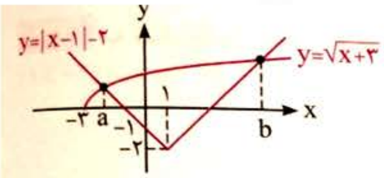
تست- در بازهٔ (a,b)، نمودار تابع $y=\sqrt{x+۳}$ در بالای نمودار تابع $f(x)=|x-۱|-۲$ قرار دارد. بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹



پاسخ: نمودارهای دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

تابع $y=\sqrt{x+۳}$ در بازهٔ (a,b)، بالاتر از تابع $f(x)=|x-۱|-۲$ قرار می‌گیرد. برای این‌که نقاط a و b را تعیین کنیم، معادلهٔ حاصل از تساوی دو تابع را حل می‌کنیم:

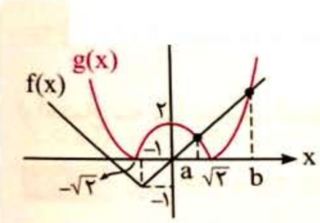
$$\sqrt{x+۳}=|x-۱|-۲$$

$$\begin{cases} x\le ۱: \sqrt{x+۳}=-x-۱ \xrightarrow[x\le -۱]{\text{به توان ۲}} x+۳=x^۲+۲x+۱ \Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow (x-۱)(x+۲)=۰ \xrightarrow{x\le -۱} x=-۲ \Rightarrow a=-۲ \\ x>۱: \sqrt{x+۳}=x-۳ \xrightarrow[x\ge ۳]{\text{به توان ۲}} x+۳=x^۲-۶x+۹ \Rightarrow x^۲-۷x+۶=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۶)=۰ \xrightarrow{x\ge ۳} x=۶ \Rightarrow b=۶ \end{cases}$$

پس در بازهٔ $(-۲,۶)$، نمودار $y=\sqrt{x+۳}$ بالاتر از نمودار $f(x)=|x-۱|-۲$ قرار می‌گیرد، در نتیجه $b-a=۸$.

تست- اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x^۲-۲|<|x+۱|-۱$ بازهٔ (a,b) باشد، طول وسط این بازه، کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲



پاسخ: ابتدا هر یک از توابع $f(x)=|x+۱|-۱$ و $g(x)=|x^۲-۲|$ را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل، زمانی $|x^۲-۲|<|x+۱|-۱$ برقرار است که $a<x<b$ باشد. برای تعیین a و b کافی است معادلهٔ $f=g$ را حل کنیم. (چون $x>-۱$ است، پس $f(x)=|x+۱|-۱=x+۱-۱=x$ می‌باشد.)

$$g=f \Rightarrow |x^۲-۲|=x \xrightarrow{x>۰} x^۲-۲=\pm x \Rightarrow \begin{cases} x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow x=-۱ \text{ یا } x=۲ \xrightarrow{x>۰} x=۲ \\ x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow x=۱ \text{ یا } x=-۲ \xrightarrow{x>۰} x=۱ \end{cases} \Rightarrow a=۱, b=۲ \Rightarrow \frac{a+b}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

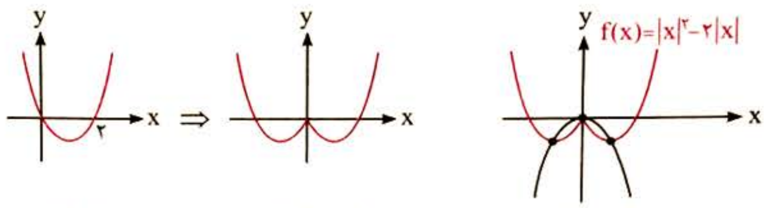
تست- معادلهٔ $x^۴+x^۲-۲|x|=۰$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: به کمک روش هندسی، تعداد ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$x^۲-۲|x|=-x^۴ \xrightarrow{|x|^۲=x^۲} |x|^۲-۲|x|=-x^۴$$

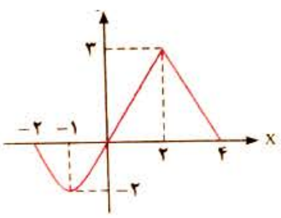
نمودارهای $g(x)=-x^۴$ و $f(x)=|x|^۲-۲|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



$y=x^۲-۲x$ $y=|x|^۲-۲|x|$ $g(x)=-x^۴$

با توجه به نمودار دو تابع، معادله، سه ریشه دارد.

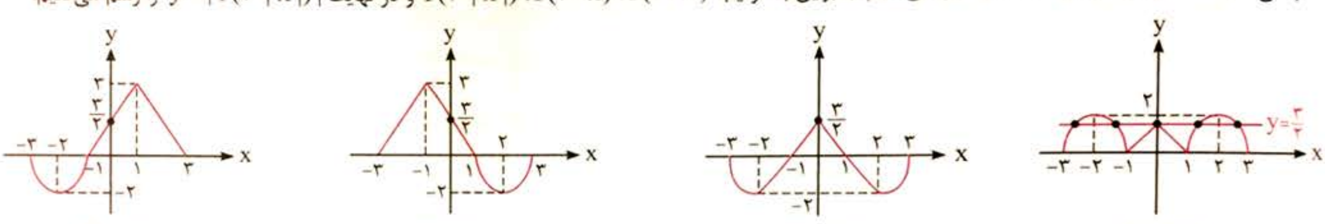
تست- اگر نمودار $y=f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، معادلهٔ $\left|f(۱-|x|)\right|=\frac{۳}{۲}$ چند جواب دارد؟



۱) ۶ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: به کمک رسم نمودار، معادله را حل می‌کنیم. بنابراین به ترتیب $f(۱+x)$، $f(۱-x)$، $f(۱-|x|)$ و در نهایت $y=|f(۱-|x|)|$ را رسم می‌کنیم.



$f(۱+x)$ $f(۱-x)$ $f(۱-|x|)$ $|f(۱-|x|)|$

با توجه به نمودار، خط $y=\frac{۳}{۲}$ منحنی را در ۵ نقطه قطع می‌کند.