

جزوه بر اکت

تعریف برائت (جزء صحیح) :

$$[x] = \max\{k \mid k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$$

بزرگترین عدد صحیح کوچکتر مساوی x را گویند

مثال : حاصل عبارات زیر را بیابید :

$$1) [\sqrt{5}] = [2, \dots] = 2$$

$$2) [-\pi] = [-3, \dots] = -4$$

$$3) [-\sqrt[3]{170}] = [-5, \dots] = -6$$

$$\sqrt[3]{1} = 1 \quad \sqrt[3]{8} = 2 \quad \sqrt[3]{27} = 3 \quad \sqrt[3]{64} = 4 \quad \sqrt[3]{125} = 5 \quad \sqrt[3]{216} = 6$$

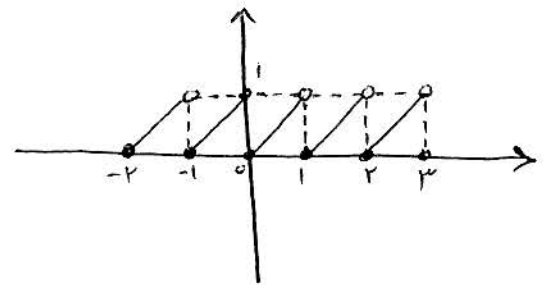
توابع برائت :

$$\text{قانون ①} \quad x = [x] + P_x$$

جوابی \rightarrow جزء صحیح

$$0 \leq P_x = x - [x] < 1$$

دقیق x صحیح



مثال : جزء اعشاری اعداد زیر را بیابید :

$$1) x = 5$$

$$P_x = 0$$

$$2) y = 2,7$$

$$P_y = 0,7$$

$$3) z = -3,1$$

$$P_z = 0,9$$

مثال : معادلات زیر را حل نمایید :

$$1) x - [x] = -0,4 \rightarrow x = \emptyset$$

$$2) x - [x] = 0 \rightarrow x = k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) [x] - x = 2,3 \rightarrow x - [x] = -2,3 \rightarrow x = \emptyset$$

$$4) [x] - x = -0,3 \rightarrow x - [x] = 0,3 \rightarrow x = k + 0,3, k \in \mathbb{Z}$$

① قانون : $[x] = k, k \in \mathbb{Z} \longrightarrow k \leq x < k+1$

مثال : نامعادلات زیر را حل کنید :

۱) $[x] = 5 \longrightarrow 5 \leq x < 6$

۲) $[2x] = 0 \longrightarrow 0 \leq 2x < 1 \longrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2}$

۳) $[-\frac{x}{3}] = -2 \longrightarrow -2 \leq -\frac{x}{3} < -1 \xrightarrow{x(-3)} 3 < x \leq 4$

۴) $[x^2] = \frac{7}{2} \xrightarrow{\text{امکان پذیر نیست}} x = \emptyset$

۵) $[x] \leq 3 \longrightarrow x < 4$

۶) $[x] \geq 5 \longrightarrow x \geq 5$

۷) $-2 \leq [x] < 7 \longrightarrow -2 \leq x < 7$

۸) $-3 < [2x] \leq 5 \longrightarrow -2 \leq 2x < 6 \xrightarrow{\div (2)} -1 \leq x < 3$

۹) $[\frac{x}{2}] \leq -3 \longrightarrow \frac{x}{2} < -2 \xrightarrow{\times 2} x < -4$

تست : جواب معادله ی $[\frac{x}{5}] = \frac{x}{4}$ شامل چند عدد صحیح است ؟

۲ (۴

۵ (۳

۴ (۲

۳ (۱

جواب : چون حاصل $[\frac{x}{5}]$ عدد صحیح است پس باید $\frac{x}{4}$ نیز عدد صحیح باشد یعنی x مضرب ۴ ی باشد

$\frac{x}{4} \leq \frac{x}{5} < \frac{x}{4} + 1 \xrightarrow{\times 20} 5x \leq 4x < 5x + 20 \xrightarrow{\text{نامعادله نواقم}}$

$\left\{ \begin{array}{l} 5x \leq 4x \longrightarrow x \leq 0 \\ 4x < 5x + 20 \longrightarrow x > -20 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cap} -20 < x \leq 0 \longrightarrow x = -19, -18, \dots, -1, 0$
 مضرب ۴ \longrightarrow ۵ عدد صحیح

تست: جواب معادله $[x] - [-x] = 5$ کدام است؟

(1) $[2, 3)$ (2) $(2, 3)$ (3) $(3, 4)$ (4) $(3, 4]$

گزینه ۱ غلط \rightarrow غ ق $\rightarrow x=2 \rightarrow [2] - [-2] = 5 \rightarrow 4 = 5$
 گزینه ۳ و ۴ غلط \rightarrow ق ق $\rightarrow x=2, 7 \rightarrow [2, 7] - [-2, 7] = 5 \rightarrow 5 = 5$
 گزینه ۲ صحیح است.

قانون (۳): $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

$[-0] = \begin{cases} -0 & 0 \in \mathbb{Z} \\ -1 - [0] & 0 \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

* توجه:

وقتی منفی درون پرانتز بود از این توجه استفاده کن.

مثال: جواب معادله $[x] - [-x] = 5$ را بیابید:

$\left\{ \begin{array}{l} x - (-x) = 5 \rightarrow x = 2, 5 \quad x \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\cap} \emptyset \\ [x] - (-1 - [x]) = 5 \rightarrow [x] = 2 \rightarrow 2 \leq x < 3 \quad x \notin \mathbb{Z} \xrightarrow{\cap} (2, 3) \end{array} \right\} \xrightarrow{\cup} (2, 3)$

تست: جواب معادله $[\frac{x}{2}] + [-\frac{x}{2}] = 0$ شامل چند عدد صحیح است؟

(1) 4 (2) 6 (3) 8 (4) 10

جاسخ: طبق قانون ۳، باید عبارت $\frac{x}{2}$ مقداری صحیح داشته باشد.

شامل ۱۰ عدد صحیح $\Rightarrow -1, -2, -4, -6, -8, -10, 1, 2, 4, 6, 8, 10$

قانون (۴): $[x + k] = [x] + k \quad k \in \mathbb{Z}$

مثال: نامعادله زیر را حل کنید:

$$[2x+1] + [2x-5] \leq 4$$

$$[2x] + 1 + [2x] - 5 \leq 4 \rightarrow [2x] \leq 5 \rightarrow 2x < 6 \rightarrow x < 3$$

مثال: معادله زیر را حل کنید:

$$[x-1.2] + [x+0.18] = 4$$

$$[x+0.18-2] + [x+0.18] = 4 \rightarrow [x+0.18]-2 + [x+0.18] = 4 \rightarrow$$

$$[x+0.18] = 6 \rightarrow 6 \leq x+0.18 < 7 \rightarrow 5.82 \leq x < 6.82$$

مثال: برد توابع زیر را بیابید:

$$1) y = [\sin x] + [-\sin x] \xrightarrow{\text{طبق قانون ۳}} R_y = \{-1, 0\}$$

$$2) y = x^2 - [x^2] \xrightarrow{\text{طبق قانون ۱ جزء اعشاری}} R_y = [0, 1)$$

$$3) y = \sqrt{x-2\omega} \left[\frac{x}{2\omega} \right] \xrightarrow{\text{طبق قانون ۱ جزء اعشاری}} 0 \leq \frac{x}{2\omega} - \left[\frac{x}{2\omega} \right] < 1 \xrightarrow{\times 2\omega} 0 \leq x - 2\omega \left[\frac{x}{2\omega} \right] < 2\omega \xrightarrow{\text{رادیکال بگیر}} 0 \leq \sqrt{x - 2\omega \left[\frac{x}{2\omega} \right]} < \omega \rightarrow R_y = [0, \omega)$$

مثال: اگر $A = x - 3 \left[\frac{x-2}{3} \right]$ باشد حدود A را بیابید:

$$A = x - 3 \left[\frac{x}{3} - \frac{2}{3} \right] = x - 3 \left[\frac{x}{3} - 2 \right]$$

$$A = x - 3 \left(\left[\frac{x}{3} \right] - 2 \right) = x - 3 \left[\frac{x}{3} \right] + 6$$

$$\xrightarrow{\text{طبق قانون ۱}} 0 \leq \frac{x}{3} - \left[\frac{x}{3} \right] < 1 \xrightarrow{\times 3} 0 \leq x - 3 \left[\frac{x}{3} \right] < 3 + 6 \rightarrow 6 \leq A < 9$$

مثال: ساده شده‌ی عبارت $[x+y] - [x] - [y]$ را بیابید:

$$\xrightarrow{\text{فصله ۱}} x = [x] + p_x \quad , \quad y = [y] + p_y$$

$$[x] + p_x + [y] + p_y - [x] - [y] = [x] + [y] + [p_x + p_y] - [x] - [y]$$

$$= \frac{[p_x + p_y]}{0 \leq 2} = \begin{cases} 0 & 0 \leq p_x + p_y < 1 \\ 1 & 1 \leq p_x + p_y < 2 \end{cases}$$

* نتیجه: در جمع و تفریق برکات از برکات خارج می‌شود.

مثال: جواب نامعادله $[x-2+3[x-1]] < 13$ را بیابید:

* برکات از برکات خارج می‌شود:

$$[x-2] + 3[x-1] < 13 \longrightarrow [x] - 2 + 3([x] - 1) < 13 \longrightarrow$$

$$[x] - 2 + 3[x] - 3 < 13 \longrightarrow [x] < 4,5 \longrightarrow x < 5$$

مثال: جواب معادله $x - [2x] = 7$ را بیابید:

بر اساس شعور ذهنی چون عدد ۷ حاصل $[2x]$ صحیح می‌باشد پس x مجبور است عدد صحیح باشد

بنابراین $2x$ نیز عدد صحیح است و از برکات خارج می‌شود:

$$x - (2x) = 7 \longrightarrow x = -7$$