Lab10

November 23, 2017

1 Lab de Circuitos - Preparatório 9

1.1 Rafael Rubim Cabral - 1511068

1.1.1 1)

1.1.2 a)

Pelo divisor de tensões:

$$V_C(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} V(s)$$
$$\tau = RC$$
$$H_C(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}$$

1.1.3 b)

$$H_C(j\omega) = \frac{1/\tau}{j\omega + 1/\tau}$$
$$|H_C(j\omega)| = \frac{1/\tau}{\sqrt{(1/\tau)^2 + \omega^2}}$$
$$\phi H_C(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

1.1.4 c)

$$|H_C(j\omega)||_{\omega=0} = 1$$
$$|H_C(j\omega)||_{\omega\to\infty} = 0$$

O filtro realizado é passa-baixas. O cut-off será $\frac{1}{\sqrt{2}}$ do ganho máximo (1). Logo:

$$|H_C(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{1/\tau}{\sqrt{(1/\tau)^2 + \omega_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{\tau} = \sqrt{(1/\tau)^2 + \omega_c^2}$$
$$2 = (\tau/\tau)^2 + \omega_c^2\tau^2$$
$$\omega_c = \frac{1}{\tau}, (\tau > 0, \omega_c > 0)$$

1.1.5 d)

Pelo divisor de tensões:

$V_R(s) = \dfrac{R}{R + \dfrac{1}{sC}} V(s)$

$\tau = RC$

$H_R(s) = \dfrac{V_C(s)}{V(s)} = \dfrac{s}{s + 1/\tau}$

1.1.6 e)

$H_R(j\omega) = \dfrac{j\omega}{j\omega + 1/\tau}$

$|H_R(j\omega)| = \dfrac{\omega}{\sqrt{(1/\tau)^2 + \omega^2}}$

$\phi H_R(j\omega) = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega\tau)$

1.1.7 f)

$|H_R(j\omega)||_{\omega=0} = 0$

$|H_R(j\omega)||_{\omega\to\infty} = 1$

O filtro realizado é passa-altas. O cut-off será $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ do ganho máximo (1). Logo:

$|H_R(j\omega_c)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{\omega_c}{\sqrt{(1/\tau)^2 + \omega_c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\omega_c\sqrt{2} = \sqrt{(1/\tau)^2 + \omega_c^2}$

$\omega_c = \dfrac{1}{\tau}, (\tau > 0, \omega_c > 0)$

1.1.8 2)

Imagens da simulação no final do documento.

$R = 100\Omega$

$C = 1\mu F$

$\tau = RC = 10^{-4}s$

$\omega_c = \dfrac{1}{\tau} = 10^4 rad/s$

Escolhendo as frequências angulares $\omega_1 = 2\pi 10^3 < \omega_c$ e $\omega_2 = 4\pi 10^4 > \omega_c$, tem-se as respectivas frequências $f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = 1kHz$ e $f_2 = \dfrac{\omega_2}{2\pi} = 20kHz$. ω_1 é apenas um pouco abaixo da frequência de corte para que Vc(t) e $V_{\omega_1}(t)$ sejam suficientemente diferentes (com ω_1 muito baixo, $|H_C(j\omega)| \approx 1$, o que torna distinções difíceis de se enxergar no gráfico).

Montou-se duas fontes senoidais em série:

V_1, de frequência f_1 e amplitude $1V$

V_2, de frequência f_2 e amplitude $0.1V$

Como estão em série, a sobreposição de fontes gera uma saída que parece a onda de menor frquência f_1 com um ruído. Como o filtro no capacitor é passa-baixas o resultado será a remoção do ruído (maior frequência) e como o filtro no resistor é passa-altas, o "ruído" se manterá enquanto a onda de menor frequência será bem mais reduzida (como a frequência é próxima do cut-off, não será anulada).

1.1.9 3)

1.1.10 a)

Considerando $Y(s) = R//\frac{1}{sC}$ então pelo divisor de tensões:

$$V_C(s) = \frac{Y(s)}{Y(s) + sL}V(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{\frac{1}{R} + sC}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{C}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Logo:

$$H_C(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1}{C}}{\frac{1}{C} + sL(s + \frac{1}{RC})}$$

$$H_C(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

Vamos considerar o caso subamortecido (ou criticamente amortecido), mais comum:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\xi = \frac{\sqrt{LC}}{2RC}$$

$$H_C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

1.1.11 b)

$$H_C(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2}$$

$$|H_C(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}}$$

$$\phi H_C(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

1.1.12 c)

$$|H_C(j\omega)|_{\omega=0} = 1$$

$$|H_C(j\omega)|_{\omega\to\infty} = 0$$

O filtro realizado é passa-baixas. O cut-off será $\frac{1}{\sqrt{2}}$ do ganho máximo (1). Logo:

$|H_C(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega_c^2)^2+(2\xi\omega_n\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$2\omega_n^4 = (\omega_n^2-\omega_c^2)^2+(2\xi\omega_n\omega_c)^2$
$2\omega_n^4 = \omega_n^4+\omega_c^4-2\omega_n^2\omega_c^2+4\xi^2\omega_n^2\omega_c^2$
$\omega_c^4+(4\xi^2-2)\omega_n^2\omega_c^2-\omega_n^4 = 0$
Considere $y = \omega_c^2$. Logo:
$y^2+(4\xi^2-2)\omega_n^2 y-\omega_n^4 = 0$
$\Delta = (4\xi^2-2)^2\omega_n^4+4\omega_n^4$
$\Delta = (16\xi^4-16\xi^2+8)\omega_n^4$
$y = \frac{2-4\xi^2\omega_n^2 \pm \sqrt{(16\xi^4-16\xi^2+8)\omega_n^4}}{2}$
$y = \left[2-4\xi^2 \pm \sqrt{\xi^4-\xi^2+1/2}\right]2\omega_n^2$
$y_1 = \left[2-4\xi^2 + \sqrt{\xi^4-\xi^2+1/2}\right]2\omega_n^2$
$y_2 = \left[2-4\xi^2 - \sqrt{\xi^4-\xi^2+1/2}\right]2\omega_n^2$
Note que $y_1y_2 = -\omega_n^4$ (negativo). Logo y_1 e y_2 não podem ser complexos conjugados (pois o produto seria real positivo). Então y_1 e y_2 são reais com um deles negativo (para que o produto seja negativo). Logo y_1 é sempre real positivo e y_2 é sempre real negativo. Temos $\omega_c^2 = y$, logo a solução y_2 pode ser descartada, já que ω_c é real. Ficamos com $\omega_c^2 = y_1$:
$\omega_c = \pm\sqrt{\left[2-4\xi^2 + \sqrt{\xi^4-\xi^2+1/2}\right]2\omega_n^2}$
Considerando apenas frequências positivas, a frequência de corte será:
$\omega_c = \sqrt{\left[2-4\xi^2 + \sqrt{\xi^4-\xi^2+1/2}\right]2\omega_n^2}$

1.1.13 4)

Imagens da simulação no final do documento.
$R = 100\omega$
$L = 1\mu H$
$C = 1\mu F$
Garantindo que estamos no caso subamortecido, pelo polinômio característico:
$p(\lambda) = \lambda^2+\frac{\lambda}{RC}+\frac{1}{LC}$
$\Delta = \frac{1}{(RC)^2}-\frac{4}{LC} = 10^8-4.10^{12} < 0 \rightarrow \text{OK!}$
$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6$
$\xi = \frac{\sqrt{LC}}{2RC} = 5.10^{-3}$
$\omega_c = \sqrt{\left[2-4\xi^2 + \sqrt{\xi^4-\xi^2+1/2}\right]2\omega_n^2}$
$\omega_c = \sqrt{\left[2-10^{-4} + \sqrt{625.10^{-12}-25.10^{-6}+1/2}\right]2.10^{12}}$

$\omega_c \approx \sqrt{\left[2 - 10^{-4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] 2.10^{12}}$
$\omega_c \approx \sqrt{(4+\sqrt{2})10^{12}}$
$\omega_c \approx 2,3268.10^{6} rad/s$

Escolhendo as frequências angulares $\omega_1 = 4\pi 10^5 < \omega_c$ e $\omega_2 = 6\pi 10^6 > \omega_c$, tem-se as respectivas frequências $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 200kHz$ e $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 3MHz$. ω_1 é apenas um pouco abaixo da frequência de corte para que Vc(t) e $V_{\omega_1}(t)$ sejam suficientemente diferentes (com ω_1 muito baixo, $|H_C(j\omega)| \approx 1$, o que torna distinções difíceis de se enxergar no gráfico).

Montou-se duas fontes senoidais em série:

V_1, de frequência f_1 e amplitude $1V$

V_2, de frequência f_2 e amplitude $0.1V$

Como estão em série, a sobreposição de fontes gera uma saída que parece a onda de menor frquência f_1 com um ruído. Como o filtro no capacitor é passa-baixas o resultado será a remoção do ruído (maior frequência). O resultado da onda resultante, de menor frequência, é diferente do resultado obtido na questão (2) pois devido ao fato do circuito ser de segunda ordem e estar sub-amortecido com os parâmetros passados, ocorre o fenômeno de ressonância e em determinados momentos há ganho de tensão pois a função de transferência é maior que 1 (pois ξ é menor que 1).