Matma

February 7, 2023

Contents

1 liczby zespolone

- $\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych
- $\mathbb{R}$ – zboór liczb rzeczywistych
- $\mathbb{C}$ – zbiór liczb zespolonych

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

1.1 postać algerbraiczna liczby zespolonej

$$z = a + bi$$

- $\Re(z) = a$ – część rzeczywista liczby zespolonej.
- $\Im(z) = b$ – częśc urojona liczby zespolonej.
- i - jednostka urojona $i^2 = -1$

1.1.1 sprzężenie liczby zespolonej

$$\begin{aligned} z &= a + bi & \qquad \overline{z} &= a - bi \\ w &= f - gi & \qquad \overline{w} &= f + gi \end{aligned}$$

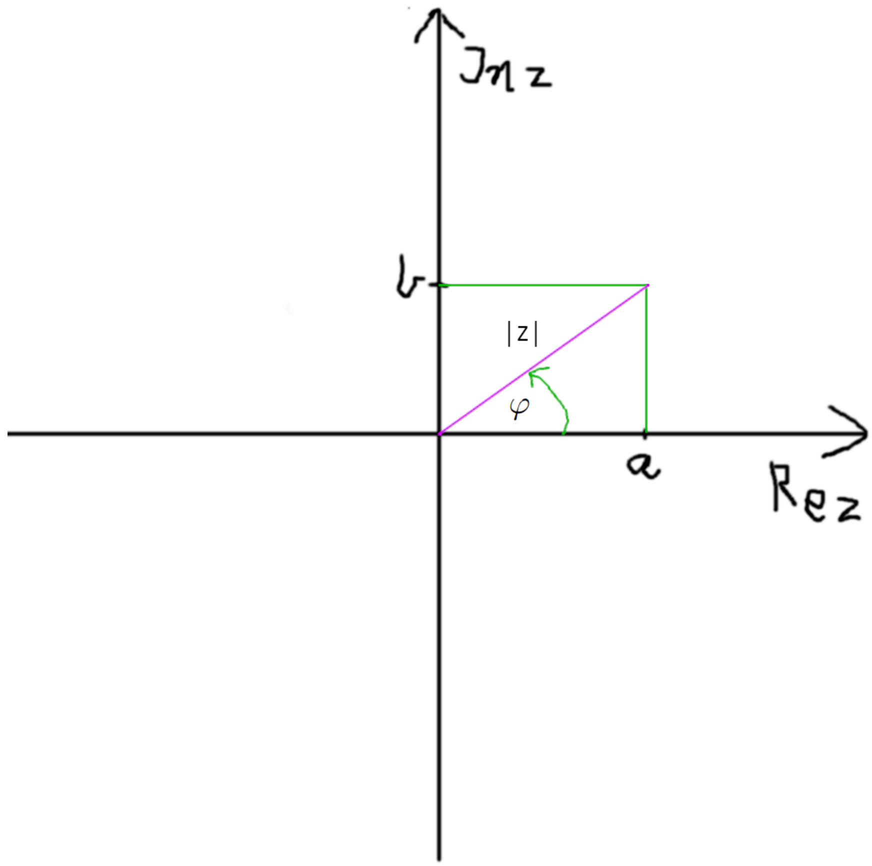
1.2 postać trygonometryczna liczby zespolonej

$$z = |z|(\cos\varphi \cdot \sin\varphi)$$

1.3 postać wykładnicza liczby zespolonej

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

1.4 moduł liczby zespolonej



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

φ – argument

1.5 Potęgowanie liczby zespolonej

$$z = a + bi \to z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \to |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

1.6 funkcja kwadratowa

$$z^2 + z + 1 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = -3$ – brak rozwiązań w $\mathbb{R}$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-3} = \sqrt{(-1)3} = \sqrt{-1}\sqrt{3} = \sqrt{i^2}\sqrt{3} = i\sqrt{3}$$

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \vee z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \vee z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2 Wektory

2.1 Macierz obrotu

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

3 Stożkowe

$$Q(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \to M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$\det M$ – wyróżnik formy kwadratowej $Q(\vec{x})$

$\det M > 0$	forma kwadratowa typu eliptycznego
$\det M = 0$	forma kwadratowa typu parabolicznego
$\det M < 0$	forma kwadratowa typu hiperbolicznego

3.1 Sprowadzanie do postaci kwadratowej

$$Q(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2 \to Q(\vec{x}) = a_1\hat{x}_1^2 + a_2\hat{x}_2^2$$

gdzie a_1, a_2 – wartości własne macierzy M

$\hat{x}_1, \hat{x}_2$ – współżędne wektora $\vec{x}$ w nowej baze ortonormalnej $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ złożonej z wersorów własnych macierzy M.

wersor własny – wektor własny o długości 1.

3.2 Elipsa

Wzór ogólny

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

Promienie

a, b

3.3 Parabola

Wzór ogólny

$$x_1 = ax_2^2$$

3.4 Hiperbola

Wzór ogólny

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

Wieszchołki

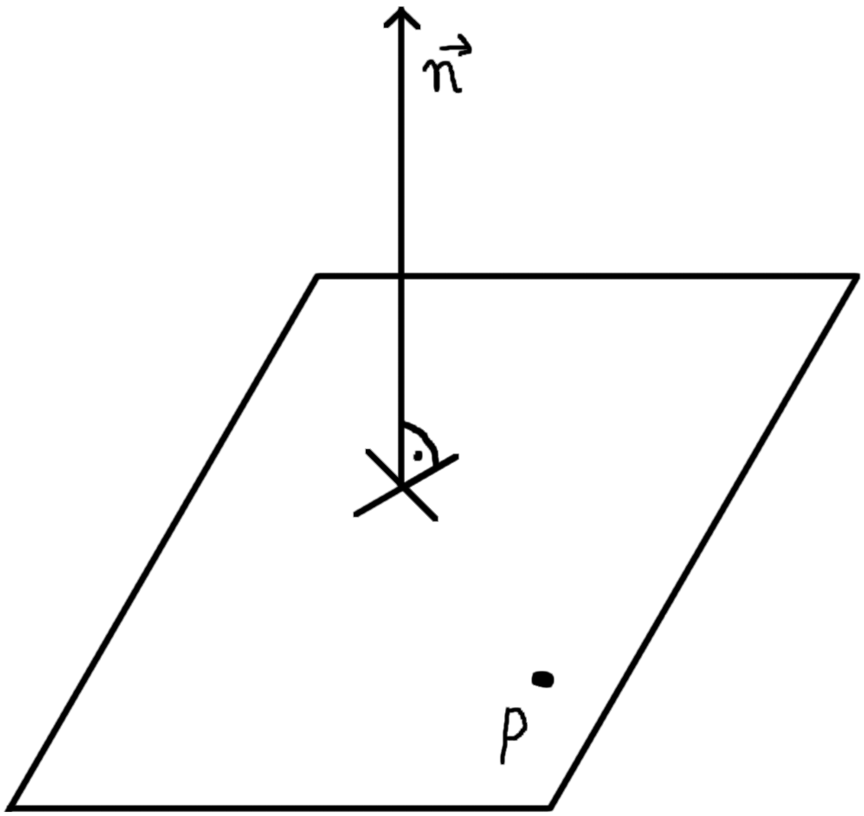
$$x_1 = \pm a$$

Asymptoty

$$x_2 = \pm \frac{b}{a} x_1$$

4 $\mathbb{R}^3$

4.1 Równianie ogólne płaszczyzny



$$\vec{n} = [A, B, C] \qquad\qquad P = (x_0, y_0, z_0)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

5 Analiza

5.1 Wzór Taylora

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)\prime}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + \underbrace{\frac{f^{(n)\prime}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\text{reszta}}$$

5.2 Asymptoty

5.2.1 Pionowe

- Prawostronna w punkcie p jeżeli $\lim_{x \to p^+} = -\infty$.
- Lewostronna w punkcie p jeżeli $\lim_{x \to p^-} = +\infty$.
- Obustronna jeżeli oba powyższe.

5.2.2 Ukośne

$$y = ax + b \qquad a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$$

Jeżeli $a = 0$ jest to asymptota pozioma.