

Matma

January 24, 2023

Contents

1	liczby zespolone	1
1.1	postać algebriczna liczby zespolonej	2
1.1.1	sprzężenie liczby zespolonej	2
1.2	postać trygonometryczna liczby zespolonej	2
1.3	postać wykładnicza liczby zespolonej	2
1.4	moduł liczby zespolonej	3
1.5	Potęgowanie liczby zespolonej	3
1.6	funkcja kwadratowa	3
2	Stożkowe	4
2.1	Sprowadzanie do postaci kwadratowej	4
2.2	Elipsa	4
2.3	Parabola	4
2.4	Hiperbola	5
3	\mathbb{R}^3	5
3.1	Równanie ogólne płaszczyzny	5
4	Analiza	6
4.1	Asymptoty	6
4.1.1	Poziome	6
4.1.2	Ukośne	6

1 liczby zespolone

- \mathbb{Z} – zbiór liczb całkowitych
- \mathbb{R} – zbiór liczb rzeczywistych

- \mathbb{C} – zbiór liczb zespolonych

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

1.1 postać algebraiczna liczby zespolonej

$$z = a + bi$$

- $\Re(z) = a$ – część rzeczywista liczby zespolonej.
- $\Im(z) = b$ – część urojona liczby zespolonej.
- i – jednostka urojona $i^2 = -1$

1.1.1 sprzężenie liczby zespolonej

$$\begin{array}{ll} z = a + bi & \bar{z} = a - bi \\ w = f - gi & \bar{w} = f + gi \end{array}$$

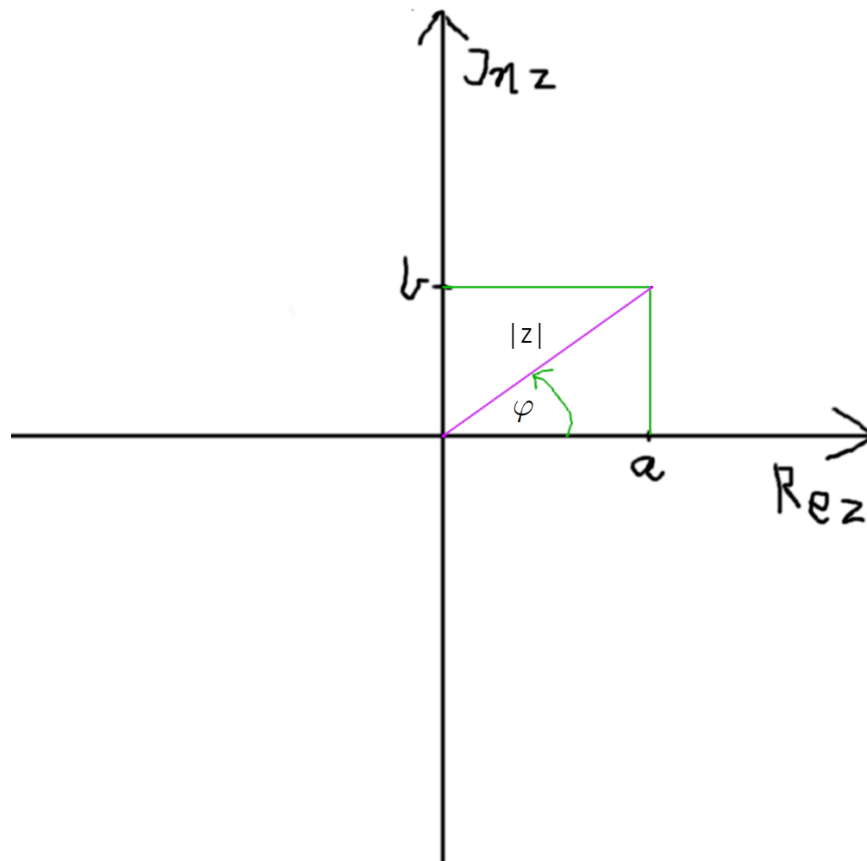
1.2 postać trygonometryczna liczby zespolonej

$$z = (z)(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

1.3 postać wykładnicza liczby zespolonej

$$z = (z) \cdot e^{i\varphi}$$

1.4 moduł liczby zespolonej



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

φ – argument

1.5 Potęgowanie liczby zespolonej

$$z = a + bi \rightarrow z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n \rightarrow |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

1.6 funkcja kwadratowa

$$z^2 + z + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -3 - \text{brak rozwiązań w } \mathbb{R}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-3} = \sqrt{(-1)3} = \sqrt{-1}\sqrt{3} = \sqrt{i^2}\sqrt{3} = i\sqrt{3}$$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \vee z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \vee z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2 Stożkowe

$$Q(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \rightarrow M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$\det M$ – wyróżnik formy kwadratowej $Q(\vec{x})$

$\det M > 0$	forma kwadratowa typu eliptycznego
$\det M = 0$	forma kwadratowa typu parabolicznego
$\det M < 0$	forma kwadratowa typu hiperbolicznego

2.1 Sprowadzanie do postaci kwadratowej

$$Q(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \rightarrow Q(\vec{x}) = a_1\hat{x}_1^2 + a_2\hat{x}_2^2$$

gdzie a_1, a_2 – wartości własne macierzy M

\hat{x}_1, \hat{x}_2 – współrzędne wektora \vec{x} w nowej bazie ortonormalnej \vec{v}_1, \vec{v}_2 złożonej z wersorów własnych macierzy M .

wersor własny – wektor własny o długości 1.

2.2 Elipsa

Wzór ogólny

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

Promienie

a, b

2.3 Parabola

Wzór ogólny

$$x_1 = ax_2^2$$

2.4 Hiperbola

Wzór ogólny

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

Wieszchołki

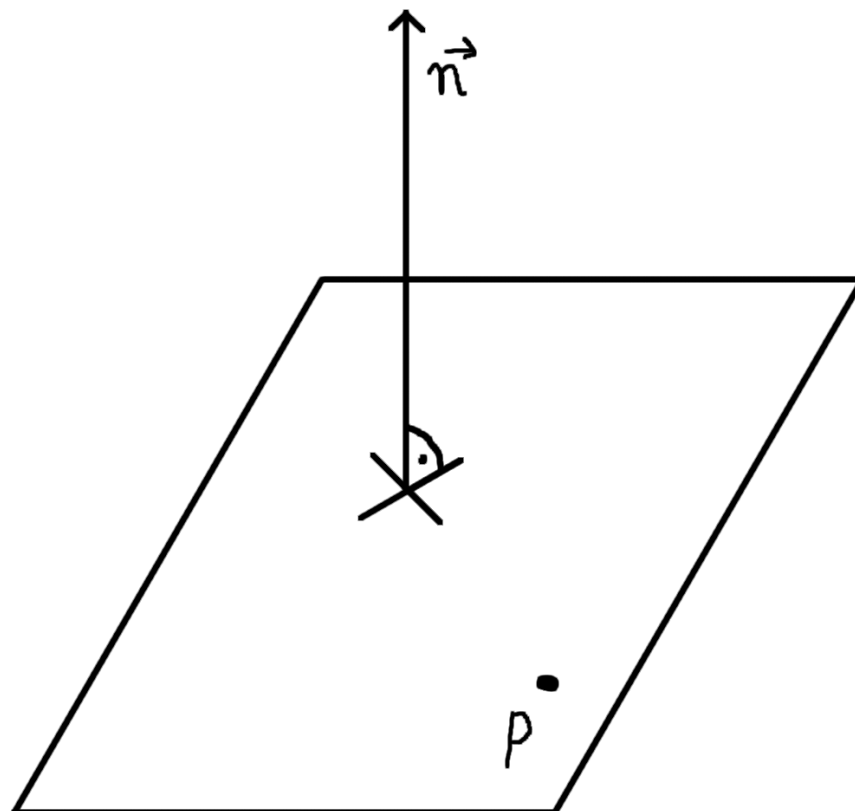
$$x_1 = \pm a$$

Asymptoty

$$x_2 = \pm \frac{b}{a} x_1$$

3 \mathbb{R}^3

3.1 Równanie ogólne płaszczyzny



$$\vec{n} = [A, B, C] \qquad P = (x_0, y_0, z_0)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

4 Analiza

4.1 Asymptoty

4.1.1 Poziome

- Prawostronna w punkcie p jeżeli $\lim_{x \rightarrow p^+} = -\infty$.
- Lewostronna w punkcie p jeżeli $\lim_{x \rightarrow p^-} = +\infty$.
- Obustronna jeżeli oba powyższe.

4.1.2 Ukośne

$$y = ax + b \qquad a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$$

Jeżeli $a = 0$ jest to asymptota pozioma.