

Streszczenie

Strona 3

Termodynamika równowagowa wymaga założenia pewnych wyidealizowanych założeń, na przykład jednorodność parametrów intensywnych, maksimum entropii w układach izolowanych, minimum energii swobodnej Helmholtza w układach izotermiczno-izochorycznych, minimum entalpii swobodnej Gibbsa w układach izotermiczno-izobarycznych [1].

Termodynamika równowagowa opisuje procesy, którym podlega dany układ, tak, jakby zachodziły w sposób kwazi-statyczny. To oznacza, że proces jest ciągiem stanów równowagi, a więc na każdym etapie procesu układ jest w równowadze termodynamicznej. W takim opisie nie sposób zdefiniować prędkości procesu, gdyż sam jego czas zmierza do nieskończoności.

Takie założenia nie zawsze są możliwe, przykładowo dla szybko zachodzących zmian jak w przypadku eksplozji, albo dla układów, w których interesuje nas nie tylko stan układu po osiągnięciu przez niego stanu równowagi, ale też jego zachowania podczas tej przemiany.

W pracy zająłem się głównie reakcjami chemicznymi oscylacyjnymi, które są przykładem czasowej struktury dyssypatywnej. Struktur takich nie można rozpatrywać w ramach termodynamiki liniowej, ponieważ są one typowe jedynie dla stanów nierównowagowych. Pierwsze takie reakcje odkryto w pierwszej połowie XX w., jednak jednym z nich jest organizm żywy, który można rozpatrywać jako bardzo skomplikowany układ termodynamiczny, w którym zachodzą cykliczne zmiany, na przykład stężenie hormonów oraz bicie serca. Najważniejszą reakcją dla rozwoju teorii reakcji oscylacyjnych jest reakcja Biełousowa-Żabotyńskiego.

W pracy udało się zasymulować reakcje oscylacyjne wykorzystując modele Lotki, Lotki-Volterra oraz bruskelatora. Przeprowadzono teoretyczną analizę stabilności w stanach stacjonarnych oraz sprawdzono jej prawdziwość przy użyciu symulacji.

Abstract

Strona 4

Spis treści

Strona 5

Spis treści

Wykaz oznaczeń	7
1 Wstęp	8
1.1 Produkcja entropii	9
1.2 Termodynamika liniowa i nieliniowa	11
1.3 Szybkość reakcji	13
2 Praca własna	15
2.1 Metody różniczkowe	17
2.2 Stabilność rozwiązań	17
2.3 Ogólny model bruskelator	25
3 Sekcja 2	30
4 Sekcja 3	30
5 Sekcja 4	30
Wykaz literatury	31
Wykaz rysunków	32
Wykaz tabel	33
Dodatek A	34

6	Dodatek B	35
7	Dodatek C	37
8	Dodatek D	37
9	Dodatek E	37

Wykaz oznaczeń

T	Temperatura
S	Entropia
p	Ciśnienie
V	Objętość
A	Powinowactwo chemiczne
ξ	Liczba postępu reakcji
s	Entropia na jednostkę objętości
\mathcal{S}	Entropia na mol
U	Energia wewnętrzna
$H = U + pV$	Entalpia
$F = U - TS$	Energia swobodna
$G = H - TS$	Entalpia swobodna
u, h, f, g	Energia, Entalpia, Energia swobodna oraz Entalpia swobodna na jednostkę objętości
$\mathcal{U}, \mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$	Energia, Entalpia, Energia swobodna oraz Entalpia swobodna na mol
C_p, C_V	Pojemności cieplne (c_p, c_V ciepła właściwe)
N	Liczba cząsteczek (cząstek)
μ	Potencjał chemiczny

1 Wstęp

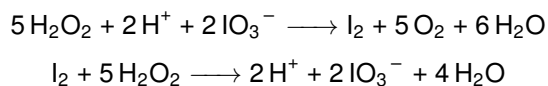
Oscylacyjne reakcje chemiczne są przykładem procesu samoorganizacji w układach z reakcją chemiczną. W trakcie przebiegu takiej reakcji możemy zaobserwować oscylacyjne zmiany stężenia niektórych reagentów pojawiających się w czasie jej przebiegu. Zwykle są to przejściowe związki chemiczne, które pojawiają się w mechanizmie reakcji pomiędzy substratami a produktami. Zjawisko takiej samoorganizacji obserwujemy tylko wówczas, gdy układ z reakcją chemiczną jest w stanie dalekim od stanu równowagi termodynamicznej.

Te oscylacyjne zmiany stężenia niektórych reagentów w oscylacyjnej reakcji chemicznej mogą odbywać się jednocześnie i tak samo w całej objętości układu, wówczas mówimy o powstaniu czasowej struktury dyssypatywnej. Jeśli stężenia tych reagentów zmieniają się zarówno w czasie jak i przestrzeni, wówczas mówimy o czasowo-przestrzennych strukturach dyssypatywnych. W tym drugim przypadku zaobserwujemy falę stężenia reagenta, która będzie przemieszczać się poprzez całą objętość układu. W trzecim przypadku te zmiany stężeń dotyczą tylko objętości układu, wówczas mówimy o przestrzennej strukturze dyssypatywnej. Wraz z osiągnięciem równowagi termodynamicznej w układzie opisane struktury zanikają.

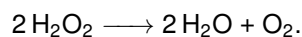
Wyjaśnienie tych oscylacji z punktu widzenia termodynamiki wymaga wyjścia poza termodynamikę równowagową. Termodynamika równowagowa zajmuje się procesami, w których ignoruje się upływ czasu, a przemiana jest kwazistatyczna. Oznacza to, że każdy stan pośredni można traktować jako stan równowagi termodynamicznej. Model taki jest wystarczający do opisu większości procesów. Można więc powiedzieć, że termodynamikę równowagową interesuje stan początkowy oraz końcowy.

Dopiero termodynamika nierównowagowa jest teorią, która obejmuje to, co dzieje się w trakcie rzeczywistych przemian i jest ona konieczna do opisu reakcji oscylacyjnych. Pierwsze odkrycia sięgają końca XIX wieku. Były to reakcje w układach heterogenicznych, jak na przykład pierścienie Lieseganga lub oscylacje prądu płynącego przez ogniwo galwaniczne.

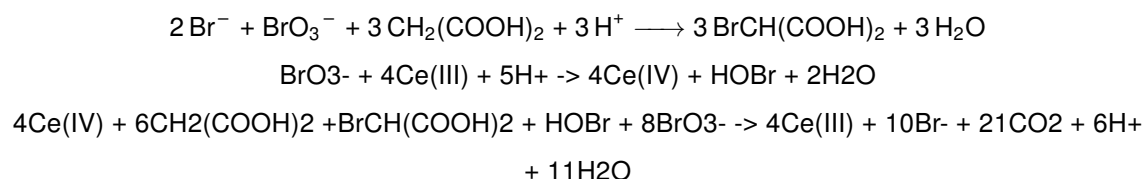
Pierwszy model teoretyczny został przedstawiony przez Alfreda Lotka [3]. Przez długi czas uważano, że nie mogą one przedstawiać rzeczywistych reakcji, ponieważ ówczesnie interpretowano, że łamią II Zasadę Termodynamiki. Jednak w 1921r. pokazano w reakcji Bray'a-Liebhafty'ego, że reakcje oscylacyjne w układach homogenicznych są możliwe. Jest to reakcja rozkładu nadtlenku wodoru katalizowana jodanem (V). Zachodzą reakcje oscylacyjne z naprzemienną dominacją dwóch procesów: [2]



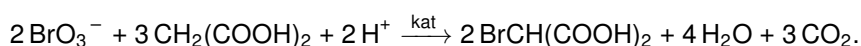
z reakcją sumaryczną:



Jeszcze większy wpływ na rozwój termodynamiki nierównowagowej w kinetyce chemicznej były reakcje Bielousowa-Żabotyńskiego. Pierwszą reakcją z tej grupy została zaobserwowana w 1959 w mieszaninie bromianu (V) potasu, siarczanie (VI) ceru (IV), kwasu malonowego oraz kwasu cytrynowego w rozcieńczonym kwasie siarkowym (VI). Reakcje te są dużo bardziej złożone i w uproszczonej formie mają postać: [2]



z reakcją sumaryczną:



Została ona odkryta jako nieorganiczny analog cyklu Krebsa [4].

Odkrycie reakcji oscylacyjnych przyczyniło się do rozwoju termodynamiki nierównowagowej, a w konsekwencji do użycia jej aparatu teoretycznego do opisu procesów życiowych. Niepoprawna interpretacja II Z.T. może doprowadzić do wniosku, że powstanie złożonej struktury z molekularnego chaosu powinno być niemożliwe. Wyjaśnienie takie błędnie wykorzystuje to prawo ignorując fakt, że układy biologiczne jak i cała Ziemia nie są układami izolowanymi.

1.1 Produkcja entropii

Wszystkie procesy rzeczywiste podlegają drugiej zasadzie termodynamiki, która określa różniczkową zmianę entropii dS , w danych procesie nierównością

$$dS > 0. \quad (1.1)$$

W powyższym zapisie pod symbolem dS kryje się suma różniczkowych zmian entropii otoczenia dS_{ot} i układu dS_{uk}

$$dS = dS_{uk} + dS_{ot}. \quad (1.2)$$

W przypadku układów izolowanych $dS = dS_{uk}$, więc w układach izolowanych entropia zawsze rośnie, a zatem spontaniczne uporządkowanie stabilnych struktur nie jest możliwe.

Druga zasada termodynamiki dana wzorem (1.1) rozstrzyga czy dany proces jest możliwy. Aby dodać tej zasadzie ilościowy charakter wprowadza się pojęcie produkcji entropii. W przypadku układu zamkniętego, w którym przebiega proces rzeczywisty drugą zasadę termodynamiki zapiszemy następującą nierównością:

$$dS_{uk} > \frac{\delta Q}{T_{ot}}, \quad (1.3)$$

gdzie dS_{uk} to różniczkowa zmiana entropii układu, δQ to elementarne ciepło dostarczone do układu ze źródła o temperaturze T_{ot} . Jeśli wymiana δQ odbywa się w temperaturze T to

$$dS_{uk} > \frac{\delta Q}{T}. \quad (1.4)$$

Z nierówności (1.1) lub (1.3) wynika, że różnicową zmianę entropii układu dS_{uk} możemy przedstawić jako sumę dwóch wkładów:

$$dS_{uk} = d_e S + d_i S, \quad (1.5)$$

gdzie $d_e S = \frac{\delta Q}{T}$, stanowi wkład do dS_{uk} wynikający tylko z wymiany ciepła, $d_i S$ jest równy:

$$d_i S = dS_{uk} - \frac{\delta Q}{T}. \quad (1.6)$$

Składnik $d_i S$ nazywany jest produkcją entropii. Na podstawie nierówności (1.1) lub (1.3) wynika, że $d_i S > 0$ w przemianach samorzutnych.

Rozpatrzmy teraz drugą zasadę termodynamiki z punktu widzenia układu i otoczenia, która przyjmuje postać:

$$dS_{uk} + dS_{ot} > 0, \quad (1.7)$$

gdzie symbolem dS_{ot} oznaczono różniczkową zmianę entropii otoczenia. Zmiany entropii dS_{ot} i dS_{uk} mogą wynikać z wymiany ciepła δQ jak i produkcji entropii. Dlatego możemy zapisać

$$d_e S_{uk} + d_i S_{uk} + d_e S_{ot} + d_i S_{ot} > 0. \quad (1.8)$$

Jeśli wymiana ciepła zachodzi w temperaturze T to wówczas: $d_e S_{uk} = -d_e S_{ot}$, otrzymujemy z (1.8)

$$d_i S_{uk} + d_i S_{ot} > 0. \quad (1.9)$$

Warunek obejmuje również przypadek, w którym produkcja entropii $d_i S_{uk}$ zmaleje na tyle, że $d_i S_{ot}$ skompensuje ten niedostatek. W innym przypadku $d_i S_{ot}$ może na tyle zmaleć, że $d_i S_{uk}$ będzie kompensować ten niedostatek. W termodynamice nierównowagowej dokonujemy jednak dodatkowo założenia:

$$d_i S_{uk} > 0$$

oraz

$$d_i S_{ot} > 0.$$

Założenie to możemy przenieść na sytuację, gdy układ dzielimy na mniejsze podukłady (komórki). Z punktu widzenia pojedynczej komórki, dla której pozostałe stanowią otoczenie, oznacza to, że produkcja entropii w jej wnętrzu ma być nieujemna i podobnie dla pozostałych. To oznacza dalej, że w każdym dowolnie małym obszarze układu, w którym zachodzą procesy samorzutne następuje związane z nimi tworzenie entropii. To stwierdzenie stanowi treść drugiej hipotezy termodynamiki nierównowagowej, nazywaną lokalnym sformuowaniem drugiej zasady termodynamiki. Lokalne sformuowanie drugiej zasady termodynamiki nie wyklucza jednak takiego przypadku, w którym w jednym i tym samym miejscu zachodzi kilka procesów, z których niektóre zmniejszają entropię ($d_i S < 0$), pod warunkiem, że oprócz nich obecne są procesy produkujące entropię ($d_i S > 0$), które z nadstatkiem zwiększa entropię w tym miejscu.

Zmianę entropii układu można zapisać jako wynikającą z przepływu ciepła oraz samorzutnej produkcji entropii:

$$dS_{uk} = d_e S + d_i S_{uk}. \quad (1.10)$$

Dla układu izolowanego: $d_e S = 0$:

$$dS_{uk} = d_i S_{uk}. \quad (1.11)$$

1.2 Termodynamika liniowa i nieliniowa

Wprowadza się wielkość zwaną źródłem entropii σ , która oznacza produkcję entropii w jednostce czasu i objętości

$$\frac{\partial_i S}{\partial t} = \iiint_V \sigma dV. \quad (1.12)$$

W ogólności natężenie przepływów termodynamicznych jest dowolną funkcją bodźców termodynamicznych:

$$J = f(X)$$

Rozwinięcie w szereg Taylora tej funkcji wokół X_0 jest

$$J_i = J_i^{eq} + \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial J_i}{\partial X_j} (X_j - X_j^{eq}) \right] + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial^2 J_i}{\partial X_j \partial X_k} (X_j - X_j^{eq}) (X_k - X_k^{eq}) \right] + \dots, \quad (1.13)$$

gdzie:

J, J^{eq} natężenie przepływów termodynamicznych oraz to natężenie w stanie równowagi

X, X^{eq} bodziec termodynamiczny i bodziec w stanie równowagi;

Wiadomo, że $J_i^{eq} = 0$ oraz $X_j^{eq} = 0$, ponieważ jest to stan równowagi.

W stanach zbliżonych do stanu równowagi można ograniczyć równanie (1.13) do następującego:

$$J_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial J_i}{\partial X_j} X_j \right]. \quad (1.14)$$

Zasada symetrii Curie-Prigogine'a mówi, że przepływy i siły termodynamiczne muszą mieć taki sam charakter tensorowy, na przykład dyfuzja (wektorowy) i przepływ ciepła (wektorowy) jest dozwolony, jednak dyfuzja (wektorowy) oraz reakcja chemiczna (skalarny) jest niedozwolony. Zasada ta może być jednak złamana w przypadku procesów nieliniowych [2].

Zapiszmy $\frac{\partial J_i}{\partial X_j}$ jako L_{ij}

$$J_i = \sum_{j=1}^n L_{ij} X_j. \quad (1.15)$$

Natężenie przepływu może zależeć tylko od bodźca sprzężonego jak w prawie Fouriera ($\mathbf{J}_q = -k\nabla T$), Ficka ($\mathbf{J}_C = -D\nabla C$), są to wtedy procesy proste [2]. Mogą one też zależeć od innych bodźców, przykładowo efekt Seebecka oraz Peltiera:

$$\mathbf{Q} = L_{qq}\Delta T + L_{qI}\Delta\phi \quad (1.16)$$

$$\mathbf{I} = L_{Iq}\Delta T + L_{II}\Delta\phi \quad (1.17)$$

[5] Występują w nich procesy krzyżowe; różnica temperatury wywołuje przepływ prądu oraz różnica potencjału elektrycznego wywołuje przepływ ciepła. Okazuje się, że współczynniki krzyżowe są sobie równe: $L_{qI} = L_{Iq}$. Jest to reguła przemienności Onsagera, która została udowodniona doświadczalnie oraz na podstawie fizyki statystycznej.

Produkcja entropii jest wyrażona za pomocą sił termodynamicznych i przepływów jako:

$$\sigma = \sum_i J_i X_i = \sum_i \sum_j^n L_{ij} X_i X_j \quad (1.18)$$

co zostało wyprowadzone w Dodatku A na stronie 34.

Jednak w chemii termodynamika liniowa nie opisuje dobrze szybkości zachodzenia reakcji chemicznych, których prędkość zazwyczaj zależy od wyższych potęg stężenia związków.

Termodynamika liniowa ma zastosowanie w większości przypadków technicznych, jednak nie są one w stanie opisać reakcji chemicznych, których szybkość zależy od wyższych niż 1 potęg stężenia składników.

Istnieje kilka podejść w próbie wyjścia poza zakres liniowej termodynamiki nierównowagowej. Jedno z nich zakłada, że współczynniki L_{ij} zależą od bodźców i przepływów, a więc

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial X_k} \neq 0, \quad \frac{\partial L_{ij}}{\partial J_k} \neq 0. \quad (1.19)$$

Równanie fenomenologiczne (1.14) zostaje zachowane, ale ten zabieg powoduje, że teoria staje się nieliniowa.

Kolejne podejście zakłada, że w rozwinięciu (1.13) uwzględnia większą liczbę wyrazów, przy zachowaniu niezależności współczynników rozwinięcia. Postuluje się jednocześnie, aby speł-

nione były relacje przemienności:

$$L_{ij} = L_{ji} \quad (1.20)$$

$$L_{ijk} = L_{jki} = L_{kij}. \quad (1.21)$$

Jednak próby nie były owocne, a przemienność współczynników L_{ij}, L_{ijk}, \dots trudna do uzależnienia.

Bardziej owocne podejście do problemu wyjścia poza liniową termodynamikę nierównowagową, głównie w kontekście oscylacyjnych reakcji chemicznych, polegało na wykorzystywaniu metod stosowanych z teorii układów dynamicznych. Autorzy tej koncepcji pozostawiają postulat o istnieniu równowagi lokalnej. Hipoteza ta zakłada, że cały układ możemy podzielić na mniejsze podukłady (zwane niekiedy komórkami), w których parametry termodynamiczne są ściśle zdefiniowane, tak jak to mamy w zagadnieniach równowagowych. Parametry te w innych komórkach, mogą mieć inne wartości.

Zakłada się tutaj, że te komórki są na tyle małe, iż możemy przyjąć, że parametry zmieniają się w sposób ciągły. Jednak z drugiej strony trzeba przyjąć, iż nie mogą one mieć bardzo małych rozmiarów. Ich makroskopowy charakter musi być zachowany przy założeniu dodatkowym, iż w każdej z nich panuje stan wewnętrznej równowagi.

Zasada minimalnej produkcji entropii mówi, że dla danego układu stacjonarnego produkcja entropii ma wartość minimalną. W układzie równowagowym produkcja entropii jest równa 0. Po wprowadzeniu siły termodynamicznej układ zostaje wytrącony z równowagi. Po zaprzestaniu wymuszania nierównowagi układ dąży do stanu równowagi [2].

Rozwijając entropię S w szereg Taylora otrzymujemy:

$$S = S^\circ + (\delta S)^\circ + \frac{1}{2!} (\delta^2 S)^\circ + \dots \quad (1.22)$$

W stanie równowagi $(\delta S)^\circ = 0$. Ograniczając szereg do wyrazu drugiego rzędu mamy:

$$S - S^\circ = \frac{1}{2!} (\delta^2 S)^\circ \quad (1.23)$$

Ze względu na maksimum entropii w stanie równowagi: $(\delta^2 S)^\circ < 0$ Można powiązać tę zależność z produkcją entropii:

$$\frac{\partial}{\partial t} (S - S^\circ) = \frac{1}{2!} (\delta^2 S)^\circ = \sum_{i=1}^n J_i X_i = \sigma \geq 0 \quad (1.24)$$

1.3 Szybkość reakcji

Reakcje chemiczne można podzielić na dwie kategorie. Są to reakcje homogeniczne, czyli takie zachodzące w jednej fazie, oraz reakcje heterogeniczne, czyli między związkami w różnych

fazach i zachodzące na granicy między nimi. Szybkość reakcji heterogenicznych jest trudniejsza do opisanie, ponieważ zależy od szybkości dyfuzji, powierzchni rozdzielania i innych czynników. Szybkość reakcji homogenicznej w stałej temperaturze jest funkcją stężeń reagentów. Można ją wyrazić dla stałej objętości jako:

$$v = \frac{1}{\nu_i} \frac{dc_i}{dt}. \quad (1.25)$$

Jest to wielkość niezależna od konkretnego reagenta. Można tak zdefiniowaną szybkość reakcji powiązać z szybkością zmiany liczby postępu reakcji:

$$v = \frac{1}{\nu_i} \frac{dc_i}{dt} \quad (1.26)$$

$$dc_i = \frac{dn_i}{V} \quad (1.27)$$

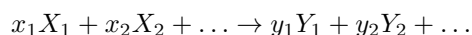
gdzie ν_i to współczynnik stechiometryczny (ujemny dla substratów, a dodatni dla produktów), c_i to stężenia molowe składników. Wprowadzamy oznaczenie:

$$d\xi = \frac{dn_i}{\nu_i}, \quad (1.28)$$

gdzie ξ to liczba postępu reakcji i jest niezależna od wyboru składnika. Wykorzystując tę zależność otrzymujemy:

$$v = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}, \quad (1.29)$$

Dla reakcji chemicznej w postaci ogólnej



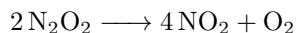
szybkość ta ma ogólną postać:

$$v = f(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots).$$

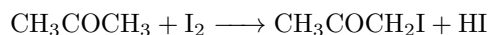
Odpowiednie wzory są wyznaczane empirycznie i znacząca część z nich okazuje się mieć prostszą formę tej zależności:

$$v = k x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots \quad (1.30)$$

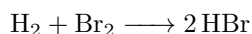
Przykładowe reakcje i ich szybkości reakcji:



$$v = k [\text{N}_2\text{O}_2]$$

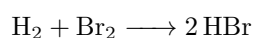


$$v = k [\text{CH}_3\text{COCH}_3]$$

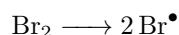


$$v = \frac{k_1 [\text{H}_2] [\text{Br}_2]^{1/2}}{1 + k_2 [\text{HBr}] / [\text{Br}]}$$

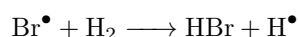
Każdą z tych reakcji można rozdzielić na szereg występujących jednocześnie reakcji elementarnych. Przykładowo dla syntezy bromowodoru z cząsteczkowego wodoru i bromu:



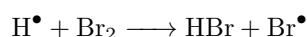
reakcja sumaryczna



reakcja elementarna

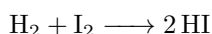


reakcja elementarna



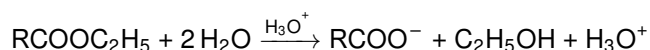
reakcja elementarna.

Jednak analogiczna reakcja syntezy jodowodoru przebiega w sposób bezpośredni:



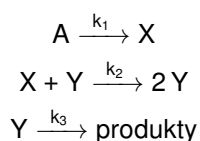
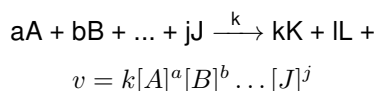
co oznacza, że każdą reakcję należy rozpatrywać osobno i nie ma jednego uniwersalnego schematu [6].

Według równania (1.30) szybkość reakcji można zmienić przez zmianę stężenia reagentów lub zmianę stałej szybkości reakcji. Katalizatorami nazywamy związki zwiększające tą stałą, natomiast związki zmniejszające katalizatorem ujemnym lub inhibitorem. Nie występują one w reakcji sumarycznej, ale występują w reakcjach elementarnych. Podobnie jak reakcje możemy podzielić katalizę na homogeniczną (zachodzącej w jednej fazie) oraz heterogeniczną (zachodząca na granicy faz). Szczególnym rodzajem reakcji katalitycznych jest autokataliza, w której produkt reakcji jest jednocześnie katalizatorem. Przykładem takiej reakcji jest hydroliza estrów w środowisku kwasowym: [6]



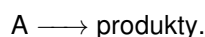
2 Praca własna

W tym rozdziale przeprowadzono analizę teoretyczną oraz numeryczną modeli stosowanych w opisie reakcji oscylacyjnych. Pierwszym modelem istotnym dla rozważanych zagadnień jest model Lotki podany przez niego w roku 1910. Mimo, że oryginalnie miał on zastosowanie w badaniu wielkości populacji zwierząt, a dokładnie zależności między drapieżnikami oraz ofiarami, ma on również pewne znaczenie dla reakcji chemicznych. W 1920 Lotka, a w 1931 niezależnie Volterra, zaproponowali zmodyfikowany model nazywany modelem Lotki-Volterry. Trzecim rozpatrywanym modelem jest bruskelator opracowany przez szkołę Prigogine'a w Brukseli. Jest on analizowany w postaci uproszczonej, jak i ogólnej z reakcjami odwracalnymi. Szybkości reakcji przyjmujemy zależą jedynie od współczynników stechiometrycznych substratów, tj.:



Jest to najprostszy model zawierający autokatalizę. W modelu tym przyjmujemy, że A jest stałe. Może to być osiągnięte poprzez wykorzystanie reaktora przepływowego, w którym kontroluje się

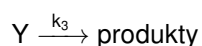
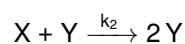
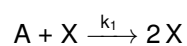
dopływ składnika A . W pierwszym kroku A zostaje przekształcone w X , które w drugim kroku w reakcji z Y tworzy więcej składnika Y . Układ taki wymaga więc zapoczątkowania reakcji pewną ilością Y . W końcowym kroku Y zostaje przekształcone w produkty końcowe. Reakcja sumaryczna ma postać:



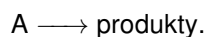
Szybkość zmiany stężeń składników

$$\frac{d[X]}{dt} = k_1[A] - k_2[X][Y] \quad (2.1)$$

$$\frac{d[Y]}{dt} = k_2[X][Y] - k_3[Y]. \quad (2.2)$$



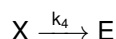
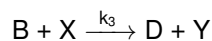
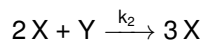
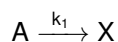
W modelu tym zmodyfikowano pierwszy krok poprzez wprowadzenie autokatalizy. Zmienia to zachowanie się układu co zostało przeanalizowane poniżej. Konsekwencją dodania autokatalizy jest dodatkowe wprowadzenie początkowego składnika X , a więc jednym z ze stanów stacjonarnych jest $X = Y = 0$. Jest to jednak rozwiązanie trywialne i układ taki jest martwy, więc nie będzie to rozpatrywane. Reakcja sumaryczna:



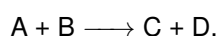
Odpowiednie szybkości zmian stężeń mają postać:

$$\frac{d[X]}{dt} = k_1[A][X] - k_2[X][Y] \quad (2.3)$$

$$\frac{d[Y]}{dt} = k_2[X][Y] - k_3[Y] \quad (2.4)$$



Pierwszy krok modelu brukselator jest taki sam jak modelu Lotki. W drugim występuje autokataliza Y do X . W trzecim tworzenie Y z X , natomiast w ostatnim przekształcenie X w produkty końcowe. Reakcja sumaryczna:



Szybkości zmian stężeń reagentów:

$$\frac{d[X]}{dt} = k_1[A] + k_2[X]^2[Y] - k_3[B][X] - k_4[X] \quad (2.5)$$

$$\frac{d[Y]}{dt} = -k_2[X]^2[Y] + k_3[B][X]. \quad (2.6)$$

2.1 Metody różniczkowe

Układ równań liniowych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach ma w ogólności rozwiązanie analityczne [7]

$$\frac{dX(t)}{dt} = RX(t) \quad (2.7)$$

$$X(t) = \exp(Rt)X(0) \quad (2.8)$$

Rozpatrywane układy jednak nie mają rozwiązania analitycznego i należy je rozwiązać metodami numerycznymi.

W poniższej tabeli podano wybrane wzory różnicowe wykorzystywane podczas symulacji. Wzory ??1 - ??4 są typu Adamsa-Bashfortha, natomiast wzór ??5 typu Milne'a [8]. Wzory o wyższym rzędzie wymagają znajomości wartości większej ilości poprzednich kroków, więc nie mogą być one wykorzystane dla kroków początkowych. W symulacji wykorzystano progresywnie schemat ??1 dla pierwszego kroku, następnie ??2 dla drugiego, ??3 dla trzeciego oraz ??5 dla każdego kolejnego.

	Wzór	p	A_{p+1}
1	$y_{n+1} = y_n + hy'_n$	1	$\frac{1}{2}$
2	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3y'_n - y'_{n-1})$	2	$\frac{5}{12}$
3	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23y'_n - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2})$	3	$\frac{3}{8}$
4	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3})$	4	$\frac{251}{720}$
5	$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2})$	4	$\frac{14}{45}$

Tabela 1: Schematy różnicowe

gdzie h jest krokiem czasowym, p to najwyższa wykładnik potęgi h^s , przy których współczynnik wynosi 0, a A_{p+1} jest współczynnikiem przy kolejnej potędze.

2.2 Stabilność rozwiązań

Na potrzeby analizy można zredukować ilość parametrów danych równań różniczkowych stosując odpowiednie podstawienia. Najpierw należy wyznaczyć współrzędne punktu stacjonarnego, w którym obie pochodne stężeń reagentów są równe zero. Analiza zostanie przedstawiona

na przykładzie modelu Lotki, ale analogiczne wyprowadzenie można przeprowadzić dla każdego z tych modeli. W stanie stacjonarnym stężenia reagentów są stałe, więc $\frac{d[X]}{dt} = \frac{d[Y]}{dt} = 0$

$$\begin{aligned} k_1[A] - k_2[X]_{st}[Y]_{st} &= 0 \\ k_2[X]_{st}[Y]_{st} - k_3[Y]_{st} &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy

$$\begin{aligned} [X]_{st} &= \frac{k_3}{k_2} \\ [Y]_{st} &= \frac{k_1[A]}{k_3} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Wprowadzamy podstawienie

$$x = \frac{[X]}{[X]_{st}} \quad y = \frac{[Y]}{[Y]_{st}} \quad \tau = k_3 t \quad a = \frac{k_1 k_2 [A]}{k_3^2}$$

i otrzymujemy po przekształceniach dla modelu Lotki:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= a - axy \\ \frac{dy}{d\tau} &= xy - y \end{aligned} \quad (2.11)$$

Analogiczne wyprowadzenie można przeprowadzić dla modelu Lotki-Volterry:

$$x = \frac{[X]}{[X]_{st}} \quad [X]_{st} = \frac{k_3}{k_2} \quad y = \frac{[Y]}{[Y]_{st}} \quad [Y]_{st} = \frac{k_1[A]}{k_2} \quad \tau = k_3 t \quad a = \frac{k_1[A]}{k_3} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= ax - axy \\ \frac{dy}{d\tau} &= xy - y \end{aligned} \quad (2.13)$$

oraz modelu bruskelator:

$$\begin{aligned} x &= \frac{[X]}{[X]_{st}} \quad [X]_{st} = \frac{k_1[A]}{k_4} \quad y = \frac{[Y]}{[Y]_{st}} \quad [Y]_{st} = \frac{k_3 k_4 [B]}{k_1 k_2 [A]} \quad \tau = k_4 t \quad a = \frac{k_3 [B]}{k_4} \quad b = \frac{k_1^2 k_2 [A]^2}{k_4^3} \\ \frac{dx}{d\tau} &= 1 + ax^2 y - ax - x \\ \frac{dy}{d\tau} &= -bx^2 y + bx \end{aligned} \quad (2.14)$$

Stałe w powyższych równaniach wynikają z podstawienia odpowiednich x i y do odpowiadających równań i grupowanie stałych, aby otrzymać najprostszą formę.

Tak przygotowane równania mają stan stacjonarny w $x = y = 1$, co wynika z definicji x oraz y jako $x = \frac{[X]}{[X]_{st}}$ oraz $y = \frac{[Y]}{[Y]_{st}}$, które dla $[X] = [X]_{st}$ oraz $[Y] = [Y]_{st}$ są równe 1. Zostaną one wykorzystane do numerycznego rozwiązywania równań.

Na potrzeby dalszej analizy teoretycznej wprowadzam podstawienie:

$$\gamma = x - 1 \quad \vartheta = y - 1$$

To powoduje, że stan stacjonarny przesuwają się do $\gamma = \vartheta = 0$. Otrzymujemy dla modelu Lotki:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{d\tau} &= -a\gamma\vartheta - a\gamma - a\vartheta \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \gamma\vartheta + \gamma \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dla modelu Lotki-Volterra:

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\tau} &= -a\gamma\vartheta - a\vartheta \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \gamma\vartheta + \gamma\end{aligned}\tag{2.16}$$

Dla modelu brusselator:

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\tau} &= a\gamma^2\vartheta + a\gamma^2 + 2a\gamma\vartheta + a\gamma + a\vartheta - \gamma \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= -b\gamma^2\vartheta - b\gamma^2 - 2b\gamma\vartheta - b\gamma - b\vartheta\end{aligned}\tag{2.17}$$

Istnienie punktu stacjonarnego nie oznacza, że jest on atraktorem.

Układy są badane w stanie oddalonym od stanu stacjonarnego, dlatego wybieramy taki stan jako stan odniesienia, a pozostałe jako wyprowadzone z niego zaburzeniem.

Badanie charakteru punktu stacjonarnego układu równań różniczkowych nieliniowych jest trudne, ale można wprowadzić pewne uproszczenie i zlinearyzować ten układ. Oznacza to rozwinięcie funkcji po prawej stronie równań w szereg Taylora i ograniczenie go do elementu liniowego. Działanie to jest uzasadnione tym, że badamy jedynie najbliższe otoczenie i kolejne składniki mają mniejszy wkład im bliżej punktu stacjonarnego.

Po linearyzacji otrzymujemy dla modelu Lotki:

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\tau} &= -a\gamma - a\vartheta \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \gamma\end{aligned}\tag{2.18}$$

Układ równań (2.18) w porównaniu z (2.15) nie zawiera składników o całkowitej potęgze większej niż 1.

Odpowiednie przekształcenie dla modelu Lotki-Volterra daje układ:

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\tau} &= -a\vartheta \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \gamma,\end{aligned}\tag{2.19}$$

natomiast dla modelu brusselator:

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\tau} &= (a-1)\gamma + a\vartheta \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= -b\gamma - b\vartheta\end{aligned}\tag{2.20}$$

Można teraz badać stany stabilne metodami równań różniczkowych liniowych. Stabilność zależy od wartości własnych macierzy stałych. Dla modelu Lotki:

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} -a-\lambda & -a \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} &= \lambda^2 + a\lambda + a = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= -a \\ \lambda_1\lambda_2 &= a\end{aligned}\tag{2.21}$$

Dla modelu Lotki-Volterra:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -a \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + a = 0 \quad (2.22)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = a$$

Dla modelu brusselator:

$$\det \begin{pmatrix} a-1-\lambda & a \\ -b & -b-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + (-a+b+1)\lambda + b = 0 \quad (2.23)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a - b - 1$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = b$$

	$\lambda_1 + \lambda_2 < 0$	$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$	$\lambda_1 + \lambda_2 > 0$
$\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2 < \lambda_1 \lambda_2$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re}\{\lambda_1\} = \operatorname{Re}\{\lambda_2\} < 0$ $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ Stabilne ognisko	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re}\{\lambda_1\} = \operatorname{Re}\{\lambda_2\} = 0$ $\lambda_1 = -\lambda_2$ Centrum	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re}\{\lambda_1\} = \operatorname{Re}\{\lambda_2\} > 0$ $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ Niestabilne ognisko
$0 < \lambda_1 \lambda_2 \leq \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ Stabilny węzeł		$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ Niestabilny węzeł
$\lambda_1 \lambda_2 = 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $0 = \lambda_1 < \lambda_2$
$\lambda_1 \lambda_2 < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $0 < \lambda_2 < -\lambda_1$ Siodło (zawsze niestabilne)	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $0 < \lambda_2 = -\lambda_1$ Siodło (zawsze niestabilne)	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $0 > \lambda_1 > -\lambda_2$ Siodło (zawsze niestabilne)

Tabela 2: Warunki stabilności

W tabeli ?? przedstawiono zależności między pierwiastkami równania kwadratowego, a sumą i iloczynem tych pierwiastków. Suma oraz iloczyn są tutaj wykorzystywane, ponieważ można je w prosty sposób otrzymać ze wzorów Viete'a:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a} \quad (2.24)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{c}{a}$$

Charakter wykresu fazowego zależy od zależności między pierwiastkami równania charakterystycznego [2].

	$\lambda_1 + \lambda_2 < 0$	$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$	$\lambda_1 + \lambda_2 > 0$
$\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2 < \lambda_1 \lambda_2$	$0 < a < 4$	-	-
$0 < \lambda_1 \lambda_2 \leq \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2$	$4 \leq a$		-
$\lambda_1 \lambda_2 = 0$	-	$a = 0$	-
$\lambda_1 \lambda_2 < 0$	-	-	$a < 0$

Tabela 3: Warunki dla modelu Lotki

	$\lambda_1 + \lambda_2 < 0$	$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$	$\lambda_1 + \lambda_2 > 0$
$\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2 < \lambda_1 \lambda_2$	-	$0 < a$	-
$0 < \lambda_1 \lambda_2 \leq \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2$	-		-
$\lambda_1 \lambda_2 = 0$	-	$a = 0$	-
$\lambda_1 \lambda_2 < 0$	-	$a < 0$	-

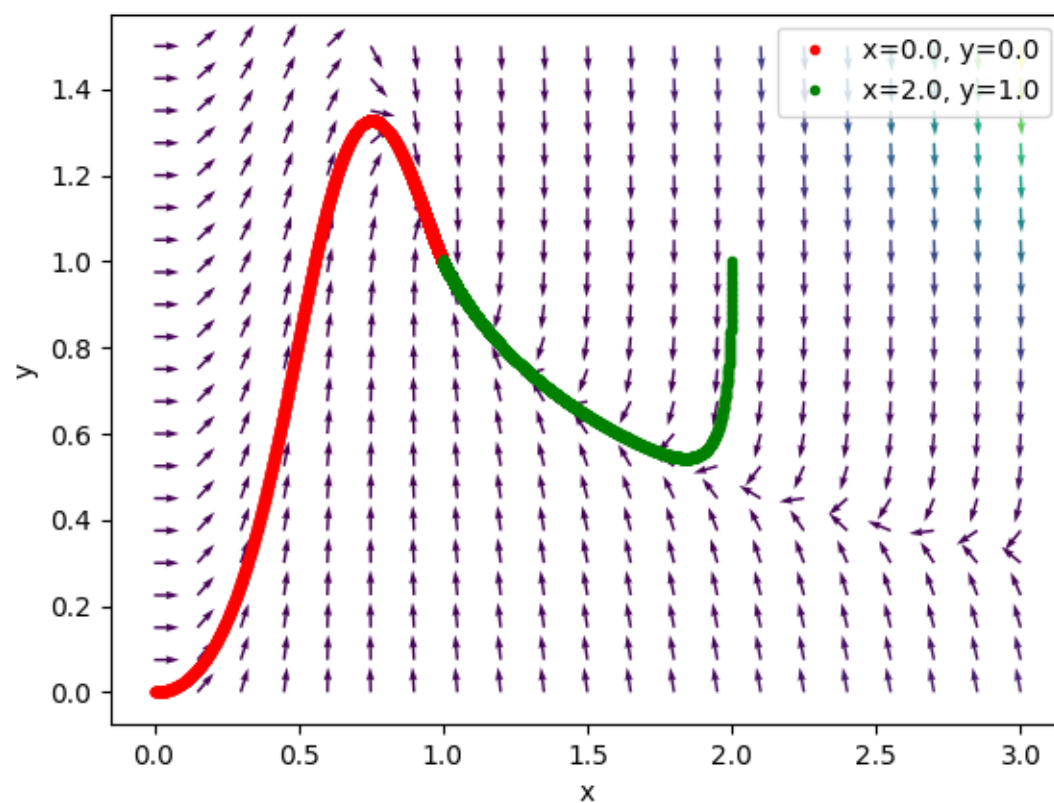
Tabela 4: Warunki dla modelu Lotki-Volterra

	$\lambda_1 + \lambda_2 < 0$	$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$	$\lambda_1 + \lambda_2 > 0$
$\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2 < \lambda_1 \lambda_2$	$b + 1 - 2\sqrt{b} < a < b + 1$ $0 < b$	$a = b + 1$ $0 < b$	$b + 1 < a < b + 1 + 2\sqrt{b}$ $0 < b$
$0 < \lambda_1 \lambda_2 \leq \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2$	$a \leq b + 1 - 2\sqrt{b}$ $0 < b$		$b + 1 + 2\sqrt{b} \leq a$ $0 < b$
$\lambda_1 \lambda_2 = 0$	$a < 1$ $b = 0$	$a = 1$ $b = 0$	$1 < a$ $b = 0$
$\lambda_1 \lambda_2 < 0$	$a < b + 1$ $b < 0$	$a = b + 1$ $b < 0$	$b + 1 < a$ $b < 0$

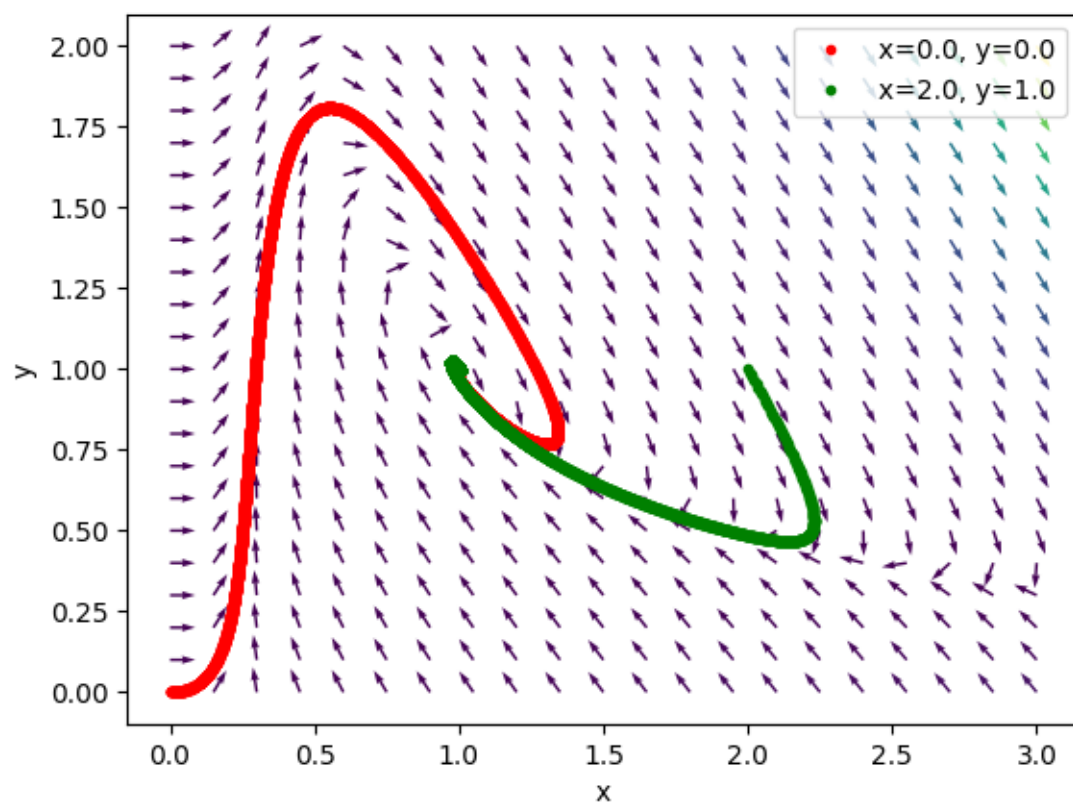
Tabela 5: Warunki dla modelu bruskelator

W tabelach 3, 4 oraz 5 przedstawiono warunki z tabeli 2 wykorzystując odpowiednie równania charakterystyczne. Niektóre warunki nie są możliwe do spełnienia dla parametrów rzeczywistych, taka komórka zawiera "-".

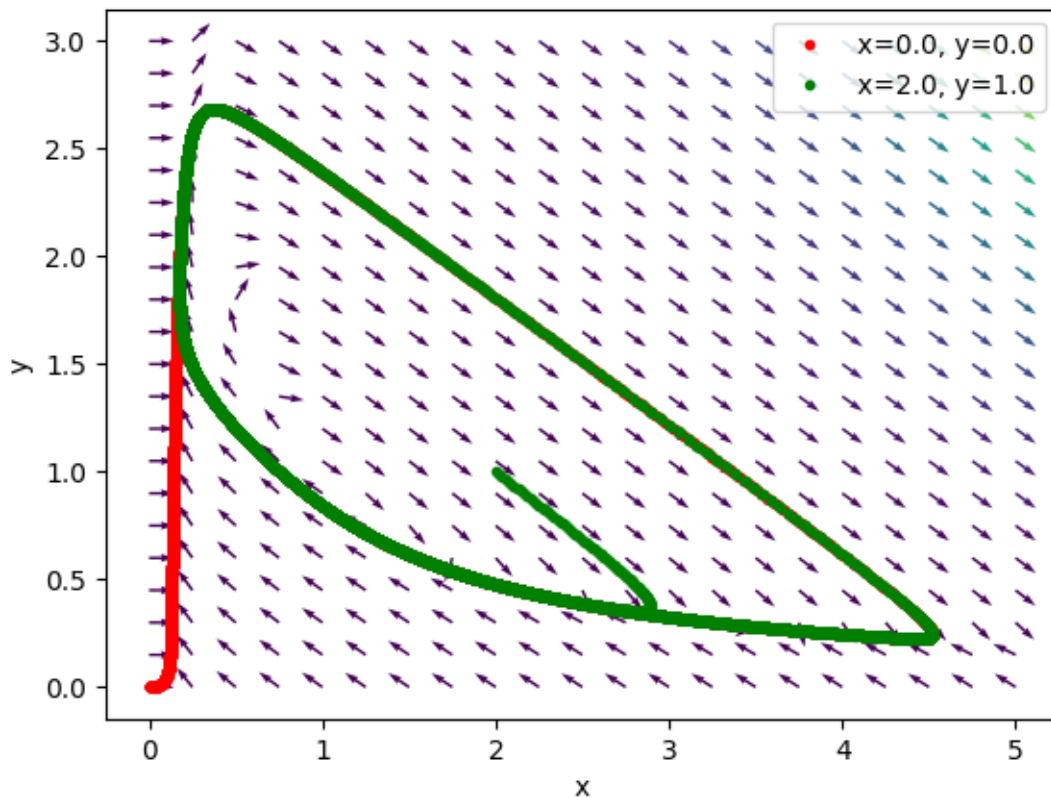
Przykładowe wykresy fazowe:



Rysunek 1: Stabilny węzeł



Rysunek 2: Stabilne ognisko



Rysunek 3: Niestabilne ognisko

Wykresy fazowe na rysunkach 1 oraz 2 przedstawiają najważniejsze przypadki dla modelu bruskelator. Wykorzystano odpowiednio stałe: $a = 0,5; b = 4$, $a = 3; b = 4$ oraz $a = 7; b = 4$. Parametry te dodano tak, aby były one wewnątrz podanych w tabeli 5.

Wykresy zachowują się w sposób oczekiwany według poprzednich tabel i literatury [2]. Na rysunku 3 zachodzi jednak coś niespodziewanego. Układ osiąga stabilny cykl graniczny. Jest to niemożliwe w przypadku układów liniowych do których je sprowadziliśmy poprzez linearyzację, jednak linearyzacja jest dobrym przybliżeniem jedynie w najbliższym otoczeniu punktu stacjonarnego, cykl graniczny widoczny na rysunku ?? jest więc przejawem nieliniowości układu równań modelu bruskelator [2]. Istnieje na szczęście twierdzenie, które wyjaśnia to zjawisko, jest to twierdzenie Poincarégo-Bendixsona.

Twierdzenie (Poincarégo-Bendixsona). *"Jeśli w przestrzeni fazowej będącej podzbiorem płaszczyzny \mathbb{R}^2 orbita zawiera co najmniej jeden swój punkt graniczny, to jest ona punktem krytycznym albo orbitą zamkniętą"*[7]

Z twierdzenia tego możemy wywnioskować, że punkt krytyczny, zwany również punktem stacjonarnym, jest jedynym punktem zbioru granicznego, co ma miejsce w przypadku wykresu

fazowego typu stabilne ognisko, albo istnieje cykl graniczny, co można zaobserwować na wykresach odpowiadającym modelowi klasycznego bruskelatora oraz bruskelatora z reakcjami odwracalnymi. Model ten został opisany poniżej.

Dla układu, którym jedynym źródłem entropii jest zachodząca reakcja chemiczna produkcja entropii opisywana jest następującym równaniem de Dondera:

$$T d_i S = A d\xi \quad (2.25)$$

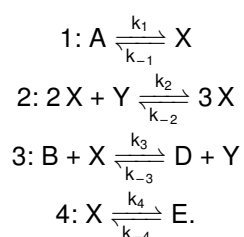
lub dla wielu reakcji w postaci bardziej uogólnionej:

$$T d_i S = \sum_r A_r d\xi_r. \quad (2.26)$$

W przypadku reakcji prostych, na przykład $X \longrightarrow Y$, nie jest możliwe zdefiniowanie powinowactwa chemicznego, ponieważ należy narzucić warunek $A = 0$ w stanie równowagi, a taki stan nie występuje w przypadku tego typu reakcji. Możliwe jest jedynie stwierdzenie, że skoro dana reakcja zachodzi, to $A_i > 0$ oraz $d\xi_i > 0$. Temperatura bezwzględna jest zawsze dodatnia, stąd $d_i S > 0$.

2.3 Ogólny model bruskelator

Będziemy teraz analizować uogólniony model bruskelatora, w którym reakcje mogą przebiegać w dwie strony z różnymi stałymi szybkości reakcji. Poprzedni model jest szczególnym przypadkiem poniższego przy założeniu $k_{-1} = k_{-2} = k_{-3} = k_{-4} = 0$. Uogólniona forma modelu bruskelator ma postać:



Reakcje są odwracalne i przebiegają przy różnych stałych prędkości reakcji oznaczonych k_i oraz k_{-i} dla reakcji odpowiednio w prawą i lewą stronę.

Całkowita zmiana reagentów X oraz Y ma postać:

$$\frac{d[X]}{dt} = k_1[A] + k_2[X]^2[Y] - k_3[B][X] - k_4[X] - k_{-1}[X] - k_{-2}[X]^3 + k_{-3}[D][Y] + k_{-4}[E] \quad (2.27)$$

$$\frac{d[Y]}{dt} = -k_2[X]^2[Y] + k_3[B][X] + k_{-2}[X]^3 - k_{-3}[D][Y] \quad (2.28)$$

Rozdzielam przyrosty na dwie części, odpowiadające reakcjom w prawą oraz lewą stronę:

$$\frac{d[X]_1}{dt} = k_1[A] + k_2[X]^2[Y] - k_3[B][X] - k_4[X] \quad (2.29)$$

$$\frac{d[Y]_1}{dt} = -k_2[X]^2[Y] + k_3[B][X] \quad (2.30)$$

$$\frac{d[X]_2}{dt} = -k_{-1}[X] - k_{-2}[X]^3 + k_{-3}[D][Y] + k_{-4}[E] \quad (2.31)$$

$$\frac{d[Y]_2}{dt} = +k_{-2}[X]^3 - k_{-3}[D][Y] \quad (2.32)$$

Stany stacjonarne odpowiadające odpowiednio $[X]_1$ i $[Y]_1$ oraz $[X]_2$ i $[Y]_2$ to:

$$[X]_{st,1} = \frac{k_1[A]}{k_4}; \quad [Y]_{st,1} = \frac{k_3k_4[B]}{k_1k_2[A]} \quad (2.33)$$

$$[X]_{st,2} = \frac{k_{-4}[E]}{k_{-1}}; \quad [Y]_{st,2} = \frac{k_{-2}k_{-4}^3[E]^3}{k_{-1}^3k_{-3}[D]} \quad (2.34)$$

Przyjmuję, że mogę dowolnie kontrolować stężenia reagentów $[A]$, $[B]$, $[D]$ i $[E]$. $[A]$ oraz $[B]$ pozostają dowolnymi parametrami, natomiast $[D]$ i $[E]$ są zależne od innych parametrów. Po przyrównaniu $[X]_{st,1}$ oraz $[X]_{st,2}$ i analogicznie dla $[Y]$ otrzymujemy wartości dla $[D]$ oraz $[E]$:

$$[D] = \frac{k_1^4k_2k_{-2}[A]^4}{k_3k_{-3}k_4^4[B]} \quad (2.35)$$

$$[E] = \frac{k_1k_{-1}[A]}{k_4k_{-4}} \quad (2.36)$$

Wspólna wartość stężeń dla stanu stacjonarnego:

$$[X]_{st} = \frac{k_1[A]}{k_4} \quad (2.37)$$

$$[Y]_{st} = \frac{k_3k_4[B]}{k_1k_2[A]} \quad (2.38)$$

Dla zwiększenia przejrzystości równań wprowadzam oznaczenia:

$$[X] = x[X]_{st} = x \frac{k_1[A]}{k_4} \quad (2.39)$$

$$[Y] = y[Y]_{st} = y \frac{k_3k_4[B]}{k_1k_2[A]} \quad (2.40)$$

$$\tau = k_4t \quad (2.41)$$

$$a = \frac{k_3[B]}{k_4} \quad (2.42)$$

$$b = \frac{k_1^2k_2[A]^2}{k_4^3} \quad (2.43)$$

$$c = \frac{k_{-1}}{k_4} \quad (2.44)$$

$$d = \frac{k_1^4k_2k_{-2}[A]^4}{k_3k_4^5[B]} \quad (2.45)$$

Równania różniczkowe mają wtedy postać

$$\frac{dx}{d\tau} = 1 + ax^2y - ax - x - cx - bc^3 + by + c \quad (2.46)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -bx^2y + bx + dx^3 - dy, \quad (2.47)$$

a punkt stacjonarny występuje dla $x = 1, y = 1$. Po wprowadzeniu podstawienia:

$$\gamma = x - 1$$

$$\vartheta = y - 1$$

i linearyzacji otrzymujemy:

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = (a - c - 3b - 1)\gamma + (a + b)\vartheta \quad (2.48)$$

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = (-b + 3d)\gamma + (-b - d)\vartheta \quad (2.49)$$

Równanie charakterystyczne:

$$\lambda^2 - (a - c - 4b - d - 1)\lambda + (-4ad + bc + cd + 4b^2 + b + d) \quad (2.50)$$

Powinowactwo chemiczne w stanie równowagi każdego z równań z osobna wynosi $A = 0$ [6]. W ogólnej postaci ma ono postać:

$$A = A_0 - RT \ln \left(\prod_i c_i^{\nu_i} \right), \quad (2.51)$$

gdzie R to uniwersalna stała gazowa, T - temperatura bezwzględna, c_i - stężenie i -tego składnika, a ν_i to współczynnik stechiometryczny reagenta i (dodatni dla produktów po prawej stronie, ujemny dla substratów po lewej). RT jest jedynie stałą i na potrzeby symulacji przyjąłem $RT = 1$. Otrzymujemy dla każdej z reakcji odpowiednio:

$$1 : A_1 = \ln \left(\frac{1}{cx} \right) \quad (2.52)$$

$$2 : A_2 = \ln \left(\frac{by}{dx} \right) \quad (2.53)$$

$$3 : A_3 = \ln \left(\frac{bx}{dy} \right) \quad (2.54)$$

$$4 : A_4 = \ln \left(\frac{x}{c} \right). \quad (2.55)$$

Liczba postępu reakcji wyrażona jest równością:

$$d\xi = \frac{dn_i}{\nu_i} \quad (2.56)$$

dla dowolnego reagenta, lub używając $dc_i = \frac{dn_i}{V}$, gdzie V jest objętością, która także mogę przyjąć, że jest równa $V = 1$. Otrzymane liczby postępu reakcji dla poszczególnych reakcji:

$$\frac{d\xi_1}{d\tau} = [X]_{st}(1 - cx) \quad (2.57)$$

$$\frac{d\xi_2}{d\tau} = [X]_{st}(ax^2y - \frac{ad}{b}x^3) \quad (2.58)$$

$$\frac{d\xi_3}{d\tau} = [X]_{st}(ac - \frac{ad}{b}y) \quad (2.59)$$

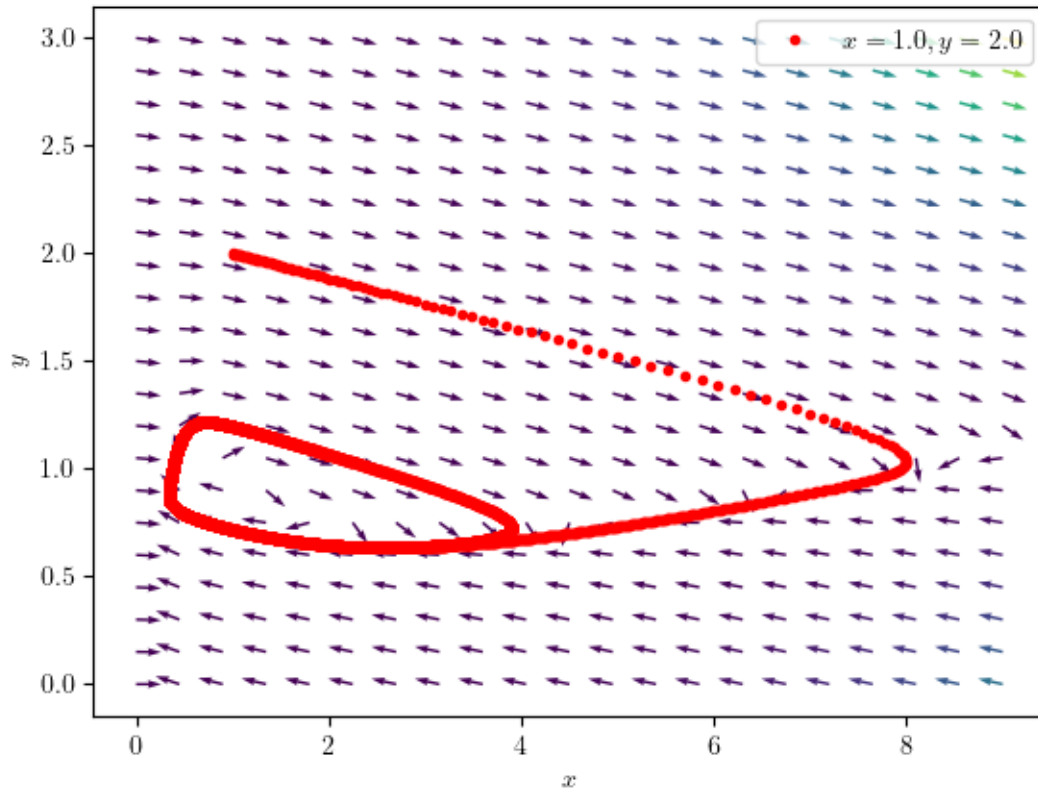
$$\frac{d\xi_4}{d\tau} = [X]_{st}(x - c). \quad (2.60)$$

$[X]_{st}$ można oczywiście przyjąć, że jest równe $[X]_{st} = 1$. Z prawa de Dondera $Td_i S = \sum_r A_r \xi_r$ przyjmując $T = 1$ otrzymujemy

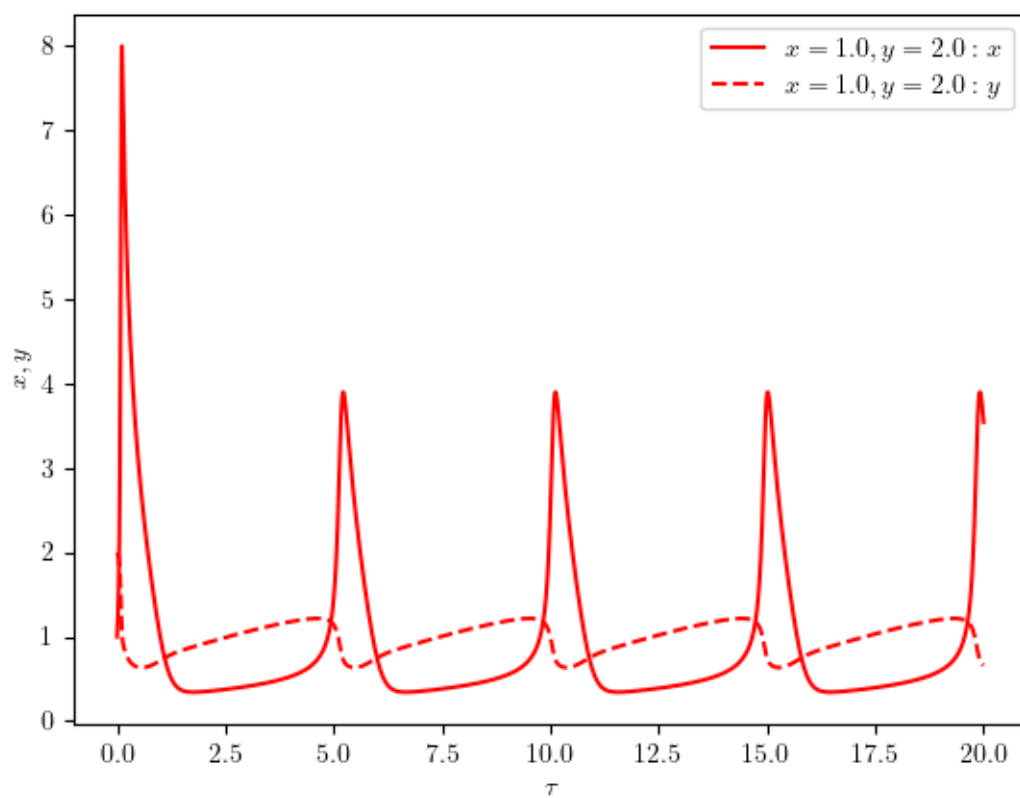
$$\frac{d_i S}{d\tau} = \ln\left(\frac{1}{cx}\right)(1 - cx) + \ln\left(\frac{by}{dx}\right)\left(ax^2y - \frac{ad}{b}x^3\right) + \ln\left(\frac{bx}{dy}\right)\left(ac - \frac{ad}{b}y\right) + \ln\left(\frac{x}{c}\right)(x - c) \quad (2.61)$$

Założenia $R = T = V = [X]_{st} = 1$ uargumentowane są tym, że interesuje nas jedynie charakter zmienności entropii w czasie, a nie konkretna wartość entropii. Jest to jedynie model, który nie odpowiada żadnemu rzeczywistemu układowi. Oczywiście wprowadzenie takich założeń zmienia jednostkę entropii, jednak ważna dla nas jest jedynie wartość i możemy ten fakt pominąć.

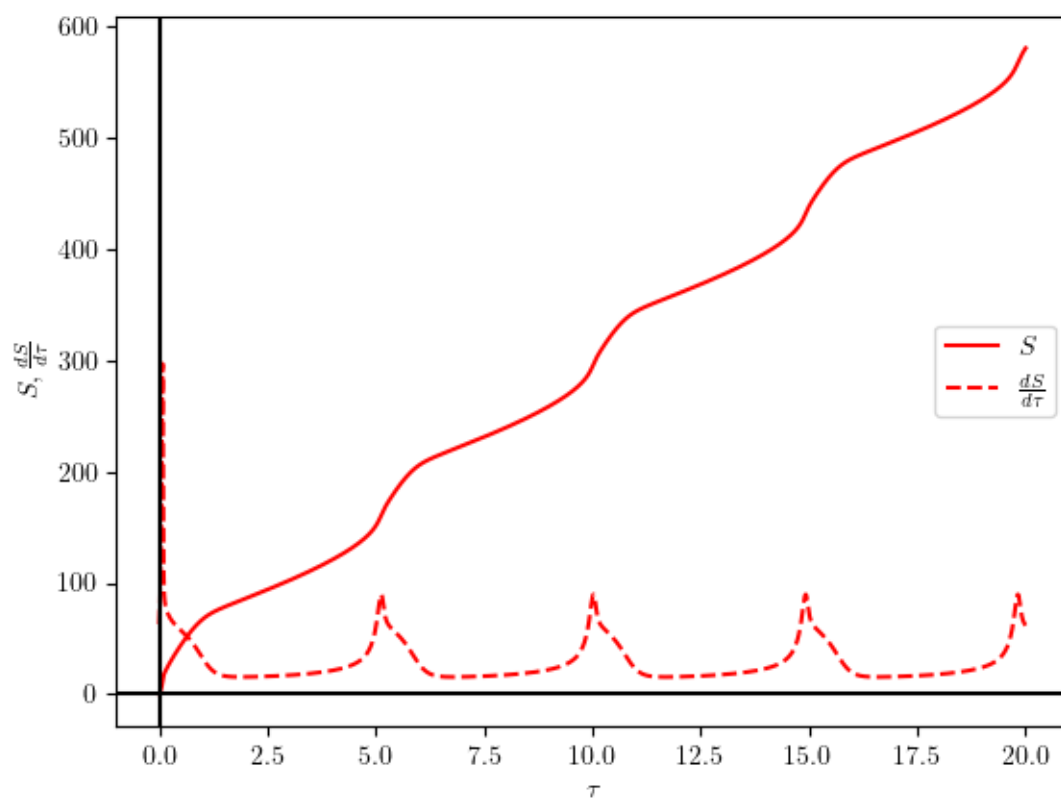
Wykresy otrzymane z przeprowadzonej symulacji dla kroku symulacji $h = d\tau = 0,001$ oraz warunku początkowego $x = 1, y = 2$:



Rysunek 4: Wykres fazowy dla $a=9, b=1, c=1, d=0,1$



Rysunek 5: Zależność wielkości x oraz y od τ



Rysunek 6: Zależność wielkości S oraz $\frac{dS}{d\tau}$ od τ

3 Sekcja 2

4 Sekcja 3

5 Sekcja 4

Wykaz literatury

- [1] Wiesław Pudlik. *Termodynamika*. 2020.
- [2] Marek Orlik. *Reakcje oscylacyjne. porządek i chaos*. 1996.
- [3] Alfred J. Lotka. "Contribution to the Theory of Periodic Reactions". W: *The Journal of Physical Chemistry* 14.3 (1910), s. 271–274. DOI: 10.1021/j150111a004. eprint: <https://doi.org/10.1021/j150111a004>. URL: <https://doi.org/10.1021/j150111a004>.
- [4] Alexander Pechenkin. "B P Belousov and his reaction". W: *Journal of Bioscience* (2009).
- [5] Józef Ceynowa. *Zarys Liniowej Termodynamiki Nierównowagowej Układów Ciągłych i Membranowych*. 2008.
- [6] Zdzisław Ruziewicz Krzysztof Pigoń. *Chemia Fizyczna. Podstawy fenomenologiczne*. 2013.
- [7] Andrzej Palczewski. *Równania Różniczkowe Zwyczajne. Teoria i metody numeryczne z wykorzystaniem programu rachunków symbolicznych*. 2017.
- [8] Janusz Wąsowski Zenon Fortuna Bohdan Macukow. *Metody Numeryczne*. 2017.

Wykaz rysunków

Wykaz tabel

Dodatek A

$$du = T ds - p dV + \sum_i \mu_i dn_i; dV = 0 \quad (5.1)$$

$$ds = \frac{1}{T} du - \sum_i \frac{\mu_i}{T} dn_i \quad (5.2)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{du}{dt} - \sum_i \frac{\mu_i}{T} \frac{dn_i}{dt} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{J}_s = \frac{1}{T} \mathbf{J}_u - \sum_i \frac{\mu_i}{T} \mathbf{J}_i \quad (5.4)$$

Równania ciągłości:

$$\frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \sigma \quad (5.5)$$

$$\frac{du}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_u \quad (5.6)$$

$$\frac{dn_i}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_i + \frac{dn_{i;reak}}{dt}; dn_{i;reak} = \sum_r \nu_{ir} d\xi_r \quad (5.7)$$

$$\frac{dn_i}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_i + \sum_r \nu_{ir} \frac{d\xi_r}{dt} \quad (5.8)$$

Podstawiając (5.4), (5.6) oraz (5.8) do (5.5) otrzymujemy:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{du}{dt} - \sum_i \frac{\mu_i}{T} \frac{dn_i}{dt} - \left[\mathbf{J}_u \cdot \nabla \frac{1}{T} - \sum_i \mathbf{J}_i \cdot \nabla \frac{\mu_i}{T} - \frac{1}{T} \sum_r \sum_i \nu_{ir} \mu_i \frac{d\xi_r}{dt} \right] + \sigma \quad (5.9)$$

Wprowadzamy pojęcie powinowactwa chemicznego:

$$A_r = - \sum_i \nu_{ir} \mu_i \quad (5.10)$$

Równanie (5.9) przybiera postać:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{du}{dt} - \sum_i \frac{\mu_i}{T} \frac{dn_i}{dt} - \left[\mathbf{J}_u \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) - \sum_i \mathbf{J}_i \cdot \nabla \left(\frac{\mu_i}{T} \right) + \sum_r \frac{A_r}{T} \frac{d\xi_r}{dt} \right] + \sigma \quad (5.11)$$

Otrzymujemy z porównania tego wzoru z (5.3):

$$\sigma = \mathbf{J}_u \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) - \sum_i \mathbf{J}_i \cdot \nabla \left(\frac{\mu_i}{T} \right) + \sum_r \frac{A_r}{T} \frac{d\xi_r}{dt} \quad (5.12)$$

Z analogicznego wyprowadzenia dla entalpii i założenia stałego ciśnienia:

$$\sigma = \mathbf{J}_h \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) - \sum_i \mathbf{J}_i \cdot \nabla \left(\frac{\mu_i}{T} \right) + \sum_r \frac{A_r}{T} \frac{d\xi_r}{dt} \quad (5.13)$$

Proces	Przepływ	Siła termodynamiczna
Transport energii	\mathbf{J}_u	$\nabla \left(\frac{1}{T} \right)$
Transport entalpii	\mathbf{J}_h	$\nabla \left(\frac{1}{T} \right)$
Dyfuzja	\mathbf{J}_i	$-\nabla \left(\frac{\mu_i}{T} \right)$
Reakcja chemiczna	$J_r = \frac{d\xi}{dt}$	$\frac{A}{T}$

6 Dodatek B

$$U = U(S, V, \xi) \quad (6.1)$$

$$H = H(S, p, \xi) \quad (6.2)$$

$$F = F(T, V, \xi) \quad (6.3)$$

$$G = G(T, p, \xi) \quad (6.4)$$

$$dU = T dS - p dV - A d\xi \quad (6.5)$$

$$dH = T dS + V dp - A d\xi \quad (6.6)$$

$$dF = -S dT - p dV - A d\xi \quad (6.7)$$

$$dG = -S dT + V dp - A d\xi \quad (6.8)$$

Pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,\xi} &= T & \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,\xi} &= -p & \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{S,V} &= -A \\ \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_{p,\xi} &= T & \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{S,\xi} &= V & \left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{S,p} &= -A \\ \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,\xi} &= -S & \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,\xi} &= -p & \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{T,V} &= -A \\ \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,\xi} &= -S & \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,\xi} &= V & \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{T,p} &= -A \end{aligned}$$

U, H, F, G są funkcjami stanu, więc pochodne mieszane są sobie równe:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,\xi} &= -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{V,\xi} & \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{S,V} &= -\left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_{V,\xi} & \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{S,V} &= \left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{S,\xi} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S,\xi} &= \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{p,\xi} & \left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{S,p} &= -\left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_{p,\xi} & \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_{S,p} &= -\left(\frac{\partial A}{\partial p}\right)_{S,\xi} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,\xi} &= \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,\xi} & \left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)_{T,V} &= \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{V,\xi} & \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{T,V} &= \left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{T,\xi} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,\xi} &= -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,\xi} & \left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)_{T,p} &= \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{p,\xi} & \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_{T,p} &= -\left(\frac{\partial A}{\partial p}\right)_{T,\xi} \end{aligned}$$

Pochodne po temperaturze:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,\xi} &= C_{V,\xi} & \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,\xi} &= \frac{C}{T} \\ \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{p,\xi} &= C_{p,\xi} & \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,\xi} &= \frac{C}{T} \\ \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,\xi} &= -S & \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{V,\xi} &= \Delta_r S_V \\ \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,\xi} &= -S & \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{p,\xi} &= \Delta_r S_p \end{aligned}$$

$$A d\xi = T dS - dU - p dV \quad (6.9)$$

$$A d\xi = T dS - dH + V dp \quad (6.10)$$

Podstawiając do tego odpowiednio:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,\xi} dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,\xi} dV + \left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)_{T,V} d\xi \quad (6.11)$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,\xi} dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T,\xi} dV + \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{T,V} d\xi$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,\xi} dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,\xi} dp + \left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)_{T,p} d\xi \quad (6.12)$$

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{p,\xi} dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{T,\xi} dp + \left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{T,p} d\xi$$

otrzymujemy:

$$A d\xi = \left[T \left(\frac{dS}{dT} \right)_{V,\xi} - \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,\xi} \right] dT + \left[T \left(\frac{dS}{dV} \right)_{T,\xi} - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{T,\xi} - p \right] dV + \left[T \left(\frac{dS}{d\xi} \right)_{T,V} - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_{T,V} \right] d\xi \quad (6.13)$$

$$A d\xi = \left[T \left(\frac{dS}{dT} \right)_{p,\xi} - \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{p,\xi} \right] dT + \left[T \left(\frac{dS}{dp} \right)_{T,\xi} - \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_{T,\xi} + V \right] dp + \left[T \left(\frac{dS}{d\xi} \right)_{T,p} - \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)_{T,p} \right] d\xi \quad (6.14)$$

Wyrażenia przy każdej różniczce powinny być sobie równe:

$$T \left(\frac{dS}{dT} \right)_{V,\xi} - \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,\xi} = 0 \quad (6.15)$$

$$T \left(\frac{dS}{dV} \right)_{T,\xi} - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{T,\xi} - p = 0 \quad (6.16)$$

$$A = T \left(\frac{dS}{d\xi} \right)_{T,V} - \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_{T,V} \quad (6.17)$$

$$T \left(\frac{dS}{dT} \right)_{p,\xi} - \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{p,\xi} = 0 \quad (6.18)$$

$$T \left(\frac{dS}{dp} \right)_{T,\xi} - \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_{T,\xi} + V = 0 \quad (6.19)$$

$$A = T \left(\frac{dS}{d\xi} \right)_{T,p} - \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)_{T,p} \quad (6.20)$$

Stosując wzory wynikające z równych pochodnych mieszanych możemy to przekształcić do:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{T,\xi} = -p + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V,\xi} \quad (6.21)$$

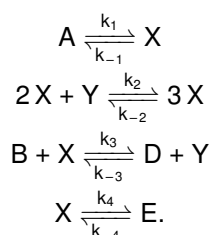
$$\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_{T,\xi} = V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p,\xi} \quad (6.22)$$

7 Dodatek C

8 Dodatek D

9 Dodatek E

Uogólniona forma modelu bruskelator ma postać:



Reakcje w nim są odwracalne i przebiegają przy różnych stałych prędkości reakcji oznaczonych k_i oraz k_{-i} dla reakcji odpowiednio w prawą i lewą stronę.

Całkowita zmiana reagentów X oraz Y ma postać:

$$\frac{d[X]}{dt} = k_1[A] + k_2[X]^2[Y] - k_3[B][X] - k_4[X] - k_{-1}[X] - k_{-2}[X]^3 + k_{-3}[D][Y] + k_{-4}[E] \quad (9.1)$$

$$\frac{d[Y]}{dt} = -k_2[X]^2[Y] + k_3[B][X] + k_{-2}[X]^3 - k_{-3}[D][Y] \quad (9.2)$$

Rozdzielam przyrosty na dwie części, odpowiadające reakcjom w prawą oraz lewą stronę:

$$\frac{d[X]_1}{dt} = k_1[A] + k_2[X]^2[Y] - k_3[B][X] - k_4[X] \quad (9.3)$$

$$\frac{d[Y]_1}{dt} = -k_2[X]^2[Y] + k_3[B][X] \quad (9.4)$$

$$\frac{d[X]_2}{dt} = -k_{-1}[X] - k_{-2}[X]^3 + k_{-3}[D][Y] + k_{-4}[E] \quad (9.5)$$

$$\frac{d[Y]_2}{dt} = +k_{-2}[X]^3 - k_{-3}[D][Y] \quad (9.6)$$

Stany stacjonarne odpowiadające odpowiednio $[X]_1$ i $[Y]_1$ oraz $[X]_2$ i $[Y]_2$ to:

$$\frac{d[X]_{st,1}}{dt} = \frac{k_1[A]}{k_4}; \quad \frac{d[Y]_{st,1}}{dt} = \frac{k_3k_4[B]}{k_1k_2[A]} \quad (9.7)$$

$$\frac{d[X]_{st,2}}{dt} = \frac{k_{-4}[E]}{k_{-1}}; \quad \frac{d[Y]_{st,2}}{dt} = \frac{k_{-2}k_{-4}[E]^3}{k_{-1}^3k_{-3}[D]} \quad (9.8)$$

Przyjmuję, że mogę dowolnie kontrolować stężenia reagentów $[A]$, $[B]$, $[D]$ i $[E]$. $[A]$ oraz $[B]$ pozostają dowolnymi parametrami, natomiast $[D]$ i $[E]$ są zależne od innych parametrów. Po przyrównaniu $[X]_{st,1}$ oraz $[X]_{st,2}$ i analogicznie dla $[Y]$ otrzymujemy wartości dla $[D]$ oraz $[E]$:

$$[D] = \frac{k_1^4k_2k_{-2}[A]^4}{k_3k_{-3}k_4^4[B]} \quad (9.9)$$

$$[E] = \frac{k_1k_{-1}[A]}{k_4k_{-4}} \quad (9.10)$$

Wspólna wartość stężeń dla stanu stacjonarnego:

$$[X]_{st} = \frac{k_1[A]}{k_4} \quad (9.11)$$

$$[Y]_{st} = \frac{k_3 k_4 [B]}{k_1 k_2 [A]} \quad (9.12)$$

Dla zwiększenia przejrzystości równań wprowadzam oznaczenia:

$$[X] = x[X]_{st} = x \frac{k_1[A]}{k_4} \quad (9.13)$$

$$[Y] = y[Y]_{st} = y \frac{k_3 k_4 [B]}{k_1 k_2 [A]} \quad (9.14)$$

$$\tau = k_4 t \quad (9.15)$$

$$a = \frac{k_3[B]}{k_4} \quad (9.16)$$

$$b = \frac{k_1^2 k_2 [A]^2}{k_4^3} \quad (9.17)$$

$$c = \frac{k_{-1}}{k_4} \quad (9.18)$$

$$d = \frac{k_1^4 k_2 k_{-2} [A]^4}{k_3 k_4^5 [B]} \quad (9.19)$$

Równania różniczkowe mają wtedy postać

$$\frac{dx}{d\tau} = 1 + ax^2y - ax - x - cx - bc^3 + by + c \quad (9.20)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -bx^2y + bx + dx^3 - dy, \quad (9.21)$$

a punkt stacjonarny występuje dla $x = 1, y = 1$. Po wprowadzeniu podstawienia:

$$\gamma = x - 1$$

$$\vartheta = y - 1$$

i linearyzacji otrzymujemy:

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = (a - c - 3b - 1)\gamma + (a + b)\vartheta \quad (9.22)$$

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = (-b + 3d)\gamma + (-b - d)\vartheta \quad (9.23)$$

Równanie charakterystyczne:

$$\lambda^2 - (a - c - 4b - d - 1)\lambda + (-4ad + bc + cd + 4b^2 + b + d) \quad (9.24)$$

Powinowactwo chemiczne w stanie równowagi każdego z równań z osobna wynosi $A = 0$ [6]. W ogólnej postaci ma ono postać:

$$A = A_0 - RT \ln \left(\prod_i c_i^{\nu_i} \right), \quad (9.25)$$

gdzie R to uniwersalna stała gazowa, T - temperatura bezwzględna, c_i - stężenie i -tego składnika, a ν_i to współczynnik stechiometryczny reagenta i (dodatni dla produktów po prawej stronie,

ujemny dla substratów po lewej). RT jest jedynie stałą i na potrzeby symulacji przyjąłem $RT = 1$. Otrzymujemy dla każdej z reakcji odpowiednio:

$$1 : \ln\left(\frac{1}{cx}\right) \quad (9.26)$$

$$2 : \ln\left(\frac{by}{dx}\right) \quad (9.27)$$

$$3 : \ln\left(\frac{bx}{dy}\right) \quad (9.28)$$

$$4 : \ln\left(\frac{x}{c}\right). \quad (9.29)$$

Liczba postępu reakcji wyrażona jest równością:

$$d\xi = \frac{dn_i}{\nu_i} \quad (9.30)$$

dla dowolnego reagenta, lub używając $dc_i = \frac{dn}{V}$, gdzie V jest objętością, która także mogę przyjąć, że jest równa $V = 1$. Otrzymane liczby postępu reakcji dla poszczególnych reakcji:

$$\frac{d\xi_1}{d\tau} = [X]_{st}(1 - cx) \quad (9.31)$$

$$\frac{d\xi_2}{d\tau} = [X]_{st}\left(ax^2y - \frac{ad}{b}x^3\right) \quad (9.32)$$

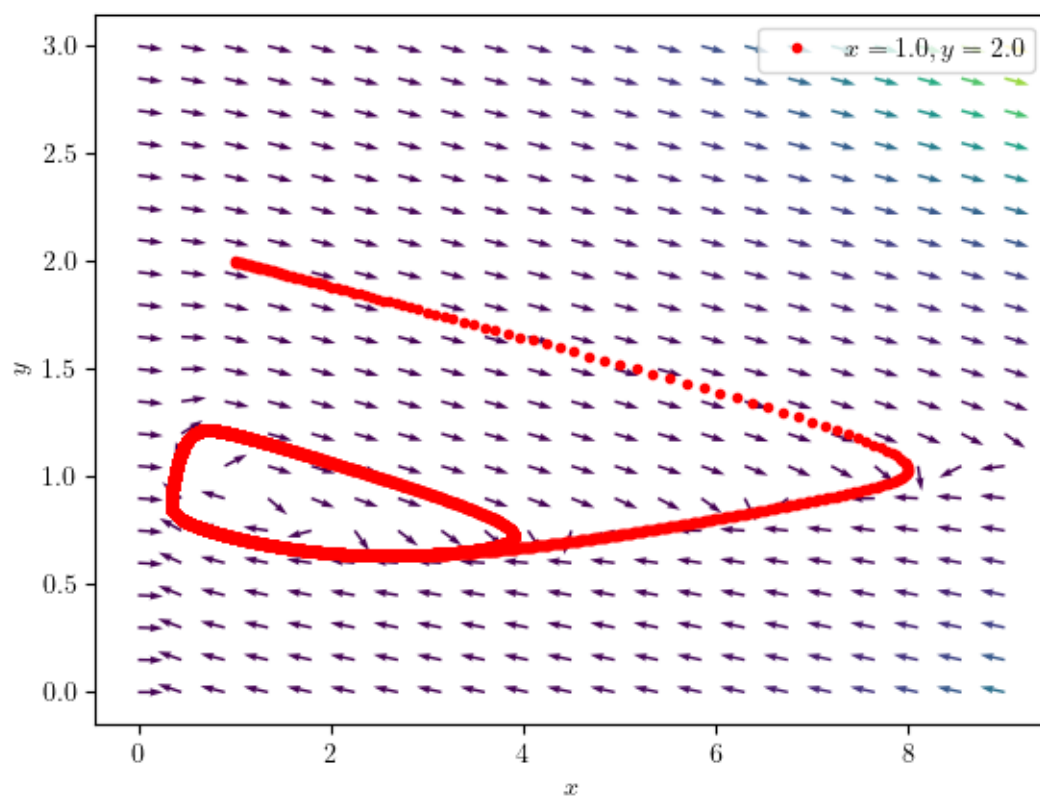
$$\frac{d\xi_3}{d\tau} = [X]_{st}\left(ac - \frac{ad}{b}y\right) \quad (9.33)$$

$$\frac{d\xi_4}{d\tau} = [X]_{st}(x - c). \quad (9.34)$$

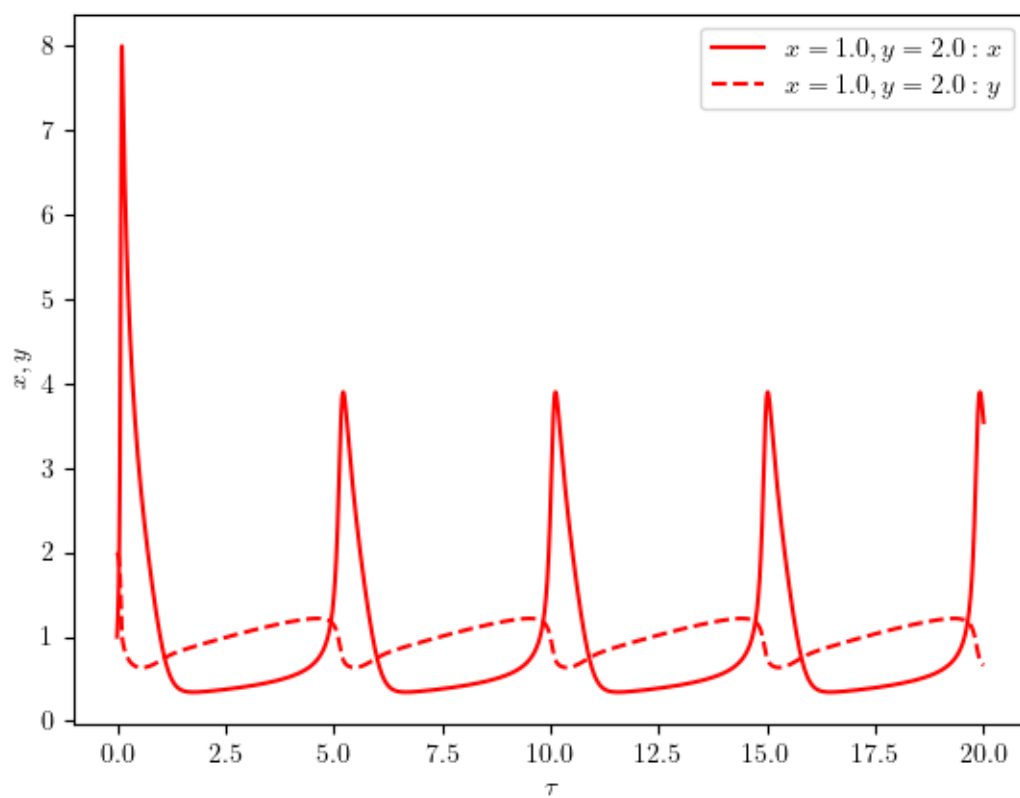
$[X]_{st}$ można oczywiście przyjąć, że jest równe $[X]_{st} = 1$. Z prawa de Dondera $Td_iS = \sum_r A_r\xi_r$ przyjmując $T = 1$ otrzymujemy

$$\frac{d_iS}{d\tau} = \ln\left(\frac{1}{cx}\right)(1 - cx) + \ln\left(\frac{by}{dx}\right)\left(ax^2y - \frac{ad}{b}x^3\right) + \ln\left(\frac{bx}{dy}\right)\left(ac - \frac{ad}{b}y\right) + \ln\left(\frac{x}{c}\right)(x - c) \quad (9.35)$$

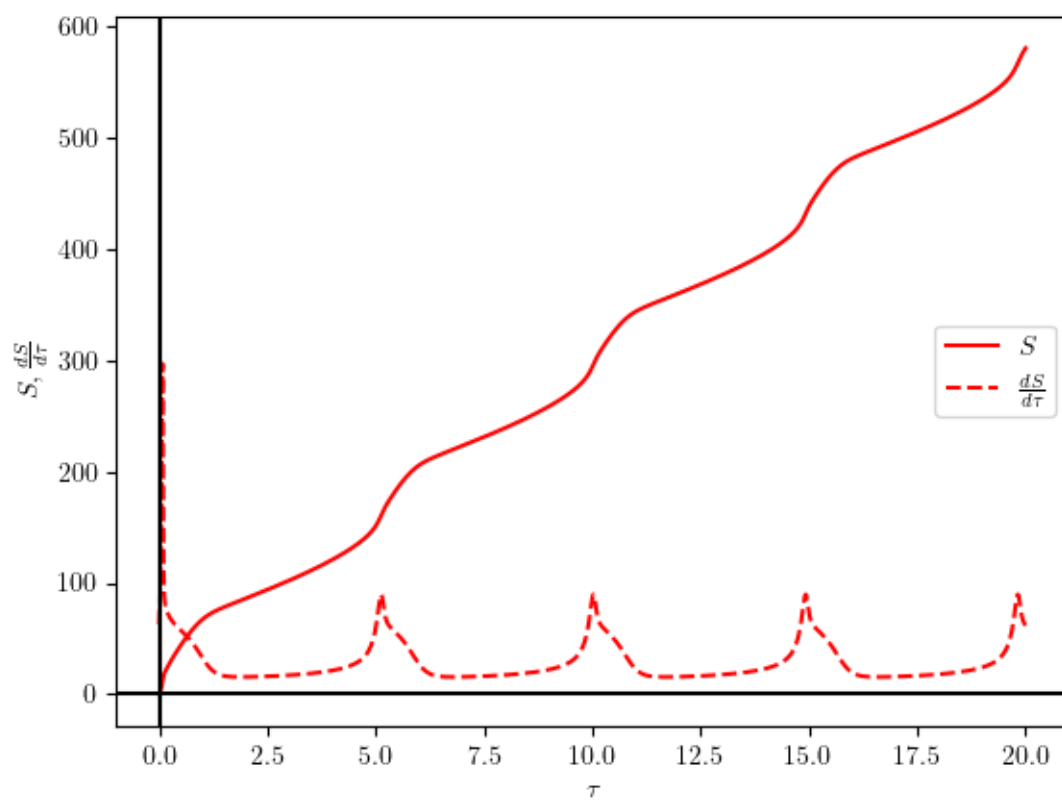
Wykresy otrzymane z przeprowadzonej symulacji dla kroku symulacji $h = d\tau = 0,001$ oraz warunku początkowego $x = 1, y = 2$:



Rysunek 7: Wykres fazowy dla $a=9$, $b=1$, $c=1$, $d=0,1$



Rysunek 8: Zależność wielkości x oraz y od τ



Rysunek 9: Zależność wielkości S oraz $\frac{dS}{d\tau}$ od τ