$c \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $a \in \mathbb{R}$

1 Wzory na pochodne wybranych funkcji

$$c' = 0,$$
$$(x^a)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = a^x \ln a, \qquad (e^x)' = e^x,$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\mathrm{tg}\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$
$$(\mathrm{ctg}\ x)' = \frac{-1}{\sin^2 x},$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2},$$
$$(\mathrm{arcctg}\ x)' = \frac{-1}{1+x^2},$$
$$(\sinh x)' = \cosh x, \qquad (\cosh x)' = \sinh x, \qquad (\mathrm{tgh}\ x)' = \frac{1}{\cosh^2 x},$$
$$(\mathrm{ctgh}\ x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$$

2 Pochodna sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu funkcji

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \qquad c \text{ – liczba}$$
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \qquad \text{o ile } g \neq 0$$

3 Pochodna funkcji złożonej

Dana jest funkcja złozona $y = (g^\circ w)(x)$ czyli $y = g(w(x))$.

$w = w(x)$ - funkcja wewnętrzna, $\qquad y = g(w)$ - funkcja zewnętrzna

3.1 Wzory na pochodne funkcji złożonych

$$c' = 0,$$
$$(w^a)' = aw^{a-1} \cdot w', \qquad (a^w)' = a^w \ln a \cdot w', \qquad (e^w)' = e^w \cdot w',$$
$$(\log_a w)' = \frac{1}{w \cdot \ln a} \cdot w', \qquad (\ln w)' = \frac{1}{w} \cdot w',$$
$$(\sin w)' = (\cos w) \cdot w', \qquad (\cos w)' = (-\sin w) \cdot w', \qquad (\mathrm{tg}\ w)' = \frac{1}{\cos^2 w} \cdot w',$$
$$(\mathrm{ctg}\ w)' = \frac{1}{\sin^2 w} \cdot w',$$
$$(\arcsin w)' = \frac{1}{\sqrt{1-w^2} \cdot w'} \qquad (\arccos w)' = \frac{1}{\sqrt{1+w^2}} \cdot w' \qquad (\mathrm{arctg}\ w)' = \frac{1}{1+w^2} \cdot w',$$
$$(\mathrm{arcctg}\ w)' = \frac{-1}{1+w^2} \cdot w',$$
$$(\sinh w)' = (\cosh w) \cdot w', \qquad (\cosh w)' = (\sinh w) \cdot w', \qquad (\mathrm{tgh}\ w)' = \frac{1}{\cosh^2 w} \cdot w',$$
$$(\mathrm{ctgh}\ w)' = \frac{-1}{\sinh^2 w} \cdot w',$$

4 Całki Oznaczone

Definicja całki oznaczonej z funkcji $f(x) \geq 0$ **w przedziale** $< a, b >$
Dla każdej z lcizb $n = 1, 2, 3, \dots$ postępujemy następująco:
Przedział $< a, b >$ dzielmy na podprzedziały punktami $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$.
Punkty $u_1, u_2, \dots, u_n$ nazywamy **punktami podziału**.
Długości kolejnych podprzdziałów $< x_0, x_1 >, < x_1, x_2 >, \dots, < x_{n-1}, x_n >$ oznaczamy przez $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.
Największą z tych liczb nazywamy **punktami pośrednimi**.
Tworzymy sumę, zwaną **sumą całkową**

$$\sigma_n = f(u_1) \cdot \Delta x_1 + f(u_2) \cdot \Delta x_2 + \dots f(u_2) \cdot \Delta x_2 = \sum_{k=1}^{n} f(u_k) \cdot \Delta x_k$$

Jeśli istnieje i jest skończona granica sum całkowych σ_n przy $n \to \infty$ oraz gdy zachodzą poniższe założenia 1-3, to granice tę nazywamy całką oznaczoną funkcji f(x) w przedziale $< a, b >$.

Oznaczamy ją symbolem $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

1. Średnica podzału musić zmierzać do 0, gdy n zmierza do ∞.
2. Granica nie może zależeć od wyboru punktów podziału $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$
3. Granica nie może zależeć od wyboru punktów pośrednich $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

krótko: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)dx$ jeżeli granica ta jest skończona i zachodzą założenia 1-3. Jeżeli $\int_a^b f(x)dx$ istnieje, to $f(x)$ nazywa się funkcją **całkowalną** w przedziale $< a, b >$.
Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale całkowalna.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4.1 Właściowści

Załóżmy, że funkcjie f(x), g(x) to funkcjie całkowalne w przedziale $< a, b >$

1. $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \lambda \in \mathbb{R}$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
4. Niech $c \in < a, b >$ wtedy $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b +f(x)dx.$
5. Niech $f(x) \leq g(x)$ w $< a, b >$ wtedy $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

4.2 Twierdzenie o wratości średniej

Dla dowolonej funkcji ciągłej f(x) w przedziale $< a, b >$ istnieje taka liczba $h \in < a, b >$, że

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(h)$$

5 Całki nieoznaczone

Funkcja F jest **funkcją pierwotną** funkcji f na przedziale I , jeżeli $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in I$.

5.1 Twierdzenie (warunek wystrczający instnienia funkcji pierwotnej)

Jeżeli funkcja jest ciagłą na przedzale to, ma funkcję pierwotną na tym przedziale.

5.2 Definicja

Całkę nieoznaczoną funkcji f zapisujemy w postaci $\int f(x)dx$ i definiujemy następująco:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \text{ gdy } F'(x) = f(x)$$

c – stała całkowania

5.3 Całki nioznaczone pewnych funkcji elementarnych

1. $\int 0dx = c, x \in \mathbb{R}$

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$

3. $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$ dla $x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, +\infty)$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ dla $a > 0$ i $a \neq 1, x \in \mathbb{R}$

5. $\int e^x dx = e^x + c$ dla $x \in \mathbb{R}$

6. $\int xdx = -\cos x + c$ dla $x \in \mathbb{R}$

7. $\int \cos x dx = \sin x + c$ dla $x \in \mathbb{R}$

8. $\int \frac{a}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$ dla $x \in (k\pi, (k+1)\pi$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$ dla $x \in \mathbb{R}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$ dla $x \in (-1, 1)$

12. $\int \sinh dx = \cosh x + c$ dla $x \in \mathbb{R}$

13. $\int \cosh x = \sinh x + c$ dla $x \in \mathbb{R}$

14. $\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx = \tanh x + c$ dla $x \in \mathbb{R}$

15. $\int \frac{1}{\sinh^2 x}dx = -\coth x + c$ dla $x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, +\infty)$

16. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

17. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

5.4 Twierdzenie

1. $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2. $\int (cf(x))dx = c \int f(x)dx, c \in \mathbb{R}$

3. $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$

4. $\int f'(dx) = f(x) + c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$