Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

Lista de Exercícios 2 – Relações de recorrência

Esta lista trata de algoritmos que resolvem relações de recorrência que permitem gerar os termos de sequências numéricas ou calcular o valor séries numéricas.

Para sequências:

$$v_1, v_1, v_2, \dots, v_n$$

$$\begin{cases} v_1 = P \\ v_i = f(v_{i-1}), \quad \forall\, i, n \in \mathbb{N} \,|\, 1 < i \leq n \end{cases}$$

```
v ⟵ P
usa( v )
i ⟵ 2
enquanto p(v,i,n) faça
    v ⟵ f(v)
    usa( v )
    i ⟵ i + 1
fim enquanto
```

Para séries:

$$v_1, v_1, v_2, \dots, v_n$$
$$s_1, s_1, s_2, \dots, s_n$$

$$\begin{cases} v_1 = P \\ s_1 = v_1 \\ v_i = f(v_{i-1}) \ , \quad \forall\, i, n \in \mathbb{N} \,|\, 1 < i \leq n \\ s_i = s_{i-1} + v_i, \quad \forall\, i, n \in \mathbb{N} \,|\, 1 < i \leq n \end{cases}$$

```
v ⟵ P
s ⟵ v
i ⟵ 2
enquanto p(v,i,n) faça
    v ⟵ f(v)
    s ⟵ s + v
    i ⟵ i + 1
fim enquanto
usa( s )
```

A função $f(v)$, que aparece tanto na relação de recorrência da sequência v quanto dentro do laço no trecho de código, é a expressão que resulta no próximo elemento da sequência.

Já na série s, que é sempre um somatório, a função que aparece na relação de recorrência e no trecho de código é a operação de soma.

E o predicado $p(v, i, n)$, que é uma expressão lógica ou condicional, pode ser:

1. uma quantidade fixa de termos, para a qual você pode utilizar um contador (por exemplo, inicializando i com o primeiro valor válido 2, pois na recorrência matemática, que corresponde ao laço computacional, $i > 1$) e testando, a cada laço, se ele é menor ou igual que o valor n;
   Exemplo: `enquanto i ≤ n faça`

2. a chegada a um valor desejado, no qual você compara o termo v a um valor conhecido;
   Exemplo: `enquanto v ≤ 570 faça`

3. para as sequências convergentes, a obtenção da tolerância aceita para o *erro de cálculo*, que é definido como a diferença entre dois termos consecutivos da sequência;
   Exemplo: `enquanto abs(v − v_anterior) > 0.0000001 faça`

4. para as séries convergentes, onde o *erro de cálculo* é a diferença entre duas somas consecutivas na série s, que é igual ao valor absoluto do termo da sequência v que é somado à série.
   Exemplo: `enquanto abs(v) > 0.0000001 faça`

Assim, qualquer algoritmo pode ser criado diretamente a partir de uma uma relação de recorrência que define uma sequência ou uma série numérica. A parte difícil fica por conta de que, às vezes, antes de criar o algoritmo, você precisa descobrir qual relação de recorrência define a sequência ou série em questão.

1. Faça um algoritmo de um procedimento que gere e escreva os primeiros n termos da sequência de Fibonacci, onde $n > 2$ é recebida como parâmetro, que é definida por recorrência por

$$\begin{cases} F(1) = 1 \\ F(2) = 1 \\ F(n) = F(n-2) + F(n-1), \end{cases}$$

2. A tarefa de cálculo de fatoriais: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n, \quad \forall\, n > 0$, pode ser realizada encontrando-se o último termo da sequência dada pela relação de recorrência abaixo:

$$\begin{cases} f(i) = i \times f(i-1), \quad \forall\, i \in \mathbb{N}^+ \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

   Faça o algoritmo de uma função que receba um inteiro n como parâmetro e calcule iterativamente o fatorial de n, retornando tal valor.

3. O cálculo da função inverso $\frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} a_n$ pode ser aproximado pela descoberta do último termo da sequência dada pela seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} a_i = a_{i-1} \cdot (1 + c_{i-1}) & \\ a_o = 1 & \forall\, i \in \mathbb{N}^+ \\ c_i = c_{i-1}^2 & \forall\, x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \\ c_0 = 1 - x & \end{cases}$$

   Assim, assumindo uma tolerância de 10^{-9} para o erro encontrado, faça um algoritmo de uma função que receba o valor x como parâmetro e retorne o valor de seu inverso.

4. Faça um algoritmo de uma função que retorne uma aproximação para o cálculo de raízes quadradas

$$\sqrt{A} = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad \forall A \geq 0$$

   onde tal função pode ser aproximada pela descoberta do último termo da sequência dada pela seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{A}{x_n}\right) & \forall\, n \in \mathbb{N} \\ x_0 = 1 & \end{cases}$$

   Assuma a tolerância de 10^{-6} para o erro. O valor de A é o parâmetro da função.

5. Dada a equação $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$, pode-se encontrar qualquer uma de suas raízes reais através de aproximações sucessivas utilizando a seguinte fórmula:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{X_n^3 - eX_n^2 + 1}{3X_n^2 - 6X_n}$$

   Fazer um algoritmo de um procedimento que considere como primeira aproximação $X = 1,5$ e escreva o resultado do cálculo da trigésima aproximação da raiz.

Para os exercícios a seguir, que envolvem cálculos de séries, escreva antes no papel, obrigatoriamente, a relação de recorrência que as definem.

6. Considere a progressão geométrica (PG) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ e um inteiro positivo n. Deseja-se:

    (a) Encontrar a relação de recorrência que a define.

    (b) Fazer o algoritmo de um procedimento que receba n como parâmetro e imprima os n primeiros termos desta sequência.

    (c) Fazer o algoritmo de uma função para retornar a soma dos n primeiros termos da PG, onde n é o parâmetro da função, **sem utilizar a conhecida "fórmula da soma de PGs"**, usando a relação de recorrência do item (a).

7. Faça um algoritmo de um procedimento que escreva o resultado do somatório

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

para uma tolerância menor que um valor K, passado como parâmetro.

8. Desenvolver um algoritmo de um procedimento para escrever o resultado da soma

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \cdots + \frac{1}{200}$$

9. Fazer um algoritmo de um procedimento que calcule e escreva a seguinte soma

$$\frac{2^1}{50} + \frac{2^2}{49} + \frac{2^3}{48} + \cdots + \frac{2^{50}}{1}$$

10. Escrever um algoritmo de uma função para estimar, com uma tolerância de 10^{-35} para o erro, o seno de um ângulo, em radianos, passado como parâmetro. A estimativa deve utilizar a série de Mac-Laurin:

$$\sin(A) = A - \frac{A^3}{6} + \frac{A^5}{120} - \frac{A^7}{5040} + \ldots$$

11. Fazer um algoritmo de uma função que retorne o valor do número π, com precisão de 0,0001, usando a série

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \cdots$$

12. Fazer um algoritmo de um procedimento que calcule e escreva o valor da soma:

$$\frac{1}{225} - \frac{2}{196} + \frac{4}{169} - \frac{8}{144} + \cdots + \frac{16384}{1}$$

13. Fazer um algoritmo de uma função que receba x e que retorne o valor de e^x, com precisão de 10^{-5}, através da série

$$e^x = x^0 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

14. Fazer um algoritmo de uma função que receba um valor x e retorne o valor de uma aproximação de $\cos(x)$ usando 20 termos da série

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$