Lab8

November 10, 2017

1 Lab de Circuitos - Preparatório 8

1.1 Rafael Rubim Cabral - 1511068

1.1.1 1)

1.1.2 a)

O polinômio característico do circuito RLC é:

$p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{R}{L}.\lambda + \frac{1}{L.C}$

Portanto as raízes(pólos) são:

$\lambda_1 = -\frac{R}{2.L} + \frac{1}{2}.\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{L.C}}$

$\lambda_2 = -\frac{R}{2.L} - \frac{1}{2}.\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{L.C}}$

Logo a solução homogênea depende dos valores R, L e C:

$S_H(t) =$

- Caso superamortecido

$k_1.e^{\lambda_1.t} + k_2.e^{\lambda_2.t}$, se $\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{L.C} > 0$

- Caso criticamente amortecido

$k_1.e^{\lambda.t} + k_2.t.e^{\lambda.t}$, se $\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{L.C} = 0$

- Caso subamortecido

$k_1.cos(\beta.t).e^{\alpha.t} + k_2.sin(\beta.t).e^{\alpha.t}$, se $\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{L.C} < 0$ e $\lambda_1 = \alpha + j.\beta$

Assumindo que o circuito atinge o regime permanente em um semiperíodo da onda, sabe-se que quando a tensão vai de A a 0 pode-se aplicar a solução homogênea para calcular cada tensão no circuito. Vamos deslocar a onda para que isso ocorra em $t = 0$ para usarmos a solução homogênea como está e facilitar as contas. As tensões nos elementos quando a tensão da fonte é A no regime permanente são:

$V_R = 0$, pois o capacitor é como um aberto e não há corrente no circuito

$V_L = 0$, pois o indutor é como um curto
$V_C = A$, pelo KVL na malha única

Imediatamente após a onda entrar em seu primeiro semiperíodo (quando a tensão vai de A a 0, em $t = 0$), as condições iniciais das tensões nos elementos serão:

$V_R = 0$, pois a corrente no indutor é contínua e continua valendo 0
$V_C = A$, pois a tensão no capacitor é contínua
$V_L = -A$, pelo KVL na malha única
$\frac{d.V_C}{dt} = 0$, pois $i = C.\frac{d.V_C}{dt}$ e a corrente vale 0
$\frac{d.i}{dt} = -\frac{A}{L}$, pois $V_L = L.\frac{d.i_L}{dt}$ e a tensão no indutor vale $-A$
$\frac{d.V_R}{dt} = -\frac{R.A}{L}$, pois $\frac{d.V_R}{dt} = R.\frac{d.i}{dt}$ e a derivada da corrente vale $-\frac{A}{L}$
$\frac{d.V_L}{dt} = \frac{R.A}{L}$, pela derivada da KVL na malha única

Substituindo as condições iniciais nas equações homogêneas de cada caso para cada elemento, obtém-se o valor das constantes k_1 e k_2 que determinam a expressão da tensão naquele elemento para $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$. Em $t = \frac{T}{2}$ a tensão da fonte faz o contrário, mudando de 0 a A. Esse caso exige uma solução particular $S_P(t)$ (onde as condições iniciais são nulas e há fontes atuantes a partir de $t = t_0$), mas essa solução será o inverso (negativo) da homogênea, pois a onda atinge o regime permanente a cada semiperíodo. Também é deslocada no tempo de maneira a começar em $t = \frac{T}{2}$ e tem novas condições iniciais que só farão diferença no caso do capacitor, que deve somar uma constante de modo que $S_P\left(\frac{T}{2}\right) = 0$ (pois no caso da solução particular o capacitor começa descarregado, ao invés de começar com tensão A como na homogênea. Nos casos do indutor e resistor a condição inicial é o negativo do caso homogêneo).

Assim teremos (as seguintes respostas só são válidas em um período ($0 \leq t \leq T$), mas se repetem para outros períodos da onda quadrada):

$S(t) = S_H(t) + S_P(t)$

1.1.3 Caso superamortecido:

- Capacitor:

$V_C(t) = k_1.e^{\lambda_1.t} + k_2.e^{\lambda_2.t} + (k_1 + k_2) - k_1.e^{\lambda_1.(t-\frac{T}{2})} - k_2.e^{\lambda_2.(t-\frac{T}{2})}$
Tal que k_1 e k_2 são resultados do sistema:
$k_1 + k_2 = A$
$\lambda_1.k_1 + \lambda_2.k_2 = 0$

- Indutor:

$V_L(t) = k_1.e^{\lambda_1.t} + k_2.e^{\lambda_2.t} - k_1.e^{\lambda_1.(t-\frac{T}{2})} - k_2.e^{\lambda_2.(t-\frac{T}{2})}$
Tal que k_1 e k_2 são resultados do sistema:
$k_1 + k_2 = -A$
$\lambda_1.k_1 + \lambda_2.k_2 = \frac{R.A}{L}$

- Resistor:

$V_R(t) = k_1.e^{\lambda_1.t} + k_2.e^{\lambda_2.t} - k_1.e^{\lambda_1.(t-\frac{T}{2})} - k_2.e^{\lambda_2.(t-\frac{T}{2})}$
Tal que k_1 e k_2 são resultados do sistema:
$k_1 + k_2 = 0$
$\lambda_1.k_1 + \lambda_2.k_2 = -\dfrac{R.A}{L}$

1.1.4 Caso criticamente amortecido:

- Capacitor:

$V_C(t) = k_1.e^{\lambda.t} + k_2.t.e^{\lambda.t} + k_1 - k_1.e^{\lambda.(t-\frac{T}{2})} - k_2.(t - \frac{T}{2}).e^{\lambda.(t-\frac{T}{2})}$
Tal que k_1 e k_2 são resultados do sistema:
$k_1 = A$
$\lambda_1.k_1 + k_2 = 0$

- Indutor:

$V_L(t) = k_1.e^{\lambda.t} + k_2.t.e^{\lambda.t} - k_1.e^{\lambda.(t-\frac{T}{2})} - k_2.(t - \frac{T}{2}).e^{\lambda.(t-\frac{T}{2})}$
Tal que k_1 e k_2 são resultados do sistema:
$k_1 = -A$
$\lambda_1.k_1 + k_2 = \dfrac{R.A}{L}$

- Resistor:

$V_R(t) = k_1.e^{\lambda.t} + k_2.t.e^{\lambda.t} - k_1.e^{\lambda.(t-\frac{T}{2})} - k_2.(t - \frac{T}{2}).e^{\lambda.(t-\frac{T}{2})}$
Tal que k_1 e k_2 são resultados do sistema:
$k_1 = 0$
$\lambda_1.k_1 + k_2 = -\dfrac{R.A}{L}$

1.1.5 Caso subamortecido:

- Capacitor:

$V_C(t) = k_1.cos(\beta.t).e^{\alpha.t} + k_2.sin(\beta.t).e^{\alpha.t} + k_1 - k_1.cos(\beta.(t - \frac{T}{2})).e^{\alpha.(t-\frac{T}{2})} - k_2.sin(\beta.(t - \frac{T}{2})).e^{\alpha.(t-\frac{T}{2})}$
Tal que k_1 e k_2 são resultados do sistema:
$k_1 = A$
$\alpha.k_1 + \beta.k_2 = 0$

- Indutor:

$V_L(t) = k_1.cos(\beta.t).e^{\alpha.t} + k_2.sin(\beta.t).e^{\alpha.t} - k_1.cos(\beta.(t - \frac{T}{2})).e^{\alpha.(t-\frac{T}{2})} - k_2.sin(\beta.(t - \frac{T}{2})).e^{\alpha.(t-\frac{T}{2})}$
Tal que k_1 e k_2 são resultados do sistema:
$k_1 = -A$
$\alpha.k_1 + \beta.k_2 = \dfrac{R.A}{L}$

- Resistor:

$V_R(t) = k_1.cos(\beta.t).e^{\alpha.t} + k_2.sin(\beta.t).e^{\alpha.t} - k_1.cos(\beta.(t - \frac{T}{2})).e^{\alpha.(t-\frac{T}{2})} - k_2.sin(\beta.(t - \frac{T}{2})).e^{\alpha.(t-\frac{T}{2})}$
Tal que k_1 e k_2 são resultados do sistema:
$k_1 = 0$
$\alpha.k_1 + \beta.k_2 = -\dfrac{R.A}{L}$

1.1.6 b)

O circuito de segunda ordem poderá ter até duas constantes de tempo.

No caso superamortecido, tem-se $\tau_1 = \dfrac{1}{|\lambda_1|}$ e $\tau_2 = \dfrac{1}{|\lambda_2|}$. O tempo de assentamento deve ser calculado através da maior delas, que é obtida pelo pólo/raiz dominante (menor pólo/raiz em módulo). Como $min(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1$ (trivialmente pelo valor de λ_1 e λ_2 dados na letra (a)), então a maior constante de tempo é τ_1.

No caso criticamente amortecido, só temos uma raiz, então temos a constante de tempo é $\tau = \dfrac{1}{|\lambda|}$.

No caso subamortecido, podemos ignorar os senos e cossenos que oscilam e considerar apenas a exponencial que diminui o efeito da resposta transitória para encontrar o tempo de assentamento. Considera-se a constante de tempo nesse caso então $\tau = \dfrac{1}{|\alpha|}$.

Conclui-se que o tempo $\dfrac{T_{min}}{2}$ (meia onda) é para cada caso:

- Caso superamortecido:

$$\frac{T_{min}}{2} = 5.\tau_1 = \frac{5}{|\lambda_1|}$$

- Caso criticamente amortecido:

$$\frac{T_{min}}{2} = 5.\tau = \frac{5}{|\lambda|}$$

- Caso subamortecido:

$$\frac{T_{min}}{2} = 5.\tau = \frac{5}{|\alpha|}$$

1.1.7 2)

Seguem os resultados para cada um dos casos:

- Simulação 1

$R = 300\Omega$
$L = 1mH$
$C = 0.05\mu F$

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2.L} + \frac{1}{2}.\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{L.C}}$$
$$\lambda_1 = -\frac{3}{2}.10^5 + \frac{1}{2}.\sqrt{9.10^{10} - 8.10^{10}} = -1.10^5$$
$$\lambda_2 = -\frac{R}{2.L} - \frac{1}{2}.\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{L.C}}$$
$$\lambda_2 = -\frac{3}{2}.10^5 - \frac{1}{2}.\sqrt{9.10^{10} - 8.10^{10}} = -2.10^5$$
$$T_{min} = 10.10^{-5}s = 0,1ms$$
$$w_{fonte} = \frac{2.\pi}{0,1.10^{-3}} = 62,832kHz$$

A licença do circuitlab da PUC expirou e não pude simular o circuito.