

# Przykładowy egzamin

placeholder

February 6, 2023

## Contents

<b>1</b>	<b>DONE Zad 1</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>DONE Zad 2</b>	<b>2</b>
2.1	$z$ . . . . .	2
2.2	$w$ . . . . .	3
2.3	Podstawiamy . . . . .	4
<b>3</b>	<b>DONE Zad 3</b>	<b>4</b>
3.1	<b>DONE</b> $A_4$ . . . . .	4
3.2	<b>DONE</b> Podstawianie . . . . .	4
<b>4</b>	<b>DONE Zad 4</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>DONE Zad 5</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>DONE Zad 6</b>	<b>6</b>
6.1	<b>DONE</b> Związek między współrzędnymi $x_1, x_2$ w bazie $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ a współrzędnymi $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ w bazie $\vec{u}, \vec{v}$ . . . . .	7
6.2	<b>DONE</b> Znaleść współrzędne wektora $\vec{x}$ w bazie $\vec{u}, \vec{v}$ , jeżeli jego współrzędne w bazie $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ wynoszą: $1, -2$ . . . . .	7
6.2.1	Sporządzić rysunek . . . . .	8
<b>7</b>	<b>NO Zad 7</b>	<b>8</b>
<b>8</b>	<b>DONE Zad 8</b>	<b>8</b>
8.1	<b>DONE</b> Równanie prostej w postaci kanonicznej . . . . .	8
8.2	<b>DONE</b> Równanie prostej w postaci parametrycznej . . . . .	8
8.3	<b>DONE</b> Obliczanie odległości punktu od prostej . . . . .	9
8.4	<b>DONE</b> Obliczanie pola trójkąta . . . . .	9

<b>9</b>	<b>TODO Zad 9</b>	<b>9</b>
9.1	Wyznaczyć punkt przecięcia płaszczyzny i prostej . . . . .	9
9.1.1	Wyznaczyć wektor kierunkowy prostej . . . . .	9
9.1.2	Znaleźć punkt na prostej . . . . .	10
9.1.3	Równanie parametryczne prostej . . . . .	10
9.1.4	Obliczyć punkt przecięcia płaszczyzny $\pi$ oraz prostej $l_1$	10
9.2	Obliczyć odległość punktu $P(0, 1, 0)$ od prostej $l_1$ . . . . .	10

## 1 DONE Zad 1

$$\begin{aligned}
\Im \left( \frac{1+3i}{3-2i} + i^3 + 5 \right) &= \Im \left( \frac{1+3i}{3-2i} + \frac{i^3(3-2i)}{3-2i} + \frac{5(3-2i)}{3-2i} \right) \\
&= \Im \left( \frac{1+3i+3i^3-2i^4+15-10i}{3-2i} \right) \\
&= \Im \left( \frac{16-7i+3i^3-2i^4}{3-2i} \right) \\
&= \Im \left( \frac{14-10i}{3-2i} \right) \\
&= \Im \left( \frac{14-10i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} \right) \\
&= \Im \left( \frac{42+28i-30i+20}{9+4} \right) \\
&= \Im \left( \frac{62-2i}{13} \right) \\
&= \frac{-2}{13}
\end{aligned}$$

## 2 DONE Zad 2

$$\frac{(3-3i)^{14}}{(-1+i\sqrt{3})^{11}} = \frac{z^{14}}{w^{11}}$$

### 2.1 $z$

$$\sin(\varphi_z) = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow \varphi_z = \frac{7}{4}\pi$$

$$\begin{aligned}
z^{14} &= (3 - 3i)^{14} \\
&= (3 - 3i)^{14} \\
&= (3\sqrt{2})^{14} (\cos 14\varphi + i \sin 14\varphi) \\
&= (3\sqrt{2})^{14} \left( \cos \left( 14 \cdot \frac{7}{4} \pi \right) + i \sin \left( 14 \cdot \frac{7}{4} \pi \right) \right) \\
&= (3\sqrt{2})^{14} \left( \cos \left( \frac{49}{2} \pi \right) + i \sin \left( \frac{49}{2} \pi \right) \right) \\
&= (3\sqrt{2})^{14} \left( \cos \left( \frac{1}{2} \pi \right) + i \sin \left( \frac{1}{2} \pi \right) \right) \\
&= (3\sqrt{2})^{14} (0 + i1) \\
&= (3\sqrt{2})^{14} i
\end{aligned}$$

## 2.2 $w$

$$\sin(\varphi_w) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi_w = \frac{2}{3}\pi$$

$$\begin{aligned}
w^{11} &= 2^{11} \left( \cos \left( 11 \cdot \frac{2}{3} \pi \right) + i \sin \left( 11 \cdot \frac{2}{3} \pi \right) \right) \\
&= 2^{11} \left( -\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\
&= 2^{11} \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
&= 2^{10} (-1 - i\sqrt{3})
\end{aligned}$$

### 2.3 Podstawiamy

$$\begin{aligned}
 \frac{(3-3i)^{14}}{(-1+i\sqrt{3})^{11}} &= \frac{z^{14}}{w^{11}} \\
 &= \frac{(3\sqrt{2})^{14}i}{2^{10}(-1-i\sqrt{3})} \\
 &= \frac{((3\sqrt{2})^{14}i)(-1+i\sqrt{3})}{2^{10}(-1-i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})} \\
 &= \frac{((3\sqrt{2})^{14}i)(-1+i\sqrt{3})}{2^{10}(-2)} \\
 &= \frac{((3\sqrt{2})^{14}i)(-1+i\sqrt{3})}{-2^{11}}
 \end{aligned}$$

## 3 DONE Zad 3

Wyznacznik macierzy głównej = 20.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

### 3.1 DONE $A_4$

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[k_3=k_3-k_4]{k_4=k_4-3k_2} \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 10 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot (6 + 100 - 24) - (40 + 60 - 6) \\
 &= 82 - 94 \\
 &= -12
 \end{aligned}$$

### 3.2 DONE Podstawianie

$$x_4 = \frac{-12}{20} = \frac{-3}{5}$$

#### 4 DONE Zad 4

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \end{array} \right] \xrightarrow{w_1=w_1-w_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[w_2=w_2-2w_1]{w_3=w_3-2w_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & -8 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[w_3=w_3-w_2]{w_1=w_1+w_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[k_4=k_3]{k_3=k_4} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & y \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{w_3=w_3 \cdot \frac{1}{3}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & y \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[w_2=w_2-3 \cdot w_3]{w_1=w_1-2 \cdot w_3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & y \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$x_1 = -5x_3$$

$$x_2 = -7x_3 - 2$$

$$x_3 \in \mathbb{R}$$

$$x_4 = -1$$

#### 5 DONE Zad 5

$$XA = B \xrightarrow{\text{prawostronnie } A^{-1}} XAA^{-1} = BA^{-1} \rightarrow X = BA^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = (36 + 4) - (8 + 30) = 40 - 38 = 2$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -8 & -13 & -12 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & -7 & -6 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -8 & 2 & -4 \\ -13 & 2 & -7 \\ -12 & 2 & -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -\frac{13}{2} & 1 & -\frac{7}{2} \\ -6 & 1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X = BA^{-1} &= \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -\frac{13}{2} & 1 & -\frac{7}{2} \\ -6 & 1 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -16 - 13 + 30 & 4 + 2 - 5 & -8 - 7 + 15 \\ -12 + 0 + 12 & 3 + 0 - 2 & -6 + 0 + 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 6 DONE Zad 6

Macierz obrotu o kąt  $\frac{\pi}{3}$  w kierunku dodatnim  $A = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$ .

**6.1 DONE** Związek między współrzędnymi  $x_1, x_2$  w bazie  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  a współrzędnymi  $\hat{x}_1, \hat{x}_2$  w bazie  $\vec{u}, \vec{v}$ .

$$\begin{aligned}\vec{u} &= A \cdot \vec{e}_1 \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

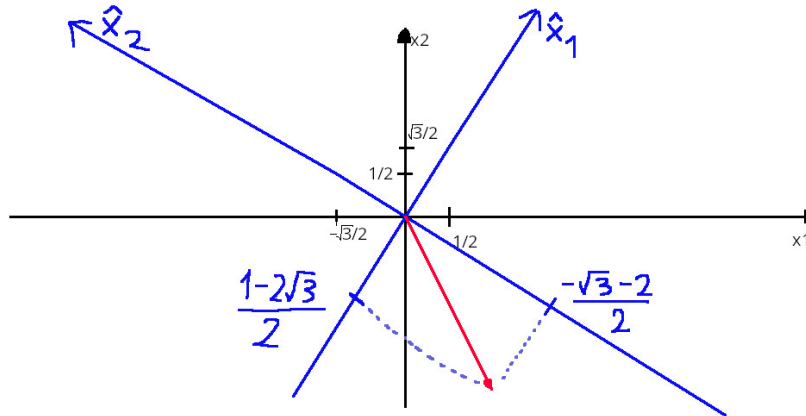
$$\begin{aligned}\vec{v} &= A \cdot \vec{e}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

**6.2 DONE** Znaleźć współrzędne wektora  $\vec{x}$  w bazie  $\vec{u}, \vec{v}$ , jeżeli jego współrzędne w bazie  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  wynoszą:  $1, -2$ .

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} &= A^T \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1-2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-2-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

### 6.2.1 Sporządzić rysunek



## 7 NO Zad 7

## 8 DONE Zad 8

$$A = (0, 1, 5), \quad B = (-2, 3, 1), \quad C = (-2, 7, 3)$$

$$|AB| = \sqrt{(-2)^2 + (3-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$|AC| = \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

$$|BC| = \sqrt{0+16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

### 8.1 DONE Równanie prostej w postaci kanonicznej

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-1}{7-1} = \frac{z-5}{3-5} \rightarrow \frac{x-0}{-2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-5}{-2} = t$$

### 8.2 DONE Równanie prostej w postaci parametrycznej

$$x-0 = -2t \rightarrow x = -2t$$

$$y-1 = 6t \rightarrow y = 6t+1$$

$$z-5 = -2t \rightarrow z = -2t+5$$



### 8.3 DONE Obliczanie odległości punktu od prostej

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} \times \vec{k} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (4\vec{i} + 12\vec{k} - 8\vec{j}) - (4\vec{k} + 24\vec{i} - 4\vec{j}) \\ &= 4\vec{i} + 12\vec{k} - 8\vec{j} - 4\vec{k} - 24\vec{i} + 4\vec{j} \\ &= -20\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}\end{aligned}$$

$$B = (-2, 3, 1)$$

$$D = (0, 1, 5)$$

$$\text{wektor kierunkowy: } \vec{k} = [-2, 6, -2]$$

$$\overrightarrow{BD} = [0 + 2, 1 - 3, 5 - 1] = [2, -2, 4]$$

$$|BD| = \frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\vec{k}|} = \frac{\sqrt{(-20)^2 + 4^2 + 8^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{400 + 16 + 64}}{\sqrt{4 + 36 + 4}} = \frac{\sqrt{480}}{\sqrt{44}} = \sqrt{\frac{120}{11}} = \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{11}}$$

### 8.4 DONE Obliczanie pola trójkąta

$$P = \frac{2\sqrt{11} \cdot \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{11}}}{2} = \frac{2\sqrt{120}}{2} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$$

## 9 TODO Zad 9

$$\text{Płaszczyzna: } \pi : x - y + z - 2 = 0$$

$$\text{Postać krawędziowa prostej: } l_1 : \begin{cases} 3x + 2y - z - 4 = 0 \\ -x - 2y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

### 9.1 Wyznaczyć punkt przebiega płaszczyzny i prostej

#### 9.1.1 Wyznaczyć wektor kierunkowy prostej

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\vec{i} - 6\vec{k} + 1\vec{j} - (-2\vec{k} + 2\vec{i} + 3\vec{j}) \\ &= [0, -2, -4]\end{aligned}$$

### 9.1.2 Znaleźć punkt na prostej

Strzlamy punkt  $P(1, 1, 1)$ , bo spełnia równanie prostej.

### 9.1.3 Równanie parametryczne prostej

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 0t = 1 \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

### 9.1.4 Obliczyć punkt przecięcia płaszczyzny $\pi$ oraz prostej $l_1$

1. Obliczyć  $t$ .

Podstawiamy  $x, y, z$  z równania parametrycznego do równania płaszczyzny.

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 1 + 2t + 1 - 4t - 2 && \text{uproszczyć} \\ 0 &= -2t - 1 \\ -2t &= 1 && / -2 \\ t &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Podstawić  $t$  do równania parametrycznego prostej.

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 0t = 1 \\ y = 1 - 2t = 1 + 1 = 2 \\ z = 1 - 4t = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

3. Punkt przecięcia prostej  $l$  z płaszczyzną  
 $P = (1, 2, 3)$

## 9.2 Obliczyć odległość punktu $P(0, 1, 0)$ od prostej $l_1$