Ρομποτική ΙΙ: Ευφυή Ρομποτικά Συστήματα

2η Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων

Ροή Σ: Σήματα, Έλεγχος και Ρομποτική

Δάσκος Ραφαήλ - Α.Μ.: 03116049

ΣΗΜΜΥ - Ε.Μ.Π.

8ο εξάμηνο - Ακαδ. έτος: 2019-2020

Άσκηση 2.1

Έχουμε πως το όχημα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στο διάστημα $[0, T_1]$, $T_1 = 0,5$ sec

Στα μεγέθη που θα χρησιμοποιήσουμε έχουμε σφάλματα λόγω αβεβαιότητας των μετρήσεων. Η μέτρηση κάθε αισθητήρα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και σφάλμα μέτρησης ίσο με 0,01 m, η αβεβαιότητα του μαγνητομέτρου έχει μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση που αντιστοιχεί σε σφάλμα 3°, το σύστημα επιταχυνσιομέτρων έχει αβεβαιότητα που ακολουθεί κανονική κατανομή και τυπική απόκλιση ίση με 0,1 m/sec². Τέλος, κατά την κίνηση του συστήματος έχουμε σφάλματα προσανατολισμού με τυπική απόκλιση ως προς τη γωνιακή ταχύτητα ίση με 2°/sec

Μέσω όλων αυτών θέλουμε να περιγράψουμε ένα διακριτό φίλτρο Kalman εκτίμησης θέσης αλλά και να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη εκτίμηση θέσης τη χρονική στιγμή T_1.

Θα ορίσουμε το παρακάτω state για το φίλτρο Kalman:

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \theta_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

με x, y τις συντεταγμένες του ρομπότ στο χώρο, θ τη γωνία ως προς τον οριζόντιο άξονα και v τη γραμμική του ταχύτητα. Θα φτιάξουμε μοντέλο που θα προβλέπει

τις τιμές X_{k+1} βασισμένες στο X_k και στα πιθανά σφάλματα που μπορεί να υπάρχουν μεταξύ των δύο καταστάσεων.

Οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος είναι:

$$x_{k+1} = x_k + v_k \cos\theta_k \Delta t + \frac{1}{2} a_k \cos\theta_k \Delta t^2$$

$$y_{k+1} = y_k + v_k \sin\theta_k \Delta t + \frac{1}{2} a_k \sin\theta_k \Delta t^2$$

$$v_{k+1} = v_k + a_k \Delta t$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k \Delta t$$

όπου το ω προκύπτει εξαιτίας της μη ελεγχόμενης αλίσθησης

για είσοδο $U_k = [a_k \ \omega_k]^T$ θα γραμμικοποιήσουμε το σύστημα ως εξής

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k + \underbrace{B_k \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta \omega \end{bmatrix}}_{W_k}$$

με:

$$A_k = \begin{bmatrix} \partial f_x/\partial x_k & \partial f_x/\partial y_k & \partial f_x/\partial \theta_k & \partial f_x/\partial v \\ \partial f_y/\partial x_k & \partial f_y/\partial y_k & \partial f_y/\partial \theta_k & \partial f_y/\partial v \\ \partial f_\theta/\partial x_k & \partial f_\theta/\partial y_k & \partial f_\theta/\partial \theta_k & \partial f_\theta/\partial v \\ \partial f_v/\partial x_k & \partial f_v/\partial y_k & \partial f_v/\partial \theta_k & \partial f_v/\partial v \end{bmatrix}$$

άρα

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_k \sin\theta_k \Delta t - \frac{\Delta t^2}{2} \sin\theta_k a_k & \cos\theta_k \Delta t \\ 0 & 1 & v_k \cos\theta_k \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} a_k \cos\theta_k & \sin\theta_k \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$B_k = \begin{bmatrix} \partial f_x/\partial a & \partial f_x/\partial \omega \\ \partial f_y/\partial a & \partial f_y/\partial \omega \\ \partial f_\theta/\partial a & \partial f_\theta/\partial \omega \\ \partial f_v/\partial a & \partial f_v/\partial \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_k \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ \sin\theta_k \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & \Delta t \\ \Delta t & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε έχουμε:

$$W_k = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2}\cos\theta_k & 0 \\ \frac{\Delta t^2}{2}\sin\theta_k & 0 \\ 0 & 1 \\ \Delta t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a_k \\ \delta \omega_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta t^2 \cos\theta_k \cdot \delta a_k / 2 \\ \Delta t^2 \sin\theta_k \cdot \delta a_k / 2 \\ \delta \omega_k \Delta t \\ \delta a_k \Delta t \end{bmatrix}$$

$$(W_k)(W_k)^T = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4 \cos^2\theta_k \, \delta a_k^2}{4} & (\Delta t^4 \cos\theta_k \sin\theta_k \, \delta a_k^2)/4 & 0 & (\Delta t^3 \cos\theta_k \, \delta a_k^2)/2 \\ (\Delta t^4 \cos\theta_k \sin\theta_k \, \delta a_k^2)/4 & (\Delta t^4 \sin^2\theta_k \, \delta a_k^2)/4 & 0 & (\Delta t^3 \sin\theta_k \, \delta a_k^2)/2 \\ 0 & 0 & \delta \omega_k^2 \Delta t^2 & 0 \\ (\Delta t^3 \delta a_k^2 \cos\theta_k)/2 & (\Delta t^3 \sin\theta_k \, \delta a_k^2)/2 & 0 & \delta a_k^2 \Delta t^2 \end{bmatrix}$$

$E[\delta a_k] = E[\delta \omega_k] = 0$

$E[\delta a_k^2] = \sigma_a^2$, $\sigma_a = 0{,}1\, m/s^2$

$E[\delta \omega_k^2] = \sigma_\omega^2$, $\sigma_\omega = 0{,}035\, rad/s$

έτσι $C_W(k) = E[(W_k)(W_k)^T] \Rightarrow$

$$C_W(k) = \begin{bmatrix} (\Delta t^4 \cos^2\theta_k \, \sigma_a^2)/4 & (\Delta t^4 \cos\theta_k \sin\theta_k \, \sigma_a^2)/4 & 0 & \Delta t^3 \cos\theta_k \sigma_a^2 \\ (\Delta t^4 \cos\theta_k \sin\theta_k \, \sigma_a^2)/4 & (\Delta t^4 \sin^2\theta_k \, \sigma_a^2)/4 & 0 & \frac{\Delta t^3 \sin\theta_k \sigma_a^2}{2} \\ 0 & 0 & \sigma_\omega^2 \Delta t^2 & 0 \\ (\Delta t^3 \sigma_a^2 \cos\theta_k)/2 & (\Delta t^3 \sin\theta_k \, \sigma_a^2)/2 & 0 & \sigma_a^2 \Delta t^2 \end{bmatrix}$$

Αυτό ισχύει κατά την επιταχυνόμενη κίνηση. Πριν αρχίσει αυτή μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει αβεβαιότητα για το θ με το σφάλμα του να μοντελοποιείται από λευκό θόρυβο δηλαδή αντί για $\sigma_\omega^2 \Delta t^2$ έχουμε μόνο σ_θ^2, $\sigma_\theta = 0{,}052 \frac{rad}{s}$ μιας και ακόμα δεν υπάρχει ~~αλινδρομη λόγω~~ στη επιβράδυνση αλινδρομη.

έτσι λαμβάνουμε:

$$C_W(0) = E[W(0)W(0)^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0027 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και εφόσον ξεκινάμε από θέση απόλυτης βεβαιότητας θα έχουμε $P(-1)=0$:

$$P(0|-1) = AP(-1)A^T + C_W(0) = C_W(0)$$

μοντέλο παρατήρησης

θα εργαστούμε μόνο με το lf_k (μηροστικός αισθητήρας) αλλά και το μαγνητόμετρο. Η απόσταση από τον τοίχο θα έχει μια αβεβαιότητα εξαιτίας της μέτρησης του μηροστικού αισθητήρα και άρα θα έχουμε

$$Z_{k+1} = \begin{bmatrix} X_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta X_{k+1} \\ \delta\theta_{k+1} \end{bmatrix} \quad \text{όπως} \quad X_{k+1} = 0{,}6 - lf_{k+1}\cos\theta_{k+1}$$

$$\text{έτσι} \quad H_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & lf_{k+1}\sin\theta_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

για $k=0$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{και} \quad C_V(0) = E[V(0)V(0)^T] = \begin{bmatrix} \delta lf^2 & 0 \\ 0 & \delta\theta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0001 & 0 \\ 0 & 0{,}0027 \end{bmatrix}$$

ακόμα:

$$K_{k+1} = P(k+1|k)\, H_{k+1}^T \left[H_{k+1} P(k+1|k) H_{k+1}^T + C_V(k+1) \right]^{-1}$$

άρα

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}^T$$

υπόμα $X'_0 = X_0 + K_0(z_0 - H_0 X_0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

και τελικά $P(k+1) = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P(k+1|k)$

$$\text{άρα} \quad P(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0014 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

λογικό όσο οι μετρήσεις επιβεβαιώνουν την αρχική υπόθεση

state 1: Μοντέλο πρόβλεψης

$$P(1|0) = A_0 P(0) A^T + C_W(0)$$

$$\text{όμως} \quad A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{και} \quad C_W(0) = \begin{bmatrix} 0{,}0002 & 0 & 0 & 0{,}0006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0003 & 0 \\ 0{,}0006 & 0 & 0 & 0{,}0025 \end{bmatrix}$$

τα στοιχεία που είχαν το ημίτονο ήταν πολύ μικρά και τα παραλείψαμε.

$$\text{οπότε} \quad P(1|0) = \begin{bmatrix} 0{,}0002 & 0 & 0 & 0{,}0006 \\ 0 & 0 & 0{,}0001 & 0 \\ 0 & 0{,}0001 & 0{,}00016 & 0 \\ 0{,}006 & 0 & 0 & 0{,}0025 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_0 + v_0 \cos\vartheta_0 \Delta t + \frac{1}{2} a_0 \cos\vartheta_0 \Delta t^2 \\ y_0 + v_0 \sin\vartheta_0 \Delta t + \frac{1}{2} a_0 \sin\vartheta_0 \Delta t^2 \\ \vartheta_0 + \omega_0 \Delta t \\ v_0 + a_0 \Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}05 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$$

θέτουμε $a_0 = 0{,}4\ m/s^2$ αφού όταν αρχίζει η επιτάχυνση και θεωρούμε $\omega_0 = 0\ rad/s$ δεν έχει αρχίσει η στροφή.

Μοντέλο προβλέψεων

$$z_1 = \begin{bmatrix} 0{,}6 - l_f \cos\vartheta_1 \\ \vartheta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta l_f \\ \Delta\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}041 \\ 0{,}07 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}052 \end{bmatrix}$$

αξιοποιήσαμε ότι $l_f = 0{,}56\,m$ και $\vartheta = 4^\circ$ από το μαγνητόμετρο

έχουμε επίσης $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}04 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C_v(1) = C_v(0)$

$$K_1 = P(1|0)\, H_1^T \left[H_1 \cdot P(1|0)\, H_1^T + C_v(1) \right]^{-1}$$

$$\Rightarrow K_1 = \begin{bmatrix} 0{,}6630 & -0{,}0101 \\ 0{,}0056 & 0{,}0154 \\ 0{,}1358 & 0{,}3772 \\ 1{,}9891 & -0{,}0302 \end{bmatrix}$$

έτσι $X_1' = X_1 + K_1 (z_1 - H_1 X_1)$

άρα:

$$X'_1 = \begin{bmatrix} 0{,}0433 \\ 0{,}001 \\ 0{,}0252 \\ 0{,}18 \end{bmatrix}$$

Η τιμή αυτή είναι το αποτέλεσμα του αλγορίθμου Kalman Filtering για την εκτίμηση δίσης την $T_1 = 0{,}5s$. Μπορούμε να πούμε πως είναι μια πολύ λογική εκτίμηση. Το ρομπότ φαίνεται να προχωρά 4 περίπου εκατοστά και στρίβει περίπου 2 μοίρες. Τέλος η ταχύτητα είναι κοντά στα προβλεπόμενα επίπεδα.

Για ολοκλήρωση του αλγορίθμου υπολογίζουμε το:

$$P(1) = (I - K_1 H_1) P(1|0) \Rightarrow$$

$$P(1) = \begin{bmatrix} 0{,}0001 & 0 & 0 & 0{,}0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}01 & -0{,}0001 \\ 0{,}0002 & 0 & -0{,}0001 & 0{,}0013 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.2

Έχουμε αρχική διάταξη $s=[5,10]$ και τελική διάταξη $g=[8,10]$ μη επιτρεπτές διατάξεις $[7,8]$ έως $[7,11]$, $[7,11]$ έως $[9,11]$ και $[9,9]$ έως $[9,11]$

Θα περιγράψουμε τα βήματα του αλγορίθμου «τυχαίας καταβάσης με επιχειρηματίστηση»

Η συνάρτηση δυναμικού πεδίου για τους κόμβους είναι:

$$U(q) = U_{att}(q) + U_{rep}(q)$$

με τη συνάρτηση για το ελκτικό δυναμικο πεδίο να είναι:

$$U_{att}(q) = \frac{1}{2} K_{att} \|q_{goal} - q\|^2$$

και για το απωστικό δυναμικό πεδίο:

$$U_{rep}(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} K_{rep} \left(\frac{1}{\rho(q)} - \frac{1}{\rho_0}\right)^2, & \rho(q) < \rho_0 \\ 0, & \rho(q) \geq \rho_0 \end{cases}$$

με $\rho(q)$ απόσταση της θέσης q από εμπόδιο

Έχουμε επίσης:

i) Ευκλείδια απόσταση για το ελκτικό δυναμικό πεδίο με (ίσων) $K_{att}=2$

ii) Κατώφλι ρ_0 επίδρασης του απωστικού πεδίου κάθε εμποδίο α) $\rho_0=1$, β) $\rho_0=2$ και θα πάρουμε $K_{rep}=2$

iii) γειτονικές όλες οι διατάξεις της δεύτερης τοληρίας απόστασης ≤ 2

οπότε:

$$U(x,y) = (x_{goal}-x)^2 + (y_{goal}-y)^2 + U_{rep} \quad \text{με } x_{goal}=8, \; y_{goal}=10$$

α) για $\rho_0=1$:

$$U(x,y) = (8-x)^2 + (10-y)^2 + \begin{cases} \left(\frac{1}{\rho(q)} - 1\right)^2, & \rho(q) < 1 \\ 0, & \rho(q) > 1 \end{cases}$$

Βήμα αρχικοποίησης

Αρχικά στη λίστα OPEN προστίθεται ο κόμβος $s=(5,10)$ δηλαδή

$OPEN = \{(5,10)\}$

με δυναμικό $U(5,10) = (8-5)^2 + (10-10)^2 + 0 = 9$

Το δένδρο αναζήτησης περιλαμβάνει μόνο τον κόμβο $(5,10)$ και όλοι οι υπόλοιποι επισημαίνονται ως: $q \to visited = FALSE$ εκτός του $(5,10) \to visited = True$

Βήμα 1

$q = BEST(OPEN)$

επιλέγουμε, δηλαδή, και εξάγουμε από την OPEN τον κόμβο q με τη μικρότερη τιμή δυναμικού πεδίου $U(q)$. Οπότε εδώ: $q=(5,10)$

$OPEN = OPEN \cup N(q)$ όπου $N(q)$ το σύνολο των κόμβων q' που είναι γείτονες του q για τους οποίους $q \to visited = FALSE$ και $U(q') < \infty$.

Εδώ υπάρχει $N(q) = \{(5,11); (6,10); (4.5, 8.5)\}$

οπότε το $OPEN = \{(5,11); (6,10); (4.5, 8.5)\}$

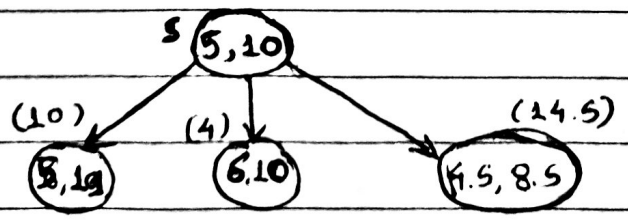
με τιμές για τα νέα στοιχεία (δυναμικό πεδίο τους):

$$\begin{cases} U(5,11) = (8-5)^2 + (10-11)^2 + 0 = 10 \\ U(6,10) = (8-6)^2 + (10-10)^2 + 0 = 4 \\ U(4.5, 8.5) = (8-4.5)^2 + (10-8.5)^2 + 0 = 14,5 \end{cases}$$

Σημειώνουμε τους νέους κόμβους ως visited και τους εισάγουμε στο δένδρο αναζήτησης T:

$(5,11) \to visited = TRUE$, $(6,10) \to visited = TRUE$, $(4.5, 8.5) \to visited = TRUE$

και το T στο τρέχον βήμα έχει τη μορφή



Βήμα 2

Εξάγουμε τον κόμβο $q = BEST(OPEN)$ από την OPEN: $q = (6,10)$

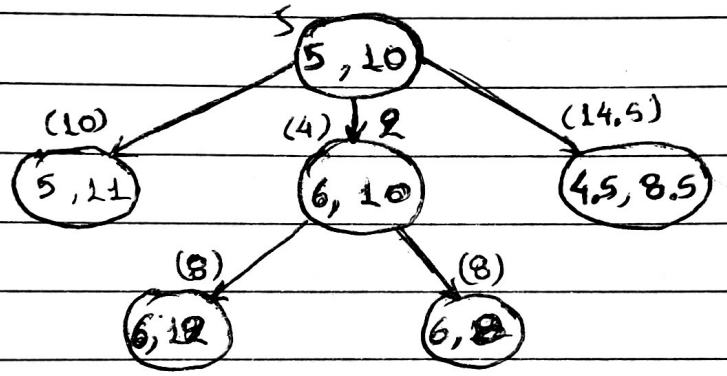
$OPEN = OPEN \cup N(q)$, $N(q) = \{(6,12); (6,8)\}$

άρα $OPEN = \{(5,11); (4.5, 8.5); (6,12); (6,8)\}$

με τιμές δυναμικού για τα νέα στοιχεία

$$\begin{cases} U(6,12) = (8-6)^2 + (10-12)^2 + 0 = 8 \\ U(6,8) = (8-6)^2 + (10-8)^2 + 0 = 8 \end{cases}$$

Σημειώνουμε τους κόμβους ως visited και άρα το δέντρο αναζήτησης T είναι



Στο δέντρο T με ( ) είναι οι τιμές του δυναμικού και χωρίς τόξα είναι το βήμα στο οποίο επιλέχθηκε ο κόμβος από τον αλγόριθμό μας.

Βήμα 3

Εξάγω τον κόμβο $q = BEST(OPEN)$ από την OPEN, όπως εδώ $q = (6,12)$ ή $q = (6,8)$

για $q = (6,12)$:

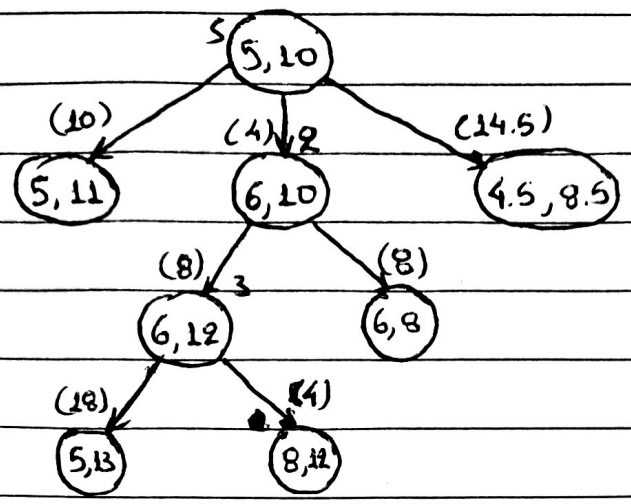
$OPEN = OPEN \cup N(q)$, $N(q) = \{(5,13); (8,12)\}$

άρα $OPEN = \{(5,11); (4.5, 8.5); (6,8); (5,13); (8,12)\}$

με τιμές δυναμικού για τα νέα στοιχεία

$$\begin{cases} U(5,13) = (8-5)^2 + (10-13)^2 + 0 = 18 \\ U(8,12) = (8-8)^2 + (10-12)^2 + 0 = 4 \end{cases}$$

Άρα το δέντρο T γίνεται:



για $q = (6,8)$:

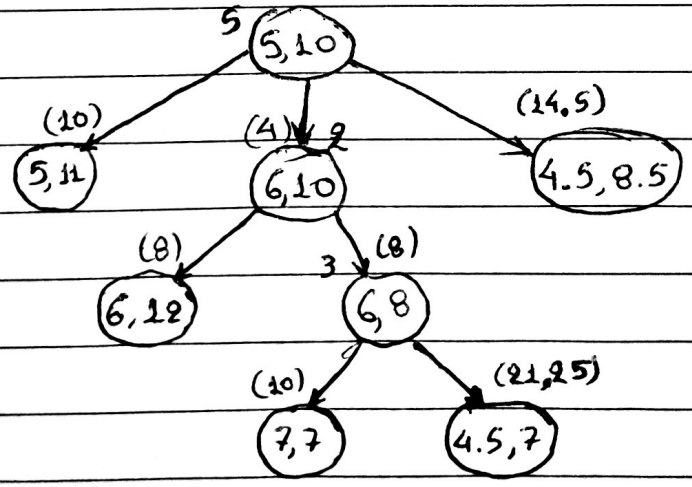
$OPEN = OPEN \cup N(q)$ όπου $N(q) = \{(7,7); (4.5,7)\}$

άρα $OPEN = \{(5,11); (4.5, 8.5); (6,12); (7,7); (4.5,7)\}$

με τιμές δυναμικού για τα νέα στοιχεία:

$$\begin{cases} U(7,7) = (8-7)^2 + (10-7)^2 + 0 = 10 \\ U(4,5,7) = (8-4,5)^2 + (10-7)^2 + 0 = 21,25 \end{cases}$$

Άρα το T είναι:



Ο αλγόριθμος θα συνεχίσει μέχρι να ~~εξαγουμε~~ αναζητούμε τον κόμβο-στόχο g στο δένδρο. Στο τέλος επιστρέφει τη βέλτιστη διαδρομή παρακολουθώντας τους δείκτες πάνω στο δένδρο αναζήτησης αντίστροφα από τον κόμβο g προς τον κόμβο s

Ανεξαρτήτως ποιον από τους δύο κόμβους επιλέξουμε (με αυτό το Κριτ) θα είναι ~~η ίδια~~. η βελτιστη διαδρομή ίδια, εφόσον αν επιλεγεί ο (6,8) μετά θα διαλέξω τον (6,12) καθώς είναι αυτός με το βέλτιστο U στην OPEN και το δέντρο θα συνεχίσει με την ίδια λογική μας και θα ακολουθήσουμε τη διαδρομή:

$s \to 4 \to 9 \to 11 \to 16 \to 23 \to 26 \to 29 \to 31 \to g$

μας και οι τιμές του δυναμικού για τα στοιχεία μετά τον κόμβο $9 \equiv (6,12)$ είναι:

11: $U(8,12) = 4$

16: $U(9, 11.5) = (8-9)^2 + (10-11.5)^2 + (\frac{1}{0,5} - 1)^2 = 4,25$

23: $U(10, 11) = (8-10)^2 + (10-11)^2 + 0 = 5$

26: $U(10, 9) = (8-10)^2 + (10-9)^2 + 0 = 5$

29: $U(9, 8) = (8-9)^2 + (10-8)^2 + 0 = 5$

31: $U(8,8) = (8-8)^2 + (10-8)^2 + 0 = 4$

και έπειτα φτάνουμε στον g. Επομένως δε θα επιλεγεί ποτέ να συνεχίσει από τον κόμβο $8 \equiv (7,7)$ καθώς είχε δυναμικό 10 το οποίο είναι μεγαλύτερο από όλα της πάνω διαδρομής. Οπότε βέλτιστη επιλογή μεταξύ του (6,12) και (6,8) θα ήταν ο (6,12) για να αλτιώσουμε μια επανάληψη.

β) για $\rho_0 = 2$:

$$U(x,y) = (8-x)^2 + (10-y)^2 + \begin{cases} \left(\frac{1}{\rho(q)} - 0,5\right), & \rho(q) < 2 \\ 0, & \rho(q) \geq 2 \end{cases}$$

<u>Βήμα αρχικοποίησης</u>

Στη λίστα OPEN προστίθεται ο κόμβος $s = (5,10)$, δηλαδή $OPEN = \{(5,10)\}$

με δυναμικό $U(5,10) = 9$ απόσταση $\rho(q) = 2$ από εμπόδιο

Βήμα 1

Εξάγουμε τον $q = BEST(OPEN)$ από την OPEN: $q = (5,10)$

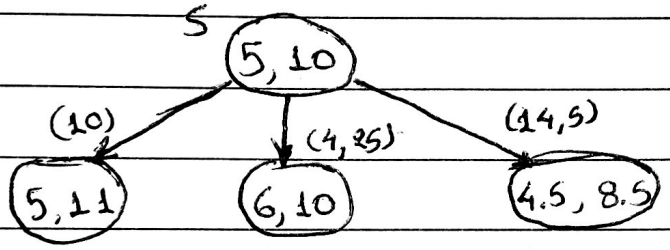
$OPEN = OPEN \cup N(q)$, $N(q) = \{(5,11); (6,10); (4.5, 8.5)\}$

άρα $OPEN = \{(5,11); (6,10); (4.5, 8.5)\}$

με χρήση δυναμικού για τα νέα στοιχεία

$$\begin{cases} U(5,11) = (8-5)^2 + (10-11)^2 + 0 = 10 \\ U(6,10) = (8-6)^2 + (10-10)^2 + (1-0,5)^2 = 4,25 \\ U(4.5, 8.5) = (8-4.5)^2 + (10-8.5)^2 + 0 = 14,5 \end{cases}$$

Άρα το δένδρο T είναι:



Βήμα 2

Εξάγουμε τον κόμβο $q = BEST(OPEN)$ από την OPEN: $q = (6,10)$

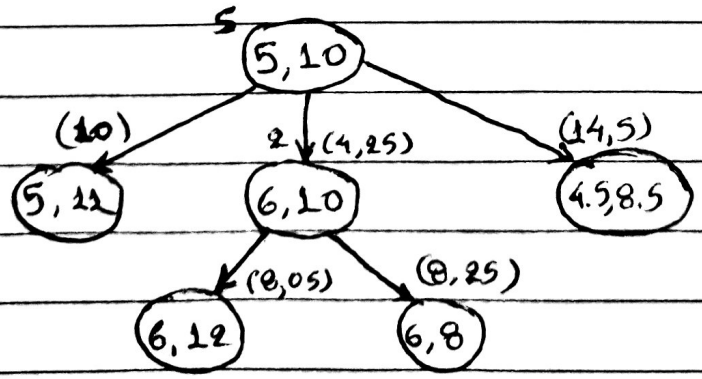
$OPEN = OPEN \cup N(q)$, $OPEN = \{(5,11); (4.5, 8.5); (6,12); (6,8)\}$

αφού $N(q) = \{(6,12); (6,8)\}$

με χρήση δυναμικού για τα νέα στοιχεία:

$$\begin{cases} U(6,12) = (8-6)^2 + (10-12)^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}} - 0,5)^2 = 8,05 \\ U(6,8) = (8-6)^2 + (10-8)^2 + (1-0,5)^2 = 8,25 \end{cases}$$

Και άρα το δένδρο T είναι



Βήμα 3

εξάγουμε τον κόμβο $q = BEST(OPEN)$ από την OPEN : $q=(6,12)$

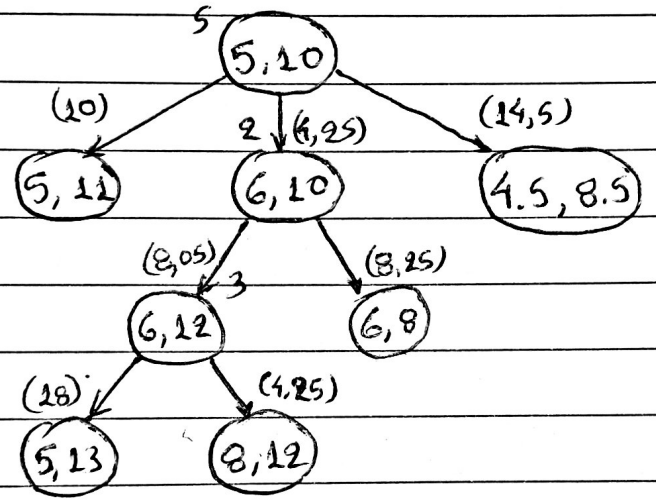
$OPEN = OPEN \cup N(q)$, $N(q) = \{(5,13);(8,12)\}$

άρα $OPEN = \{(5,11);(4.5,8.5);(6,8);(5,13);(8,12)\}$

με χρήση δυναμικού για τα νέα στοιχεία

$$\begin{cases} U(5,13) = (8-5)^2 + (10-13)^2 + 0 = 18 \\ U(8,12) = (8-8)^2 + (10-12)^2 + (1-0,5)^2 = 4,25 \end{cases}$$

και άρα το T είναι:



Η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου φτάσουμε στον κόμβο g. Όπως και πριν θα λάβουμε ως αποτέλεσμα βέλτιστης διαδρομής την:

$S \to 4 \to 9 \to 11 \to 16 \to 23 \to 26 \to 29 \to 31 \to g$

Έχουμε τα ίδια αποτελέσματα εξαιτίας του Krep που χρησιμοποιούμε. Εάν επιθυμούσαμε να έχει μεγαλύτερη ακριβή θα βάζαμε μεγαλύτερη τιμή και τότε το ρομπότ μας θα απέφευγε τις κουκκίδες από 80% υποστάσεις.

Ο αλγόριθμος αυτός είναι πλήρης, δεδομένου ότι εάν υπάρχει λύση, τότε σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων θα την υπολογίσει. Όμως, δεν είναι βέλτιστος καθώς η επιλογή των κόμβων που θα επισκεφθεί γίνεται με greedy κριτήριο.