

$$c \in \mathbb{R}$$

$$a \in \mathbb{R}$$

1 Wzory na pochodne wybranych funkcji

$$\begin{aligned} c' &= 0, \\ (x^a)' &= ax^{a-1}, & (a^x)' &= a^x \ln a, & (e^x)' &= e^x, \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a}, & (\ln x)' &= \frac{1}{x}, \\ (\sin x)' &= \cos x, & (\cos x)' &= -\sin x, & (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \\ (\operatorname{ctg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x}, \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \\ (\operatorname{arcctg} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}, \\ (\sinh x)' &= \cosh x, & (\cosh x)' &= \sinh x, & (\operatorname{tgh} x)' &= \frac{1}{\cosh^2 x}, \\ (\operatorname{ctgh} x)' &= \frac{-1}{\sinh^2 x} \end{aligned}$$

2 Pochodna sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu funkcji

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) \\ (c \cdot f(x))' &= c \cdot f'(x), & c &= \text{liczba} \\ (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, & \text{o ile } g \neq 0 \end{aligned}$$

3 Pochodna funkcji złożonej

Dana jest funkcja złożona $y = (g \circ w)(x)$ czyli $y = g(w(x))$.

$w = w(x)$ - funkcja wewnętrzna, $y = g(w)$ - funkcja zewnętrzna

3.1 Wzory na pochodne funkcji złożonych

$$\begin{aligned} c' &= 0, \\ (w^a)' &= aw^{a-1} \cdot w', & (a^w)' &= a^w \ln a \cdot w', & (e^w)' &= e^w \cdot w', \\ (\log_a w)' &= \frac{1}{w \cdot \ln a} \cdot w', & (\ln w)' &= \frac{1}{w} \cdot w', \\ (\sin w)' &= (\cos w) \cdot w', & (\cos w)' &= (-\sin w) \cdot w', & (\operatorname{tg} w)' &= \frac{1}{\cos^2 w} \cdot w', \\ (\operatorname{ctg} w)' &= \frac{1}{\sin^2 w} \cdot w', \\ (\arcsin w)' &= \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \cdot w', & (\arccos w)' &= \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \cdot w', & (\operatorname{arctg} w)' &= \frac{1}{1+w^2} \cdot w', \\ (\operatorname{arcctg} w)' &= \frac{-1}{1+w^2} \cdot w', \\ (\sinh w)' &= (\cosh w) \cdot w', & (\cosh w)' &= (\sinh w) \cdot w', & (\operatorname{tgh} w)' &= \frac{1}{\cosh^2 w} \cdot w', \\ (\operatorname{ctgh} w)' &= \frac{-1}{\sinh^2 w} \cdot w', \end{aligned}$$

4 Całki Oznaczone

Definicja całki oznaczonej z funkcji $f(x) \geq 0$ w przedziale $< a, b >$

Dla każdej z liczb $n = 1, 2, 3, \dots$ postępujemy następująco:

Przedział $< a, b >$ dzielimy na podprzedziały punktami $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Punkty u_1, u_2, \dots, u_n nazywamy **punktami podziału**.

Długości kolejnych podprzedziałów $< x_0, x_1 >, < x_1, x_2 >, \dots, < x_{n-1}, x_n >$ oznaczamy przez $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.

Największą z tych liczb nazywamy **punktami pośrednimi**.

Tworzymy sumę, zwaną **sumą całkową**

$$\sigma_n = f(u_1) \cdot \Delta x_1 + f(u_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(u_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(u_k) \cdot \Delta x_k$$

Jeśli istnieje i jest skończona granica sum całkowych σ_n przy $n \rightarrow \infty$ oraz gdy zachodzą poniższe założenia 1-3, to granice tę nazywamy całką oznaczoną funkcji $f(x)$ w przedziale $< a, b >$.

Oznaczamy ją symbolem $\int_a^b f(x)dx$.

1. Średnica podziału musi zmierzać do 0, gdy n zmierza do ∞ .
2. Granica nie może zależeć od wyboru punktów podziału $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$
3. Granica nie może zależeć od wyboru punktów pośrednich $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

krótko: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)dx$ jeżeli granica ta jest skończona i zachodzą założenia 1-3. Jeżeli $\int_a^b f(x)dx$ istnieje, to $f(x)$ nazywa się funkcją **całkowalną** w przedziale $< a, b >$.

Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale całkowalna.

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx & \int_a^b \lambda f(x)dx &= \lambda \int_a^b f(x)dx, \lambda \in \mathbb{R} \\ \int_a^b f(x)dx &= - \int_b^a f(x)dx \end{aligned}$$

4.1 Właściwości

Założmy, że funkcje $f(x)$, $g(x)$ to funkcje całkowalne w przedziale $< a, b >$

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \lambda \in \mathbb{R}$
3. $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$.
4. Niech $c \in < a, b >$ wtedy $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
5. Niech $f(x) \leq g(x)$ w $< a, b >$ wtedy $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

4.2 Twierdzenie o wartości średniej

Dla dowolnej funkcji ciągłej $f(x)$ w przedziale $< a, b >$ istnieje taka liczba $h \in < a, b >$, że

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(h)$$

5 Całki nieoznaczone

Funkcja F jest **funkcją pierwotną** funkcji f na przedziale I , jeżeli $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in I$.

5.1 Twierdzenie (warunek wystarczający istnienia funkcji pierwotnej)

Jeżeli funkcja jest ciągłą na przedziale to, ma funkcję pierwotną na tym przedziale.

5.2 Definicja

Całkę nieoznaczoną funkcji f zapisujemy w postaci $\int f(x)dx$ i definiujemy następująco:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \text{ gdy } F'(x) = f(x)$$

c – stała całkowania

5.3 Całki nieoznaczone pewnych funkcji elementarnych

1. $\int 0dx = c, x \in \mathbb{R}$
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ dla $a \neq -1$, zakres x zależy od a
3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ dla $x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, +\infty)$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ dla $a > 0$ i $a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
5. $\int e^x dx = e^x + c$ dla $x \in \mathbb{R}$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$ dla $x \in \mathbb{R}$
7. $\int \cos x dx = \sin x + c$ dla $x \in \mathbb{R}$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$ dla $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$ dla $x \in \mathbb{R}$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$ dla $x \in (-1, 1)$
12. $\int \sinh x dx = \cosh x + c$ dla $x \in \mathbb{R}$
13. $\int \cosh x dx = \sinh x + c$ dla $x \in \mathbb{R}$
14. $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c$ dla $x \in \mathbb{R}$
15. $\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + c$ dla $x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, +\infty)$
16. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

$$17. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$18. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

5.4 Twierdzenie

$$1. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$2. \int (cf(x)) dx = c \int f(x) dx, c \in \mathbb{R}$$

$$3. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

$$4. \int f'(dx) = f(x) + c, \text{ gdzie } c \in \mathbb{R}$$