

Przykładowy egzamin

placeholder

February 6, 2023

Contents

1	Algebra	2
1.1	DONE Zad 1	2
1.2	DONE Zad 2	2
1.2.1	z	2
1.2.2	w	3
1.2.3	Podstawiamy	4
1.3	DONE Zad 3	4
1.3.1	DONE A_4	4
1.3.2	DONE Podstawianie	4
1.4	DONE Zad 4	5
1.5	DONE Zad 5	5
1.6	DONE Zad 6	6
1.6.1	DONE Związek między współrzędnymi x_1, x_2 w bazie \vec{e}_1, \vec{e}_2 a współrzędnymi \hat{x}_1, \hat{x}_2 w bazie \vec{u}, \vec{v}	7
1.6.2	DONE Znaleźć współrzędne wektora \vec{x} w bazie \vec{u}, \vec{v} , jeżeli jego współrzędne w bazie \vec{e}_1, \vec{e}_2 wynoszą: $1, -2$	7
1.7	NO Zad 7	8
1.8	DONE Zad 8	8
1.8.1	DONE Równanie prostej w postaci kanonicznej	8
1.8.2	DONE Równanie prostej w postaci parametrycznej	8
1.8.3	DONE Obliczanie odległości punktu od prostej	9
1.8.4	DONE Obliczanie pola trójkąta	9
1.9	DONE Zad 9	9
1.9.1	DONE Wyznaczyć wektor kierunkowy prostej	9
1.9.2	DONE Wyznaczyć punkt przecięcia płaszczyzny i prostej	10
1.9.3	DONE Obliczyć odległość punktu $P(0, 1, 0)$ od prostej l_1	11

2	Analiza	11
2.1	Zad 7	11
2.1.1	Zad 7b	11

1 Algebra

1.1 DONE Zad 1

$$\begin{aligned}
\Im \left(\frac{1+3i}{3-2i} + i^3 + 5 \right) &= \Im \left(\frac{1+3i}{3-2i} + \frac{i^3(3-2i)}{3-2i} + \frac{5(3-2i)}{3-2i} \right) \\
&= \Im \left(\frac{1+3i+3i^3-2i^4+15-10i}{3-2i} \right) \\
&= \Im \left(\frac{16-7i+3i^3-2i^4}{3-2i} \right) \\
&= \Im \left(\frac{14-10i}{3-2i} \right) \\
&= \Im \left(\frac{14-10i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} \right) \\
&= \Im \left(\frac{42+28i-30i+20}{9+4} \right) \\
&= \Im \left(\frac{62-2i}{13} \right) \\
&= \frac{-2}{13}
\end{aligned}$$

1.2 DONE Zad 2

$$\frac{(3-3i)^{14}}{(-1+i\sqrt{3})^{11}} = \frac{z^{14}}{w^{11}}$$

1.2.1 z

$$\sin(\varphi_z) = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow \varphi_z = \frac{7}{4}\pi$$

$$\begin{aligned}
z^{14} &= (3 - 3i)^{14} \\
&= (3 - 3i)^{14} \\
&= (3\sqrt{2})^{14} (\cos 14\varphi + i \sin 14\varphi) \\
&= (3\sqrt{2})^{14} \left(\cos \left(14 \cdot \frac{7}{4} \pi \right) + i \sin \left(14 \cdot \frac{7}{4} \pi \right) \right) \\
&= (3\sqrt{2})^{14} \left(\cos \left(\frac{49}{2} \pi \right) + i \sin \left(\frac{49}{2} \pi \right) \right) \\
&= (3\sqrt{2})^{14} \left(\cos \left(\frac{1}{2} \pi \right) + i \sin \left(\frac{1}{2} \pi \right) \right) \\
&= (3\sqrt{2})^{14} (0 + i1) \\
&= (3\sqrt{2})^{14} i
\end{aligned}$$

1.2.2 w

$$\sin(\varphi_w) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi_w = \frac{2}{3}\pi$$

$$\begin{aligned}
w^{11} &= 2^{11} \left(\cos \left(11 \cdot \frac{2}{3} \pi \right) + i \sin \left(11 \cdot \frac{2}{3} \pi \right) \right) \\
&= 2^{11} \left(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\
&= 2^{11} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
&= 2^{10} (-1 - i\sqrt{3})
\end{aligned}$$

1.2.3 Podstawiamy

$$\begin{aligned}
 \frac{(3-3i)^{14}}{(-1+i\sqrt{3})^{11}} &= \frac{z^{14}}{w^{11}} \\
 &= \frac{(3\sqrt{2})^{14}i}{2^{10}(-1-i\sqrt{3})} \\
 &= \frac{((3\sqrt{2})^{14}i)(-1+i\sqrt{3})}{2^{10}(-1-i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})} \\
 &= \frac{((3\sqrt{2})^{14}i)(-1+i\sqrt{3})}{2^{10}(-2)} \\
 &= \frac{((3\sqrt{2})^{14}i)(-1+i\sqrt{3})}{-2^{11}}
 \end{aligned}$$

1.3 DONE Zad 3

Wyznacznik macierzy głównej = 20.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1.3.1 DONE A_4

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[k_3=k_3-k_4]{k_4=k_4-3k_2} \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 10 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot (6 + 100 - 24) - (40 + 60 - 6) \\
 &= 82 - 94 \\
 &= -12
 \end{aligned}$$

1.3.2 DONE Podstawianie

$$x_4 = \frac{-12}{20} = \frac{-3}{5}$$

1.4 DONE Zad 4

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \end{array} \right] \xrightarrow{w_1=w_1-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[\substack{w_3=w_3-2w_1 \\ w_2=w_2-2w_1}]{\substack{w_3=w_3-2w_1 \\ w_2=w_2-2w_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & -8 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[\substack{w_1=w_1+w_2 \\ w_3=w_3-w_2}]{\substack{w_1=w_1+w_2 \\ w_3=w_3-w_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[\substack{k_3=k_4 \\ k_4=k_3}]{\substack{k_3=k_4 \\ k_4=k_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & y \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[\substack{w_3=w_3 \cdot \frac{1}{3}}]{\substack{w_3=w_3 \cdot \frac{1}{3}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & y \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[\substack{w_1=w_1-2 \cdot w_3 \\ w_2=w_2-3 \cdot w_3}]{\substack{w_1=w_1-2 \cdot w_3 \\ w_2=w_2-3 \cdot w_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & y \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -5x_3 \\
 x_2 &= -7x_3 - 2 \\
 x_3 &\in \mathbb{R} \\
 x_4 &= -1
 \end{aligned}$$

1.5 DONE Zad 5

$$XA = B \xrightarrow{\text{prawostronnie } A^{-1}} XAA^{-1} = BA^{-1} \rightarrow X = BA^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = (36 + 4) - (8 + 30) = 40 - 38 = 2$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -8 & -13 & -12 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & -7 & -6 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -8 & 2 & -4 \\ -13 & 2 & -7 \\ -12 & 2 & -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -\frac{13}{2} & 1 & -\frac{7}{2} \\ -6 & 1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X = BA^{-1} &= \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -\frac{13}{2} & 1 & -\frac{7}{2} \\ -6 & 1 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -16 - 13 + 30 & 4 + 2 - 5 & -8 - 7 + 15 \\ -12 + 0 + 12 & 3 + 0 - 2 & -6 + 0 + 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.6 DONE Zad 6

Macierz obrotu o kąt $\frac{\pi}{3}$ w kierunku dodatnim $A = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$.

1.6.1 DONE Związek między współrzędnymi x_1, x_2 w bazie \vec{e}_1, \vec{e}_2 a współrzędnymi \hat{x}_1, \hat{x}_2 w bazie \vec{u}, \vec{v} .

$$\begin{aligned}\vec{u} &= A \cdot \vec{e}_1 \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

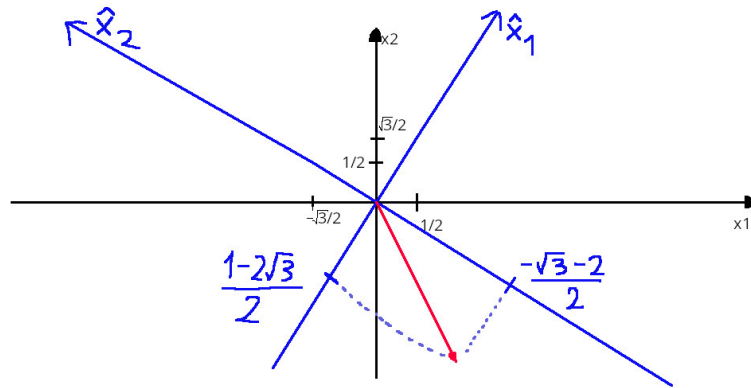
$$\begin{aligned}\vec{v} &= A \cdot \vec{e}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

1.6.2 DONE Znaleźć współrzędne wektora \vec{x} w bazie \vec{u}, \vec{v} , jeżeli jego współrzędne w bazie \vec{e}_1, \vec{e}_2 wynoszą: $1, -2$.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} &= A^T \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1-2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-2-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

1. Sporządzić rysunek



1.7 NO Zad 7

1.8 DONE Zad 8

$$A = (0, 1, 5), \quad B = (-2, 3, 1), \quad C = (-2, 7, 3)$$

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(-2)^2 + (3-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \\ |AC| &= \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11} \\ |BC| &= \sqrt{0+16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

1.8.1 DONE Równanie prostej w postaci kanonicznej

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-1}{7-1} = \frac{z-5}{3-5} \rightarrow \frac{x-0}{-2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-5}{-2} = t$$

1.8.2 DONE Równanie prostej w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} x-0 = -2t \rightarrow x = -2t \\ y-1 = 6t \rightarrow y = 6t+1 \\ z-5 = -2t \rightarrow z = -2t+5 \end{cases}$$

1.8.3 DONE Obliczanie odległości punktu od prostej

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} \times \vec{k} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (4\vec{i} + 12\vec{k} - 8\vec{j}) - (4\vec{k} + 24\vec{i} - 4\vec{j}) \\ &= 4\vec{i} + 12\vec{k} - 8\vec{j} - 4\vec{k} - 24\vec{i} + 4\vec{j} \\ &= -20\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}\end{aligned}$$

$$B = (-2, 3, 1)$$

$$D = (0, 1, 5)$$

$$\text{wektor kierunkowy: } \vec{k} = [-2, 6, -2]$$

$$\overrightarrow{BD} = [0 + 2, 1 - 3, 5 - 1] = [2, -2, 4]$$

$$|BD| = \frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\vec{k}|} = \frac{\sqrt{(-20)^2 + 4^2 + 8^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{400 + 16 + 64}}{\sqrt{4 + 36 + 4}} = \frac{\sqrt{480}}{\sqrt{44}} = \sqrt{\frac{120}{11}} = \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{11}}$$

1.8.4 DONE Obliczanie pola trójkąta

$$P = \frac{2\sqrt{11} \cdot \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{11}}}{2} = \frac{2\sqrt{120}}{2} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$$

1.9 DONE Zad 9

$$\text{Płaszczyzna: } \pi : x - y + z - 2 = 0$$

$$\text{Postać krawędziowa prostej: } l_1 : \begin{cases} 3x + 2y - z - 4 = 0 \\ -x - 2y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

1.9.1 DONE Wyznaczyć wektor kierunkowy prostej

$$\begin{aligned}\vec{k} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\vec{i} - 6\vec{k} + 1\vec{j} - (-2\vec{k} + 2\vec{i} + 3\vec{j}) \\ &= [0, -2, -4]\end{aligned}$$

1.9.2 DONE Wyznaczyć punkt przebiecia płaszczyzny i prostej

1. Znaleźć punkt na prostej Strzlamy punkt $Q(1, 1, 1)$, bo spełnia równanie prostej.
2. Równanie parametryczne prostej

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 0t = 1 \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

3. Obliczyć punkt przecięcia płaszczyzny π oraz prostej l_1

(a) Obliczyć t .

Podstawiamy x, y, z z równania parametrycznego do równania płaszczyzny.

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 1 + 2t + 1 - 4t - 2 && \text{uproszczyć} \\ 0 &= -2t - 1 \\ -2t &= 1 && / -2 \\ t &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) Podstawić t do równania parametrycznego prostej.

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 0t &= 1 \\ y = 1 - 2t = 1 + 1 &= 2 \\ z = 1 - 4t = 1 + 2 &= 3 \end{cases}$$

(c) Punkt przecięcia prostej l z płaszczyzną

$$P_1 = (1, 2, 3)$$

1.9.3 DONE Obliczyć odległość punktu $P(0, 1, 0)$ od prostej l_1

$$\overrightarrow{PQ} = [1 - 0, 1 - 1, 1 - 0] = [1, 0, 1]$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \times \vec{k} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{\overrightarrow{PQ}} & y_{\overrightarrow{PQ}} & z_{\overrightarrow{PQ}} \\ x_{\vec{k}} & y_{\vec{k}} & z_{\vec{k}} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= -2\vec{k} - (-2\vec{i} - 4\vec{j}) \\ &= 2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} \\ &= [2, 4, -2]\end{aligned}$$

1. Długość odcinka PQ

$$|PQ| = \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{k}|} = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2}}{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}} = \sqrt{\frac{24}{20}} = \sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

2 Analiza

2.1 Zad 7

2.1.1 Zad 7b

Obliczyć $\int_a^b f(x)dx$

$$a = -3 \qquad b = \frac{1}{2} \qquad f(x) = 3 + x^2$$

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{\frac{1}{2}} 3 + x^2 dx &= \int_{-3}^{\frac{1}{2}} 3 dx + \int_{-3}^{\frac{1}{2}} x^2 dx \\
&= \left(\underbrace{3x + \frac{x^3}{3}}_{F(x)} \right) \bigg|_{-3}^{\frac{1}{2}} \\
&= F(b) - F(a) \\
&= \left(\frac{36}{24} + \frac{1}{24} \right) - (-9 - 9) \\
&= \frac{37}{24} + 18 \\
&= \frac{37}{24} + \frac{432}{24} \\
&= \frac{469}{24}
\end{aligned}$$