

Przykładowy egzamin

placeholder

February 12, 2023

Contents

1	[8/10] Algebra	2
1.1	DONE Zad 1	2
1.2	DONE Zad 2	2
1.2.1	z	2
1.2.2	w	2
1.2.3	Podstawiamy	3
1.3	DONE Zad 3	3
1.3.1	DONE A_4	3
1.3.2	DONE Podstawianie	3
1.4	DONE Zad 4	4
1.5	DONE Zad 5	4
1.6	DONE Zad 6	5
1.6.1	DONE Związek między współrzędnymi x_1, x_2 w bazie \vec{e}_1, \vec{e}_2 a współrzędnymi \hat{x}_1, \hat{x}_2 w bazie \vec{u}, \vec{v}	5
1.6.2	DONE Znaleźć współrzędne wektora \vec{x} w bazie \vec{u}, \vec{v} , jeżeli jego współrzędne w bazie \vec{e}_1, \vec{e}_2 wynoszą: $1, -2$	6
1.7	TODO Zad 7	6
1.7.1	PROJ Zad 7a	6
1.8	DONE Zad 8	8
1.8.1	DONE Równanie prostej w postaci kanonicznej	8
1.8.2	DONE Równanie prostej w postaci parametrycznej	8
1.8.3	DONE Obliczanie odległości punktu od prostej	8
1.8.4	DONE Obliczanie pola trójkąta	8
1.9	DONE Zad 9	9
1.9.1	DONE Wyznaczyć wektor kierunkowy prostej	9
1.9.2	DONE Wyznaczyć punkt przecięcia płaszczyzny i prostej	9
1.9.3	DONE Obliczyć odległość punktu $P(0, 1, 0)$ od prostej l_1	9
2	[2/3] Analiza	10
2.1	DONE Zad 5	10
2.2	DONE Zad 7	10
2.2.1	Zad 7b	10

1 [8/10] Algebra

1.1 DONE Zad 1

$$\begin{aligned}\Im\left(\frac{1+3i}{3-2i} + i^3 + 5\right) &= \Im\left(\frac{1+3i}{3-2i} + \frac{i^3(3-2i)}{3-2i} + \frac{5(3-2i)}{3-2i}\right) \\&= \Im\left(\frac{1+3i+3i^3-2i^4+15-10i}{3-2i}\right) \\&= \Im\left(\frac{16-7i+3i^3-2i^4}{3-2i}\right) \\&= \Im\left(\frac{14-10i}{3-2i}\right) \\&= \Im\left(\frac{14-10i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i}\right) \\&= \Im\left(\frac{42+28i-30i+20}{9+4}\right) \\&= \Im\left(\frac{62-2i}{13}\right) \\&= \frac{-2}{13}\end{aligned}$$

1.2 DONE Zad 2

$$\frac{(3-3i)^{14}}{(-1+i\sqrt{3})^{11}} = \frac{z^{14}}{w^{11}}$$

1.2.1 z

$$\sin(\varphi_z) = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow \varphi_z = \frac{7}{4}\pi$$

$$\begin{aligned}z^{14} &= (3-3i)^{14} \\&= (3-3i)^{14} \\&= (3\sqrt{2})^{14} (\cos 14\varphi + i \sin 14\varphi) \\&= (3\sqrt{2})^{14} \left(\cos \left(14 \cdot \frac{7}{4}\pi \right) + i \sin \left(14 \cdot \frac{7}{4}\pi \right) \right) \\&= (3\sqrt{2})^{14} \left(\cos \left(\frac{49}{2}\pi \right) + i \sin \left(\frac{49}{2}\pi \right) \right) \\&= (3\sqrt{2})^{14} \left(\cos \left(\frac{1}{2}\pi \right) + i \sin \left(\frac{1}{2}\pi \right) \right) \\&= (3\sqrt{2})^{14} (0 + i1) \\&= (3\sqrt{2})^{14} i\end{aligned}$$

1.2.2 w

$$\sin(\varphi_w) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi_w = \frac{2}{3}\pi$$

$$\begin{aligned}
w^{11} &= 2^{11} \left(\cos \left(11 \cdot \frac{2}{3} \pi \right) + i \sin \left(11 \cdot \frac{2}{3} \pi \right) \right) \\
&= 2^{11} \left(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\
&= 2^{11} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
&= 2^{10} (-1 - i\sqrt{3})
\end{aligned}$$

1.2.3 Podstawiamy

$$\begin{aligned}
\frac{(3-3i)^{14}}{(-1+i\sqrt{3})^{11}} &= \frac{z^{14}}{w^{11}} \\
&= \frac{(3\sqrt{2})^{14}i}{2^{10}(-1-i\sqrt{3})} \\
&= \frac{((3\sqrt{2})^{14}i)(-1+i\sqrt{3})}{2^{10}(-1-i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})} \\
&= \frac{((3\sqrt{2})^{14}i)(-1+i\sqrt{3})}{2^{10}(-2)} \\
&= \frac{((3\sqrt{2})^{14}i)(-1+i\sqrt{3})}{-2^{11}}
\end{aligned}$$

1.3 DONE Zad 3

Wyznacznik macierzy głównej = 20.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1.3.1 DONE A_4

$$\begin{aligned}
A_4 &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[k_3=k_3-k_4]{k_4=k_4-3k_2} \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 10 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (6 + 100 - 24) - (40 + 60 - 6) \\
&= 82 - 94 \\
&= -12
\end{aligned}$$

1.3.2 DONE Podstawianie

$$x_4 = \frac{-12}{20} = \frac{-3}{5}$$

1.4 DONE Zad 4

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \end{array} \right] \xrightarrow{w_1=w_1-w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[w_2=w_2-2w_1]{w_3=w_3-2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & -8 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[w_3=w_3-w_2]{w_1=w_1+w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[k_4=k_3]{k_3=k_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & y \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[w_3=w_3 \cdot \frac{1}{3}]{\phantom{w_3=w_3 \cdot \frac{1}{3}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & y \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[w_2=w_2-3 \cdot w_3]{w_1=w_1-2 \cdot w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & y \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$x_1 = -5x_3$$

$$x_2 = -7x_3 - 2$$

$$x_3 \in \mathbb{R}$$

$$x_4 = -1$$

1.5 DONE Zad 5

$$XA = B \xrightarrow[\text{prawostronnie } A^{-1}]{} XAA^{-1} = BA^{-1} \rightarrow X = BA^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = (36 + 4) - (8 + 30) = 40 - 38 = 2$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -8 & -13 & -12 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & -7 & -6 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -8 & 2 & -4 \\ -13 & 2 & -7 \\ -12 & 2 & -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -\frac{13}{2} & 1 & -\frac{7}{2} \\ -6 & 1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X = BA^{-1} &= \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -\frac{13}{2} & 1 & -\frac{7}{2} \\ -6 & 1 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -16 - 13 + 30 & 4 + 2 - 5 & -8 - 7 + 15 \\ -12 + 0 + 12 & 3 + 0 - 2 & -6 + 0 + 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.6 DONE Zad 6

Macierz obrotu o kąt $\frac{\pi}{3}$ w kierunku dodatnim $A = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$.

1.6.1 DONE Związek między współrzędnymi x_1, x_2 w bazie \vec{e}_1, \vec{e}_2 a współrzędnymi \hat{x}_1, \hat{x}_2 w bazie \vec{u}, \vec{v} .

$$\begin{aligned} \vec{u} &= A \cdot \vec{e}_1 \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

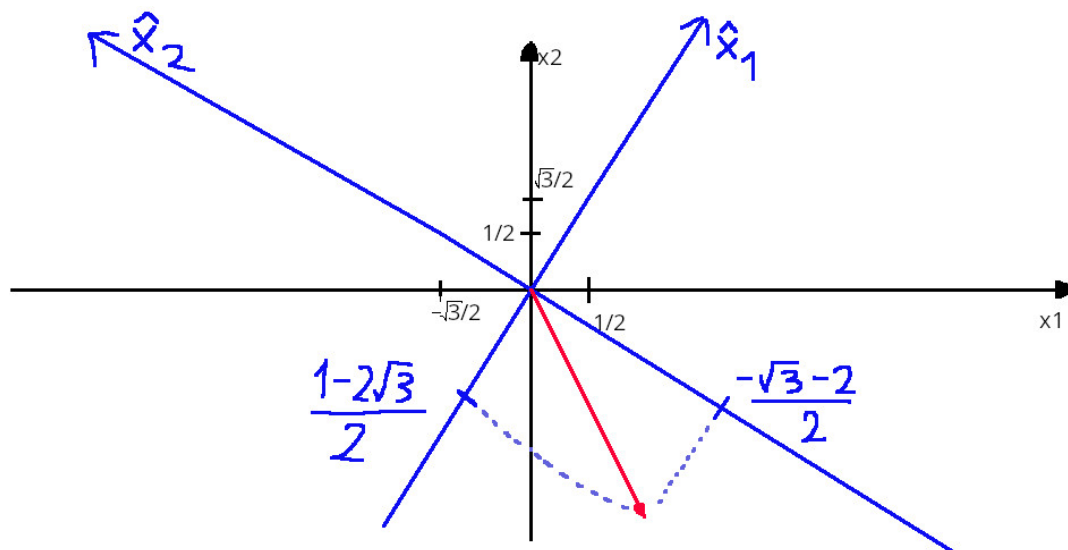
$$\begin{aligned} \vec{v} &= A \cdot \vec{e}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.6.2 **DONE** Znaleść współrzędne wektora \vec{x} w bazie \vec{u}, \vec{v} , jeżeli jego współrzędne w bazie \vec{e}_1, \vec{e}_2 wynoszą: $1, -2$.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} &= A^T \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1-2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-2-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1. Sporządzić rysunek



1.7 **TODO** Zad 7

1.7.1 **PROJ** Zad 7a

$$-72 + 13x^2 - 10xy + 13y^2 = 0$$

Forma kwadratowa:

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 13^2 - (-5)^2 = 169 - 25 = 144$$

Typ elptyczny

1. **DONE** Znaleść wartości własne λ

$$A(I\lambda) = \begin{bmatrix} 13 - \lambda & -5 \\ -5 & 13 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$(13 - \lambda)^2 - 25 = 0$$

$$169 - 26\lambda + \lambda^2 - 25 = 0$$

$$\lambda^2 - 26\lambda + 144 = 0$$

$$\Delta = 26^2 - 4 \cdot 144 = 676 - 576 = 100$$

$$\sqrt{\Delta} = 10$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{26 + 10}{2} = 18$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{26 - 10}{2} = 8$$

2. DONE Wersory

(a) Dla λ_1

$$\begin{bmatrix} 13 - 18 & -5 \\ -5 & 13 - 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i. Wyznaczyć W_1

$$-5v_{11} - 5v_{12} = 0 \quad / -5$$

$$v_{11} + v_{12} = 0$$

$$v_{11} = -v_{12}$$

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{12} \\ v_{12} \end{bmatrix}$$

Trzeba będzie zamienić W_1 i W_2 , bo wyszedł - u góry.

$$|\vec{V}_1| = \sqrt{(-v_{12})^2 + v_{12}^2} = \sqrt{v_{12}^2 + v_{12}^2} = \sqrt{2v_{12}^2} = \sqrt{2}v_{12}$$

$$\vec{W}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-v_{12}}{\sqrt{2}v_{12}} \\ \frac{v_{12}}{\sqrt{2}v_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

(b) Dla λ_2

$$\begin{bmatrix} 13 - 8 & -5 \\ -5 & 13 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i. Wyznaczyć W_2

$$5v_{21} - 5v_{22} = 0 \quad /5$$

$$v_{21} - v_{22} = 0$$

$$v_{21} = v_{22}$$

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} v_{22} \\ v_{22} \end{bmatrix}$$

$$|\vec{V}_2| = \sqrt{v_{22}^2 + v_{22}^2} = \sqrt{2v_{22}^2} = \sqrt{2}v_{22}$$

$$\vec{W}_2 = \begin{bmatrix} \frac{v_{22}}{\sqrt{2}v_{22}} \\ \frac{v_{22}}{\sqrt{2}v_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

3. **DONE** Macieź obrotu Zamieniamy kolejność wersorów bo minus ma być w lewym górnym.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x}_2$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x}_2$$

Zwijamy

$$8\hat{x}_1^2 + 18\hat{x}_2^2 - 72 = 0 \quad /72$$

$$\frac{\hat{x}_1^2}{3^2} + \frac{\hat{x}_2^2}{2^2} = 1$$

4. **TODO** wykres

1.8 DONE Zad 8

$$A = (0, 1, 5),$$

$$B = (-2, 3, 1),$$

$$C = (-2, 7, 3)$$

$$|AB| = \sqrt{(-2)^2 + (3-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$|AC| = \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

$$|BC| = \sqrt{0+16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

1.8.1 DONE Równanie prostej w postaci kanonicznej

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-1}{7-1} = \frac{z-5}{3-5} \rightarrow \frac{x-0}{-2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-5}{-2} = t$$

1.8.2 DONE Równanie prostej w postaci paraetrycznej

$$\begin{cases} x-0 = -2t \rightarrow x = -2t \\ y-1 = 6t \rightarrow y = 6t+1 \\ z-5 = -2t \rightarrow z = -2t+5 \end{cases}$$

1.8.3 DONE Obliczanie odległości punktu od prostej

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} \times \vec{k} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (4\vec{i} + 12\vec{k} - 8\vec{j}) - (4\vec{k} + 24\vec{i} - 4\vec{j}) \\ &= 4\vec{i} + 12\vec{k} - 8\vec{j} - 4\vec{k} - 24\vec{i} + 4\vec{j} \\ &= -20\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k} \end{aligned}$$

$$B = (-2, 3, 1)$$

$$D = (0, 1, 5)$$

$$\text{wektor kierunkowy: } \vec{k} = [-2, 6, -2]$$

$$\overrightarrow{BD} = [0+2, 1-3, 5-1] = [2, -2, 4]$$

$$|BD| = \frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\vec{k}|} = \frac{\sqrt{(-20)^2 + 4^2 + 8^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{400 + 16 + 64}}{\sqrt{4 + 36 + 4}} = \frac{\sqrt{480}}{\sqrt{44}} = \sqrt{\frac{120}{11}} = \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{11}}$$

1.8.4 DONE Obliczanie pola trójkąta

$$P = \frac{2\sqrt{11} \cdot \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{11}}}{2} = \frac{2\sqrt{120}}{2} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$$

1.9 DONE Zad 9

Płaszczyzna: $\pi : x - y + z - 2 = 0$

Postać krawędziowa prostej: $l_1 : \begin{cases} 3x + 2y - z - 4 = 0 \\ -x - 2y + z + 2 = 0 \end{cases}$

1.9.1 DONE Wyznaczyć wektor kierunkowy prostej

$$\begin{aligned}\vec{k} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\vec{i} - 6\vec{k} + 1\vec{j} - (-2\vec{k} + 2\vec{i} + 3\vec{j}) \\ &= [0, -2, -4]\end{aligned}$$

1.9.2 DONE Wyznaczyć punkt przecięcia płaszczyzny i prostej

1. Znaleźć punkt na prostej Strzamy punkt $Q(1, 1, 1)$, bo spełnia równanie prostej.
2. Równanie parametryczne prostej

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 0t = 1 \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

3. Obliczyć punkt przecięcia płaszczyzny π oraz prostej l_1

(a) Obliczyć t . Podstawiamy x, y, z z równania parametrycznego do równania płaszczyzny.

$$\begin{aligned}0 &= 1 - 1 + 2t + 1 - 4t - 2 && \text{uprościć} \\ 0 &= -2t - 1 \\ -2t &= 1 && / -2 \\ t &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(b) Podstawić t do równania parametrycznego prostej.

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 0t & = 1 \\ y = 1 - 2t = 1 + 1 & = 2 \\ z = 1 - 4t = 1 + 2 & = 3 \end{cases}$$

(c) Punkt przecięcia prostej l z płaszczyzną

$$P_1 = (1, 2, 3)$$

1.9.3 DONE Obliczyć odległość punktu $P(0, 1, 0)$ od prostej l_1

$$\overrightarrow{PQ} = [1 - 0, 1 - 1, 1 - 0] = [1, 0, 1]$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \times \vec{k} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{\overrightarrow{PQ}} & y_{\overrightarrow{PQ}} & z_{\overrightarrow{PQ}} \\ x_{\vec{k}} & y_{\vec{k}} & z_{\vec{k}} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= -2\vec{k} - (-2\vec{i} - 4\vec{j}) \\ &= 2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} \\ &= [2, 4, -2]\end{aligned}$$

1. Długość odcinka PQ

$$|PQ| = \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{k}|} = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2}}{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}} = \sqrt{\frac{24}{20}} = \sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

2 [2/3] Analiza

2.1 DONE Zad 5

Obliczyć w przybliżeniu wartość $\sin(0.2)$ używając wielomianu Taylora stopnia $n = 3$.

$$f(x) = \sin x \qquad x = 0.2 \qquad n = 3$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$x_0 = 0$$

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)'}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + \underbrace{\frac{f^{(n)'}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\text{reszta}}$$

$$f(x) \approx 0 + \frac{1}{1}x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-1}{6}x^3$$

$$f(x) \approx 0.2 + 0 - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{125} = \frac{1}{5} - \frac{1}{750} = \frac{150}{750} - \frac{1}{750} = \frac{149}{750}$$

2.2 DONE Zad 7

2.2.1 Zad 7b

Obliczyć $\int_a^b f(x)dx$

$$a = -3 \qquad b = \frac{1}{2} \qquad f(x) = 3 + x^2$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{\frac{1}{2}} 3 + x^2 dx &= \int_{-3}^{\frac{1}{2}} 3 dx + \int_{-3}^{\frac{1}{2}} x^2 dx \\ &= 3 \int_{-3}^{\frac{1}{2}} x^0 dx + \int_{-3}^{\frac{1}{2}} x^2 dx \\ &= \left(\underbrace{3x + \frac{x^3}{3}}_{F(x)} \right) \Big|_{-3}^{\frac{1}{2}} \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \left(\frac{36}{24} + \frac{1}{24} \right) - (-9 - 9) \\ &= \frac{37}{24} + 18 \\ &= \frac{37}{24} + \frac{432}{24} \\ &= \frac{469}{24} \end{aligned}$$