Energia

1 Praca

Praca zdefiniowana jest poprzez całkę krzywoliniową:

$$W(A \to B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}, \tag{1}$$

która zależy w ogólności nie tylko od punktów krańcowych, ale też drogi. Aby obliczyć całkę krzywoliniową należy wprowadzić parametr, poprzez który wyrażamy współrzędne. Parametr ten opisuje tor ruchu. Jeśli parametr ten jest drogą s, a θ to kąt między siłą $\mathbf{F}$ a styczną do toru w kierunku wzrostu s.

$$W(A \to B) = \int_{s_A}^{s_B} F_{\|} \cos\theta \, \mathrm{d}s.$$

Zapisując wzór (1) w innej postaci wykorzystując $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v}\,\mathrm{d}t$ oraz $\mathbf{F} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$:

$$\begin{aligned} W(A \to B) &= \int_A^B m \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2}\int_A^B m \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_A^B \frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}mv^2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2}$$

2 Energia kinetyczna

Wprowadzamy nową wielkość:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \tag{3}$$

Wykorzystując tą wielkość otrzymujemy z (2):

$$W(A \to B) = T_B - T_A. \tag{4}$$

Energia kinetyczna jest wielkością skalarną.

3 Energia potencjalna

W wielu przypadkach praca (1) nie zależy od drogi całkowania. Takie siły nazywa się zachowawczymi lub konserwatywnymi. Przykładem takiej siły jest siła grawitacji pola jednorodnego $\mathbf{F} = m\mathbf{g}; \quad g = const.$ oraz pola centralnego $\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$. Przykładem siły, która nie jest konserwatywna jest siła tarcia.

Dla sił konserwatywnych możemy je zapisać jako:

$$\mathbf{F}_{zach} = -\nabla U, \tag{5}$$

gdzie U to energia potencjalna. W przypadku jednowymiarowym wzór ten ma postać:

$$F_{zach} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}. \tag{6}$$

Praca (1) w przypadku sił zachowawczych sprowadza się do:

$$W(A \to B) = \int_A^B -(\nabla U) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -(U_B - U_A) = U_A - U_B. \tag{7}$$

Porównując (2) oraz (7) mamy:

$$W(A \to B) = T_B - T_A = U_A - U_B \tag{8}$$

$$T_A + U_A = T_B + U_B = E = const. \tag{9}$$

Suma energii kinetycznej T oraz potencjalnej U to całkowita energia mechaniczna E i w przypadku jedynie sił konserwatywnych jest wielkością zachowaną.

W polu jednorodnym siły grawitacji $\mathbf{F} = -mg\hat{\boldsymbol{k}}$:

$$\begin{aligned} W(A \to B) = \int_A^B -mg\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \\ = -mg \int_A^B \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -mgh. \end{aligned} \tag{10}$$

Jeśli wybierzemy poziom odniesienia taki, że $U_A = 0$:

$$U_A - U_B = -mgh, \tag{11}$$

$$U_B = mgh. \tag{12}$$

4 Przykład: ciało na równi pochyłej

4.1 Poprzez prawa Newtona

Efektywna siła działająca na ciało to suma siły ciężkości $\mathbf{Q}$ oraz siły reakcji podłoża $\mathbf{R}$, która jest równa co do wartości $F_s = mg \sin \alpha$. Jeśli wysokość równi jest h, to droga przebyta przez ciało jest równa $s = \frac{h}{\sin \alpha}$. Jaka jest prędkość na końcu równi, jeśli na początku $v_0 = 0$?

$$\begin{cases} v &= v_0 + gt \sin \alpha, \\ s &= v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} v &= gt\sin\alpha, \\ t &= \sqrt{\frac{2s}{g\sin\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}. \end{cases}$$

$$v = g\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}\sin\alpha = \sqrt{2gh}. \tag{13}$$

4.2 Poprzez zasadę zachowania energii

W stanie początkowym:

$$T_A = 0, \tag{14}$$

$$U_A = mgh. \tag{15}$$

W stanie końcowym:

$$T_B = \frac{1}{2}mv^2, \tag{16}$$

$$U_B = 0. \tag{17}$$

Z zasady zachowania energii:

$$\begin{aligned} 0 + mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + 0, \\ v &= \sqrt{2gh}. \end{aligned} \tag{18}$$

5 Praca w przypadku sił niezachowawczych

Dzieląc siłę na zachowawcze i niezachowawcze otrzymujemy:

$$\begin{aligned} W(A \to B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \\ = \int_A^B \mathbf{F}_{zach} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{F}_{niezach} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \\ = \int_A^B -(\nabla U) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{F}_{niezach} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \\ = U_A - U_B + W_{niezach}(A \to B) \end{aligned} \tag{19}$$

Porównując (2) oraz (19):

$$W(A \to B) = T_B - T_A = U_A - U_B + W_{niezach}(A \to B) \tag{20}$$

$$(T_B + U_B) - (T_A + U_A) = W_{niezach}(A \to B) \tag{21}$$

$$E_B - E_A = W_{niezach}(A \to B). \tag{22}$$

W tym energia mechaniczna nie jest zachowana.

6 Przykład: ciało na równi pochyłej z tarciem

Sytuacja podobna jak bez tarcia, ale działa dodatkowa siła:

$$F_T = \mu_k N = \mu_k mg\cos\alpha.$$

6.1 Poprzez prawa Newtona

Siła wypadkowa:

$$F_{wyp} = mg\sin\alpha - \mu_k mg\cos\alpha. \tag{23}$$

Przyspieszenie:

$$a = g\sin\alpha - \mu_k g\cos\alpha = g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha). \tag{24}$$

$$\begin{cases} v = v_0 + gt(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha), \\ s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha). \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = gt(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha), \\ t = \sqrt{\frac{2s}{g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)}}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v &= g\sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)}}(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha) = \\ &= \sqrt{\frac{2gh}{\sin\alpha}(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)} = \sqrt{2gh(1 - \mu_k\operatorname{ctg}\alpha)}. \end{aligned} \tag{25}$$

6.2 Poprzez zasadę zachowania energii

Praca siły tarcia jest wyrażona wzorem:

$$W_T = -F_T s = -\mu_k mg\cos\alpha\frac{h}{\sin\alpha} = -\mu_k mgh\operatorname{ctg}\alpha. \tag{26}$$

Równanie na energię:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - mgh &= -\mu_k mgh\operatorname{ctg}\alpha, \\ v^2 &= 2gh(1 - \mu_k\operatorname{ctg}\alpha), \\ v &= \sqrt{2gh(1 - \mu_k\operatorname{ctg}\alpha)}. \end{aligned} \tag{27}$$