Espaços vetoriais _ ALGA

1

a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y \wedge z = 1\}$

- $A \subseteq \mathbb{R}^3$ por definição

$(-2y, y, 1)$, se $y=0$, $(0,0,1)$, logo $\notin A \Rightarrow$ Não é espaço vetorial

b) Inclui vetor nulo
$S \subseteq \mathbb{R}^3$, por definição
$k(1,2,3) = (k, 2k, 3k)$
seja $A = (k_1, 2k_1, 3k_1)$ e $B = (k_2, 2k_2, 3k_2)$
$A + B = (k_1 + k_2, 2k_1 + 2k_2, 3k_1 + 3k_2)$
$= (k_1 + k_2, 2(k_1 + k_2), 3(k_1 + k_2)) \in S$

seja $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que:

$\alpha(A) = (\alpha k, 2k\alpha, 3k\alpha) \in S$
logo S é espaço vetorial

c)

2

a) seja $0v = (a, b)$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + a - 1 \\ x_2 + b + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a - 1 = x_1 \\ x_2 + b + 1 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

- $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, sendo $(-x) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + c - 1 = 1 \\ x_2 + d + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + c = 2 \\ x_2 + d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 - x_1 \\ d = -2 - x_2 \end{cases}$$

- $(-x) = \begin{bmatrix} 2 - x_1 \\ -2 - x_2 \end{bmatrix}$

b). $S \subseteq \mathbb{R}^2$ por definição

- $\begin{bmatrix} 1 - 2t \\ t - 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 - 2t_2 \\ t_2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2t + \cancel{1} - 2t_2 - \cancel{1} \\ t - \cancel{1} + t_2 - 1 + \cancel{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2(t + t_2) \\ -1 + t_1 + t_2 \end{bmatrix} \subseteq S$

- $\alpha \odot \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ t - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(1 - 2t) - \alpha + 1 \\ \alpha(t - 1) + \alpha - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{\alpha} - 2\alpha t - \cancel{\alpha} + 1 \\ \alpha t - \cancel{\alpha} + \alpha - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha t + 1 \\ \alpha t - 1 \end{bmatrix} \subseteq S$

- Elemento neutro, $0v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 1 - 2t \\ t - 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ t - 1 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cancel{1} - 2t + a - \cancel{1} \\ t - \cancel{1} + b + \cancel{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ t - 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a - 2t \\ b + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ t - 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - \cancel{2t} = 1 - \cancel{2t} \\ b + \cancel{t} = \cancel{t} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$0v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\subseteq S$ S é subespaço de V

3

a) $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

i) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x+y=0\}$

S é subespaço de $\mathbb{R}^2$?

(i) $S\subseteq\mathbb{R}^2$ por definição de S

(ii) $S\neq\{\}$ porque $(1,-1)\in S$

(iii) S é fechado para a adição

seja (x_1,y_1) e (x_2,y_2) elementos de S, ou seja, $x_1+y_1=0$ e $x_2+y_2=0$
então
$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$

Verificar se é elemento de S

$x_1+x_2+y_1+y_2=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=0+0=0$

logo $(x_1+x_2+y_1+y_2)\in S$, e portanto S é fechado para a adição

(iv) S é fechado para a multiplicação escalar

seja $\alpha\in\mathbb{R}$ e $(x,y)\in S$, isto é, $x+y=0$
então
$\alpha(x,y)=(\alpha x, \alpha y)$

será que é elemento de S?

$\alpha x+\alpha y=\alpha(x+y)=\alpha\cdot 0=0$

Logo, S é fechado para a multiplicação escalar

∴ Concluímos que S é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ pois (i), (ii), (iii), (iv) são satisfeitos

ii) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: (x,y)\neq(1,1)\}$

S é subespaço de $\mathbb{R}^2$?

(i) $S\subseteq\mathbb{R}^2$ por definição

(ii)

b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$

S é subespaço de $\mathbb{R}^3$?

(i) $S \subseteq \mathbb{R}^3$ por definição

(ii) Teste do elemento neutro

se $x=y=z=0 \Rightarrow 0 \neq 1$

Logo, S não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$

c) $\mathcal{P}_2$ polinómios de x de grau não superior a 2

i) $S_1 = \{p(x) = ax^2+bx+c \in \mathcal{P}_2 : c=0\}$

(i) $S_1 \subset \mathcal{P}_2$, por definição

(ii) $S_1 \neq \{\}$ porque $x^2+2x \in S_1$, $0 \in S_1$

(iii) sejam $p_1(x) = a_1x^2+b_1x+c_1$, $c_1=0$ e $p_2(x) = a_2x^2+b_2x+c_2$, $c_2=0$ polinómios de S_1

$p_1(x)+p_2(x) = (a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)$

como $c_1=0$ e $c_2=0$, teremos $c_1+c_2=0$, logo $p_1(x)+p_2(x)$ é um elemento de S_1, deste modo S_1 é fechado para a adição

(iv) seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p(x) = ax^2+bx+c \in S_1$, com $c=0$ então

$\alpha p(x) = \alpha ax^2+\alpha bx+\alpha c$, como $c=0$, temos $\alpha c=0$

logo $\alpha p(x) \in S_1$

Ou seja, S_1 é fechado para a multiplicação escalar

∴ como (i), (ii), (iii), (iv) são satisfeitas podemos dizer que S_1 é subespaço vetorial real de $\mathcal{P}_2$.

ii) $S_2 = \{p(x) = ax^2+bx+c \in \mathcal{P}_2 : b=1\}$

(i) $S_2 \subseteq \mathcal{P}_2$ por definição

(ii) $S_2 \neq \{\}$ porque $ax^2+x+c \in S_2$ e $0 \in S_2$

(iii) sejam $p_1(x) = a_1x^2+b_1x+c_1$ $b_1=1$ e $p_2(x) = a_2x^2+b_2x+c_2$, $b_2=1$ polinómio de S_2

$p_1(x)+p_2(x) = (a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)$

como $b_1=1$ e $b_2=1$, teremos $b_1+b_2=2$, logo $p_1(x)+p_2(x)$ não é elemento de S_2, deste modo S_2 não é fechado para adição

∴ como S_2 não é fechado para a adição, logo S_2 não é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2$

iii)

4

5

6

a) $X = (2,-3,-4,3)$ comb. linear de $(1,2,1,0), (4,1,-2,3)$

$\exists\, \alpha_1, \alpha_2$ tais que:

$(2,-3,-4,3) = \alpha_1(1,2,1,0) + \alpha_2(4,1,-2,3)$

$\Leftrightarrow (2,-3,-4,3) = (\alpha_1 + 4\alpha_2,\ 2\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1 - 2\alpha_2,\ 3\alpha_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \alpha_1 + 4\alpha_2 \\ -3 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -4 = \alpha_1 - 2\alpha_2 \\ 3 = 3\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \alpha_1 + 4 \\ -3 = 2\alpha_1 + 1 \\ -4 = \alpha_1 - 2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_1 = -2 \\ \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

α_1's iguais, sistema possível e determinado

- $(2,-3,-4,3) = -2(1,2,1,0) + (4,1,-2,3)$

b) $X = (1,1,0)$ comb linear de $(2,1,-2), (1,0,0), (1,1,1)$

$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que:

$(1,1,0) = \alpha_1(2,1,-2) + \alpha_2(1,0,0) + \alpha_3(1,1,1)$

$\Leftrightarrow (1,1,0) = (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_3,\ -2\alpha_1 + \alpha_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ -2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 := L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 := L_3 + L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3 := L_3 - \frac{1}{-1/2}L_2 \\ = L_3 + 2L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Sistema possível e determinado

Logo, o vetor $(1,1,0)$ é combinação linear dos vetores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ indicados

- Determinar os escalares da combinação linear

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_3 = 2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 1/3 \\ -\alpha_2 = 1/3 \\ \alpha_3 = 2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 2/3 \\ \alpha_2 = -1/3 \\ \alpha_3 = 2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1/3 \\ \alpha_2 = -1/3 \\ \alpha_3 = 2/3 \end{cases}$$

Portanto,

$(1,1,0) = \frac{1}{3}(2,1,-2) - \frac{1}{3}(1,0,0) + \frac{2}{3}(1,1,1)$

c) Em $\mathcal{P}_2$ verificar se $p(t) = -t^2+t+4$ é comb. linear dos vetores $P_1(t) = t^2+2t+1$
$P_2(t) = t^2+3$
$P_3(t) = t-1$

$\exists$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$-t^2+t+4 = \alpha_1(t^2+2t+1) + \alpha_2(t^2+3) + \alpha_3(t-1)$$

$$\Leftrightarrow -t^2+t+4 = (\alpha_1+\alpha_2)t^2 + (2\alpha_1+\alpha_3)t + (\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 = -1 \\ 2\alpha_1+\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 := L_2 - 2L_1 \\ L_3 := L_3 - L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right] \underset{L_3 := L_3 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

Sistema impossível, pelo que o vetor $p(t)$ não se escreve como combinação linear dos vetores $P_1(t), P_2(t), P_3(t)$ indicados.

d)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 1 = -\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 0 = 2\alpha_1 - \alpha_3 \\ 2 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3 := L_3 - 2L_1 \\ L_4 := L_4 - L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_4 := L_4 - \frac{2}{-2}L_3 \\ = L_4 + L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3 := L_3 - \frac{-2}{-1}L_2 \\ = L_3 - 2L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{array}\right] \underset{L_4 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & -4 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_4 := L_4 - \frac{-9}{-6}L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -15/6 \end{array}\right]$$

Sistema impossível, pelo que o vetor $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ não se escreve como combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

7) Determinar o espaço gerado

a) $\{(0,1), (2,1), (2,2)\}$ em $\mathbb{R}^2$

$(2,2) = \alpha_1(0,1) + \alpha_2(2,1)$

$$\begin{cases} 2\alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = 1 \end{cases}$$

O vetor $(2,2)$ escreve-se como combinação linear dos vetores α_1, α_2.

Podemos escrever $<(0,1), (2,1)>$

$S = <(0,1), (2,1)>$
$= \{x = (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$(x,y) = \alpha(0,1) + \beta(2,1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (2\beta, \alpha+\beta), \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{R}\}$

$$= \begin{cases} x = 2\beta \\ y = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & x \\ 1 & 1 & y \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y \\ 0 & 2 & x \end{array}\right]$$

Sistema possível e determinado

R: O espaço gerado $\mathbb{R}^2$.

b) $\{(0,1), (0,2)\}$ em $\mathbb{R}^2$

$S = <(0,1), (0,2)>$
$= \{x = (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$(x,y) = \alpha(0,1) + \beta(0,2), \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{R}\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (0, \alpha + 2\beta), \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{R}\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$

c) $\{(2,2,3),(-1,-2,1),(0,1,0)\}$ em $\mathbb{R}^3$

$S = \langle (2,2,3),(-1,-2,1),(0,1,0) \rangle$

$= \{ X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) = \alpha(2,2,3) + \beta(-1,-2,1) + \gamma(0,1,0) \quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (2\alpha-\beta, 2\alpha-2\beta+\gamma, 3\alpha+\beta)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha-\beta \\ y = 2\alpha-2\beta+\gamma \\ z = 3\alpha+\beta \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & x \\ 2 & -2 & 1 & y \\ 3 & 1 & 0 & z \end{array}\right] \underset{L_3 := L_3 - \frac{3}{2}L_1}{\overbrace{L_2 := L_2 - L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & y-x \\ 0 & 5/2 & 0 & \end{array}\right]$$

$1 + 3/2$

$1 + 3$

d)

e)

8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Espaço nulo

$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 : AX = 0\}$

$X = (x,y,z,t)$

Conjunto de soluções do sistema homogéneo $AX=0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \overbrace{\qquad} \\ L_2 := L_2 - L_1 \\ L_3 := L_3 - 2L_1 \\ L_4 := L_4 - L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \overbrace{\qquad} \\ L_3 := L_3 - 1/2 L_2 \\ L_4 := L_4 - 1/2 L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistema homogéneo é possível e indeterminado

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + z + 2t = 0 \\ z, t \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z - t \\ z, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$(x,y,z,t) \in N(A)$ são tais que $(x,y,z,t) = (-z, -z-t, z, t)$
$= z(-1,-1,1,0) + t(0,-1,0,1)$

$N(A) = \langle (-1,-1,1,0), (0,-1,0,1) \rangle$

11) Verificar se um conjunto de vetores é linearmente independente

a) $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(1,-1,1)\}$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,2,3) + \alpha_3(1,2,3) + \alpha_4(1,-1,0) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2 := L_2 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3 := L_3 - \frac{3}{2}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3/2 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 := \frac{L_2}{2} \\ L_3 := \frac{L_3}{3/2} = \frac{2}{3}L_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8/3 \end{bmatrix}$$

Sistema possível e indeterminado, pelo que os vetores vão ser linearmente dependentes

a') $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3)\}$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,2,3) + \alpha_3(1,2,3) = (0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 := L_2 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 := L_3 - \frac{3}{2}L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \end{array}\right]$$

Sistema homogéneo é possível e determinado, pelo que os vetores $(1,1,0), (0,2,3)$ e $(1,2,3)$ são linearmente independentes

b) $\{(1,2,3),(1,1,1),(1,0,1)\}$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha(1,0,1) = (0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 := L_2 - 2L_1 \\ L_3 := L_3 - 3L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 := -L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 := L_3 - 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

1-3

Sistema homogéneo é possível e determinado, pelo que os vetores $(1,2,3), (1,1,1)$ e $(1,0,1)$ são linearmente independentes

c) $\{(1,1,1,1),(1,-1,2,3),(1,3,0,-1)\}$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,1,1,1) + \alpha_2(1,-1,2,3) + \alpha_3(1,3,0,-1) = (0,0,0,0)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 = -\frac{L_2}{2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3 := L_3 - L_2 \\ L_4 := L_4 - 2L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sistema homogéneo é possível e indeterminado, pelo que os vetores vão ser linearmente dependentes

d) $\{2t^2+1, t-2, t+3\}$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(2t^2+1) + \alpha_2(t-2) + \alpha_3(t+3) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow 2t^2\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)t + (\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 := L_3 - \frac{1}{2}L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 := L_3 - (-2)L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

Sistema homogéneo é possível e determinado, pelo que os vetores vão ser linearmente independentes

12) $A = \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow$ linearmente independente em $\mathbb{R}^p$

Verificar se $B = \{x_1 + x_2,\ x_1 + x_3,\ x_2 + x_3\}$ é linearmente independente.

como A é linearmente independente $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \quad \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Será que B é linearmente independente?

Sejam $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$

$$\beta_1 (x_1 + x_2) + \beta_2 (x_1 + x_3) + \beta_3 (x_2 + x_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_1 + \beta_2 x_3 + \beta_3 x_2 + \beta_3 x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\beta_1 + \beta_2) x_1 + (\beta_1 + \beta_3) x_2 + (\beta_2 + \beta_3) x_3 = 0$$

como $\{x_1, x_2, x_3\}$ é linearmente independente então:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \beta_1 + \beta_3 = 0 \\ \beta_2 + \beta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sistema possível e determinado, portanto

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \end{cases}$$

Logo, o conjunto B é linearmente independente.

13)

14)

15) Indica se são bases do espaço vetorial indicado

Base: · linearmente independente
· gerador de $\mathbb{R}$

a) $\{(1,2), (2,4)\}$ em $\mathbb{R}^2$

Verificar se é linearmente independente.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 (1,2) + \alpha_2 (2,4) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 := L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistema possível e indeterminado, logo os vetores são linearmente dependentes

Logo, os vetores não formam base de $\mathbb{R}^2$

b) $\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ em $\mathbb{R}^3$

· verificar se são linearmente independentes

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,1) = (0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3:=L_3-L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3:=L_3+L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sistema possível e determinado
↳ logo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ e, portanto os vetores são linearmente independentes

· verificar se são geradores do espaço

Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right] \underset{L_3:=L_3-L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & -1 & 1 & z-x \end{array}\right] \underset{L_3:=L_3+L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 & z-x+y \end{array}\right] \underset{L_3:=\frac{1}{2}L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{z-x+y}{2} \end{array}\right] \underset{L_2=L_2-L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-\frac{z-x+y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{z-x+y}{2} \end{array}\right]$$

$$\underset{L_1:=L_1-L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x-\frac{y-z+x}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{y-z+x}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{z-x+y}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{x-y-z}{2} \\ \alpha_2 = \frac{y-z+x}{2} \\ \alpha_3 = \frac{z-x+y}{2} \end{cases}$$

$(x,y,z) = \frac{x-y-z}{2}(1,0,1) + \frac{y-z+x}{2}(1,1,0) + \frac{z-x+y}{2}(0,1,1)$

Ou seja, todo o vetor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ escreve-se como combinação linear de 3 vetores dados.

Os 3 vetores geram $\mathbb{R}^3$

Logo, como também são linearmente independentes formam uma base em $\mathbb{R}^3$.

c) $\{(1,0,1),(2,1,0),(3,1,1)\}$ em $\mathbb{R}^3$

· verificar se são linearmente independentes

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(2,1,0) + \alpha_3(3,1,1) = (0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3:=L_3-L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \underset{L_3:=L_3+2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistema possível e indeterminado
↳ logo os vetores são linearmente dependentes
Assim sendo, os vetores não formam base de $\mathbb{R}^3$

d) $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,1),(0,1,1,1)\}$ em $\mathbb{R}^4$

verificar se são l. ind.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,1,0,0) + \alpha_2(0,0,1,1) + \alpha_3(1,0,0,1) + \alpha_4(0,1,1,1) = (0,0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2:=L_2-L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_4=L_4-L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1=L_1-L_4 \\ L_2=L_2+L_4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3=L_3-L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistema possível e determinado
↳ logo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ e, portanto são linearmente independentes

verificar se são geradores

Seja $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}$, sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$

$(x,y,z,t) = \alpha_1(1,1,0,0) + \alpha_2(0,0,1,1) + \alpha_3(1,0,0,1) + \alpha_4(0,1,1,1)$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & 1 & t \end{array}\right] \underset{L_2=L_2-L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & -1 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & 1 & t \end{array}\right] \underset{L_4=L_4-L_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & -1 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t-z \end{array}\right] \underset{\substack{L_1=L_1-L_4 \\ L_2=L_2+L_4}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x-t+z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y-x+t-z \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t-z \end{array}\right] \underset{L_3=L_3-L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x-t+z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y-x+t-z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z-y+x-t+z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t-z \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x-t+z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y-x+t-z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z-y+x-t+z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t-z \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x-t+z \\ \alpha_2 = y-x+t-z \\ \alpha_3 = 2z-y+x-t \\ \alpha_4 = t-z \end{cases}$$

$(x,y,z,t) = x-t+z(1,1,0,0) + y-x+t-z(0,0,1,1) + 2z-y+x-t(1,0,0,1) + t-z(0,1,1,1)$

Ou seja, todo o vetor $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ escreve-se como combinação linear de 4 vetores dados.

Os 4 vetores geram $\mathbb{R}^4$

Logo, como também são linearmente independentes, formam uma base em $\mathbb{R}^4$

e) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ em $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_3 \\ 0 = \alpha_1 + \alpha_4 \\ 0 = \alpha_2 + \alpha_4 \\ 0 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1 = L_1 - L_2 \\ L_4 = L_4 - L_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 = L_1 - L_4}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 + L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistema possível e determinado, logo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ e, portanto são linearmente independentes

Espaço gerador

Seja $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

f) $\{3t^2 + 2t + 1,\ t^2 + t + 1,\ t^2 + 1\}$ em P_2

16 Determinar base e dimensão do subespaço gerado

a)

$S = \langle (1,3,0), (-1,1,0) \rangle$

Verificar se são linearmente independentes

Seja $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,3,0) + \alpha_2(-1,1,0) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 := L_2 - 3L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 = \frac{L_2}{4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 = L_1 + L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sistema possível e determinado, logo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e portanto, os vetores dados são linearmente independentes

Assim sendo uma base para S é $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ ou $\{(1,3,0), (-1,1,0)\}$ e tem dimensão 2.

b)

$S = \langle (1,-1,1), (0,2,1), (1,1,2) \rangle$ 3 vetores geram o espaço

Verificar se são linearmente independentes

Seja $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,-1,1) + \alpha_2(0,2,1) + \alpha_3(1,1,2) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2 = \frac{L_2}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sistema possível e indeterminado, por isso, os vetores dados são linearmente dependentes, pelo que não é possível formar uma base de S

como esta coluna não tem pivot, "deitamos fora" o vetor

as outras duas colunas têm pivot

- Consideremos o conjunto $\{(1,-1,1), (0,2,1)\}$

Verificar se é linearmente independente

Seja $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(1,-1,1) + \alpha_2(0,2,1) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sistema possível e determinado, logo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e, portanto os vetores $(1,-1,1)$ e $(0,2,1)$ são linearmente independentes

Assim sendo, uma base para S é $\{(1,-1,1), (0,2,1)\}$ e tem dimensão 2.

c) $S = \langle t^2+1, t^2-t+1 \rangle$

Verificar se são linearmente independentes

Seja $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(t^2+1) + \alpha_2(t^2-t+1) = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2)t^2 + (-\alpha_2)t + (\alpha_1 + \alpha_2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sistema possível e determinado, logo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, portanto os vetores (t^2+1, t^2-t+1) são linearmente indep.

Assim sendo, uma base para S é $\{t^2+1, t^2-t+1\}$ e tem dimensão 2

(17) $A=\{(a^2,0,1),(0,a,2),(1,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$

Como A é uma base, significa que é linearmente independente

↳ Sistema possível e determinado

$\forall \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1(a^2,0,1)+\alpha_2(0,a,2)+\alpha_3(1,0,1)=(0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3:=L_3-\frac{1}{a^2}L_1} \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1-\frac{1}{a^2} \end{bmatrix}$$

→ O sistema tem de ser possível e determinado logo

$1-\frac{1}{a^2}\neq 0 \Leftrightarrow a^2-1\neq 0 \wedge a^2\neq 0$

$\Leftrightarrow a^2\neq 1 \wedge a\neq 0$

$\Leftrightarrow a\neq 1 \vee a\neq -1 \wedge a\neq 0$

$\Leftrightarrow a\in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$

(18)

$\alpha_1(1,0,1,0)+\alpha_2(0,1,-1,0)=(0,0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}=0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3-L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3}$$

8

(19) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x-y+3z=0\}$

a) S é subespaço vetorial?

→ $S\subseteq\mathbb{R}^3$ e $(\mathbb{R}^3,\cdot,+)$ é espaço vetorial (i)

→ $(1,1,0)\in S$, logo $S\neq\{\}$ (ii)

→ fecho da adição

sejam $(x_1,y_1,z_1)\in S$, isto é, $x_1-y_1+3z_1=0$

$(x_2,y_2,z_2)\in S$, isto é, $x_2-y_2+3z_2=0$

$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$

$x_1+x_2-(y_1+y_2)+3(z_1+z_2)=(x_1-y_1+3z_1)+(x_2-y_2+3z_2)=0+0=0$

logo S é fechado para a adição (iii)

→ fecho da multiplicação escalar

$(x,y,z)\in S$, isto é, $x-y+3z=0$, e $\alpha\in\mathbb{R}$

$\alpha(x,y,z)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$

$\alpha x-\alpha y+3(\alpha z)=\alpha(x-y+3z)$

$=\alpha\cdot 0$

$=0$

logo S é fechado para a multiplicação escalar (iv)

∴ concluímos (i),(ii),(iii),(iv) que S é um subespaço vetorial

b) obter um conjunto gerador de S

$(x,y,z)\in S$ se $x-y+3z=0 \Leftrightarrow x=y-3z$

$(x,y,z)=(y-3z,y,z)$

$=y(1,1,0)-z(-3,0,1)$

logo $\forall(x,y,z)$ é combinação linear de $(1,1,0)$ e $(-3,0,1)$ portanto $S=\langle(1,1,0),(-3,0,1)\rangle$

c) Dimensão de S

: Verificar se os vetores determinados na alínea anterior são linearmente independentes

Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 (1,1,0) + \alpha_2 (-3,0,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 - \frac{1}{3} L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistema possível e determinado, logo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, e portanto, os vetores são linearmente independentes e como também geram S, então formam uma base para $S = \{(1,1,0), (-3,0,1)\}$

A base de S tem de dimensão 2.

20

21

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 + 2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

a) Base do espaço nulo de A e nulidade de A

b) $AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+2c \\ -c+d \\ a+b+2d \end{bmatrix}$

$\begin{cases} a+b+2c=0 \\ -c+d=0 \\ a+b+2d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-2c \\ c=d \\ d=\frac{-a-b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-2\left(\frac{-a-b}{2}\right) \\ c=\frac{-a-b}{2} \\ d=\frac{-a-b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b+\frac{2a}{2}+\frac{2b}{2} \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \end{cases}$

$\begin{cases} a+b+2c=0 \\ d=c \\ 2d=\frac{-a-b}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a+b+2c=0 \\ -\frac{a-b}{2}=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a. \end{cases}$

22

23 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{4\times3} \xrightarrow[\substack{L_3=L_3+3L_1 \\ L_4=L_4-L_1}]{L_2=L_2-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4=L_4-2L_2]{L_3=L_3-2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4=L_4-\frac{8}{12}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$car(A)=3$ corresponde, no máximo, ao nº de colunas

i) $nul(A)=0$ base $\mathcal{N}(A)=\emptyset$

$\mathcal{N}(A)=\{(0,0,0)\}$

ii) base $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ $\{(1,0,1),(2,1,-1),(-3,2,3)\}$ ou $\{(1,0,1),(0,1,-3),(0,0,12)\}$ $\dim \mathcal{L}(A)=3$

base $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathbb{R}^4$ $\{(1,2,-3,1),(0,1,2,2),(1,-1,3,3)\}$ $\dim \mathcal{C}(A)=3$

iii) $car(A)=3$

$nul(A)=0$ $car(A)+nul(A)=3+0=3$

iv) As 4 linhas são linearmente dependentes, apenas 3 são linearmente independentes

As colunas estão contidas em $\mathbb{R}^4$ geram em $\mathbb{R}^3$

$$B=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\3&4&-1&-2\end{bmatrix}_{2\times4}\underset{L_2=L_2-3L_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&4&-7&-5\end{bmatrix}\underset{L_2=\frac{L_2}{4}}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-7/4&-5/4\end{bmatrix}$$

i) $N(B)=\{X\in\mathbb{R}^4 : BX=0\}$

$$\begin{cases}x_1=-2x_3+x_4\\x_2=\frac{7}{4}x_3+\frac{5}{4}x_4\\x_3\in\mathbb{R}\\x_4\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-2x_3+x_4,\frac{7}{4}x_3+\frac{5}{4}x_4,x_3,x_4)$
$=(-2,\frac{7}{4},1,0)x_3+(1,\frac{5}{4},0,1)x_4$
$=(-8,7,4,0)x_3+(4,5,0,4)x_4$

$N(B)=\{(-8,7,4,0),(4,5,0,4)\}$

ii) base $\mathcal{L}(A)\subseteq\mathbb{R}^4$ $\{(1,0,2,1),(3,4,-1,-2)\}$ dim $\mathcal{L}(B)=2$

base $\mathcal{C}(A)\subseteq\mathbb{R}^2$ $\{(1,3),(0,4)\}$ dim $\mathcal{C}(B)=2$

iii) car$(A)=2$
nul$(A)=2$

iv) As linhas são lineamente independentes

$$C=\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\3&1&0&-1&2\\0&2&1&1&1\end{bmatrix}_{3\times5}\underset{L_2=L_2-3L_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&-5&-9&-7&-1\\0&2&1&1&1\end{bmatrix}\underset{L_3=L_3-\frac{2}{-5}L_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&3&2&1\\0&-5&-9&-7&-1\\0&0&-13/5&-9/5&3/5\end{bmatrix}$$

i) $N(C)=\{x\in\mathbb{R}^5 : CX=0\}$

$$\begin{cases}x_1=-2x_2-3x_3-2x_4-x_5\\x_2=\frac{1}{5}(-9x_3-7x_4-x_5)\\x_3=13/5(-9x_4+3x_5)\\x_4\in\mathbb{R}\\x_5\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(2x_2-3x_3-2x_4-x_5,\frac{1}{5}(-9x_3-7x_4-x_5),\frac{13}{5}(-9x_4+3x_5),x_4,x_5)$
$=$

ii) base $\mathcal{L}(A)\subseteq\mathbb{R}^5$ $\{(1,2,3,2,1),(3,1,0,-1,2),(0,2,1,1,1)\}$ dim $=3$

base $\mathcal{C}(A)\subseteq\mathbb{R}^3$ $\{(1,3,0),(2,1,2),(3,0,1)\}$ dim $=3$

iii) car$(A)=3$
nul$(A)=2$ car$(A)+$nul$(A)=3+2=5$

iv) As linhas são lineamente independentes

$D=$

(25) $\beta = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ $\mathbb{R}^4$

$x_1 = (1,1,0,0)$ $x_2 = (1,0,0,0)$ $x_3 = (1,1,1,0)$ $x_4 = (1,1,1,1)$

a) $[a]_\beta = ?$

$(-1,2,-6,5) = \alpha_1(1,1,0,0) + \alpha_2(1,0,0,0) + \alpha_3(1,1,1,0) + \alpha_4(1,1,1,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ 2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ -6 = \alpha_3 + \alpha_4 \\ 5 = \alpha_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -3 \\ \alpha_1 = 8 \\ \alpha_3 = -11 \\ \alpha_4 = 5 \end{cases}$$

$[(-1,2,-6,5)]_B = (8,-3,-11,5)$

b) $[b]_B = ?$

$(2,1,0,0) = \alpha_1(1,1,0,0) + \alpha_2(1,0,0,0) + \alpha_3(1,1,1,0) + \alpha_4(1,1,1,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ 1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ 0 = \alpha_3 + \alpha_4 \\ 0 = \alpha_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$[(2,1,0,0)]_B = (1,1,0,0)$

c) $[c]_B = ?$

$(1,2,3,4) = \alpha_1(1,1,0,0) + \alpha_2(1,0,0,0) + \alpha_3(1,1,1,0) + \alpha_4(1,1,1,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ 2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ 3 = \alpha_3 + \alpha_4 \\ 4 = \alpha_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -1 \\ \alpha_1 = -1 \\ \alpha_3 = -1 \\ \alpha_4 = 4 \end{cases}$$

$[(1,2,3,4)]_B = (-1,-1,-1,4)$

(26) $\left.\begin{array}{l} \beta_1 = ((1,2,1),(0,2,0),(0,0,-1)) \\ \beta_2 = ((1,0,-1),(1,1,1),(2,3,-1)) \end{array}\right\rangle \mathbb{R}^3$

a) i) $X = (2,3,5)$

$[x]_{B_1} = ?$

$[x]_{B_2} = ?$

$(2,3,5) = \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(0,2,0) + \alpha_3(0,0,-1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1/2 \\ \alpha_3 = -3 \end{cases}$$

$[X]_{B_1} = (2, -1/2, -3)$

$(2,3,5) = \alpha_1(1,0,-1) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(2,3,-1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 - \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ \alpha_2 = 3 - 3\alpha_3 \\ \alpha_3 = -1/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -6/5 \\ \alpha_2 = 18/5 \\ \alpha_3 = -1/5 \end{cases}$$

$[X]_{B_2} = (-6/5, 18/5, -1/5)$

Calc. Aux

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 = L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 = L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

ii)

iii)

b) $P_{\underset{S}{B_2} \leftarrow \underset{T}{B_1}} = \left[[(1,2,1)]_{B_2} \; [(0,2,0)]_{B_2} \; [(0,0,-1)]_{B_2} \right]$

$(1,2,1) = \alpha_1(1,0,-1) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(2,3,-1)$

$(0,2,0) = \beta_1(1,0,-1) + \beta_2(1,1,1) + \beta_3(2,3,-1)$

$(0,0,-1) = \gamma_1(1,0,-1) + \gamma_2(1,1,1) + \gamma_3(2,3,-1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 = L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 = L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -10 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 = L_2 + \frac{3}{5}L_3]{L_1 = L_1 + \frac{2}{5}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/5 & -20/5 & -21/5 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 & -4 & -3/5 \\ 0 & 0 & -5 & -2/5 & -10 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 = \frac{L_3}{-5}]{L_1 = L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 & -4 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 2 & 1/5 \end{array}\right]$$

$$P_{B_2 \leftarrow B_1} = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & 1/5 \\ -4/5 & -4 & -3/5 \\ 2/5 & 2 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$[(1,2,1)]_{B_2}$ $\quad$ $[(0,2,0)]_{B_2}$ $\quad$ $[(0,0,-1)]_{B_2}$

27

$S=((1,2),(0,1))$

$J=((1,1),(2,3))$

$X=(1,5)$

a) $[X]_J=?$

$(1,5)=\alpha_1(1,1)+\alpha_2(2,3)$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&2&1\\1&3&5\end{array}\right]\xrightarrow{L_2=L_2-L_1}\left[\begin{array}{cc|c}1&2&1\\0&1&4\end{array}\right]$$

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=1\\ \alpha_2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=-7\\ \alpha_2=4\end{cases}$$

$[(1,5)]_J=(-7,4)$

b) $[Z]_J=(1,-3)$

$(x,y)=\alpha_1(1,1)+\alpha_2(2,3)$

$\Leftrightarrow (x,y)=1(1,1)+(-3)(2,3)$

$\Leftrightarrow (x,y)=(1,1)+(-6,-9)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-6\\ y=1-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\ y=-8\end{cases}$$

$Z=(-5,-8)$

c) $M_{S\leftarrow J}=\left[[(1,1)]_S\ [(2,3)]_S\right]$

$(1,1)=\alpha_1(1,2)+\alpha_2(0,1)$

$(2,3)=\alpha_1(1,2)+\alpha_2(0,1)$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&1&2\\2&1&1&3\end{array}\right]\xrightarrow{L_2=L_2-2L_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&1&2\\0&1&-1&-1\end{array}\right]$$

$$M_{S\leftarrow J}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-1\end{bmatrix}$$

d) $[X]_S=?$ usando M

$M_{S\leftarrow J}\cdot[X]_J=[X]_S$

$$\Leftrightarrow [X]_S=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7+8\\7-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

$[X]_S=(1,3)$

e) $[X]_S=?$

$(1,5)=\alpha_1(1,2)+\alpha_2(0,1)$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&0&1\\2&1&5\end{array}\right]\xrightarrow{L_2=L_2-2L_1}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&3\end{array}\right]\rightarrow\begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=3\end{cases}$$

$[X]_S=(1,3)$

f) $N_{J\leftarrow S}=\left[[(1,2)]_J\ [(0,1)]_J\right]=(M_{S\leftarrow J})^{-1}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\-1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{L_2=L_2+L_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{L_1=L_1-2L_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&-1&-2\\0&1&1&1\end{array}\right]$$

$$N_{J\leftarrow S}=\begin{bmatrix}-1&-2\\1&1\end{bmatrix}$$

g) $[X]_J$ usando N

$N_{J\leftarrow S}\cdot[X]_S=[X]_J$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-1&-2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=[X]_J$$

$$\Leftrightarrow [X]_J=\begin{bmatrix}-1-6\\1+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\4\end{bmatrix}$$

28

$S = (x_1, x_2, x_3)$ ← $x_1 = (-1, 1, 0)$ $x_2 = (1, 0, 1)$ $x_3 = (0, 0, 1)$

$T = (y_1, y_2, y_3)$.

$$P_{S \leftarrow T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow [(y_1)]_S$ $\to [(y_2)]_S$ $\to [(y_3)]_S$

A 1ª coluna da matriz representa o 1º vetor de S, ou seja, o primeiro elemento de T é igual $1(-1,1,0) + 2(1,0,1) + (-1)(0,0,1)$

$$\boxed{P_{S \leftarrow T} \cdot [X]_T = [X]_S}$$

$S = ((-1,1,0), (1,0,1), (0,0,1))$.

$y_1 = 1(-1,1,0) + 2(1,0,1) + (-1)(0,0,1) = (1, 1, 1)$

$y_2 = 1(-1,1,0) + 1(1,0,1) + (-1)(0,0,1) = (0, 1, 0)$

$y_3 = 2(-1,1,0) + 1(1,0,1) + 1(0,0,1) = (-1, 2, 2)$

$T = \{(1,1,1), (0,1,0), (-1,2,2)\}$

29

30

31 $x_1 = (\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$

$x_2 = (0, 1, 0)$

$x_3 = (-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$

· Qualquer conjunto de 3 vetores linearmente independentes é base de $\mathbb{R}^3$

· Qualquer conjunto de 3 vetores ortogonais não nulos ~~xxx~~ é linearmente independente

a) Verificar que $B = (x_1, x_2, x_3)$ é uma base o.n de $\mathbb{R}^3$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

Verificar se são ortogonais

$x_1 \cdot x_2 = (\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}) \cdot (0,1,0) = 0$

$x_1 \cdot x_3 = (\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}) \cdot (-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}) = 0$

$x_2 \cdot x_3 = (0,1,0) \cdot (-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}) = 0$

Como os 3 vetores são ortogonais, logo também são linearmente independentes, como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, então os 3 vetores formam base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

$\|x_1\| = 1$

$\|x_2\| = 1$

$\|x_3\| = 1$

Conclusão

Os vetores são normados e, portanto B é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$

b) $X=(1,1,1)$

$[X]_B = ?$

$$[X]_B = \begin{bmatrix} X.X_1 \\ X.X_2 \\ X.X_3 \end{bmatrix}$$

$$X.X_1 = \frac{4}{5} + 0 + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

$$X.X_2 = 0 + 1 + 0 = 1$$

$$X.X_3 = -\frac{3}{5} + 0 + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$[X]_B = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{7}{5}X_1 + X_2 + \frac{1}{5}X_3$$

b') Projecção de X sobre X_1, X_2, X_3

$$\text{Proj}\, X_{\langle x_1, x_2 \rangle} = (X.X_1)X_1 + (X.X_2)X_2$$

$B=(X_1, X_2)$ é base o.n. de $\langle X_1, X_2 \rangle$

$$\text{proj}\, X_{\langle x_1, x_2 \rangle} = \frac{7}{5}X_1 + X_2$$

$$= \frac{7}{5}\left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) + (0,1,0)$$

$$= \left(\frac{28}{25}, 1, \frac{21}{25}\right)$$

$X.X_1 = (2,-2,1)(1,1,0) = 0$

$X.X_2 = (2,-2,1)(0,0,1) = 1$

N

$\text{proj}\, X_B = 1(0,0,1) = (0,0,1)$