Lab7

October 27, 2017

1 Lab de Circuitos - Preparatório 7

1.1 Rafael Rubim Cabral - 1511068

1.1.1 1)

1.1.2 a)

O pedaço do circuito conectado ao terminal inversor do AmpOp está "isolado" do resto do circuito, pois não há corrente nesse terminal. Em $t = 0^-$, no regime permanente, o capacitor é como um aberto portanto a tensão no terminal inversor é o divisor de tensões com V_{in}, R_1 e R_2. Após o desligamento de V_{in}, o capacitor descarrega através das resistências em paralelo R_1 e R_2. A todo momento, a tensão no terminal inversor é a d.d.p V_c no capacitor. O AmpOp é um comparador que acende um LED quando $V_{ref} > V_c$. Supondo que inicialmente ($t = 0^-$) $V_c > V_{ref}$, o LED estará apagado até o capacitor ter descarregado o suficente de maneira que $V_c < V_{ref}$.

1.1.3 b)

Como comentado acima, V_{ref} é a tensão que se deseja usar como referência para acender o LED. O capacitor descarrega durante um tempo, portanto quanto menor V_{ref}, mais tempo o LED demorará a acender após $t = 0$.

1.1.4 c)

O AmpOp sempre saturará em 0 ou $V+$. No segundo caso, deseja-se que o LED acenda, então a resistência deve ser pequena o suficente para que permita passar corrente que o acenda e grande o suficente para que uma correnter alta não o queime. Considerando um modelo de queda de tensão constante no LED, a resistência deve ser compatível com o valor de $V+$ e a queda de tensão do LED utilizado. Suponho que a escolha de $R = 100\Omega$ seja compatível com ambos os valores pretendidos nesse circuito.

1.1.5 d)

Como descrito na (a), a tensão começa com o valor do divisor de tensões e vai caindo conforme o capacitor descarrega, até chegar a (ou próximo a) 0, numa exponencial (pois é um circuito de primeira ordem).

1.1.6 e)

Sim. Ao invés de colocar o capacitor em paralelo com R_2 do ponto de vista da fonte, pode-se colocar um indutor em série com R_1 e R_2, entre R_1 e a fonte. Assim, no regime permantente, como o indutor é como um curto, a tensão inicial no terminal inversor ainda é o divisor de tensões com V_{in}, R_1 e R_2. Após o desligamento da fonte, como a corrente é contínua no indutor, ela continua existente e cai em exponencial (circuito de primeira ordem) até deixar de existir (ou ficar próxima a zero). Nesse meio tempo, o indutor é o único elemento que fornece energia ao circuito. Como a corrente não se altera de $t = 0^-$ a $t = 0^+$, as resistências continuam dissipando como antes em 0^+. Portanto, em $t = 0^+$ a tensão fornecida pelo indutor é igual a V_{in} e então a tensão no terminal inversor do AmpOp também é o divisor de tensões. Conforme a corrente cai exponencialmente, essa tensão também cai até ficar menor que V_{ref} e, eventualmente, ficar próxima a zero.

1.1.7 f)

Após o desligamento da fonte, deseja-se estudar a resposta transitória do sistema. Como não há mais fontes, deseja-se encontrar a solução da equação diferencial homogênea. Vamos usar o polinômio característico do sistema. Pelo método das impedâncias, temos (i_{in} é a corrente na fonte V_{in}):

$$\frac{V_{in}(s)}{I_{in}(s)} = Z_{in}(s) = R_1 + (\frac{1}{s.C}||R_2) = R_1 + \frac{R_2}{1 + R_2.s.C} = \frac{R_1 + R_2 + R_1.R_2.s.C}{1 + R_2.s.C}$$

O polinômio característico é o denominador da função de tranferência de qualquer saída do circuito. No caso, $H_{I_{in}}(s) = \frac{I_{in}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{Z_{in}(s)}$, logo o polinômio característico é:

$$P(\lambda) = \lambda + \frac{R_1 + R_2}{R_1.R_2.C}$$

Igualando a equação a zero, obtemos uma única raíz que determina o formato da solução da equação diferencial. A saída que procuramos é a tensão no capacitor:

1.1.8 $v_c(t) = k_1.e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1.R_2.C}.t}$; $t \geq 0$

O único detalhe que falta é encontrar o valor de k_1, que é o valor de v_c no instante $t = 0^+$. Como já dito anteriormente, isso corresponde ao divisor de tensões:

$$k_1 = v_c(0^+) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.V_{in}$$

Por fim, encontrou-se a resposta transitória de v_c do sistema. Sabemos que o LED apagará em t_0 tal que $v_c(t_0) = V_{ref}$ portanto segue o cálculo de t_0:

$$V_{ref} = V_{in}.\frac{R_2}{R_1 + R_2}.e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1.R_2.C}.t}$$

$$e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1.R_2.C}.t} = \frac{V_{ref}}{V_{in}}.\frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

$$-\frac{R_1 + R_2}{R_1.R_2.C}.t = \ln(\frac{V_{ref}}{V_{in}}.\frac{R_1 + R_2}{R_2})$$

$$t = -\ln(\frac{V_{ref}}{V_{in}}.\frac{R_1 + R_2}{R_2}).\frac{R_1.R_2.C}{R_1 + R_2}$$

Note que t é positivo pois R_1, R_2, V_{in}, V_{ref} e C são positivos e $\ln(\frac{V_{ref}}{V_{in}}.\frac{R_1+R_2}{R_2})$ é sempre negativo pois por hipótese o LED inicia desligado:

$\frac{R_2}{R_1+R_2}.V_{in} = v_c(0^+) > V_{ref}$

1.1.9 2)

Deseja-se saber agora a solução particular do circuito, considerando-se as condições iniciais nulas. Supondo que a onda já foi aplicada a muito tempo, a solução homogênea já calculada não será considerada. O que desejamos é a saída $v_c(t)$, portanto precisaremos da função de transferência $H_c(s) = \frac{V_c(s)}{V_{in}(s)}$. Podemos usar o método das impedâncias no divisor de tensões com $V_{in}(s)$, R_1 e $(R2||\frac{1}{sC})$:

Já se sabe que:

$\frac{1}{s.C}||R_2 = \frac{R_2}{1+R_2.s.C}$

$R_1 + (\frac{1}{s.C}||R_2) = R_1 + \frac{R_2}{1+R_2.s.C} = \frac{R_1+R_2+R_1.R_2.s.C}{1+R_2.s.C}$

Portanto o divisor de tensões é:

$V_c(s) = V_{in}(s).\frac{\frac{1}{s.C}||R_2}{R_1+(\frac{1}{s.C}||R_2)} = \frac{R_2}{R_1+R_2+R_1.R_2.s.C}$

Logo a função de transferência vale:

$H_c(s) = \frac{V_c(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{1}{R_1.C}}{s+\frac{R_1+R_2}{R_1.R_2.C}}$

Agora precisamos calcular $V_{in}(s)$. Sabemos que $v_{in}(t)$ é a onda quadrada de período T e amplitude A. Vamos considerar só

$$v_{in}(t) = \sum_k [A.u_{-1}(t-k.T) - 2.A.u_{-1}(t-\tfrac{T}{2}-k.T) + A.u_{-1}(t-T-k.T)]; t \geq 0$$

Aplicando Laplace a ambos os lados da equação obtém-se:

1.2

$$V_{in}(s) = \sum_k [\frac{A}{s}.e^{-s.k.T} - \frac{2.A}{s}.e^{-s.(\frac{T}{2}+k.T)} + \frac{A}{s}.e^{-s.(T+k.T)}]$$

Como o cálculo da inversa de Laplace da série infinita seria muito difícil, e mesmo se fosse calculada, como a saída dependeria de exponenciais infinitas, tornando o cálculo de t_{ON} inviável (t_{ON} seria influenciado por diversas exponenciais), estou supondo que o enunciado da questão está mal explicado.

O cálculo também não pode ser realizado sobre um único período da onda. Isso pois inicialmente a cada carregamento/descarregamento do capacitor, as condições iniciais dele podem mudar. Por exemplo: no início, como $V_{in} = 0$ antes de $t = 0$, o capacitor poderia carregar por completo dentro do tempo $0 \geq t \geq \frac{T}{2}$ quando V_{in} fica igual a A. Mas após um período, quando

V_{in} muda de $-A$ para A, a tensão inicial no capacitor antes dele começar a carregar novamente poderia ser negativa tal que o intervalo de um semiperíodo não seja o sufiente para ele se carregar por completo como ocorreu no primeiro período. A conclusão é que o t_{ON} não tem valor fixo. Após muito tempo influenciado pela onda, pode ser que o sistema comece a se comportar de maneira repetida e t_{ON} tenha valor fixo, mas nada no curso nos foi ensinado que permita calcular isso.

1.2.1 3)

Vamos escolher $R_1 = R_2 = 100\Omega$, $V_{in} = 10V$, $V_{ref} = 1V$ e escolher C de maneira que o temporizador leve exatemente $1s$ para acender o LED:

$$t = -\ln(\frac{V_{ref}}{V_{in}}.\frac{R_1 + R_2}{R_2}).\frac{R_1.R_2.C}{R_1 + R_2}$$

$$1 = -\ln(\frac{1}{10}.\frac{200}{100}).\frac{10000.C}{200}$$

$$C = 0.01242669869F = 12.427mF$$

Imagens do circuito e gráfico no final do documento. Note que as chaves desenhadas abrem em $t = 1s$ e a corrente no LED começa em $t = 2s$, efetivamente acendendo-o $1s$ após o desligamento da fonte, como o esperado.