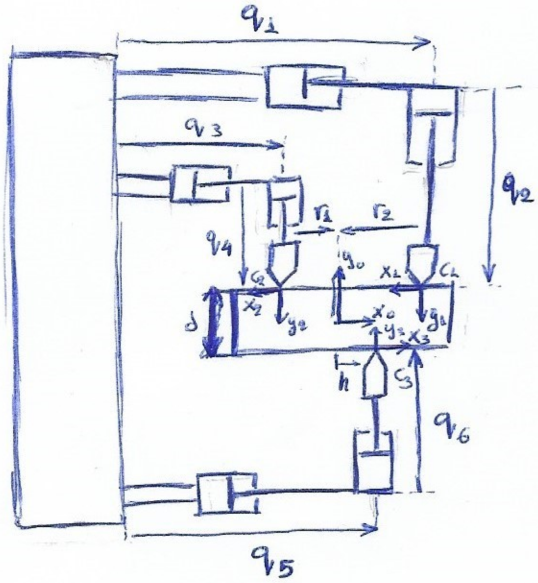
Ρομποτική ΙΙ: Ευφυή Ρομποτικά Συστήματα
1η Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων
Ροή Σ: Σήματα, Έλεγχος και Ρομποτική
Δάσκος Ραφαήλ - Α.Μ.: 03116049
ΣΗΜΜΥ - ΕΜΠ
8ο εξάμηνο, Ακαδ. έτος: 2019-20

Άσκηση 1.3



α) Για τη μήτρα ρομποτικής λαβής G ισχύει:

$$G = [G_1 \; G_2 \; G_3] \quad \text{με} \quad G_k = W_k B_k, \quad W_k = \begin{bmatrix} R^0_{c_k} & 0_{3\times3} \\ [\underline{r}_{c_k} \times] R^0_{c_k} & R^0_{c_k} \end{bmatrix}, \quad k = 1,2,3$$

Για τις επαφές C_1, C_2:

$$R^0_{c_1} = R^0_{c_2} = R_z(\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{c_1} = [r_2 \;\; d/2 \;\; 0]^T, \quad \underline{r}_{c_2} = [-r_1 \;\; d/2 \;\; 0]$$

και

$$[\underline{r}_{c_1} \times] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d/2 \\ 0 & 0 & -r_2 \\ -d/2 & r_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\underline{r}_{c_2} \times] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d/2 \\ 0 & 0 & r_1 \\ -d/2 & -r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι C_1, C_2 είναι επαφές σημείου χωρίς τριβή άρα
$B_2 = B_1 = [0\;1\;0\;0\;0\;0]^T$ αφού η φορά της επαφής είναι ο εκάστοτε y-άξονας

έτσι $W_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 & 0 & -1 & 0 \\ -d/2 & -r_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $W_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & 0 & -1 & 0 \\ d/2 & r_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

και άρα $G_1 = W_1 B_1 = W_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r_2 \end{bmatrix}$ ομοίως $G_2 = W_2 B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_1 \end{bmatrix}$

Για την επαφή C_3:

$$R^0_{C_3} = I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{C_3} = \begin{bmatrix} h & -d/2 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad [\underline{r}_{C_3}\times] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d/2 \\ 0 & 0 & -h \\ d/2 & h & 0 \end{bmatrix} = [\underline{r}_{C_3}\times] R^0_{C_3}$$

Η επαφή C_3 είναι με τριβή, άρα:

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έτσι $W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h & 0 & 1 & 0 \\ d/2 & h & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -d/2 \\ 0 & 0 & -h \\ d/2 & h & 0 \end{bmatrix}$

έτσι $G = [G_1 \ G_2 \ G_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h \\ -r_2 & r_1 & d/2 & h & 0 \end{bmatrix}$

~~Για τον κώνο τριβής έχουμε:~~

$\cancel{FC = \{f = [f_{1x}, f_{1y}, f_{1z}}$

$\cancel{FC = \{f = [f_{1y}, f_{2y}, f_{3x}, f_{3y}, f_{3z}]^T \in \mathbb{R}^5 : f_{1y} \geq 0 \wedge f_{2y} \geq 0 \wedge f_{3y} \geq 0 \wedge \sqrt{f_{3x}^2 + f_{3z}^2} \leq \mu f_{3y}\}}$

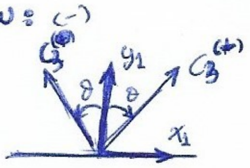
Για τον κώνο τριβής FC έχουμε:

$$FC = \left\{ f = [f_{1y}, f_{2y}, f_{3x}, f_{3y}, f_{3z}]^T \in \mathbb{R}^5 : f_{1y} \geq 0 \wedge f_{2y} \geq 0 \wedge f_{3y} \geq 0 \wedge \sqrt{f_{3x}^2 + f_{3z}^2} \geq 0 \right\}$$

Για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα στο επίπεδο λαμβάνουμε υπόψη ποιες δυνάμεις επαφών είναι εκτός του επιπέδου (x_0, y_0) και διώχνουμε τις ροπές τους ως προς το x_0, y_0.
Έτσι από τη μήτρα G διώχνουμε τις γραμμές 3,4,5 και την 5η γραμμή, έτσι

$$G_{2D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -r_2 & r_1 & d/2 & h \end{bmatrix}$$

β) Για να εφαρμόσουμε τη συνθήκη της κυρτότητας πρέπει όλες οι επαφές να είναι χωρίς τριβή. Θα αντικαταστήσουμε τη C_3 με δύο σημειακές επαφές $C_3^{(+)}, C_3^{(-)}$ (όπου θ η γωνία του κώνου τριβής, $\tan(\theta) = \mu$) όπως φαίνεται στο σχήμα κάτω: (-) αφού $\mu = 1$ $\theta = \tan^{-1}\mu = 45°$



$$R^0_{3+} = R_z(-\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & s\theta & 0 \\ -s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad [\underline{r}_{C_3}\times]R^0_{3+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d/2 \\ 0 & 0 & -h \\ \frac{d}{2}c_\theta - hs_\theta & hc_\theta + \frac{d}{2}s_\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ομοίως} \quad R^0_{3-} = R_z(\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta \\ s\theta & c\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad [\underline{r}_{C_3}\times] R^0_{3-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d/2 \\ 0 & 0 & -h \\ \frac{d}{2}c_\theta + hs_\theta & c_\theta h - \frac{d}{2}s_\theta & 0 \end{bmatrix}$$

τώρα όμως $B_{3+} = B_{3-} = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ επαφές χωρίς τριβή

έτσι

$$G'_{2D} = [G_1 \quad G_2 \quad G_3^+ \quad G_3^-] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s\theta & -s\theta \\ -1 & -1 & c\theta & c\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_2 & r_1 & hc_\theta + \frac{d}{2}s\theta & c_\theta h + \frac{d}{2}s\theta \end{bmatrix}$$

αφού G_3^+, G_3^- μόνο η δεύτερη στήλη των $\begin{bmatrix} R^0_{3+/-} \\ [\underline{r}_{C_3}\times]R^0_{3+/-} \end{bmatrix}$

$$\text{και} \quad G'_{2D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s\theta & -s\theta \\ -1 & -1 & c\theta & c\theta \\ -r & r & hc_\theta + \frac{d}{2}s\theta & c_\theta h - \frac{d}{2}s\theta \end{bmatrix}$$

για να είναι στο επίπεδο βγάζουμε τις 3,4,5 γραμμές και επίσης $r_1 = r_2 = r$

έχουμε, λοιπόν: $g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -r \end{bmatrix}$, $g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ r \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$G_3^+ = \begin{bmatrix} s\theta \\ c\theta \\ hc\theta + \frac{d}{2} s\theta \end{bmatrix} = c\theta \begin{bmatrix} \mu \\ 1 \\ \mu\frac{d}{2} + h \end{bmatrix} = c\theta\, g_{3^+} \xrightarrow{\mu=1} g_{3^+} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{d}{2} + h \end{bmatrix}$$

$$C_{3^-} = \begin{bmatrix} -s\theta \\ c\theta \\ c\theta h - \frac{d}{2} s\theta \end{bmatrix} = c\theta \begin{bmatrix} -\mu \\ 1 \\ h - \frac{d}{2}\mu \end{bmatrix} = c\theta\, g_{3^-} \xrightarrow{\mu=1} g_3^- = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ h - \frac{d}{2} \end{bmatrix}$$

$$g_{12} = g_1 \times g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_3 = g_{3^+} \times g_{3^-} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{d}{2} + h \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ h - d/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h - \frac{d}{2} - h - \frac{d}{2} \\ d/2 - h - \frac{d}{2} - h \\ 1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d \\ -2h \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = g_3^T g_1 = \begin{bmatrix} -d & -2h & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ r \end{bmatrix} = 2h + 2r = 2(h+r)$$

$$\lambda_2 = g_3^T g_2 = \begin{bmatrix} -d & -2h & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ r \end{bmatrix} = 2h - 2r = 2(h-r)$$

Αναγκαία συνθήκη ώστε η ρομποτική λαβή να είναι κλειστή ως προς δύναμη είναι: $\lambda_1 \lambda_2 < 0 \Rightarrow 4(h+r)(h-r) < 0 \Rightarrow -r < h < r$

γ) Για την Ιακωβιανή του ρομποτικού χεριού έχουμε:

$$J_h = diag\,[J_{hk}]_{k=1,2,3}$$

με $J_{hk} = B_k^T T_E^{C_k} J_k$

με $T_E^{C_k} = \begin{bmatrix} R_E^{C_k} & O_{3\times3} \\ O_{3\times3} & R_E^{C_k} \end{bmatrix}$ και J_k η Ιακωβιανή

στο επίπεδο έχουμε ότι $B_1^T = B_2^T = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]$

$$B_3^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε θα μπορούσαμε να πάρουμε:

$$J_{hk} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{τις 3 πρώτες σειρές}}}{B_k^T} R_E^{C_k} J_{k,L}$$

Υπολογισμός $J_{k,L}$:

$$p_{C_1}^{(E)} = \begin{bmatrix} q_1 \\ -q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{p}_{C_1}^{(E)} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ -\dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \xRightarrow{\dot{p} = J\dot{q}} J_{1,L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{C_2}^{(E)} = \begin{bmatrix} q_3 \\ -q_4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{p}_{C_2}^{(E)} = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ -\dot{q}_4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow J_{2,L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{C_3}^{(E)} = \begin{bmatrix} q_5 \\ q_6 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{p}_{C_3}^{(E)} = \begin{bmatrix} \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow J_{3,L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_E^{C_1} = R_0^{C_1} = (R_{C_1}^{0})^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_E^{C_2}$$

$$R_E^{C_3} = (R_{C_3}^{0})^T = I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έτσι $$J_{h_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

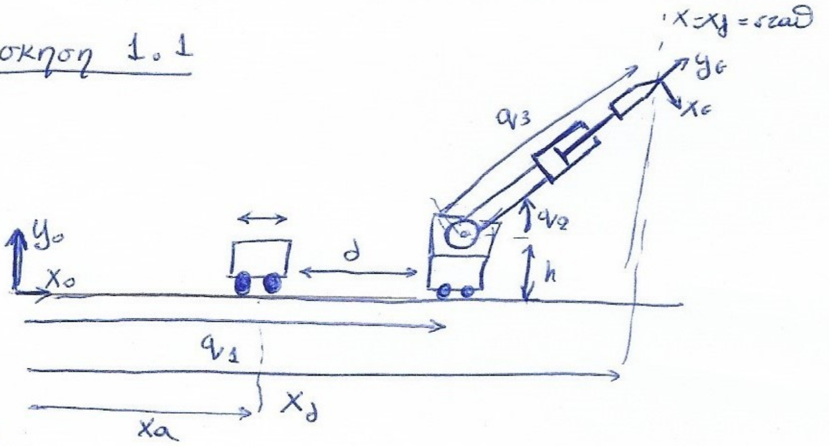
$$J_{h_2} = J_{h_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{h_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

έτσι $J_h = \text{diag}\left[J_{hk}\right] \Rightarrow$

$$J_h = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Άσκηση 1.1



α)

έστω ότι $p_1 = f_1(q)$ η συνάρτηση που περιγράφει το γεωμετρικό μοντέλο για την 1η υποεργασία, με:

$\dot p_1 = J_1(q)\dot q$, $J_1(q) = \dfrac{\partial f_1}{\partial q}$

Αν $p_{1d}, \dot p_{1d}$ θέση και ταχύτητα αναφοράς της 1ης υποεργασίας τότε έχουμε

$$\dot q = \underbrace{J_1^+(q)\left(\dot p_{1d} + K_1(p_{1d} - f_1(q))\right)}_{\dot q^{(1)}} + \underbrace{K_2\left[I - J_1^+(q)J_1(q)\right]\dot q_r^{(2)}}_{\dot q^{(2)}}$$

K_1, K_2 παραμετρικά ~~σταθερές~~ κέρδη ενίσχυσης

Για το κινηματικό μοντέλο του ρομποτικού χειριστή έχουμε:

$$p_E = \begin{bmatrix} p_{Ex} \\ p_{Ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 + q_3 c_2 \\ h + q_3 s_2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \dot p_E = \begin{bmatrix} \dot p_{Ex} \\ \dot p_{Ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot q_1 + \dot q_3 c_2 - q_3 s_2 \dot q_2 \\ \dot q_3 s_2 + q_3 c_2 \dot q_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -q_3 s_2 & c_2 \\ 0 & q_3 c_2 & s_2 \end{bmatrix}}_{J_E(q)} \begin{bmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \\ \dot q_3 \end{bmatrix}$$

Για την 1η ρομποτική υποεργασία έχουμε:

$p_1 = p_{Ex} = q_1 + q_3 c_2 \Rightarrow f_1(q) = q_1 + q_3 c_2$ (γεωμετρικό μοντέλο) $p_{1d} = x_d$

διαφορικό κινηματικό μοντέλο:

$$\dot p_1 = \dot p_{1x} = \dot q_1 - q_3 s_2 \dot q_2 + c_2 \dot q_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -s_2 q_3 & c_2 \end{bmatrix}}_{J_1(q)} \begin{bmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \\ \dot q_3 \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad \dot p_{1d} = 0$$

$$J_1^+ = J_1^T (J_1 J_1^T)^{-1} = \frac{1}{(1 + s_2^2 q_3^2 + c_2^2)} \begin{bmatrix} 1 \\ -s_2 q_3 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

και έτσι

$$\dot q^{(1)} = \begin{bmatrix} \dot q_1^{(1)} \\ \dot q_2^{(1)} \\ \dot q_3^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{K_1(x_d - q_1 + q_3 c_2)}{(1 + s_2^2 q_3^2 + c_2^2)} \begin{bmatrix} 1 \\ -s_2 q_3 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Για τη 2η υποεργασία

ορίζουμε $V(q)$ συνάρτηση κριτηρίου που θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε. Η $V(q)$ μπορεί να οριστεί ως μια παραβολική συνάρτηση της απόστασης από το εμπόδιο

$$V(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} K_c (d-d_0)^2 & , d<d_0 \\ 0 & , d \geq d_0 \end{cases}$$

d_0: απόσταση κατώφλι από το εμπόδιο

K_c: σταθερά ενίσχυσης ώστε να έχουμε αριθμητική ευστάθεια και ταχεία αύξηση όταν $d<d_0$

Αν x_a η απόσταση του εμποδίου (όπως φαίνεται στο σχήμα μας) που θεωρούμε ότι $q_1 > x_a$ τότε: $d(q) = q_1 - x_a$

τότε $V(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} K_c (q_1 - x_a - d_0)^2 & d<d_0 \\ 0 & , d \geq d_0 \end{cases}$

έτσι $\begin{cases} d<d_0 & , \dot{q}_r^{(2)} = -\nabla_q V(q) = -\dfrac{\partial V(q)}{\partial q} = \begin{bmatrix} -K_c(q_1 - x_a - d_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_c(d_0 - d) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ d \geq d_0 & , \dot{q}_r^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$

έτσι $$\dot{q}^{(2)} = K_2 \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{(1+S_2^2 q_3^2 + C_2^2)} \begin{bmatrix} 1 \\ -S_2 q_3 \\ C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -S_2 q_3 & C_2 \end{bmatrix} \right) \dot{q}_r^{(2)}$$

όταν $d<d_0$:

$$\dot{q}^{(2)} = K_2 \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{1}{1+S_2^2 q_3^2 + C_2^2} & \dfrac{S_2 q_3}{1+S_2^2 q_3^2 + C_2^2} & -\dfrac{C_2}{1+S_2^2 q_3^2 + C_2^2} \\ \dfrac{S_2 q_3}{1+S_2^2 q_3^2 + C_2^2} & 1 - \dfrac{q_3^2 S_2^2}{1+S_2^2 q_3^2 + C_2^2} & \dfrac{q_3 C_2 S_2}{1+S_2^2 q_3^2 + C_2^2} \\ -\dfrac{C_2}{1+S_2^2 q_3^2 + C_2^2} & \dfrac{q_3 C_2 S_2}{1+S_2^2 q_3^2 + C_2^2} & -\dfrac{C_2^2}{1+S_2^2 q_3^2 + C_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_c(d_0 - d) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{q}^{(2)} = \frac{K_2 K_c}{1+S_2^2 q_3^2 + C_2^2} (d_0 - d) \begin{bmatrix} S_2^2 q_3^2 + C_2^2 \\ S_2 q_3 \\ -C_2 \end{bmatrix}$$

οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι: $\dot{q} = \begin{cases} \dot{q}^{(1)} + \dot{q}^{(2)} & , d<d_0 \\ \dot{q}^{(1)} & , d>d_0 \end{cases}$

με τα $\dot{q}^{(1)}, \dot{q}^{(2)}$ όπως τα έχουμε υπολογίσει β) έχουμε $h=1$, $d_o=5$, $x_d=10$, $q_1(t)=x_d=10$, $q_2(t)=\pi/2$, $q_3(t)=3$, $d(t)=4$

έχουμε $\dot{q}=\dot{q}^{(1)}+\dot{q}^{(2)}$ αφού $d<d_o$

$$\dot{q}^{(1)}=\frac{K_1\,(10-10+3\cdot 0)}{1+1^2\cdot 3^2+0^2}\begin{bmatrix}1\\-1\cdot 3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

λογικό αφού είμαστε ήδη στο x_d οπότε η 1η υποεργασία δε θα ήθελε να το κουνήσει

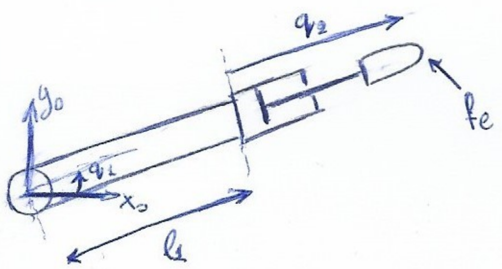
$$\dot{q}^{(2)}=\frac{K_2K_c}{1+9}(5-4)\begin{bmatrix}9+0\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}9\,K_2K_c\\0{,}3\,K_2K_c\\0\end{bmatrix}$$

έτσι
$$\dot{q}_1(t)=0{,}9\,K_2K_c$$
$$\dot{q}_2(t)=0{,}3\,K_2K_c$$
$$\dot{q}_3(t)=0$$

Αρχίζει δηλ να αποκτά ταχύτητα που θα το απομακρύνει από το κινούμενο εμπόδιο αλλά και θα στρίψει (αύξηση του q_2) το τελικό άκρο ~~απο~~ για να παραμείνει στην ευθεία $X=X_d$

Άσκηση 1.2

$$\tau_1=(mq_2^2)\ddot{q}_1+(2mq_2)\dot{q}_1\dot{q}_2$$
$$\tau_2=m\ddot{q}_2-(mq_2)\dot{q}_1^2$$



α) προσαρμοστικός έλεγχος ρομποτικού χειριστή

ισχύει $\tau=D(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q)\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix}\tau_1\\\tau_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}mq_2^2&0\\0&m\end{bmatrix}}_{D}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\\ddot{q}_2\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}2mq_2\dot{q}_2&0\\-mq_2\dot{q}_1&0\end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\\dot{q}_2\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}_{g}\begin{bmatrix}q_2\\q_2\end{bmatrix}$$

Βέβαια για ευκολία θα το γράψουμε: $\tau=D(q)\ddot{q}+A(q,\dot{q})$

Δηλαδή $\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m q_2^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ -m q_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$

εάν q_d η επιθυμητή θέση του ρομπότ, τότε το σφάλμα θα είναι:

$e = q_d - q$ με $\ddot{e} = \ddot{q}_d - \ddot{q}$

Για την αποφυγή μη γραμμικών όρων και ώστε να παρακολουθήσουμε την επιθυμητή τροχιά, ορίζουμε:

$\tau = D(\ddot{q}_d - u) + A$ έτσι θα έχουμε

$D\ddot{q} + A = D(\ddot{q}_d - u) + A \Rightarrow D\ddot{q} = D(\ddot{q}_d - u) \xRightarrow{\text{γραμμικό}}$

$D\ddot{q} = D\ddot{q}_d - Du \Rightarrow u = \ddot{q}_d - \ddot{q} = \ddot{e}$

Άρα για να μηδενιστεί το σφάλμα χρειάζεται ο νόμος ελέγχου να σταθεροποιεί τη 2η παράγωγο

PD - ελεγκτής για την ανατροφοδότηση: $u = -k_d \dot{e} - k_p e$

Και θα έχουμε $\tau = D(q)(\ddot{q} + k_d \dot{e} + k_p e) + A(q, \dot{q})$

Θα πρέπει $k_d, k_p > 0$ για να έχουμε ευστάθεια του συστήματος

Επειδή δε γνωρίζουμε τις παραμέτρους του ρομπότ θέτουμε φ το διάνυσμα που περιέχει όλες τις άγνωστες παραμέτρους του ρομπότ $(m, l, \ldots)$ ~~...~~ φ

Και $\hat{\varphi}$ το διάνυσμα «εκτιμούμενων» δυναμικών παραμέτρων

Τότε θα πάρουμε:

$$\tau = \hat{D}(q, \hat{\varphi})u + \hat{A}(q, \dot{q}, \hat{\varphi}) = K(q, \dot{q}, u)\hat{\varphi}$$

Σφάλμα εκτίμησης $\tilde{\varphi} = \varphi - \hat{\varphi}$; θέτω $\ddot{q} = u$ τότε:

$$\left.\begin{aligned} Du + A &= K\varphi \\ D\ddot{q} + A &= K\hat{\varphi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow K\tilde{\varphi} = D(u - \ddot{q})$$

Θα ορίσουμε σφάλμα παρακολούθησης μοντέλου αναφοράς ($\ddot{q}_m = u$) $\xi(e_q) = u - \ddot{q} \Rightarrow$

$$\xi(e_q) = (\ddot{q}_d - \ddot{q}) + K_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p(q_d - q) = \ddot{e}_q + K_D \dot{e}_q + K_p e_q$$

Και άρα $K\tilde{\varphi} = D\xi$

Αν Γ: μήτρα κερδών μηχανισμού προσαρμογής παραμέτρων

τότε $V(\tilde{\varphi}, s) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}^T \Gamma \tilde{\varphi} + s^T D s]$ (Lyapunov)

$\Rightarrow \dot{V} = -\dot{\hat{\varphi}}^T \Gamma \tilde{\varphi} + s^T D \dot{s} + \frac{1}{2}[s^T \dot{D} s]$ με $\dot{\hat{\varphi}} = \Gamma^{-1} K^T s \Rightarrow \dot{V} = -s^T K \tilde{\varphi} + s^T D \dot{s} + \frac{1}{2}[s^T \dot{D} s]$

για $\Lambda = I_2$: $\dot{s} + \Lambda s = \xi$ συνάρτηση σφάλματος τότε: $\dot{V} = -s^T(D\Lambda - \frac{1}{2}\dot{D})s \Rightarrow$

$$\dot{V} = -s^T \begin{bmatrix} m q_2^2 - m q_2 \dot{q}_2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} s$$

Το σύστημα έτσι, θα γίνει ασυμπτωτικά ευσταθές και συγκλίνει στην κατάσταση ισορροπίας που θα έχουμε σφάλμα παρακολούθησης μηδέν

Από τον ορισμό του σφάλματος παρακολούθησης μοντέλου θα έχω:

$$s(t_k) = \dot{e} + K_D e + Integral(t_k) \quad , \quad Integral(t_k+1) = Integral(t_k) + (K_p e - \Lambda s(t_k))\Delta t$$

και ο νόμος προσαρμογής: $\hat{\varphi}(t_k+1) = \hat{\varphi}(t_k) + \Gamma^{-1} K s(t_k)$

β) Έλεγχος Εμπέδησης

Προσπαθούμε με τον έλεγχο αυτό να επιβάλλουμε στο σύστημα την μηχανική εμπέδηση του ρομποτικού χειριστή στο χώρο εργασίας:

$$M_d(\ddot{p}_d - \ddot{p}) + B_d(\dot{p}_d - \dot{p}) + K_d(p_d - p) = F_d - F_e$$

Θα έχουμε επίσης: $\tau = M(q)\ddot{q} + h(q,\dot{q})$ που όπως είδαμε στο A(a)

$M = D$, $h = A$ άρα $M = \begin{bmatrix} mq_2^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$, $h = \begin{bmatrix} 2mq_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ -m\dot{q}_1^2 q_2 \end{bmatrix}$

$$F_e = f_e = [f_{ex} \,,\, f_{ey}]^T$$

θέση του τελικού σημείου:

$$p = \begin{bmatrix} p_{ex} \\ p_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1+q_2)c_1 \\ (l_1+q_2)s_1 \end{bmatrix}$$

ταχύτητα: $\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{p}_{ex} \\ \dot{p}_{ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 c_1 - (l_1+q_2)\dot{q}_1 s_1 \\ s_1\dot{q}_2 + (l_1+q_2)\dot{q}_1 c_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -(l_1+q_2)s_1 & c_1 \\ (l_1+q_2)c_1 & s_1 \end{bmatrix}}_{J} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$

Θέτουμε:

$$M^* = (JM^{-1}J^T)^{-1} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

και $h^* = (M^* J M^{-1})h - M^*\dot{J}\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

έχουμε και για την επιτάχυνση του τελικού σημείου

$$\ddot{p} = \begin{bmatrix} -c_1\dot{q}_1^2(l_1+q_2) - s_1\ddot{q}_1(l_1+q_2) - 2s_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_1\ddot{q}_2 \\ -s_1\dot{q}_1^2(l_1+q_2) + c_1\ddot{q}_1(l_1+q_2) + s_1\ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

έτσι για τα σήματα ελέγχου έχουμε:

$$u = \ddot{p}_d + M_d^{-1}\left[B_d(\dot{p}_d - \dot{p}) + K_d(p_d - p) - (F_d - F_e)\right] = \begin{bmatrix} \ddot{p}_{d,x} + \dfrac{b_x(\dot{p}_{d,x} - \dot{p}_x) - (F_{d,x} - F_{e,x})}{m_x} \\ \ddot{p}_{d,y} + \dfrac{b_y(\dot{p}_{d,y} - \dot{p}_y) - (F_{d,y} - F_{e,y})}{m_y} \end{bmatrix}$$

Και:

$$F_a = M^* u + h^* - F_e = \begin{bmatrix} m\ddot{p}_{d,x} + \frac{m}{m_x}\left[b_x(\dot{p}_{d,x} - \dot{p}_x) - (F_{d,x} - F_{e,x})\right] - F_{e,x} \\ m\ddot{p}_{d,y} + \frac{m}{m_y}\left[b_y(\dot{p}_{d,y} - \dot{p}_y) - (F_{d,y} - F_{e,y})\right] - F_{e,y} \end{bmatrix}$$

οπότε η ροπή είναι:

$$\tau = J^T F_a = \begin{bmatrix} -s_1(l_1+q_2) & c_1(l_1+q_2) \\ c_1 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m\ddot{p}_{d,x} + \frac{m}{m_x}\left[b_x(\dot{p}_{d,x} - \dot{p}_x) - (F_{d,x} - F_{e,x}) - F_{e,x}\right. \\ m\ddot{p}_{d,y} + \frac{m}{m_y}\left[b_y(\dot{p}_{d,y} - \dot{p}_y) - (F_{d,y} - F_{e,y}) - F_{e,y}\right. \end{bmatrix}$$