

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ



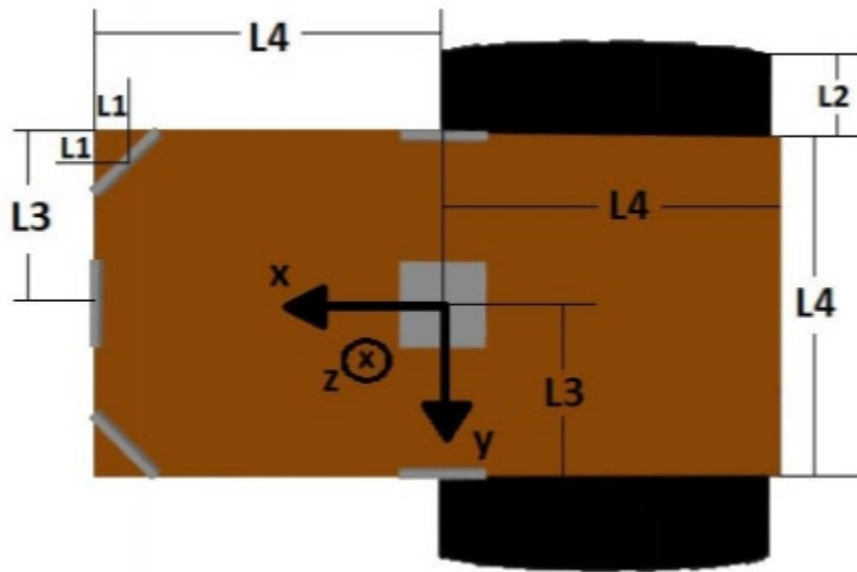
Ρομποτική II: Ευφυή Ρομποτικά Συστήματα Εξαμηνιαία Εργασία 2: Μέρος Β

Στοιχεία Φοιτητών:

Δάσκος Ραφαήλ (03116049)
Ζάρρας Ιωάννης (03116082)

Ομάδα 4

Σκοπός αυτού του μέρους της εργασίας είναι να υλοποιήσουμε αλγόριθμο για την εκτίμηση της θέσης και του προσανατολισμού (localization) του αυτοκινούμενου ρομπότ που είχαμε και στην προηγούμενη εργαστηριακή άσκηση. Για να το πετύχουμε αυτό χρειάστηκε να υλοποιήσουμε ένα Επεκταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter) χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες των αισθητήρων μας (sonars, IMU). Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το ρομπότ που είχαμε στη διάθεσή μας καθώς και το χώρο στον οποίο κινήθηκε.



Με τις διάφορες μεταβλητές που έχουμε να είναι:

- $L_1 = 0.018 \text{ m}$
- $L_2 = 0.05 \text{ m}$
- $L_3 = 0.1 \text{ m}$
- $L_4 = 0.2 \text{ m}$
- Διάμετρος τροχών ίση με 20 cm

Και ο χώρος κίνησής μας όπως φαίνεται στο gazebo πριν αρχίσουμε να χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμό μας είναι ο παρακάτω:

Α. Θεωρητική Ανάλυση

Αρχικά μας ζητήθηκε το ρομπότ να αρχίσει από τη θέση (0,0) που είναι στο κέντρο του εσωτερικού των τοίχων με αρχικό προσανατολισμό ανάλογο των τελευταίων ψηφίων του αριθμού μητρώου μας και επομένως, όπως και στην προηγούμενη άσκηση δώσαμε $\text{angle}=3.5$ στο αρχείο `mymobibot_world_loc.launch`.

Για τον αλγόριθμο μας θα χρησιμοποιήσουμε ως διάνυσμα κατάστασης του ρομπότ το:
 $X(t) = [x(t), y(t), \theta(t)]^T$.

Μιας και έχουμε επιτάχυνση στην κίνησή μας είναι πιο εύκολο να θεωρήσουμε πως έχουμε μια ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση μεταξύ δύο χρονικών στιγμών και έτσι θα λάβουμε τα εξής:

$$X(t+dt) = \begin{bmatrix} x(t) + [v_x(t) + 0.5(\alpha_x(t) + \delta\alpha_x)dt] \cos\theta(t)dt \\ y(t) + [v_y(t) + 0.5(\alpha_y(t) + \delta\alpha_y)dt] \sin\theta(t)dt \\ \theta(t) + (\omega(t) + \delta\omega)dt \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x(t) + v_x(t)\cos\theta(t)dt + 0.5\alpha_x(t)\cos\theta(t)dt^2 \\ y(t) + v_y(t)\sin\theta(t)dt + 0.5\alpha_y(t)\sin\theta(t)dt^2 \\ \theta(t) + \omega(t)dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5\delta\alpha_x(t)\cos\theta(t)dt^2 \\ 0.5\delta\alpha_y(t)\sin\theta(t)dt^2 \\ \delta\omega dt \end{bmatrix}$$

Από τα παραπάνω μπορούμε να δούμε πως η πρόβλεψη κατάστασης θα είναι:

$$\hat{X}(t+dt|t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) + v_x(t)\cos\hat{\theta}(t)dt + 0.5\alpha_x(t)\cos\hat{\theta}(t)dt^2 \\ \hat{y}(t) + v_y(t)\sin\hat{\theta}(t)dt + 0.5\alpha_y(t)\sin\hat{\theta}(t)dt^2 \\ \hat{\theta}(t) + \omega(t)dt \end{bmatrix}$$

Με $\hat{x}(t)$, $\hat{y}(t)$, $\hat{\theta}(t)$ να είναι οι βέλτιστες εκτιμήσεις της θέσης του ρομπότ κατά τον άξονα x, κατά τον άξονα y καθώς και η βέλτιστη εκτίμηση της στροφής του ρομπότ κατά τον άξονα των z τη χρονική στιγμή t. Για τη γραμμική ταχύτητα θεωρούμε πως η βέλτιστη εκτίμησης της γίνεται κατά την πρόβλεψη μας από τον τύπο:

$$v_i(t+dt) = v_i(t) + \alpha_i(t)dt, \text{ με } i = x \text{ ή } y \text{ αναλόγως με τον άξονα που μας ενδιαφέρει.}$$

Επιπλέον, τις τιμές της γωνιακής ταχύτητας καθώς και των γραμμικών επιταχύνσεων μπορούμε να τις λάβουμε από το IMU. Για να φτιάξουμε τη μήτρα διακύμανσης για το θόρυβο C_w θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές που μας δίνονται από την εκφώνηση της άσκησης για την τυπική απόκλιση του θορύβου μέτρησης της γραμμικής επιτάχυνσης και της γωνιακής ταχύτητας και θα έχουμε αντιστοίχως $\sigma_a = 0.002 \text{ m/s}^2$ και $\sigma_\omega = 0.002 \text{ rad/s}$. Έτσι θα λάβουμε:

$$C_w = \begin{bmatrix} (0.5\sigma_a \cos\theta(t)dt^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (0.5\sigma_a \sin\theta(t)dt^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\omega^2 dt^2 \end{bmatrix}$$

Γενικά αυτό που παρατηρήσαμε είναι πως η μέτρηση της γραμμικής επιτάχυνσης είναι αρκετά ανακριβής οπότε θα βάλουμε μεγάλες τιμές στη μήτρα αυτή ώστε να θεωρήσουμε αυτή την πρόβλεψη ως τελείως αβέβαιη και να μη μας χαλάσει το μοντέλο μας. Στο θεωρητικό όμως επίπεδο η μήτρα διακύμανσης για τον θόρυβο C_w είναι αυτή που έχουμε γράψει. Για το εργαστηριακό όμως μέρος χρησιμοποιήσαμε την παρακάτω μήτρα:

$$C_w = \begin{bmatrix} 100000000 & 0 & 0 \\ 0 & 100000000 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\omega^2 dt^2 \end{bmatrix}$$

Από το μοντέλο που έχουμε μπορούμε να πάρουμε τον πίνακα A που προκύπτει ως εξής:

$$A = \nabla\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -[v_x(t) + 0.5(\alpha_x(t) + \delta\alpha_x)dt] \sin\theta(t)dt \\ 0 & 1 & [v_y(t) + 0.5(\alpha_y(t) + \delta\alpha_y)dt] \cos\theta(t)dt \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Καθώς ο πίνακας Φ είναι ο πρώτος από τους δύο προσθετέους για τον υπολογισμό του διανύσματος κατάστασης $X(t+dt)$. Επιπλέον αξίζει να πούμε ότι για το εργαστηριακό μέρος όλες

οι γωνίες που υπολογίζονταν έπρεπε να ανοιχθούν στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ καθώς μόνο έτσι θα «συμβάδιζαν» με τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε από το IMU μιας και μετράει μόνο εκεί γωνίες.

Για την περεταίρω ανάλυση θα ανάγουμε όλες τις τιμές για τα sonar μας πάνω στο νοητό σημείο τομής των μπροστά, μπροστά δεξιά και μπροστά αριστερά αισθητήρων που είναι 0.1m πάνω από το κέντρο μάζας του ρομπότ (εκεί που παίρνουμε και τους άξονες στην 1^η φωτογραφία του ρομπότ μας). Δυστυχώς, έτσι όπως είναι τοποθετημένοι οι αισθητήρες πάνω στο ρομπότ δεν μπορούμε να βρούμε κάποιο σημείο που να τέμνονται όλοι μαζί, οπότε και διαλέξαμε αυτό εφόσον έτσι είναι πιο απλός ο υπολογισμός όλων των αποστάσεων-γωνιών που θα μας χρειαστούν κατά την υλοποίησή μας (θα τα παρουσιάσουμε όλα αυτά, αρκετά πιο αναλυτικά, στη συνέχεια).

Παρατηρώντας το σημείο που επιλέξαμε, μπορούμε εύκολα να δούμε πως όταν το ρομπότ μας βρίσκεται στριμμένο κατά γωνία $\hat{\theta}(t + dt|t)$, όπως έχουμε προβλέψει για τη γωνία, δηλαδή, τότε η απόσταση του σημείου αυτού από το κέντρο μάζας του ρομπότ θα είναι:

$$dx = 0.1\cos(\hat{\theta}(t + dt|t)), \quad dy = 0.1\sin(\hat{\theta}(t + dt|t)),$$

κατά τους άξονες x και y αντίστοιχα.

Σημαντικό είναι επίσης να βρούμε και τις γωνίες που σχηματίζουν τα σόναρ με τον άξονα των x. Θα έχουμε λοιπόν:

$$\varphi_{\text{left}} = \hat{\theta}(t + dt|t) + \frac{\pi}{2}, \text{ (αριστερό sonar)}$$

$$\varphi_{\text{frontleft}} = \hat{\theta}(t + dt|t) + \frac{\pi}{4}, \text{ (μπροστά αριστερό sonar)}$$

$$\varphi_{\text{front}} = \hat{\theta}(t + dt|t), \text{ (μπροστινό sonar)}$$

$$\varphi_{\text{frontright}} = \hat{\theta}(t + dt|t) + \frac{\pi}{4}, \text{ (μπροστά δεξιό sonar)}$$

$$\varphi_{\text{right}} = \hat{\theta}(t + dt|t) + \frac{\pi}{2}, \text{ (δεξιό sonar)}$$

Όπως έχουμε πει και για όλες τις γωνίες τις μετασχηματίσαμε στον κώδικά μας ώστε να είναι στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ που βλέπει και το IMU.

Επόμενο είναι να βρούμε τις γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ του ρομπότ και των 4 γωνιών του χώρου στον οποίο κινείται το ρομπότ μας. Γνωρίζουμε τις συντεταγμένες τους δεδομένου ότι ο χώρος μας είναι 4m x 4m και το σημείο (0,0) είναι η αρχική θέση του ρομπότ μας. Έτσι, αν ορίσουμε τις γωνίες όπως φαίνεται παρακάτω, θα λάβουμε (για $\hat{x}(t + dt|t)$, $\hat{y}(t + dt|t)$ τις προβλέψεις μας για τη θέση του ρομπότ κατά τους άξονες x και y αντίστοιχα):

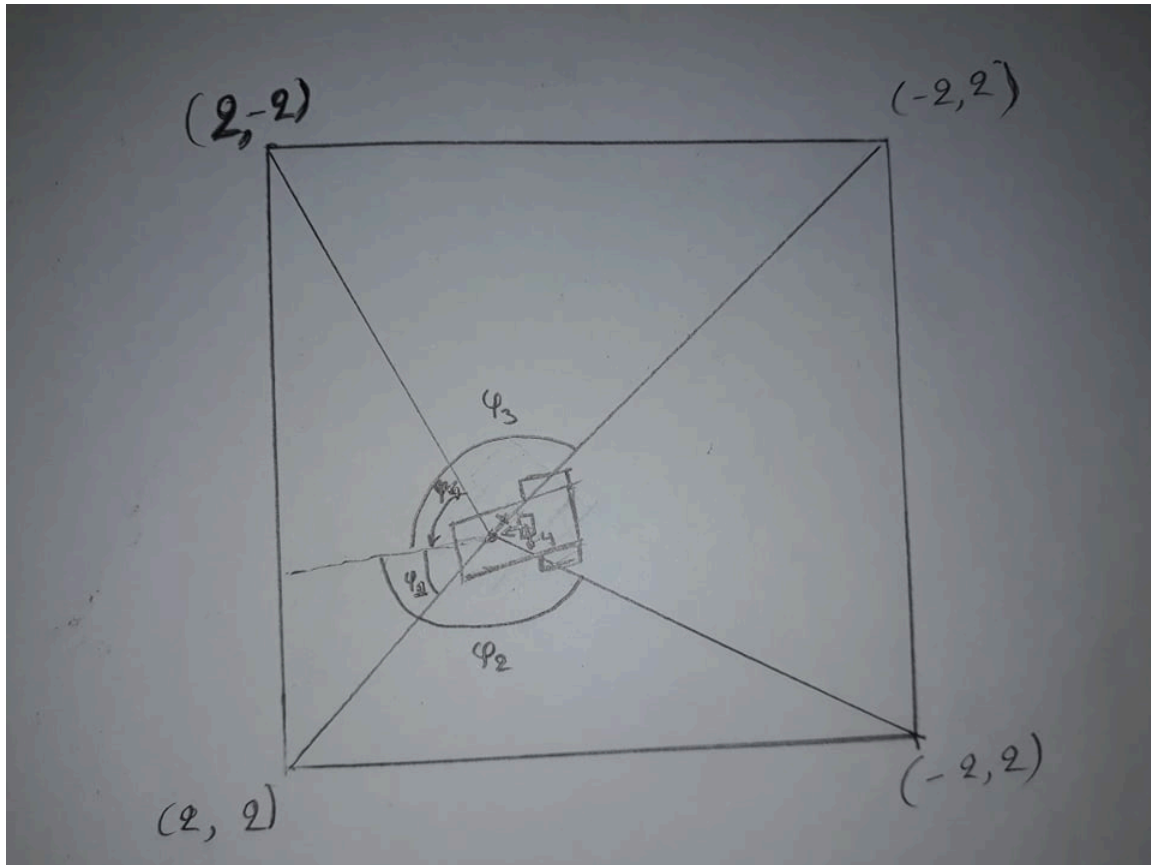
$$\varphi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{2 - dy - \hat{y}(t + dt|t)}{2 - dx - \hat{x}(t + dt|t)} \right)$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{2 + dx + \hat{x}(t + dt|t)}{2 - dy - \hat{y}(t + dt|t)} \right)$$

$$\varphi_3 = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{2 + dx + \hat{x}(t + dt|t)}{2 + dy + \hat{y}(t + dt|t)} \right)$$

$$\varphi_4 = -\tan^{-1} \left(\frac{2 + dy + \hat{y}(t + dt|t)}{2 - dx - \hat{x}(t + dt|t)} \right)$$

Με βάση τις παραπάνω γωνίες μπορούμε να θεωρήσουμε ποιος είναι ο τοίχος στον οποίο βλέπει το εκάστοτε sonar του ρομπότ μας. Επίσης, στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να δούμε ποιες είναι αυτές οι γωνίες που ορίσαμε πιο πάνω και θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.



Έτσι για το μπροστινό sonar θα έχουμε ότι:

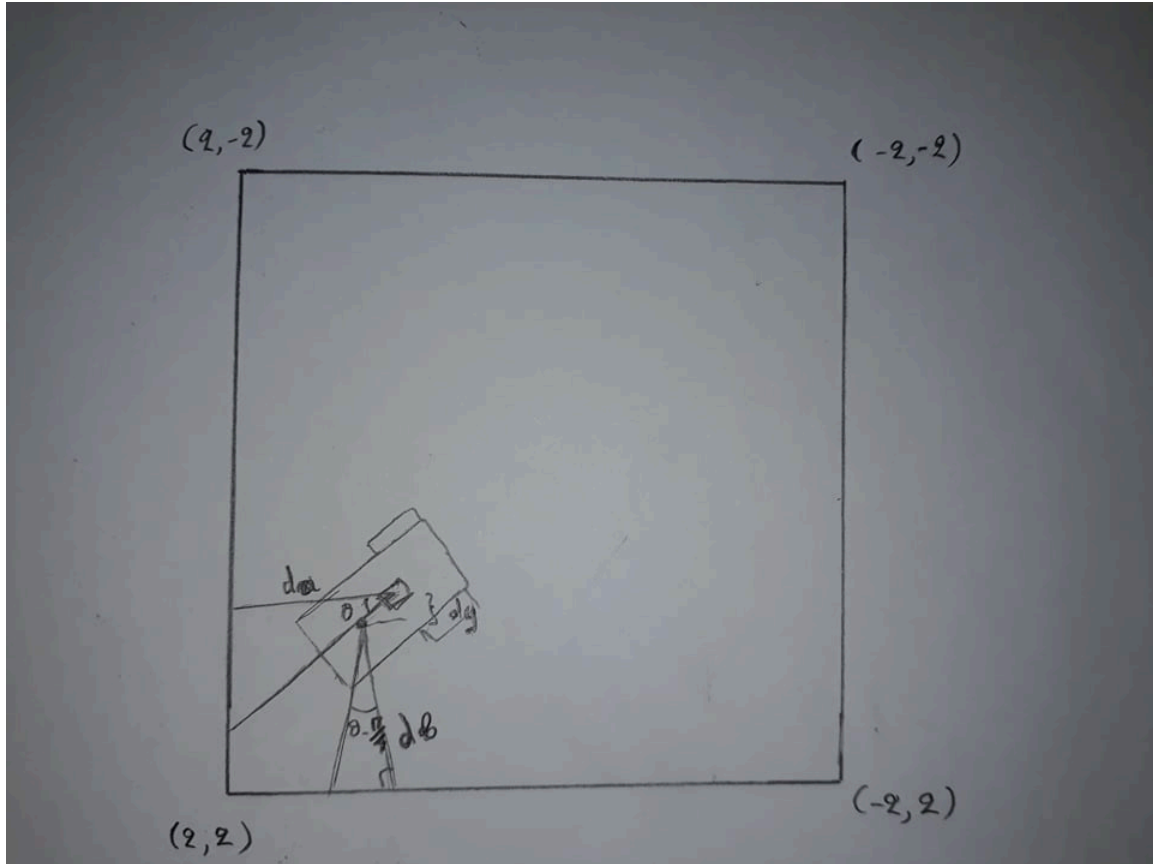
1. Αν $\varphi_4 \leq \hat{\theta}(t + dt|t) \leq \varphi_1$ τότε το sonar αυτό μας βλέπει τον μπροστινό τοίχο
2. Αν $\varphi_1 \leq \hat{\theta}(t + dt|t) \leq \varphi_2$ τότε το sonar αυτό μας βλέπει τον αριστερά τοίχο
3. Αν $\varphi_3 \leq \hat{\theta}(t + dt|t) \leq \varphi_4$ τότε το sonar αυτό μας βλέπει τον πίσω τοίχο
4. Αν $\varphi_2 \leq \hat{\theta}(t + dt|t) \leq \varphi_3$ τότε το sonar αυτό μας βλέπει τον δεξιά τοίχο

Μιλάμε για τον ποιο τοίχο βλέπει το sonar μας σύμφωνα με τον άξονα x.

Ακολουθούμε την ίδια λογική και βρίσκουμε και για τους υπόλοιπους αισθητήρες μόνο που σε αυτούς χρησιμοποιούμε τις γωνίες που σχηματίζει το εκάστοτε sonar με τον άξονα x, όπως τις έχουμε υπολογισμένες.

Έχοντας αναλύσει όλα αυτά θα τα χρησιμοποιήσουμε για να φτιάξουμε το μοντέλο πρόβλεψης μας. Στο μοντέλο αυτό θα έχουμε 3 μεταβλητές που η κάθε μια αντιστοιχεί σε μια μεταβλητή κατάστασης (δηλαδή x, y, θ). Για να μπορέσουμε να το υλοποιήσουμε αυτό χρησιμοποιούμε τον προσανατολισμό των sonar όπως βρήκαμε λίγο πριν. Εφόσον

έχουμε όλα αυτά μπορούμε να δούμε πως η θέση του ρομπότ στο χώρο μπορεί να προσδιοριστεί ως προς τον άξονα x, από τη μέτρηση του μπροστινού ή του πίσω τοίχου και στον άξονα y από την μέτρηση του αριστερά και δεξιά τοίχου. Εάν κανένα από τα sonar δε βλέπει κάποιον επιθυμητό, για τον υπολογισμό της μέτρησης, τοίχο, τότε ο πίνακας της μέτρησης μηδενίζεται και λειτουργεί μόνο η πρόβλεψή μας.



Με βάση το παραπάνω σχήμα μπορούμε να υπολογίσουμε τα ακόλουθα για τη θέση του ρομπότ μας στο χώρο.

Αρχικά ως προς τον άξονα x έχουμε:

$\hat{x}(t + dt|t) = 2 - d_1$, που όμως $d_1 = (s_f + 0.2)\cos(\hat{\theta}(t + dt|t))$, και s_f η μέτρηση που λαμβάνει ο μπροστινός μας αισθητήρας. Για τους μπροστά, αριστερά, δεξιά αισθητήρες παίρνουμε ως προς το κέντρο μάζας κατευθείαν. Έτσι, αν λύσουμε ως προς την πρώτη παρένθεση θα έχουμε: $s_f + 0.2 = \frac{2 - \hat{x}(t + dt|t)}{\cos(\hat{\theta}(t + dt|t))}$. Οπότε καταλήγει να ισχύει $z(0) = s_f + 0.2$

$$\text{και } h(0) = \frac{2 - \hat{x}(t + dt|t)}{\cos(\hat{\theta}(t + dt|t))}.$$

Ως προς τον y άξονα:

Ακριβώς ανάλογα θα έχουμε: $s_{fl} + 0.058 = \frac{2 - dy - \hat{y}(t + dt|t)}{\cos(\hat{\theta}(t + dt|t) - \frac{\pi}{4})}$. Γι' αυτό και το μπροστά δεξιά

sonar παίρνουμε ως προς το σημείο τομής. Και λαμβάνουμε $z(1) = s_{fl} + 0.058$ και $h(1) = \frac{2 - dy - \hat{y}(t + dt|t)}{\cos(\hat{\theta}(t + dt|t) - \frac{\pi}{4})}$.

Και τέλος η μέτρηση της γωνίας ως προς τον άξονα z είναι ίση με την πρόβλεψή μας.

Οπότε και λαμβάνουμε:

$$h = \begin{bmatrix} \frac{2 - \hat{x}(t + dt|t)}{\cos(\hat{\theta}(t + dt|t))} \\ \frac{2 - dy - \hat{y}(t + dt|t)}{\cos(\hat{\theta}(t + dt|t) - \frac{\pi}{4})} \\ \hat{\theta}(t + dt|t) \end{bmatrix}$$

και γραμμικοποιείται ως:

$$H = \nabla h = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\cos(\hat{\theta}(t + dt|t))} & 0 & \frac{2 - \hat{x}(t + dt|t)}{\cos^2(\hat{\theta}(t + dt|t))} \sin(\hat{\theta}(t + dt|t)) \\ 0 & \frac{-1}{\cos(\hat{\theta}(t + dt|t) - \frac{\pi}{4})} & -0.1 \frac{\cos(\frac{\pi}{4})}{\cos^2(\hat{\theta}(t + dt|t))} + \frac{2 - \hat{y}(t + dt|t)}{\cos^2(\hat{\theta}(t + dt|t))} \sin(\hat{\theta}(t + dt|t) \frac{\pi}{4}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ακριβώς αντίστοιχα μπορούν να υπολογιστούν και όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις με τα διαφορετικά sonar.

Μετά υπολογίζουμε τη μήτρα διακύμανσης (στον κώδικά μας είναι υπολογισμένη στην αρχή, μιας και δεν αλλάξει οπότε δε χρειάζεται να τη βρίσκουμε διαρκώς). Έχουμε από την εκφώνηση ότι οι μετρήσεις των sonars ακολουθούν κανονική κατανομή με απόκλιση $\sigma_s = 0.01m$ και η μέτρηση της γωνίας από το IMU ακολουθεί κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση ίση με $\sigma_\theta = 0.002 \text{ rad}$. Έτσι η μήτρα διακύμανσης των μετρήσεων γίνεται:

$$C_v = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix}$$

Τέλος, σύμφωνα με τη θεωρία του Kalman φίλτρου έχουμε πως το βέλτιστο κέρδος ανάδρασης αλλά και η νέα μήτρα διακύμανσης θα είναι ίσα με:

$$K_{t+dt} = P(t + dt|t) H_{t+dt}^T [H_{t+dt} P(t + dt|t) H_{t+dt}^T + C_v]^{-1}$$

$$P(t + dt) = [I - K_{t+dt}] P(t + dt|t)$$

Στα οποία ισχύουν πως: $P(t + dt|t) = A P(t) A^T + C_w$ και I ο μοναδιαίος πίνακας.

Έχοντας όλα αυτά μπορούμε να υπολογίσουμε τη νέα ανανεωμένη εκτίμηση κατάστασης σύμφωνα με τον τύπο:

$$\hat{x}(t + dt) = \hat{x}(t + dt|t) + K_{t+dt} [z_{t+dt} - h_{t+dt}(\hat{x}(t + dt|t))]$$

Έτσι έχουμε υπολογίσει την τελική εκτίμηση θέσης (x, y, θ) για το ρομπότ οποιαδήποτε δεδομένη χρονική στιγμή.