{matrix}0\\-1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\\l_0\end{matrix}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A^0_{0'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{0'}_1 = rot(z,q_1)\,rot(x,-\pi/2) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^1_2 = rot(z,q_2)\,tra(z,l_1)\,tra(x,l_2) = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3^2 = rot(z,q_3)\, tra(x,l_3) = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε όπως είπαμε και τους υπόλοιπους πίνακες πριν τον A^0_ϵ

$$A_1^0 = A_0^0 \cdot A_1^{0'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{cccc} & & b_1 & r_{01} \\ \end{array} \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \boxed{\begin{matrix}-s_1 \\ 0 \\ c_1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0 \\ 0 \\ l_0\end{matrix}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2^0 = A_1^0 A_2^1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{cccc} & & b_2 & r_{02} \\ \end{array} \begin{pmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1 & l_2c_1c_2 - l_1s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2s_2 \\ s_1c_2 & c_1 & c_1 & l_2s_1c_2 + l_1c_1 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3^0 = A_2^0 A_3^2 = \begin{pmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1 & l_2c_1c_2 - l_1s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2s_2 \\ s_1c_2 & c_1 & c_1 & l_2s_1c_2 + l_1c_1 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A_3^0 = \begin{array}{cccc} & & & r_{03} \equiv r_{0\epsilon} \\ \end{array} \begin{pmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & -s_1 & l_3c_{23}c_1 + l_2c_1c_2 - l_1s_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_3s_{23} + l_2s_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & c_1 & l_3s_1c_{23} + l_2s_1c_2 + l_2c_1 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_3^0 \equiv A_\epsilon^0$ καθώς το $\epsilon \equiv 3$

3. Για την εύρεση της ιακωβιανής μήτρας χρειάζεται να βρούμε τα J_{L_i}, J_{A_i}
Αφού έχουμε μόνο στροφικές αρθρώσεις θα είναι:

$$J_{L_i} = b_{i-1} \times r_{i-1,\epsilon} \quad , \quad r_{i-1,\epsilon} = r_{0\epsilon} - r_{0,i-1}$$

$$J_{A_i} = b_{i-1}$$

Τα b_{i-1} είναι αυτά που έχουμε σημειώσει στους πίνακες του 2ου ερωτήματος καθώς είναι στροφές ως προς τον άξονα z της άρθωσης. Έτσι έχουμε:

για $i=1$:

$$r_{0'\epsilon} = r_{0\epsilon} - r_{00'} = \begin{pmatrix} l_3 c_{23} c_1 + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 \\ l_3 s_{23} + l_2 s_2 \\ l_3 s_1 c_{23} + l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1 \end{pmatrix}$$

Έτσι $J_{L_1} = b_{0'} \times r_{0'\epsilon} = \begin{pmatrix} -l_3 s_1 c_{23} - l_2 s_1 c_2 - l_1 c_1 \\ 0 \\ l_3 c_{23} c_1 + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 \end{pmatrix}$ και $J_{A_1} = b_{0'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

για $i=2$: $r_{1\epsilon} = r_{0\epsilon} - r_{01} = \begin{pmatrix} l_3 c_{23} c_1 + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 \\ l_3 s_{23} + l_2 s_2 \\ l_3 s_1 c_{23} + l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1 \end{pmatrix}$

Έτσι $J_{L_2} = b_1 \times r_{1\epsilon} = \begin{pmatrix} -l_3 c_1 s_{23} - l_2 s_2 c_1 \\ l_3 s_1^2 c_{23} + l_2 s_1^2 c_2 + \cancel{l_1 c_1 s_1} + l_3 c_{23} c_1^2 + l_2 c_1^2 c_2 - \cancel{l_1 s_1 c_1} \\ -l_3 s_1 s_{23} - l_2 s_2 s_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$J_{L_2} = \begin{pmatrix} -l_3 c_1 s_{23} - l_2 s_2 c_1 \\ l_3 c_{23} + l_2 c_2 \\ -l_3 s_1 s_{23} - l_2 s_2 s_1 \end{pmatrix}$ και $J_{A_2} = b_1 = \begin{pmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$

για $i=3$: $r_{2E} = r_{0E} - r_{02} = \begin{pmatrix} l_3 c_{23} c_1 \\ l_3 s_{23} \\ l_3 s_1 c_{23} \end{pmatrix}$

έτσι $J_{L_3} = b_2 \times r_{2E} = \begin{pmatrix} -l_3 s_{23} c_1 \\ l_3 c_{23} c_1^2 + l_3 c_{23} s_1^2 \\ -l_3 s_{23} s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_3 s_{23} c_1 \\ l_3 c_{23} \\ -l_3 s_{23} s_1 \end{pmatrix}$ και $J_{A_3} = \begin{pmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$

οπότε η ιακωβιανή ορίζουσα είναι:

$$J = \begin{bmatrix} -l_3 s_1 c_{23} - l_2 s_1 c_2 - l_1 c_1 & -l_3 c_1 s_{23} - l_2 c_1 s_2 & -l_3 c_1 s_{23} \\ 0 & l_3 c_{23} + l_2 c_2 & l_3 c_{23} \\ l_3 c_1 c_{23} + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 & -l_3 s_1 s_{23} - l_2 s_1 s_2 & -l_3 s_1 s_{23} \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_1 \end{bmatrix}$$

4. για τον προσδιορισμό του αντίστροφου κινηματικού μοντέλου του ρομπότ ως προς τη γραμμική ταχύτητα του τελικού εργαλείου δράσης, αλλά και για τις ιδιόμορφες κινηματικές διατάξεις του συστήματος χρειάζεται να υπολογίσουμε την ορίζουσα των τριών πρώτων γραμμών (J_L)

$$\det(J_L) = (-l_3 s_1 c_{23} - l_2 s_1 c_2 - l_1 c_1) \begin{vmatrix} l_3 c_{23} + l_2 c_2 & l_3 c_{23} \\ -l_3 s_1 s_{23} - l_2 s_1 s_2 & -l_3 s_1 s_{23} \end{vmatrix} -$$

$$-(l_3 c_1 s_{23} - l_2 c_1 s_2) \begin{vmatrix} 0 & l_3 c_{23} \\ l_3 c_1 c_{23} + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 & -l_3 s_1 s_{23} \end{vmatrix} + (-l_3 c_1 s_{23}) \begin{vmatrix} 0 & l_3 c_{23} + l_2 c_2 \\ l_3 c_1 c_{23} + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 & -l_3 s_1 s_{23} - l_2 s_1 s_2 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$

Κάνουμε χρήση του matlab για να μειώσουμε τις πράξεις και παίρνουμε:

$$\det(J_L) = s_{23} l_2^2 l_3 c_1^2 c_2^2 - s_2 l_2^2 l_3 c_1^2 c_2 c_{23} + s_{23} l_2^2 l_3 c_2^2 s_1^2 - s_2 l_2^2 l_3 c_2 c_{23} s_1^2 +$$
$$+ s_{23} l_2 l_3^2 c_1^2 c_2 c_{23} - s_2 l_2 l_3^2 c_1^2 c_{23}^2 + s_{23} l_2 l_3^2 c_2 c_{23} s_1^2 - s_2 l_2 l_3^2 c_{23}^2 s_1^2 \Rightarrow$$

$$\det(J_L) = l_2^2 l_3 \left(s_{23} c_2^2 (c_1^2 + s_1^2) - s_2 c_2 c_{23} (c_1^2 + s_1^2) \right) +$$
$$+ l_2 l_3^2 \left(s_{23} c_2 c_{23} (s_1^2 + c_1^2) - s_2 c_{23}^2 (c_1^2 + s_1^2) \right) \xRightarrow{s_1^2 + c_1^2 = 1}$$

$$\det(J_L) = l_2^2 l_3 c_2 (s_{23} c_2 - s_2 c_{23}) + l_2 l_3^2 c_{23} (s_{23} c_2 - s_2 c_{23}) \Rightarrow$$

$$\det(J_L) = l_2 l_3 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})(s_{23} c_2 - s_2 c_{23}) \xrightarrow[\text{τύπος}]{\text{τριγωνομετρικός}}$$

$$\det(J_L) = l_2 l_3 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})(\sin(q_2 + q_3 - q_2)) \Rightarrow$$

$$\det(J_L) = l_2 l_3 s_3 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})$$

Θέλουμε τον πίνακα J_L^{-1}. Για το λόγο αυτό βρίσκουμε μέσω matlab τον:

$$adj(J_L) = \begin{bmatrix} -l_2 l_3 s_1 s_3 & 0 & l_2 l_3 c_1 s_3 \\ * & s_{23} l_3 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) & l_1 c_1 c_{23} l_3 + l_3 s_1 c_{23} (l_3 c_{23} + l_2 c_2) \\ [s_1 l_1 - c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})] \cdot (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) & -(l_2 s_2 + l_3 s_{23})(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) & -(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) [c_1 l_1 + s_1 (c_2 l_2 + c_{23} l_3)] \end{bmatrix}$$

$$* = l_3 c_1 c_{23} (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) - l_1 l_3 c_{23} s_1$$

έτσι $J_L^{-1} = \dfrac{adj(J_L)}{\det(J_L)}$ οπότε θα πάρουμε

$$J_L^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{s_1}{l_2 c_2 + l_3 c_{23}} & 0 & \dfrac{c_1}{l_2 c_2 + l_3 c_{23}} \\ \dfrac{c_1 c_{23}}{l_2 s_3} - \dfrac{c_{23} l_1 s_1}{l_2 s_3 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})} & \dfrac{s_{23}}{l_2 s_3} & \dfrac{c_{23} s_1}{l_2 s_3} + \dfrac{c_1 l_1 c_{23}}{l_2 l_3 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})} \\ \dfrac{s_1 l_1 - c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})}{l_2 l_3 s_3} & -\dfrac{l_2 s_2 + l_3 s_{23}}{l_2 l_3 s_3} & -\dfrac{c_1 l_1 + s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})}{l_2 l_3 s_3} \end{bmatrix}$$

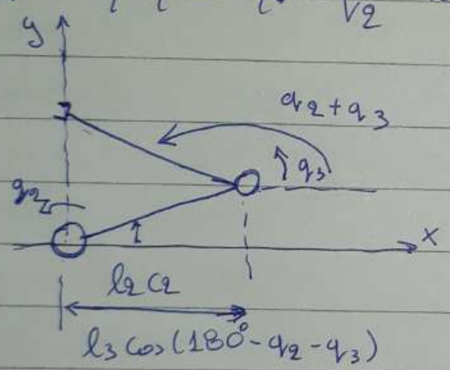
Για τις ιδιόμορφες διατάξεις θέτω: $\det(J_L)=0 \Rightarrow$

$l_2 l_3 s_3 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}) = 0 \Rightarrow s_3 = 0$ ή $l_2 c_2 + l_3 c_{23} = 0$

Η 1η ισότητα: $s_3 = 0 \Rightarrow \sin q_3 = 0 \Rightarrow q_3 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Για άρτιο κ οι σύνδεσμοι 2,3 ευθυγραμμίζονται για κ περιττό πέφτει ο ένας πάνω στον άλλο. Με αυτόν τον τρόπο χάνεται η μία δυνατότητα κίνησης ως προς τον άξονα που ορίζουν οι σύνδεσμοι 2-3

Η 2η ισότητα: $l_2 c_2 + l_3 c_{23} = 0 \Rightarrow l_3 c_{23} = -l_2 c_2$ έχω ιδιομορφία στα σημεία που το ~~άξονας~~ σημείο δράσης ευθυγραμμίζεται κατά τον άξο y με την άρθρωση q_2 και πάλι χάνει μια δυνατότητα κίνησης

$l_2 c_2 = l_3 \cos(180 - q_2 - q_3)$



5.

Έστω $T = \left(\begin{array}{ccc|c} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Και επίσης παίρνουμε $p^* = p - l_3 n = \begin{pmatrix} p_x - l_3 n_x \\ p_y - l_3 n_y \\ p_z - l_3 n_z \end{pmatrix}$

$$(A_1^0)^{-1} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & -s_1 l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 0 & c_1 & -c_1 l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1 = (A_1^0)^{-1} A_2^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & -s_1 l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 0 & c_1 & -c_1 l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & p_x^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_y^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_z^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & p_x^* c_1 + s_1 p_z^* - s_1 l_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_y^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & -p_x^* s_1 + c_1 p_z^* - c_1 l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εξισώνουμε αυτόν τον πίνακα με τον A_2^1 που είχαμε και άρα:

- $l_2 s_2 = p^*_y \Rightarrow q_2 = \arcsin\left(\frac{p^*_y}{l_2}\right)$

- $l_1 = -p_x^* s_1 + c_1(p^*_z - l_0) \xrightarrow{p^* = p_z^* - l_0} l_1 = \frac{-p_x^* \, 2z}{1+z^2} + \frac{p^*(1-z^2)}{1+z^2}, \; z = \tan\left(\frac{q_1}{2}\right)$

$\Rightarrow l_1 + l_1 z^2 = -2p_x^* z + p^* - p^* z^2 \Leftrightarrow (l_1 + p^*) z^2 + 2p_x^* z = p^* - l_1 \Rightarrow$

$(l_1 + p^*)^2 z^2 + 2p_x^* (l_1 + p^*) z = (p^*)^2 - l_1^2 \Rightarrow$

$((l_1 + p^*) z + p_x^*)^2 = (p_x^*)^2 + (p^*)^2 - l_1^2 \Rightarrow z = \frac{\sqrt{(p_x^*)^2 + (p^*)^2 - l_1^2} - p_x^*}{l_1 + p^*} \Rightarrow$

$q_1 = 2\operatorname{atan2}\left(\frac{\sqrt{(p_x^*)^2 + (p_z^* - l_0)^2 - l_1^2} - p_x^*}{l_1 + p_x^* - l_0}\right)$

Αν θέσω $\theta = q_2 + q_3$ τότε $\cos\theta = o_y$ $\sin\theta = n_y$ άρα $\theta = \operatorname{atan2}\left(\frac{n_y}{o_y}\right)$

οπότε $q_3 = \operatorname{atan2}\left(\frac{n_y}{o_y}\right) - q_2 \Rightarrow q_3 = \operatorname{atan2}\left(\frac{n_y}{o_y}\right) - \arcsin\left(\frac{p_y^*}{l_2}\right)$