



UAI
UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ, ECO -TS101

Lecture Note: Econometría de Series de Tiempo

Marcelo Villena Chamorro PhD.

2019 Winter

Contents

1	Tópico I.- Introducción a la Econometría de Series de Tiempo	4
1.1	La naturaleza de los datos de serie de tiempo	4
1.1.1	Ejemplo 1: Cambio climático	5
1.1.2	Ejemplo 2: Series temporales financieras	6
1.2	Modelamiento estadístico de las series de tiempo	9
1.2.1	Ruido blanco - White Noise	9
1.2.2	Caminata Aleatoria - Random Walk	10
1.2.3	Promedios móviles - Moving Averages	11
1.2.4	Autorregresiones - Autoregressions	11
1.3	Descomposición de las series de tiempo	12
1.3.1	Descomposición Tendencia - Filtro Hodrick -Prescott	13
1.3.2	Descomposición componente estacional - Transformaciones de Diferencias	13
1.3.3	Descomposición componente estacional - Variables Dummy	13
1.4	Medidas de dependencia	15
1.5	Estacionaridad	17
1.6	Modelos de regresión lineal múltiple en series de tiempo	18
1.6.1	Propiedades de los estimadores de MC	19
1.6.2	Teorema Gauss-Markov	20
1.6.3	Modelos de regresión lineal múltiple en series de tiempo	20
1.6.4	Evaluación Estadística de Regresiones Estimadas	21
1.6.5	Regresiones sin sentido y regresiones espurias.	21
1.6.6	Ejemplo 3: Regresiones	21
2	Tópico II.- Univariate Time Series Models	36
2.1	Ejemplo de repaso clase anterior-Detrending global temperature	36
2.2	Sobre la descomposición de una serie	37
2.3	Procesos no estacionarios, integrados y el test de raíz unitaria	41
2.3.1	Procesos Integrados	41
2.3.2	Consecuencias de los Procesos Integrados (Raíz Unitaria)	42
2.3.3	Test de Raíz Unitaria	42
2.4	Modelos ARIMA: modelando el corto plazo	43
2.4.1	Sobre el operador de retroceso - backshift operator	44
2.4.2	Ejemplo Proceso Autoregresivo de Orden 1: AR(1)	45
2.4.3	Simulación modelo AR(1)	46
2.4.4	Identificación modelo AR(1)	47
2.4.5	Media Móvil - MA (q)	48

2.4.6	Identificación modelo ARMA	51
2.4.7	Invertibilidad	53
2.4.8	Estacionaridad e Invertibilidad	53
2.4.9	Modelos ARMA (p,q)	53
2.4.10	Modelos ARIMA (p, i, q)	54
2.4.11	Identificación modelo ARMA	54
2.4.12	Modelos SARIMA (p,q)	54
2.4.13	Sobre la Selección de Modelos	56
2.4.14	Ejemplo IPC en Chile	57
2.4.15	Descomposición de la serie	58
2.5	Metodología de Estimación de un Modelo ARIMA	58
2.5.1	Etapas de Estimación de un Modelo ARIMA	58
2.6	Resumen de los pasos de Box-Jenkins	59
2.7	Tarea 2	60

1 Tópico I.- Introducción a la Econometría de Series de Tiempo

1.1 La naturaleza de los datos de serie de tiempo

El objetivo principal del análisis de series temporales es desarrollar modelos matemáticos que proporcionen descripciones plausibles para los datos de la muestra.

Existen dos enfoques metodológicos básicos para modelar series de tiempo:

- (i) El enfoque del dominio del tiempo (Time domain approach)
- (ii) El enfoque de dominio de frecuencia (Frequency domain approach)

El **enfoque del dominio del tiempo** generalmente está motivado por la presunción de que la correlación entre los puntos adyacentes en el tiempo de los datos de una serie, se explica mejor en términos de una dependencia del valor actual en valores pasados. De esta forma, éste enfoque se centra en modelar algún valor futuro de una serie temporal como una función paramétrica de los valores actuales y pasados.

En este escenario, por ejemplo, utilizamos modelos de regresiones lineales sobre el valor actual de una serie temporal, utilizando como variables de lado derecho a sus propios valores pasados y los valores pasados de otras series. El seminal trabajo de Box y Jenkins y sus modelos autoregresivos (ARIMA), se encuentran en esta línea, ver [Box and Jenkins \(1970\)](#).

Por otro lado, el **enfoque de dominio de frecuencia** asume que las características principales de interés en el análisis de las series de tiempo se relacionan con variaciones sinusoidales periódicas o sistemáticas que se encuentran naturalmente en la mayoría de los datos.

Estas variaciones periódicas a menudo son causadas por fenómenos biológicos, físicos o ambientales de interés. El estudio de la periodicidad se extiende a la economía y las ciencias sociales, donde uno puede estar interesado en las periodicidades anuales en series como el desempleo mensual o las tasas mensuales de natalidad.

En el análisis espectral, la partición de los diversos tipos de variación periódica en una serie temporal se lleva a cabo evaluando separadamente la varianza asociada con cada tipo de periodicidad.

1.1.1 Ejemplo 1: Cambio climático

Nuestro primer ejemplo de serie de tiempo es la temperatura de la tierra. Observamos una aparente tendencia ascendente en la serie durante la última parte del siglo XX, la que se ha utilizado como argumento para la hipótesis del calentamiento global. Nótese también la tendencia ascendente y bastante pronunciada alrededor de 1970. La cuestión de interés para los defensores del calentamiento global y los oponentes es si la tendencia general es natural, o si por el contrario es causada por el ser humano.

Ejemplo 1: Cambio climático

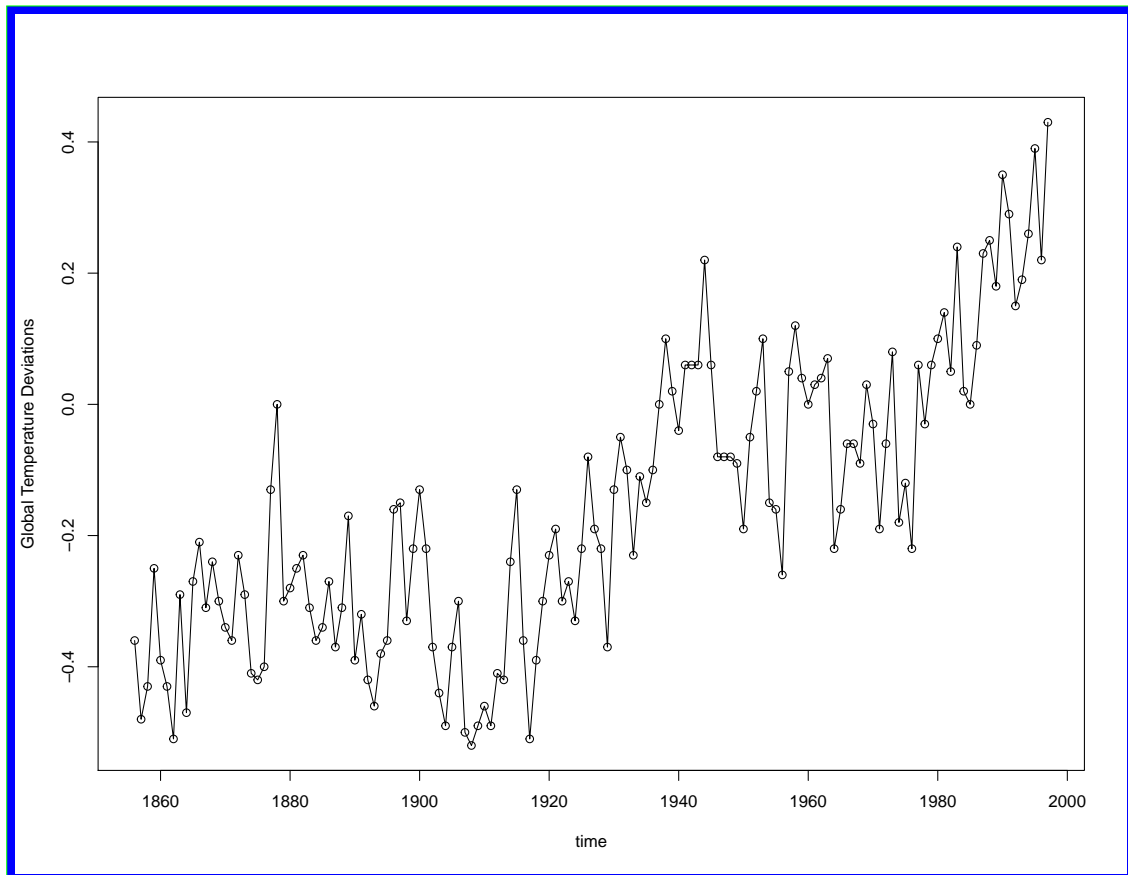


Figure 1.1: Cambio climático: mediciones de temperatura desde 1860

‘Código R para ejemplo del cambio climático.’

```
# Set the working directory
setwd("/Users/Desktop/Econometrics/Clase_1.-_TSE")
# Limpiar_variables
rm(list=ls())

install.packages("tidyverse")
install.packages("dplyr")
install.packages("tseries")

mydata<-read.csv ("gtemp.csv")
plot(mydata, type="o", ylab="Global_Temperature_Deviations")
```

1.1.2 Ejemplo 2: Series temporales financieras

En finanzas siempre es preferible trabajar con el retorno (returns) de los activos, en vez de usar directamente el precio de los activos. Existen dos maneras de convertir el precio en retornos:

$$R_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} * 100$$

$$R_t = \ln \left(\frac{p_t}{p_{t-1}} \right) * 100$$

where, R_t denota el retorno al tiempo t , p_t denota el precio del activo al tiempo t , y \ln denota el logaritmo natural. En esta formulación ignoramos los dividendos, o asumimos que las series de precios ya han sido ajustadas por ellos.

Los log-returns tienen la deseable propiedad de poder ser interpretados como rendimientos continuamente compuestos. Además, ellos pueden ser simplemente sumados, de forma de obtener retornos con respecto a períodos más largos:

$$r_1 = \ln \frac{p_1}{p_0} = \ln p_1 - \ln p_0$$

$$r_2 = \ln \frac{p_2}{p_1} = \ln p_2 - \ln p_1$$

$$r_3 = \ln \frac{p_3}{p_2} = \ln p_3 - \ln p_2$$

$$r_4 = \ln \frac{p_4}{p_3} = \ln p_4 - \ln p_3$$

$$r_5 = \ln \frac{p_5}{p_4} = \ln p_5 - \ln p_4$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = \ln p_5 - \ln p_0 = \ln \frac{p_5}{p_0}$$

Ejemplo 2: Series temporales financieras

Como segundo ejemplo calcularemos los retornos de la Bolsa de Nueva York, índice "S&P 500", extrayendo data diaria desde el año 2000, del sitio: <https://finance.yahoo.com/>

‘Código R precio de la Bolsa de Nueva York.’

```
mydata2<-read.csv("sp.csv")
precio<-mydata2$"Adj.Close"
plot.ts(precio, type="o", ylab="Precio_Bolsa_de_Nueva_York")
lnprecio <- log10(precio)
Dlnprecio <- diff(lnprecio,1)
plot.ts(Dlnprecio, type="o", ylab="Retorno_Bolsa_de_Nueva_York")
summary (lnprecio)
summary (Dlnprecio)
```

Ejemplo 2: Series temporales financieras

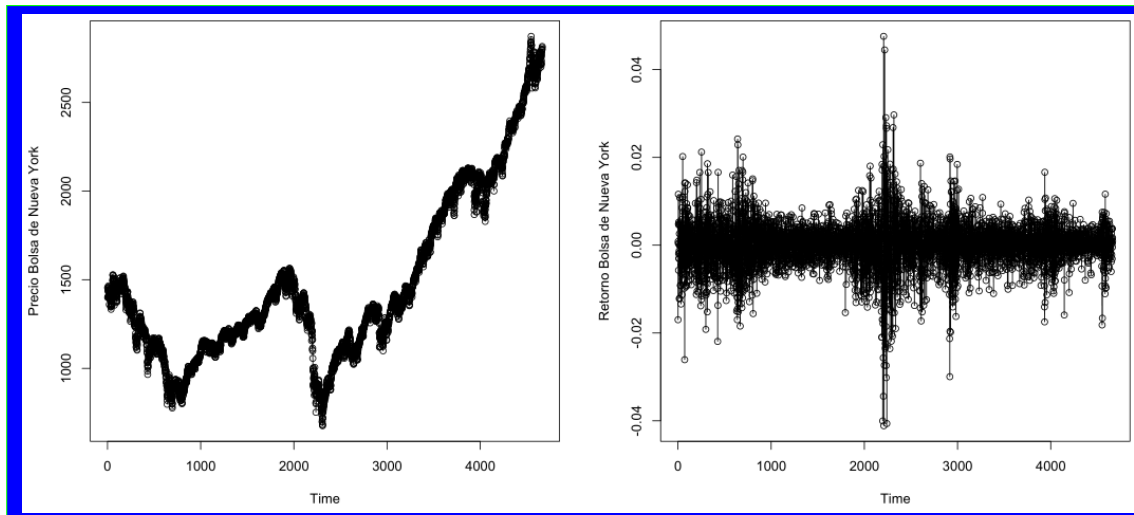


Figure 1.2: Índice Bolsa de Nueva York. Izquierda: precios reales SP500. Derecha: retornos SP500.

Los precios al parecer no son normales, aparentemente son log-normales.

Los retornos de los precios si parecen normales [1.4](#), lo cual constituye una propiedad deseable para el análisis estadístico.

‘Código R de histograma y ajuste de curva normal’

```
h <- hist(Dlnprecio, breaks=15)
xhist <- c(min(h$breaks), h$breaks)
yhist <- c(0, h$density, 0)
xfit <- seq(min(Dlnprecio), max(Dlnprecio), length=40)
yfit <- dnorm(xfit, mean=mean(Dlnprecio), sd=sd(Dlnprecio))
plot(xhist, yhist, type="s", ylim=c(0, max(yhist, yfit)),
      main="Normal_pdf_and_histogram")
lines(xfit, yfit, col="red")
shapiro.test(Dlnprecio)
```

1.2 Modelamiento estadístico de las series de tiempo

Para poder modelar los datos, que aparentemente fluctúan de forma aleatoria a lo largo del tiempo, suponemos que una serie temporal se define como una colección de variables aleatorias. Por ejemplo, podemos modelar una serie temporal como una secuencia de variables aleatorias, x_1, x_2, x_3, \dots , donde la variable aleatoria x_1 denota el valor tomado por la serie en el primer punto de tiempo, la variable x_2 denota el valor para el segundo período de tiempo, y así sucesivamente. En general, una colección de variables aleatorias, $\{x_t\}$, indexada por t se conoce como proceso estocástico. En este texto, t será típicamente discreto y variará sobre los enteros $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, o algún subconjunto de los enteros. Los valores observados en un proceso estocástico se conocen como la realización del proceso estocástico.

1.2.1 Ruido blanco - White Noise

Una serie de tiempo muy utilizada es aquella representada por una colección de variables aleatorias no correlacionadas, ϵ_t , con media 0 y varianza finita σ_ϵ^2 . Las series temporales generadas a partir de variables no correlacionadas se utilizan por ejemplo para modelar el ruido en aplicaciones de ingeniería, donde se denomina ruido blanco. A veces denotaremos este proceso como $\epsilon_t \sim \epsilon_n(0, \sigma_\epsilon^2)$. La designación de "blanco" se origina de la analogía con la luz blanca e indica que todas las posibles oscilaciones periódicas están presentes con la misma fuerza.

- En ocasiones, también requeriremos que el ruido sea independiente y tenga una distribución idéntica (iid) de variables aleatorias con media 0 y varianza σ_ϵ^2 . Distinguiremos este caso diciendo ruido blanco independiente, o escribiendo $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$.
- Otra serie de ruido blanco particularmente útil es el ruido blanco gaussiano, en el que las w_t son variables aleatorias normales independientes, con media 0 y varianza σ_ϵ^2 ; o más sucintamente, $\epsilon_t \sim iid N(0, \sigma_\epsilon^2)$.
- La figura siguiente muestra una colección de 500 de estas variables aleatorias, con $\sigma_\epsilon^2 = 1$, trazadas en el orden en que se dibujaron.

‘Código R para generar Ruido blanco’

```
set.seed(154)
w = rnorm(200,0,1)
plot.ts(w, ylim=c(-3,3), main="White_Noise")
```

1.2.2 Caminata Aleatoria - Random Walk

Un ejemplo simple para modelar una serie temporal estocástica con tendencia (no estacionaria) es una caminata aleatoria con deriva (Random Walk with drift):

$$x_t = \delta + x_{t-1} + \epsilon_t$$

para $t = 1, 2, \dots$, con una condición inicial $x_0 = 0$, y donde ϵ_t es ruido blanco. La constante δ se denomina deriva (drift), y cuando $\delta = 0$, se llama simplemente una caminata aleatoria. El término caminata aleatoria proviene del hecho de que, cuando $\delta = 0$, el valor de la serie de tiempo en el tiempo t , es el valor de la serie en el tiempo $t - 1$ más un movimiento completamente aleatorio determinado por ϵ_t .

Tenga en cuenta que podemos reescribir la ecuación anterior como una suma acumulativa de las variables de ruido blanco. Es decir,

$$x_t = \delta t + \sum_{j=1}^t \epsilon_j$$

‘Código R para generar Caminata Aleatoria’

```
set.seed(154)
w = rnorm(200,0,1)
x = cumsum(w)
wd = w + 0.2
xd = cumsum(wd)
plot.ts(xd, ylim=c(-5,55), main="random_walk")
lines(x)
lines(0.2*(1:200), lty="dashed")
```

1.2.3 Promedios móviles - Moving Averages

Podríamos reemplazar la serie de ruido blanco ϵ_t por un promedio móvil que suavice la serie. Por ejemplo, considere reemplazar ϵ_t por un promedio de su valor actual y sus vecinos inmediatos en el pasado y futuro. Es decir:

$$v_t = 1/3(\epsilon_{t-1} + \epsilon_t + \epsilon_{t+1})$$

Como veremos en el siguiente ejemplo, los promedios móviles producen una versión más suave que la serie original, lo que refleja el hecho de que las oscilaciones más lentas llegan a ser más evidentes, y se eliminan algunas de las oscilaciones más rápidas.

‘Código R para generar Moving Averages’

```
w = rnorm(500,0,1) ; v = filter(w, sides=2, rep(1/3,3))
par(mfrow=c(2,1))
plot.ts(w, main="white_noise")
plot.ts(v, main="moving_average")
```

1.2.4 Autorregresiones - Autoregressions

Supongamos nuevamente que consideramos la serie de ruido blanco w_t como entrada, y calculamos la salida usando una ecuación de segundo orden, es decir:

$$x_t = x_{t-1} - 0.9x_{t-2} + \epsilon_t$$

Esta ecuación representa una regresión o predicción del valor actual x_t de una serie temporal en función de los dos valores anteriores de la serie, es por esto que utilizamos el nombre de autoregresión.

‘Código R para generar Autoregressions’

```
w = rnorm(550,0,1) ;
x = filter(w, filter=c(1,-.9), method="recursive")[-(1:50)]
plot.ts(x, main= "autoregression")
```

1.3 Descomposición de las series de tiempo

Las series de tiempo usualmente se descomponen en:

- Una tendencia (trend) T_t .
- Un componente estacional (seasonal) S_t .
- Un elemento irregular (irregular) I_t .

Por ejemplo:

$$T_t = 2 + 0.1t;$$

$$S_t = 6.5\cos(\pi/60);$$

$$\text{y } I_t \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 0.5).$$

‘Código R para descomponer serie de tiempo’

```
t = 2 + 0.1 * 1:500
s = 6.5 * cos(pi * 1:500/90)
set.seed(154)
i = rnorm(500, 0, 5)
plot.ts(s + t + i)
```

En general, las series de tiempo pueden contener uno o combinación de todos los elementos antes señalados, ya sea de manera aditiva o multiplicativa:

$$x_t = T_t + S_t + I_t$$

$$x_t = T_t * S_t * I_t$$

- La primera especificación se caracteriza por tener cada componente de forma independiente, lo que posibilita descomponer la serie en una suma de los tres factores.
- La segunda, por otra parte, surge cuando la tendencia (T_t), estacionalidad (S_t), y irregularidad (I_t) son dependientes entre si.

En general, la tendencia cambia la media de la serie, mientras que el componente estacional posee un patrón que se repite, por ejemplo de manera mensual o trimestral. El componente irregular a pesar de no tener un patrón bien definido, puede ser pronosticada, de hecho, los pronósticos usan correlaciones con el componente irregular para realizar sus pronósticos. En períodos más largos sin embargo, el componente irregular exhibe una tendencia de reversión a cero.

El pronóstico de series de tiempo pretende entonces predecir cada uno de éstos componentes

de manera individual. Como vimos, el pronóstico global de la series de tiempo agrupa de forma aditiva o multiplicativa cada uno de dichos componentes.

1.3.1 Descomposición Tendencia - Filtro Hodrick -Prescott

- En economía, el filtro Hodrick-Prescott (HP) permite separar para x_t los componentes tendencial y cíclico.
- Este método consiste en obtener una serie suavizada S_t a partir de la original x_t , mediante una solución al problema de optimización sugerido en la siguiente ecuación. Una vez resuelto, permite estimar tanto el ciclo como la tendencia de la serie.

$$\min \sum_{t=1}^n (x_t - S_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{n-1} [(S_{t+1} - S_t) - (S_t - S_{t-1})]^2$$

- Los valores sugeridos para λ dependen de la periodicidad de x_t , y son: 14400 (mensual), 1600 (trimestral) y 100 (anual). Por otra parte, una vez obtenido el componente cíclico ($x_t - S_t$), a partir del filtro HP, puede ser interpretada como la brecha existente entre su valor real x_t y potencial S_t .

1.3.2 Descomposición componente estacional - Transformaciones de Diferencias

La transformaciones de diferencias se usan para capturar el componente estacional de la serie:

Una primera diferencia es definida como:

$$\Delta x_t = (x_t - x_{t-1})$$

Análogamente, la segunda diferencia es definida como:

$$\Delta^2 x_t = (x_t - x_{t-1}) - (x_{t-1} - x_{t-2})$$

Anteriormente vimos que la primera diferencia del logaritmo, se podía interpretar como el cambio porcentual de la variable, logrando la simetría del precio de las acciones.

1.3.3 Descomposición componente estacional - Variables Dummy

Una variable dummy, D, es una variable binaria que toma la siguiente forma:

- D=1 si la observación tiene características específicas.
- D=0 si no las tiene.

Por ejemplo:

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + \beta_2 D + \beta_3 D z_t$$

$$D = 1 \Rightarrow x_t = (\beta_0 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_3) z_t$$

$$D = 0 \Rightarrow x_t = \beta_0 + \beta_1 z_t$$

Las variables dummy pueden ser usadas para cambiar la pendiente y/o intercepto en un modelo lineal, lo cual permite capturar la estacionalidad en la serie, por ejemplo con variables dummies por trimestre o temporada.

1.4 Medidas de dependencia

Como vimos anteriormente, una serie de tiempo puede ser vista como una colección de n variables aleatorias en puntos de tiempo enteros arbitrarios t_1, t_2, \dots, t_n , para cualquier entero positivo se cuenta con una función de distribución conjunta, evaluada como la probabilidad que los valores de las series sean conjuntamente menores que n constantes, c_1, c_2, \dots, c_n , i.e.:

$$F(c_1, c_2, \dots, c_n) = P(x_{t_1} \leq c_1, x_{t_2} \leq c_2, \dots, x_{t_n} \leq c_n)$$

Desafortunadamente, la función de distribución multinomial no puede usualmente ser escrita fácilmente a menos que las variables sean conjuntamente normales, en cual caso la densidad conjunta presenta la forma:

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} |\Gamma|^{-1/2} \exp\{-1/2(\mathbf{x} - \mu)' \Gamma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)\}$$

donde $|\cdot|$ indica determinante y Γ la matriz de covarianza.

Aunque la función de distribución conjunta permite describir la data completamente, su manipulación es muy compleja, y su despliegue gráfico imposible.

Las funciones de distribución marginales:

$$F_t(x) = P\{x_t \leq x\}$$

o la correspondiente función de densidad marginal:

$$f_t(x) = \frac{\partial F_t(x)}{\partial x}$$

Cuando éstas existen, proveen información valiosa para examinar el comportamiento marginal de la serie.

Si x_t es Gaussiana con media μ_t y varianza σ_t^2 , $x_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$, la densidad marginal esta dada por:

$$f_t(x) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_t^2} (x - \mu_t)^2\right)$$

La función de media, conocida en estadística como el primer momento central, está definida como:

Definition 1. Definición: Función de Media:

$$\mu_{xt} = E(x_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_t(x) dx$$

Si existe, E denota el operador de valor esperado.

La función de autocovarianza, conocida en estadística como el segundo momento central, está definida como:

Definition 2. Definición: Función de Autocovarianza:

$$\gamma_x(s, t) = \text{cov}(x_s, x_t) = E[(x_s - \mu_s)(x_t - \mu_t)]$$

En este caso, $\gamma_x(s, t) = \gamma_x(t, s)$ para todos los puntos de s y t . Si $\gamma(s, t) = 0$ podemos asegurar que x_s y x_t no están linealmente relacionadas. Por otro lado, si x_s y x_t son además normales bivariadas podemos asegurar que son independientes.

Por último, es claro que si $s = t$, la autocovarianza se reduce a la varianza

Definition 3. Definición: Función de Varianza:

$$\gamma_x(t, t) = E[(x_t - \mu_t)^2] = \text{var}(x_t)$$

La Función de Autocorrelación, denotada por ACF (autocorrelation function), mide la predictibilidad lineal de la serie en el tiempo t . Es decir, predecimos x_t , utilizando sólo el valor x_s . Suponiendo que ambas series tienen varianzas finitas, tenemos la siguiente definición:

Definition 4. Definición: Función de Autocorrelación:

$$\rho(s, t) = \frac{\gamma(s, t)}{\sqrt{\gamma(s, s)\gamma(t, t)}}$$

Se puede demostrar fácilmente que $-1 \leq \rho(s, t) \leq 1$. Si podemos predecir x_t perfectamente a partir de x_s a través de una relación lineal, $x_t = \beta_0 + \beta_1 x_s$, entonces la correlación será $+1$ cuando $\beta_1 > 0$, y -1 cuando $\beta_1 < 0$.

Por lo tanto, tenemos una medida aproximada de la capacidad de predecir la serie en el tiempo t desde el valor en el tiempo s .

La función de covarianza cruzada entre dos series, x_t e y_t , viene dada por:

Definition 5. Definición: Función de Covarianza Cruzada:

$$\gamma_{xy}(s, t) = \text{cov}(x_s, y_t) = E[(x_s - \mu_{xs})(y_t - \mu_{yt})].$$

La función de correlación cruzada (CCF por su sigla en inglés cross-correlation function) está dada por:

Definition 6. Función de Correlación Cruzada:

$$\rho_{xy}(s, t) = \frac{\gamma_{xy}(s, t)}{\sqrt{\gamma_x(s, s)\gamma_y(t, t)}}$$

Podemos extender fácilmente las formulaciones anteriores al caso de más de dos series, por ejemplo, $x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tr}$; es decir, series temporales multivariantes con r componentes. Por ejemplo, la extensión de (1.10) para el caso de covarianza cruzada sería:

$$\gamma_{xy}(j, k) = \text{cov}(x_{sj}, y_{sk}) = E[(x_s - \mu_{xs})(y_{tk} - \mu_{y_{tk}})].$$

1.5 Estacionaridad

Definition 7. Definición: Estacionaridad estricta: Una serie de tiempo es estrictamente estacionaria (strictly stationary) si el comportamiento probabilístico de cada conjunto de valores $\{x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tk}\}$ es idéntico al del mismo conjunto desplazado en el tiempo, es decir $\{x_{t1+h}, x_{t2+h}, \dots, x_{tk+h}\}$.

En otras palabras:

$$P(x_{t1} \leq c_1, \dots, x_{tk} \leq c_k) = P(x_{t1+h} \leq c_1, \dots, x_{tk+h} \leq c_k)$$

para todos los $k = 1, 2, \dots$, todos los períodos t_1, t_2, \dots, t_k , todos los números c_1, c_2, \dots, c_k , y todos los desplazamientos de tiempo $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Si una serie de tiempo es estrictamente estacionaria, entonces todas las funciones de distribución multivariante para subconjuntos de variables, deben ser iguales con sus contrapartes en el conjunto desplazado. Por ejemplo, cuando $k = 1$:

$$P\{x_s \leq c\} = P\{x_t \leq c\}$$

para cualquier punto de tiempo s y t .

Cuando $k = 2$ tenemos:

$$P\{x_s \leq c_1, x_t \leq c_2\} = P\{x_{s+h} \leq c_1, x_{t+h} \leq c_2\}$$

Para cualquier punto de s, t y h . Si la función de varianza existe, entonces: $\gamma(s, t) = \gamma(s+h, t+h)$

En este contexto, ¿es un proceso random walk with drift estrictamente estacionario?

Definition 8. Definición: Estacionaridad débil: Una serie de tiempo x_t débilmente estacionaria (weakly stationary) es un proceso de varianza finita tal que:

- (i) la función de valor medio, μ_t , es constante y no depende del tiempo t , y
- (ii) la función de autocovarianza, $\gamma(s, t)$, depende de s y t sólo a través de su diferencia $|s - t|$.

De ahora en adelante, usaremos el término estacionario para significar débilmente estacionario; si un proceso es estacionario en sentido estricto, utilizaremos el término estrictamente estacionario. Un caso importante en el que la estacionariedad implica una estacionariedad estricta es si la serie es gaussiana (es decir, todas las distribuciones finitas de la serie son gaussianas).

1.6 Modelos de regresión lineal múltiple en series de tiempo

A continuación introducimos (recordamos) el modelo clásico de regresión lineal.

- Sea \mathbf{X} una matriz de $n \times k$ entradas donde se tienen n observaciones para k independientes variables.
- Sea \mathbf{Y} un vector de n observaciones de la variable dependiente.
- Es posible proponer un modelo de estimación lineal que relaciona las variables \mathbf{X} y la variable \mathbf{Y} :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

El modelo también puede ser escrito de forma compacta como:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$$

Vemos que este modelo presenta componentes sistemáticos (determinísticos) ($\mathbf{X}\beta$) y estocásticos (ϵ).

Lo que se busca es determinar los coeficientes β_i que relacionen linealmente a la variables X_i e Y . Para esto utilizamos el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO, también conocido como OLS por su sigla en inglés: ordinary least square) El criterio de mínimos cuadrados busca minimizar la suma de los cuadrados de los residuos ($\sum e_i^2$).

A continuación revisamos la derivación del método de MCO. Primero, el vector de residuos se puede obtener como:

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}$$

donde $\hat{\beta}$ representa el estimador del vector β .

Por lo que la sumatoria del cuadrado de los errores será:

$$\mathbf{e}'\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = [e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2]$$

Por otro lado, puede escribirse también como:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'\mathbf{e} &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{X}\hat{\beta} + \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} \end{aligned}$$

Para minimizar el cuadrado de los residuos recurrimos al cálculo diferencial:

$$\frac{\partial(\mathbf{e}'\mathbf{e})}{\partial\hat{\beta}} = -2\mathbf{X}'\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} = 0$$

Luego $\hat{\beta}$ será un mínimo de $\mathbf{e}'\mathbf{e}$ si la segunda derivada es positiva o equivalentemente \mathbf{X} es definida positiva.

De la expresión anterior obtenemos:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

Finalmente, multiplicando por $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ a ambos lados, obtenemos $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

La facilidad de cálculo del MCO ha influido en su popularidad. Los estimadores se obtienen a través de sencillas operaciones de matrices

1.6.1 Propiedades de los estimadores de MC

La estimación de los MCO es la mejor estimación lineal no sesgada (BLUE, best linear unbiased estimators). La prueba de esta proposición es provista por el teorema Gauss-Markov.

1. (i) No sesgado: $E(\hat{\beta}) = \beta$, es decir el valor esperado de el estimador es el verdadero valor de el parámetro desconocido.
2. (ii) Mejor: mínima varianza.

1.6.2 Teorema Gauss-Markov

Theorem 1.1: Supuestos

1. Existe una relación lineal entre X e Y
2. No existe multicolinealidad (X es linealmente independiente)
3. $E(\epsilon|X) = 0$. Equivalentemente $E(Y) = X\beta$
4. $E(\epsilon\epsilon'|X) = \sigma^2 I$. Los errores son homocedásticos y no existe autocorrelación
5. X y ϵ no se encuentran relacionados. $Cov(X\epsilon) = 0$

Usualmente, todos estos supuestos son chequeados en el proceso de pruebas de diagnóstico

Prueba Teorema. MCO es el mejor estimador lineal, insesgado, eficiente y de mínima varianza para β (BLUE)

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'Y \\
 &= (X'X)^{-1}X'(X\beta + \epsilon) \\
 &= \beta + (X'X)^{-1}X'\epsilon
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(\hat{\beta}) &= E(\beta + (X'X)^{-1}X'\epsilon) \\
 &= E(\beta) + E((X'X)^{-1}X'\epsilon) \\
 &= \beta + (X'X)^{-1}X'E(\epsilon) \\
 &= \beta
 \end{aligned}$$

□

1.6.3 Modelos de regresión lineal múltiple en series de tiempo

- $\hat{\beta}$ es un estimador lineal de β .

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'Y \\
 &= (X'X)^{-1}X'(X\beta + \epsilon) \\
 &= \beta + (X'X)^{-1}X'\epsilon \\
 &= \beta + A\epsilon
 \end{aligned}$$

Probar que se trata de un estimador de mínima varianza.

1.6.4 Evaluación Estadística de Regresiones Estimadas

El **coeficiente de determinación** R^2 es una medida de buen ajuste, el grado para el cual las variables independientes conjuntamente explican la variación en la variable dependiente sobre su media. El R^2 se incrementa cada vez que el número de regresores, k , se aumenta, relativo al tamaño de la muestra, n , independientemente de la justificación teórica de incluir variables adicionales. En el límite, si $n = k + 1$, $R^2 = 1$ pero tal regresión tiene cero poder explicativo.

El R^2 **ajustado** toma en cuenta el número de regresores relativo al tamaño de la muestra. El

R^2 ajustado es particularmente útil para evaluar el ajuste relativo de un conjunto de regresiones estimadas para la misma variable dependiente pero con un número diferente de variables independientes. Un criterio mecánico de selección de modelos es maximizar el R^2 ajustado.

Test t

Los tests t, son test de hipótesis sobre los parámetros estimados, para determinar si ellos son individualmente significativamente diferentes de cero. Hipótesis nula: $H_0: \beta_j = 0$.

Test estadístico

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{SE(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j - 0}{SE(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)} \sim t(n - k - 1)$$

$SE(\hat{\beta}_j)$ = error estándar de el parámetro estimado

1.6.5 Regresiones sin sentido y regresiones espúrias.

Las regresiones sin sentido, son series de tiempo mutuamente independientes que producen buenos indicadores en la regresión, debido al alto nivel de correlación serial en cada serie. **Las**

regresiones espúrias ocurren cuando los datos dependen sobre un tercer factor común, por ejemplo: una tendencia temporal. La relación espúria da la impresión de que existe un vínculo estadístico entre dos variables, el cual es invalidado cuando se examina objetivamente.

1.6.6 Ejemplo 3: Regresiones

Como un nuevo ejemplo, calculamos el beta de un activo financiero. El beta es una medida de riesgo sistemático, el cual se mide con respecto a la relación de los retornos del activo, con los del índice diversificado del mercado, en este caso el índice S&P ya estudiado. En este caso calculamos el beta de otro índice, el Russell 2000 (se denota por RUT) que mide el devenir de las empresas con small cap.

‘Código R para Regresiones’

```
mydata1 <- read.csv("sp.csv", header=TRUE,
                    stringsAsFactors=FALSE)

precio_sp <- mydata1$"Adj.Close";
lnprecio_sp <- log10(precio_sp)
Dlnprecio_sp <- diff(lnprecio_sp ,1)
mydata2 <- read.csv("rut.csv", header= TRUE,
                    stringsAsFactors = FALSE)

precio_rut <- mydata2$"Adj.Close" ;
lnprecio_rut <- log10(precio_rut)
Dlnprecio_rut <- diff(lnprecio_rut ,1)
reg1 <- lm ( Dlnprecio_sp ~ Dlnprecio_rut)
summary(reg1)
```

A partir del siguiente código almacenamos los residuos y analizamos los supuestos que exige una buena regresión.

‘Código R para Residuos de regresión’

```
residuos <- rstandard(reg1)
valores.ajustados <- fitted(reg1)
plot(valores.ajustados, residuos)
qqnorm(residuos)
qqline(residuos)
```

Instructor: Marcelo Villena Chamorro PhD.

Ejemplo 2: Histograma de los Precios

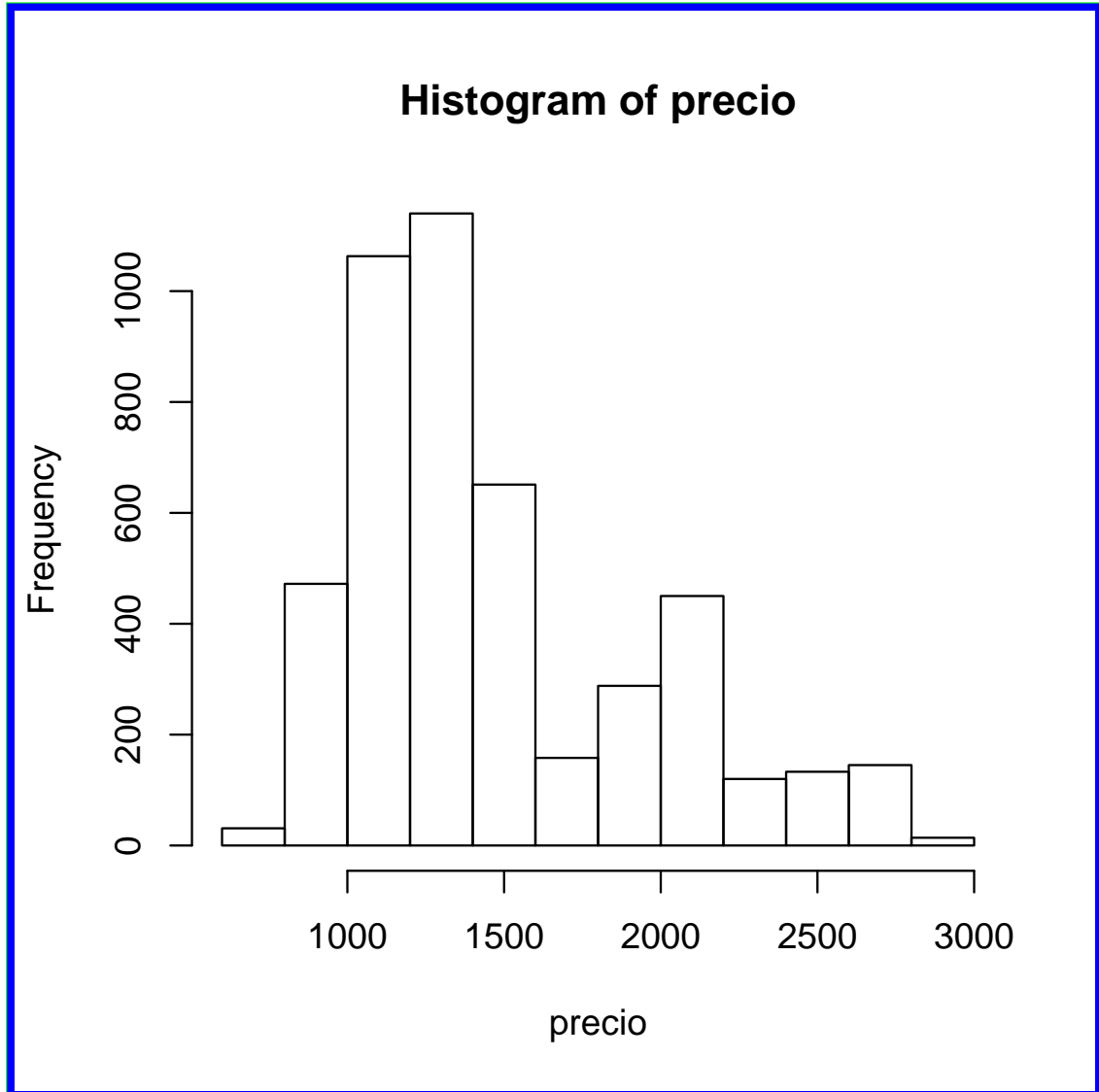


Figure 1.3: Histograma de los precios de la Bolsa de NY

Ejemplo 2: Histograma de los Precios

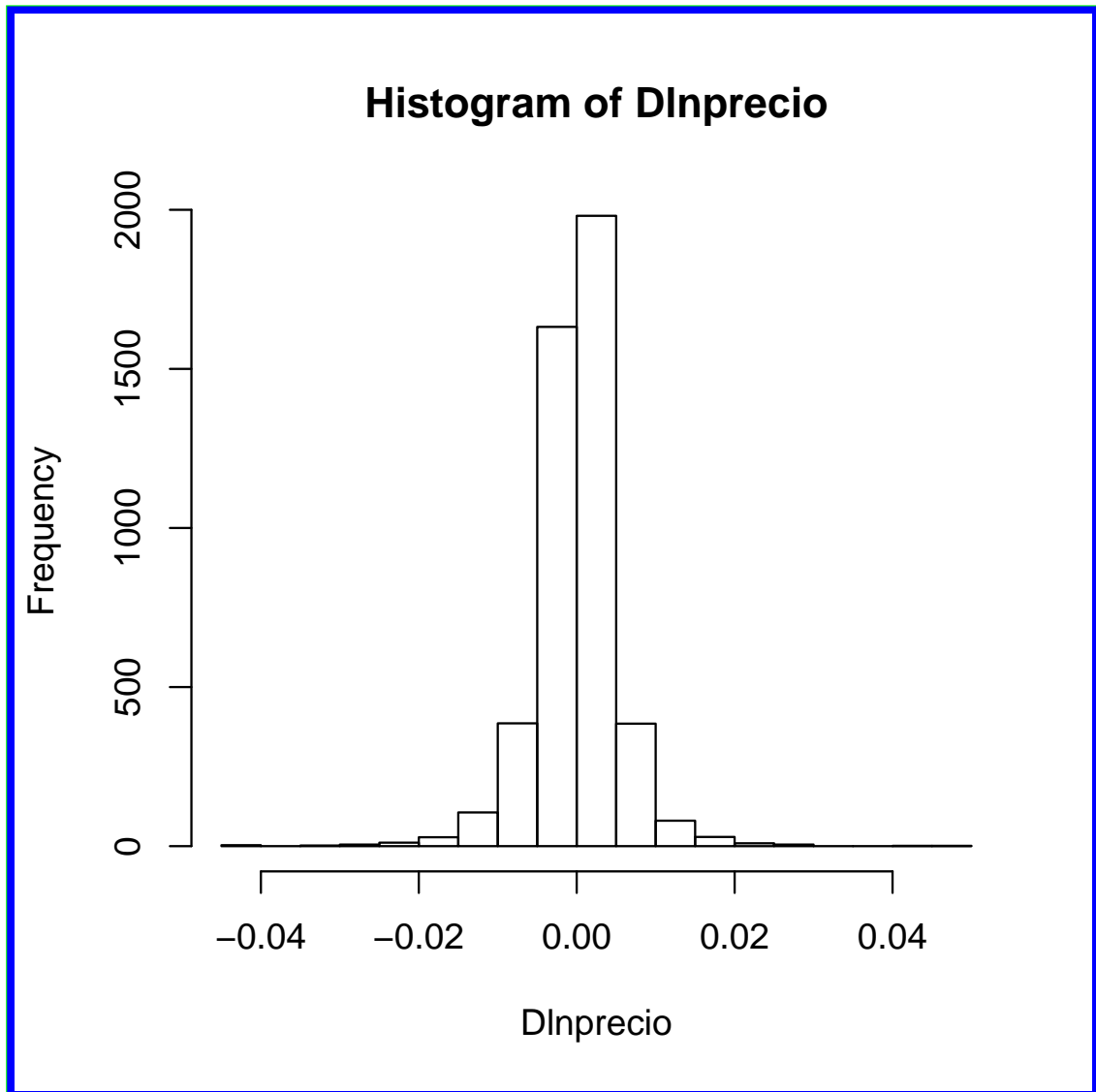


Figure 1.4: Histograma de los retornos de la Bolsa de NY

Ejemplo 2: Histograma de los Precios

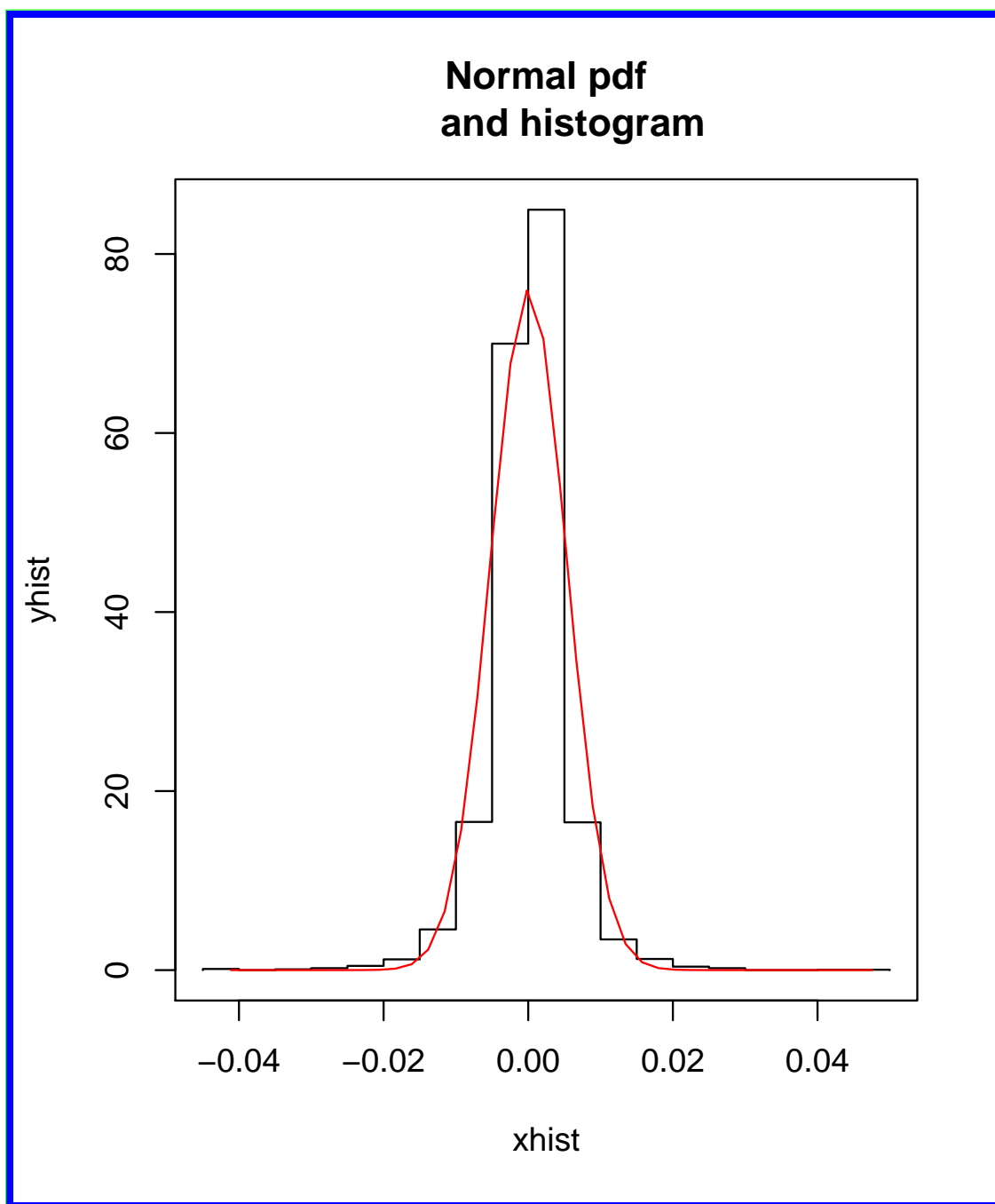


Figure 1.5: Línea negra: Histograma de las diferencias de los log-precios de la Bolsa de NY. Línea roja: ajuste de la distribución normal según media y desviación estándar de la muestra. Shapiro-Wilk normality test / data: Dlnprecio / $W = 0.90927$, $p\text{-value} < 2.2e-16$.

Ruido blanco - White Noise

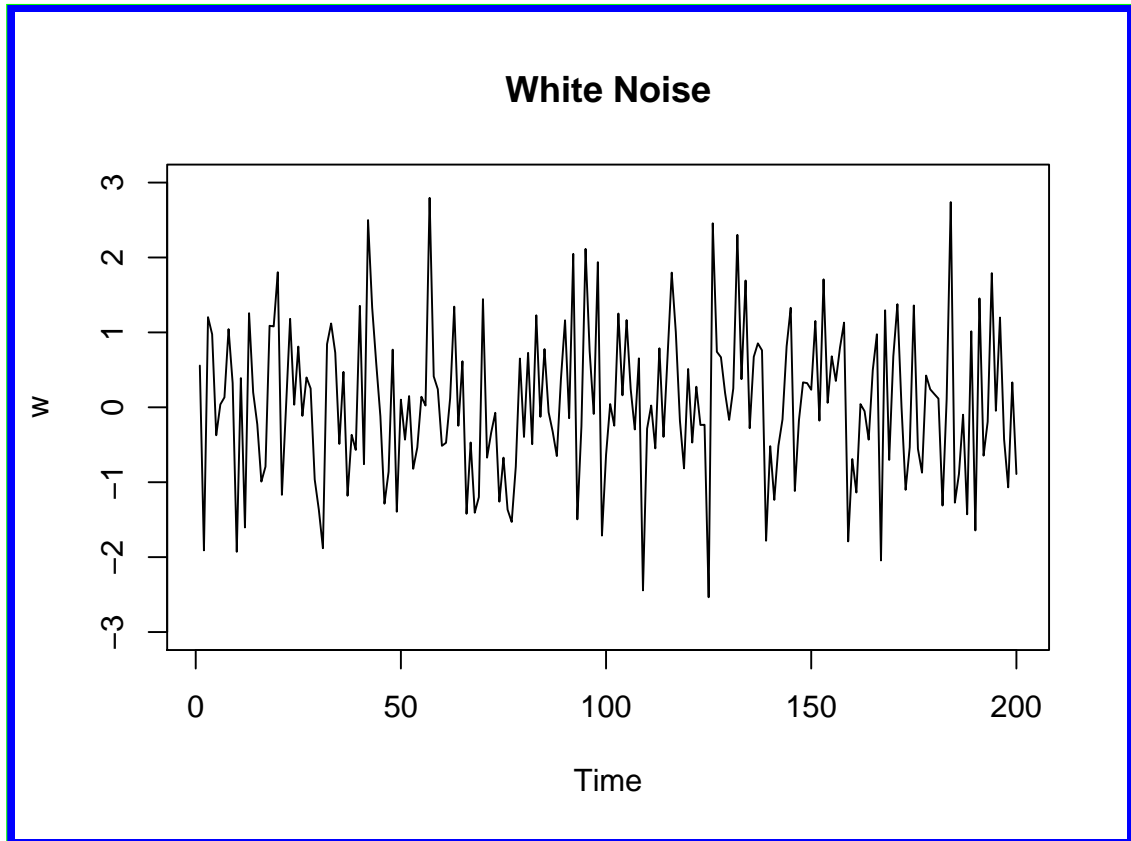


Figure 1.6: Ruido blanco - White Noise

Caminata aleatoria

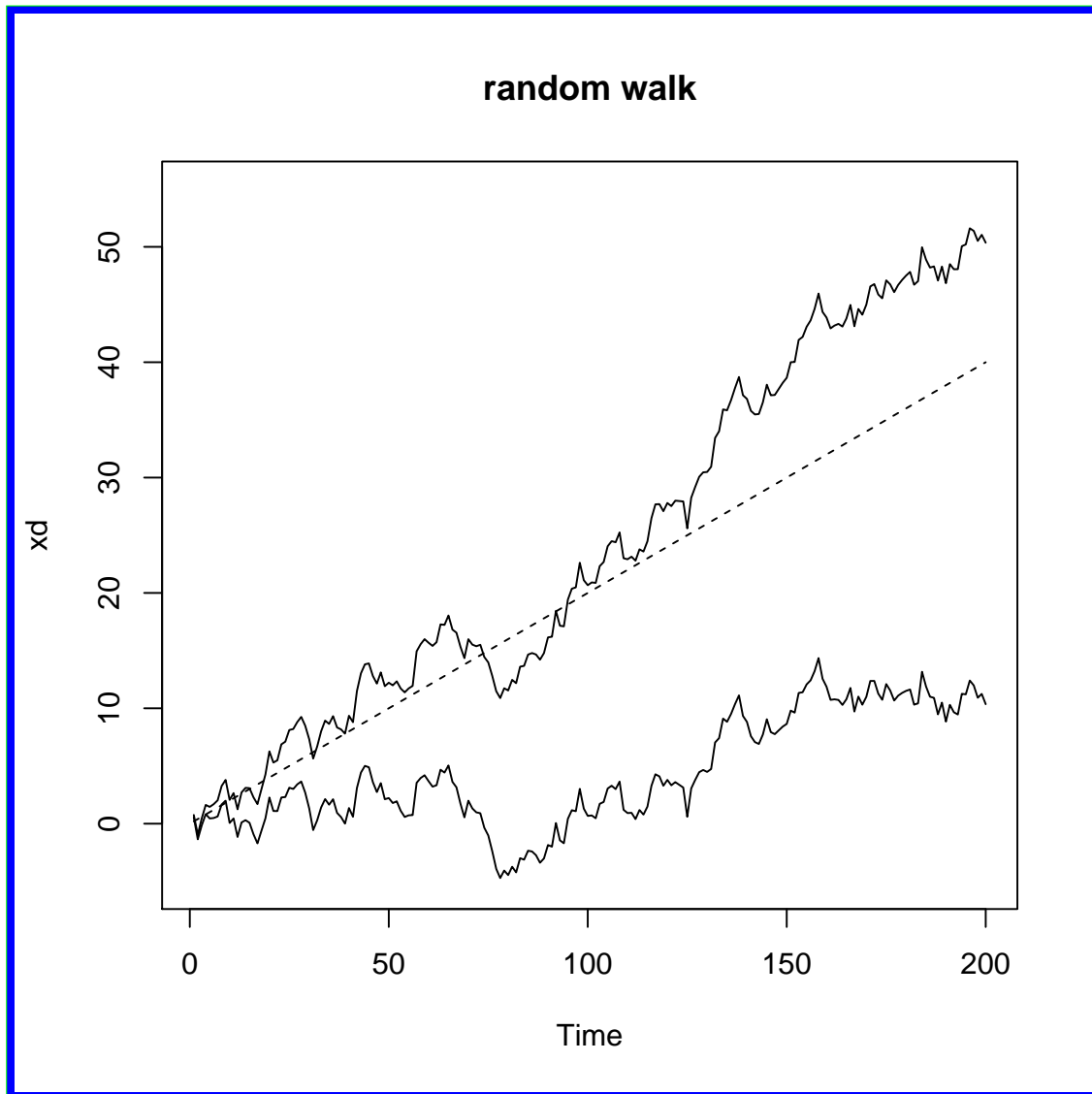


Figure 1.7: Caminata Aleatoria - Random walk, $\sigma_{\epsilon} = 1$, with drift $\delta = 0.2$ (upper jagged line), without drift, $\delta = 0$ (lower jagged line), and a straight line with slope 0.2 (dashed line).

Medias móviles

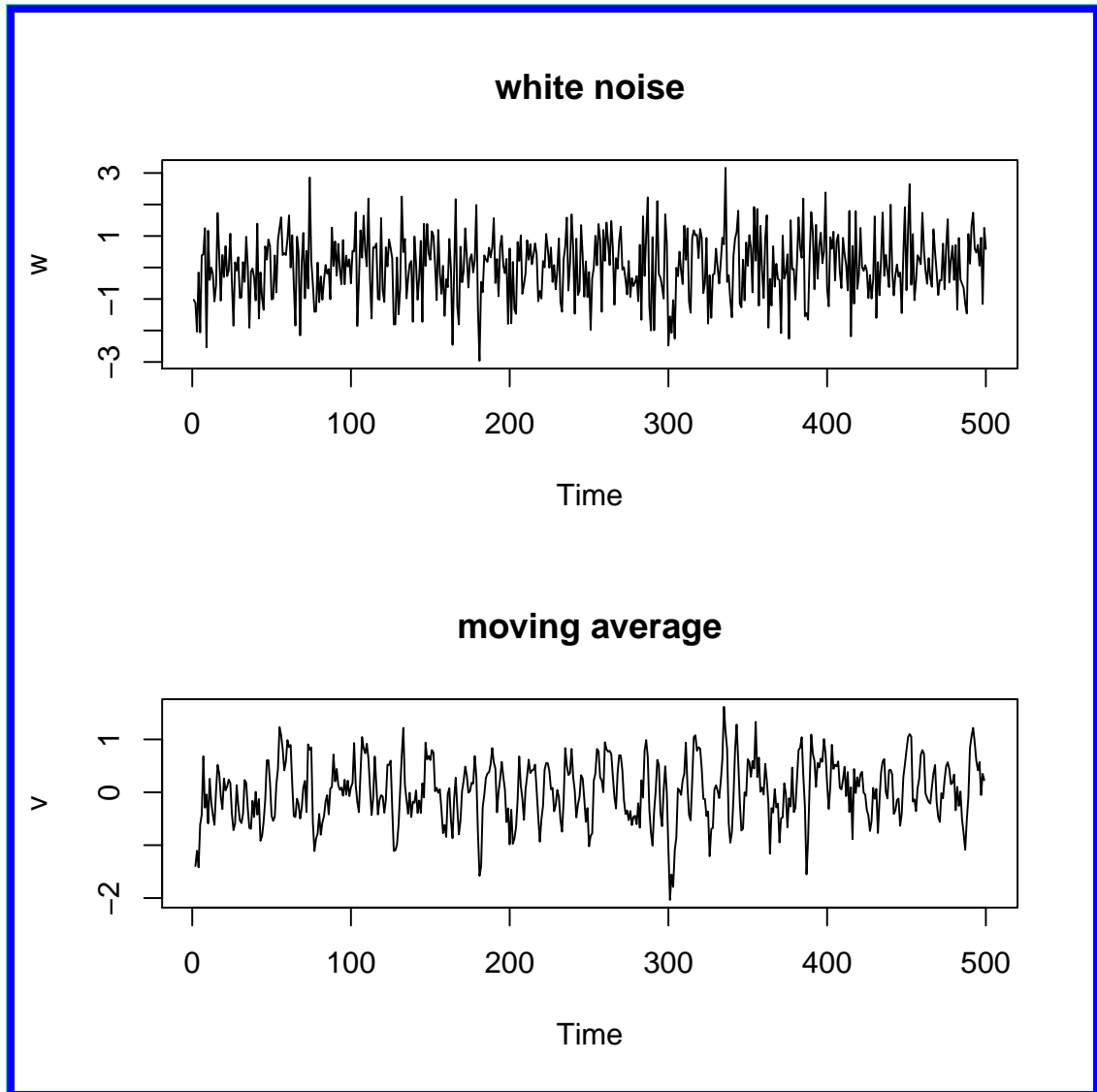


Figure 1.8: Promedios Móviles - Moving Averages

Autorregresiones

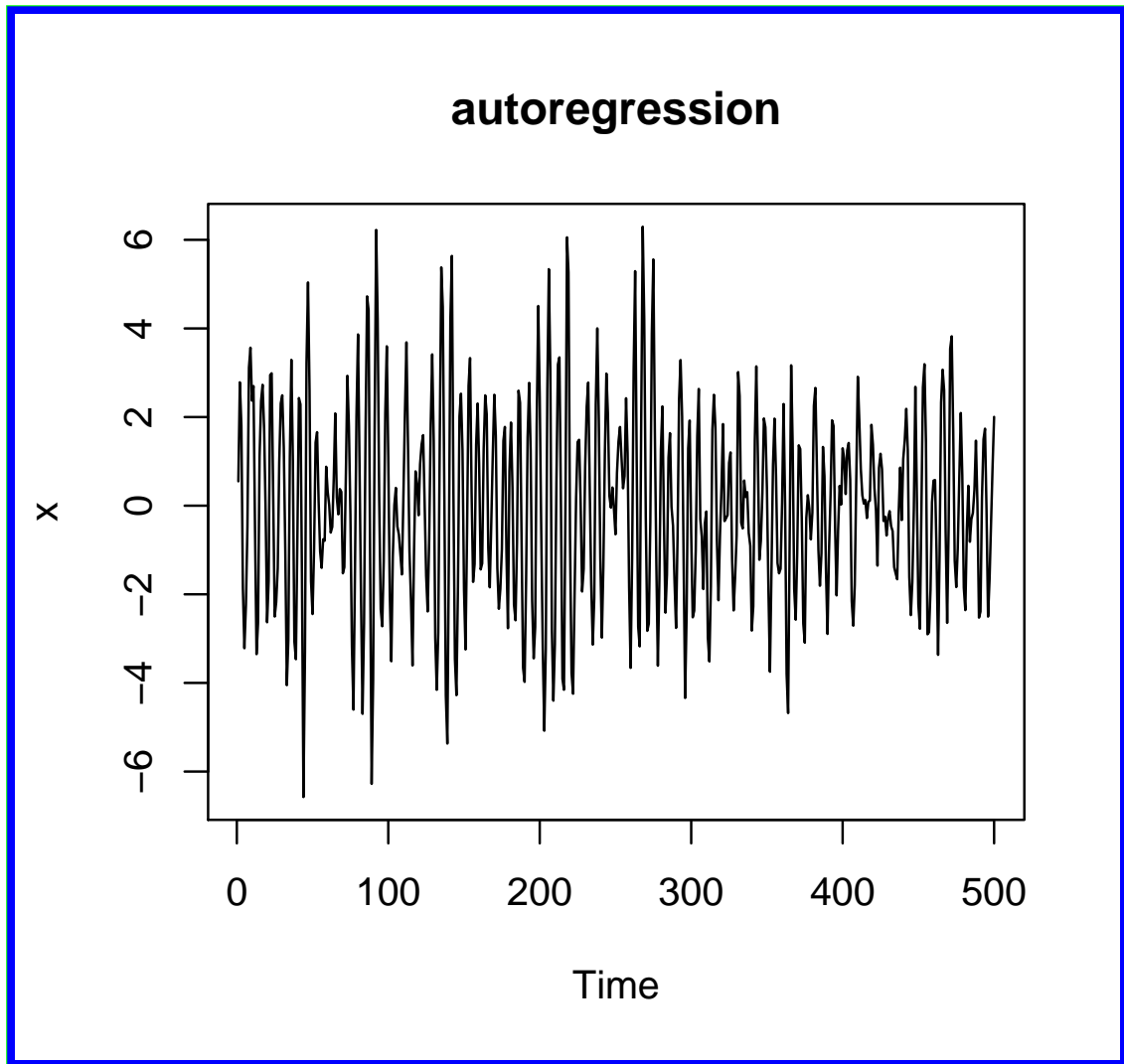


Figure 1.9: Autorregresiones - Autoregressions

Componentes de una Serie de Tiempo

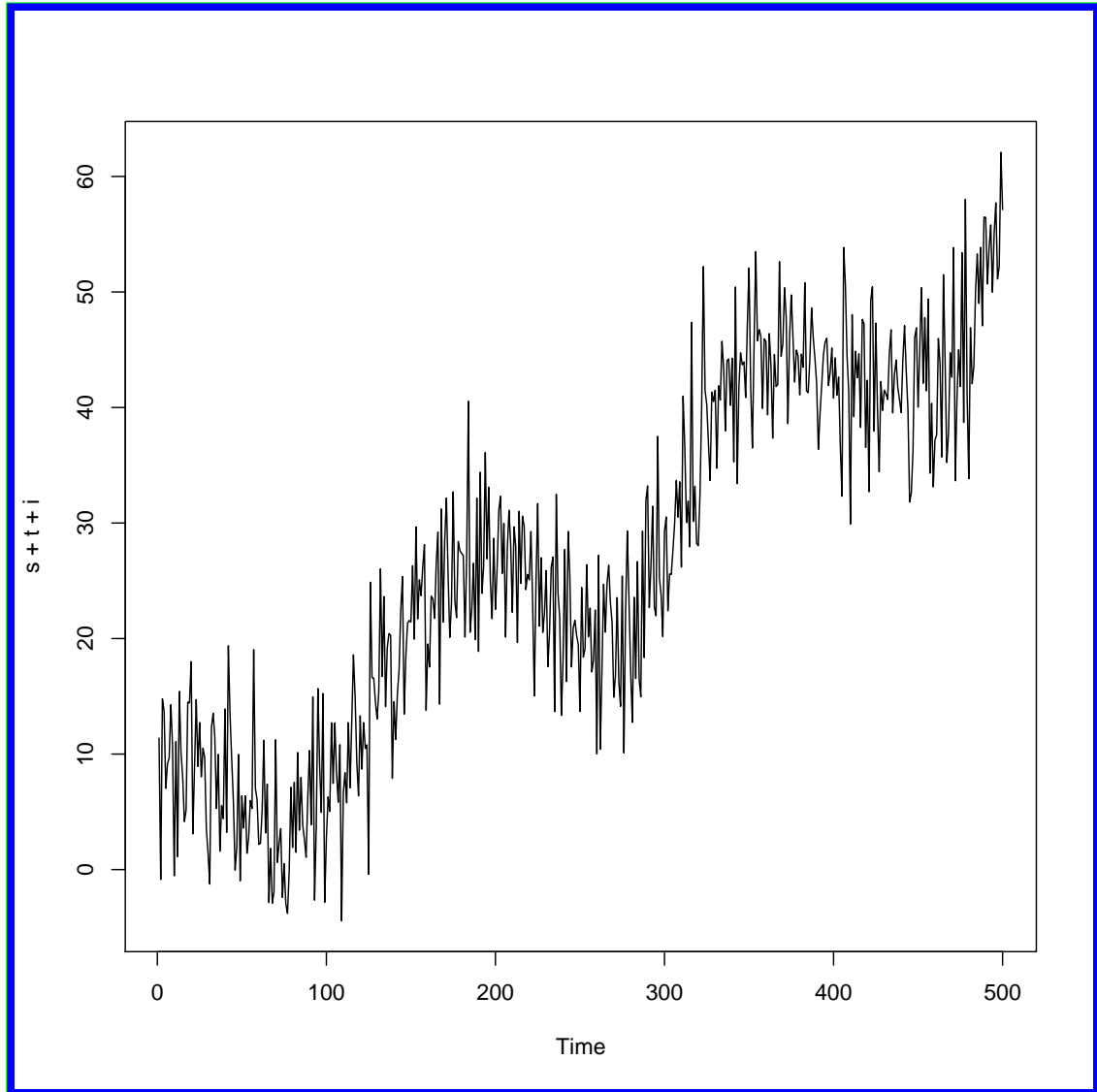


Figure 1.10: Serie de tiempo con sus componentes T, S e I.

Regresiones

```
Call:
lm(formula = Dlnprecio_sp ~ Dlnprecio_rut)

Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.0193109 -0.0012208  0.0000333  0.0011929  0.0216599

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -2.041e-05  3.444e-05  -0.593    0.553
Dlnprecio_rut  7.171e-01  5.263e-03 136.237 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.002352 on 4662 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7992, Adjusted R-squared:  0.7992
F-statistic: 1.856e+04 on 1 and 4662 DF, p-value: < 2.2e-16
```


Russell explicado por SP500

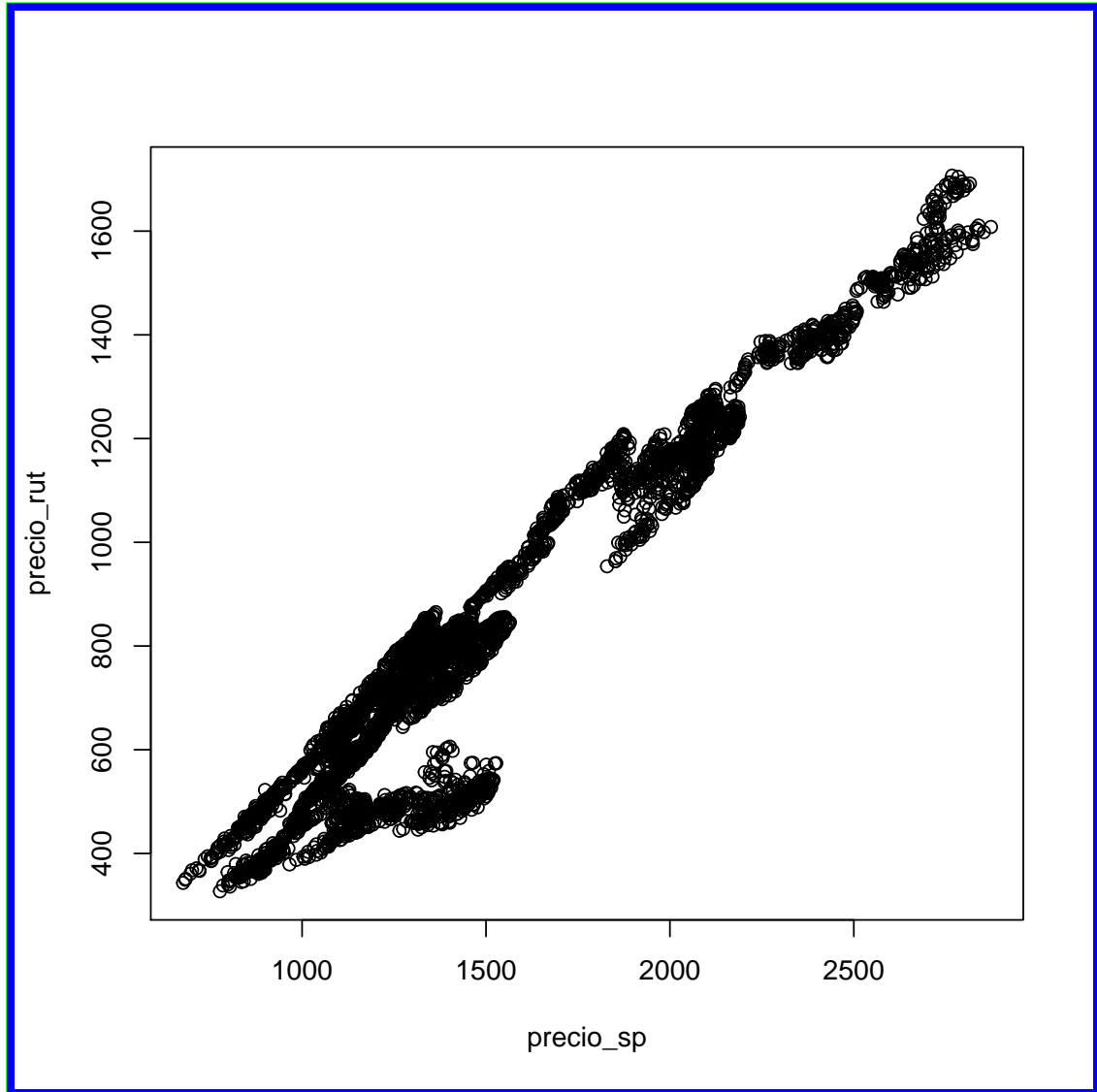


Figure 1.11: Regresión de Russell 2000 en función del S&P500

Homocedasticidad

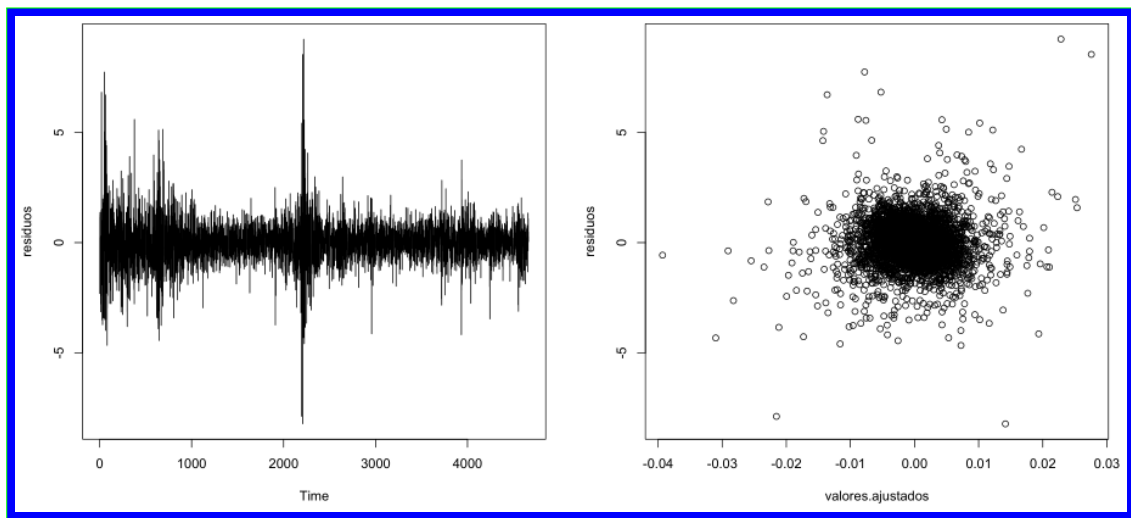


Figure 1.12: Izquierda: Derecha

Normalidad de los residuos

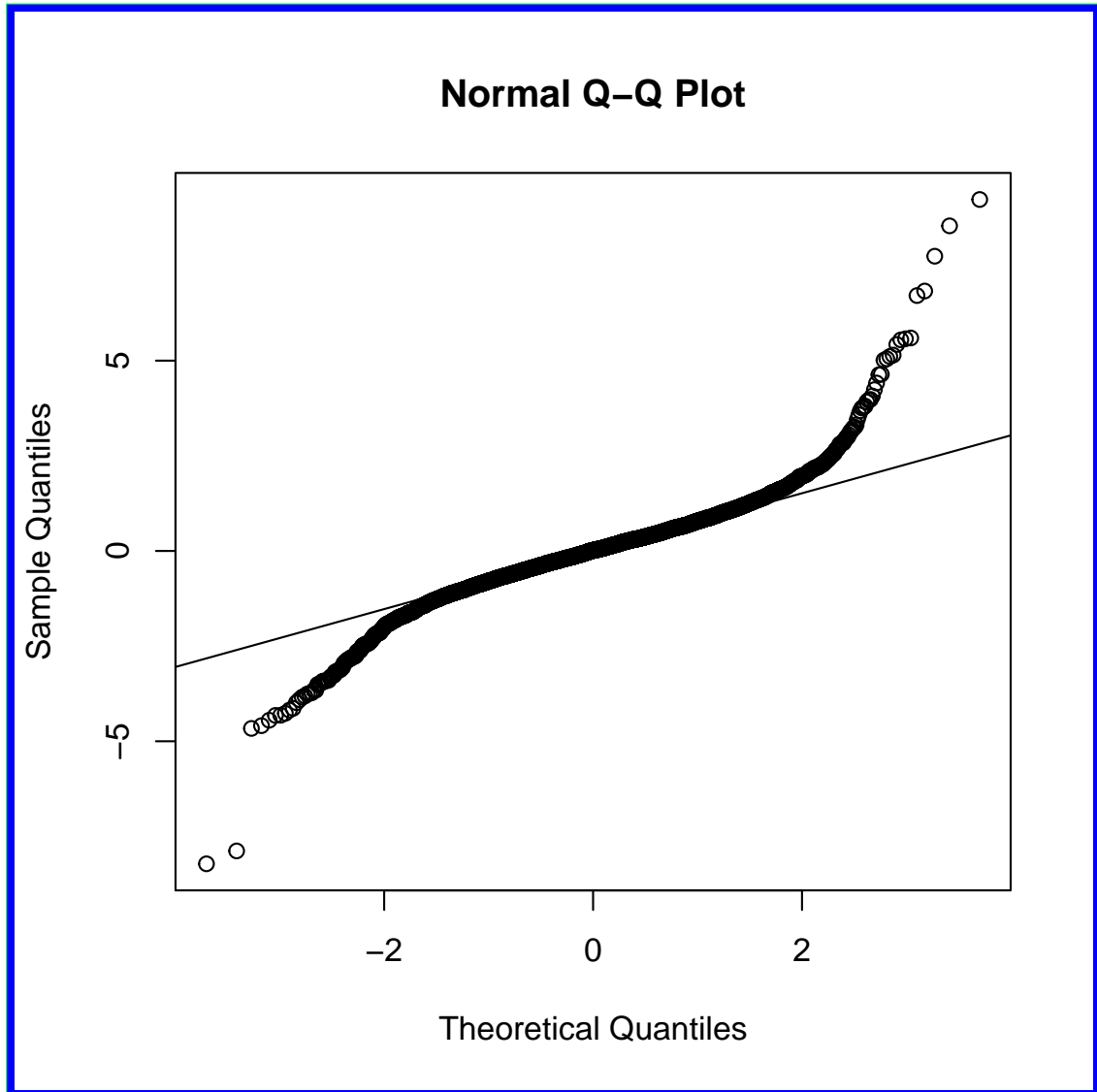


Figure 1.13: Grafico QQ-Plot de los residuos. La linea punteada indica el comportamiento de una distribución normal, mientras los puntos alejados de ella en los extremos dan cuenta de como se alejan los residuos del comportamiento normal.

2 Tópico II.- Univariate Time Series Models

2.1 Ejemplo de repaso clase anterior-Detrending global temperature

Como vimos en la clase anterior, la evolución de la temperatura global manifestaba una tendencia lineal, por lo que podemos asumir que esta puede ser escrita como:

$$x_t = \mu_t + y_t$$

Veremos dos maneras de descomponer la serie, “filtrando” la tendencia.

‘Código R: ejemplo 1 Obtención de la componente “tendencia” de la serie temperatura global(gtemp).’

```
rm(list=ls())
mydata<-read.csv ("gtemp.csv")
gtemp<-mydata$"gtemp"
plot(gtemp, type="o", ylab="Global_Temperature_Deviations")
t<-1:142
summary(reg <- lm(gtemp ~ t))
plot(gtemp, type="o", ylab="Global_Temperature_Deviations")
abline(reg)
```

‘Código R: ejemplo 1 Regresando gtemp sobre tiempo.’

```
reg1= lm(gtemp~time(gtemp), na.action=NULL)
par(mfrow=c(2,1))
plot(resid(reg1), type="o", main="detrended")
plot(diff(gtemp), type="o", main="first_difference")
```

‘Código R: ejemplo 1 Correlogramas de series.’

```
par(mfrow=c(3,1)) # plot ACFs
acf(gtemp, 48, main="gtemp")
acf(resid(reg), 48, main="detrended")
acf(diff(gtemp), 48, main="first_difference")
```

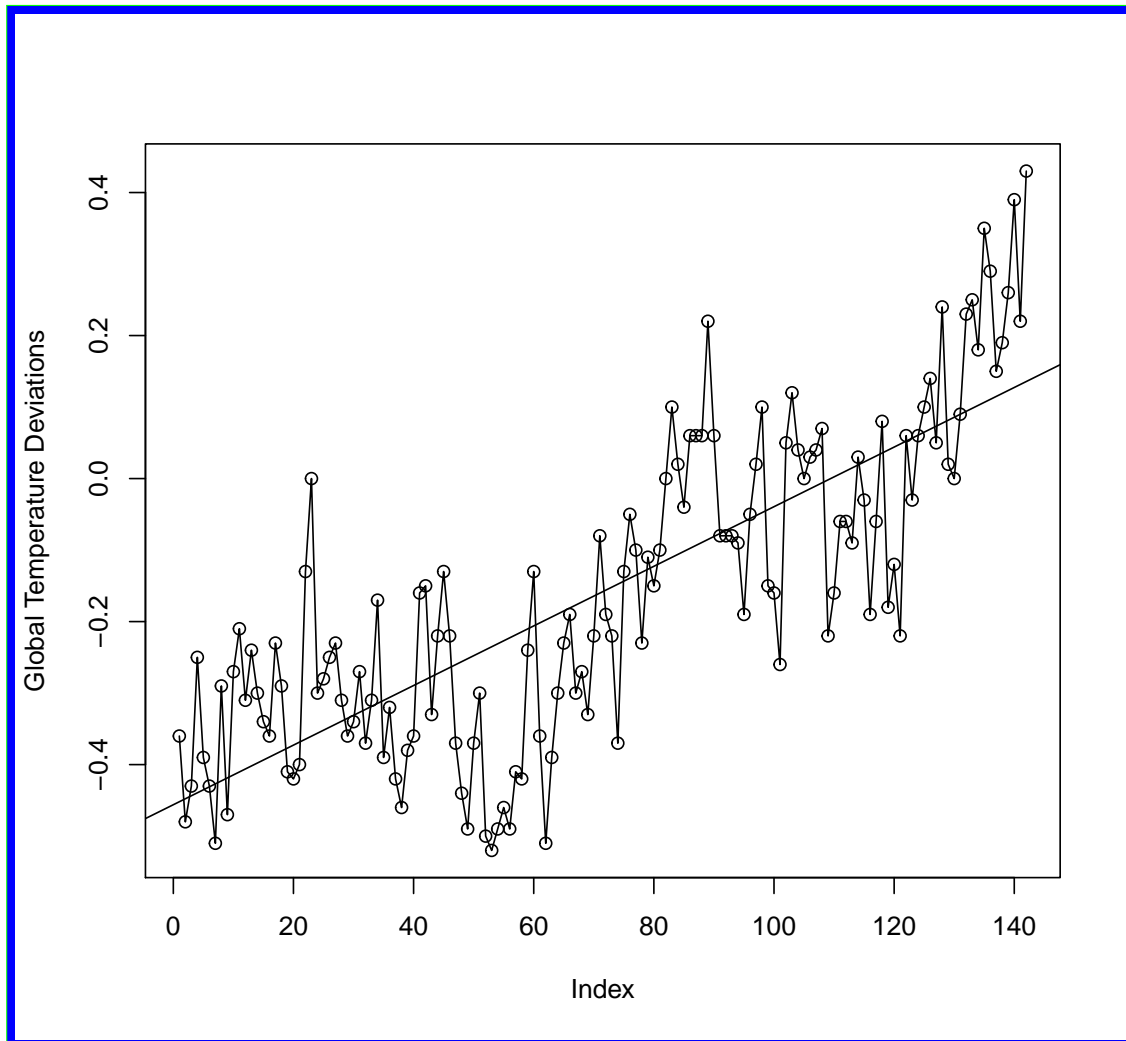
Ejemplo 1: Detrending global temperature

Figure 2.1: La figura muestra en línea punteada la tendencia de la serie de tiempo.

2.2 Sobre la descomposición de una serie

En los gráficos podemos apreciar que la primera diferencia de la serie produce resultados diferentes a la eliminación de la tendencia mediante la regresión de la tendencia.

En el caso de los gráficos ACF, el proceso diferenciado muestra una autocorrelación mínima, lo que puede implicar que la serie de temperatura global es similar una caminata aleatoria con deriva.

Es interesante notar que si la serie es una caminata aleatoria con deriva, la media de la serie diferenciada, que es una estimación de la deriva, es aproximadamente ,0066, pero con un gran error estándar:

Detrending global temperature

```

Call:
lm(formula = gtemp ~ t)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.31231 -0.08627  0.00681  0.09064  0.36023

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.4560863  0.0227675  -20.03  <2e-16 ***
t             0.0041677  0.0002762   15.09  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.1349 on 140 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6192,    Adjusted R-squared:  0.6164
F-statistic: 227.6 on 1 and 140 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

Figure 2.2: Parametría de la regresión de temperatura en el tiempo.

Ejemplo 1: Detrending global temperature

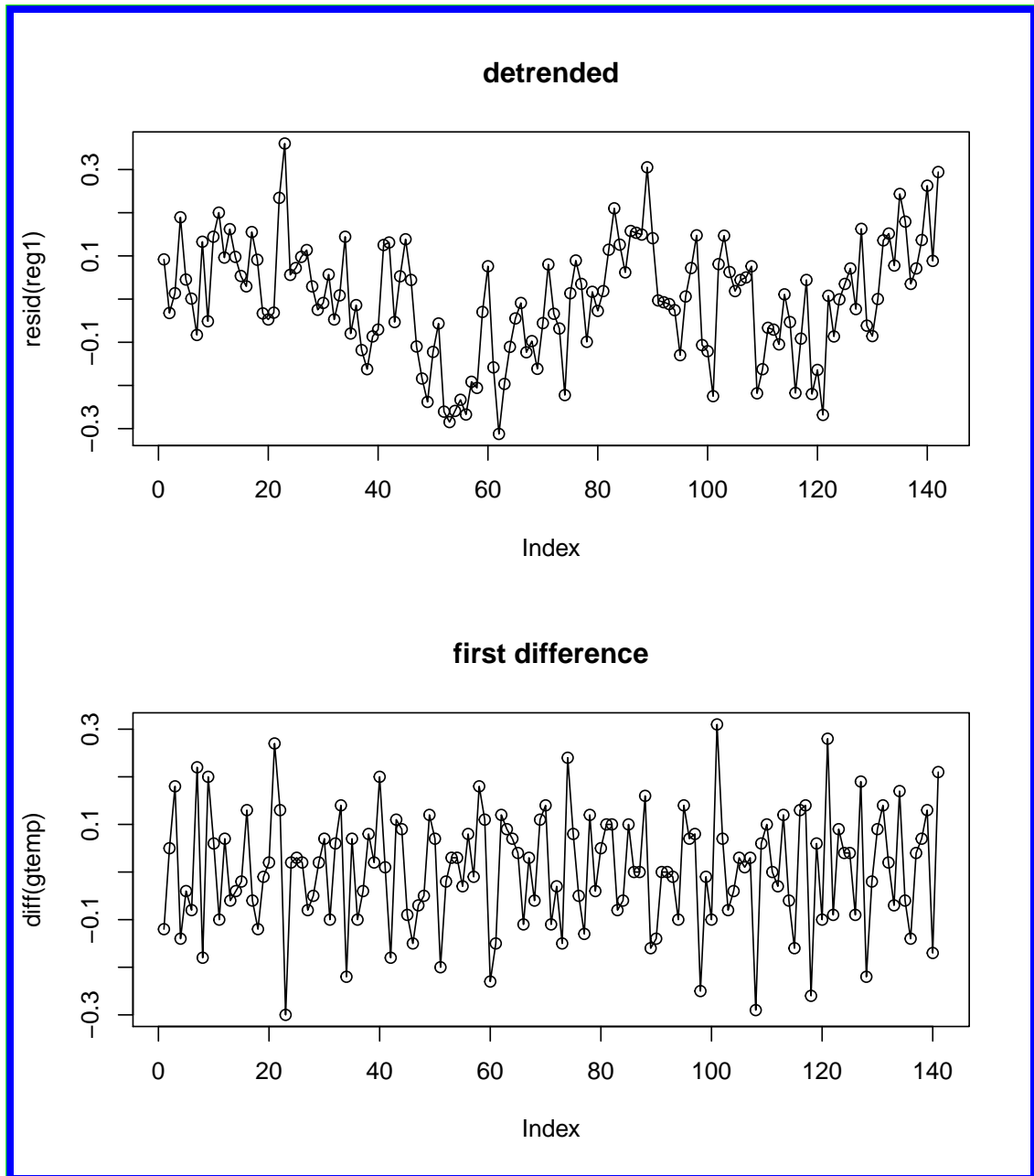


Figure 2.3: Arriba: residuos de la regresión. Abajo:primeras diferencias de la serie original

Ejemplo 1: Autocorrelograma

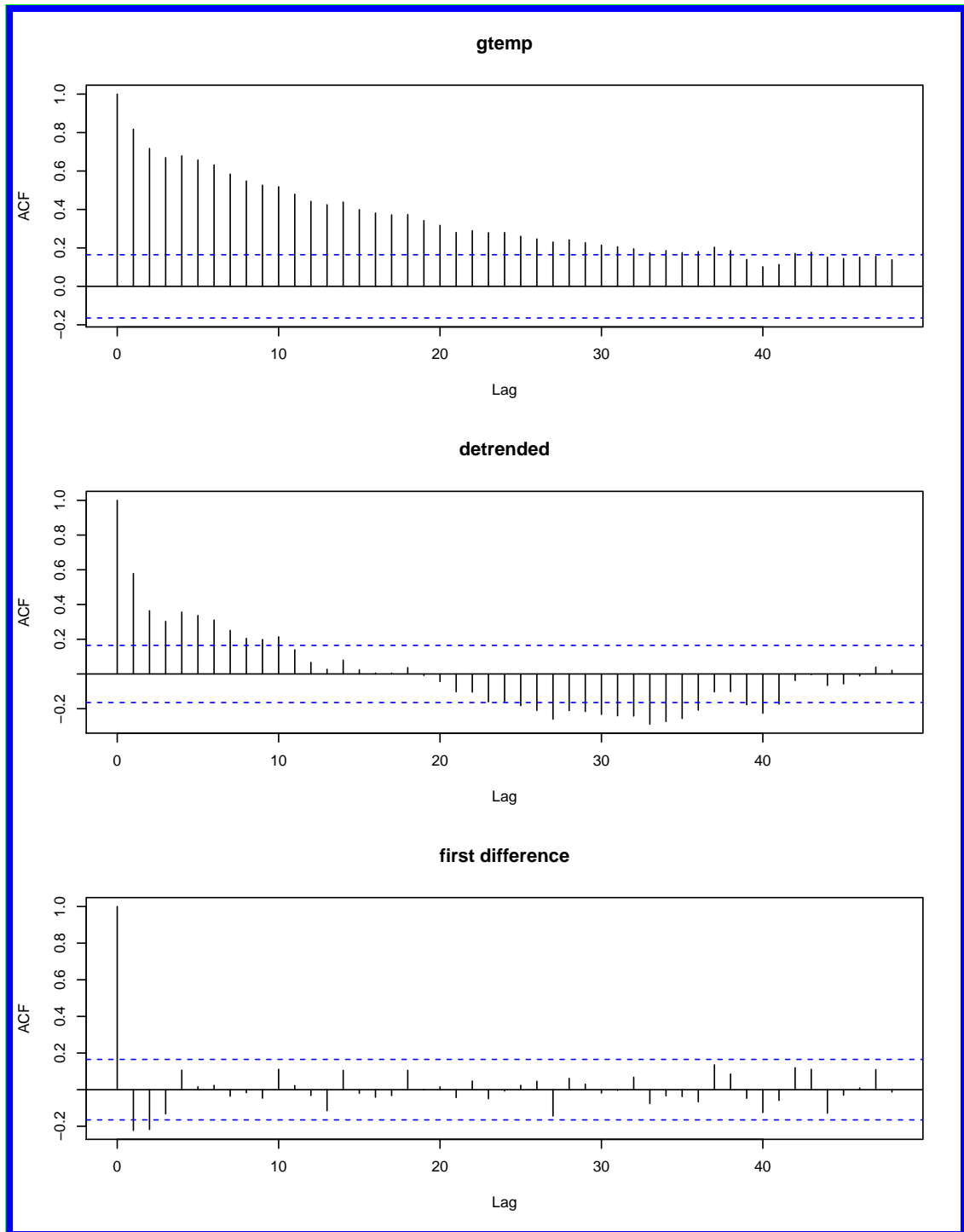


Figure 2.4: Autocorrelogramas para diferentes retardos(lags): Arriba:serie original. Medio: residuos de la regresión. Abajo: primera diferencia de la serie original

‘Código R: ejemplo 1: sobre la descomposición de una serie - media y error estandar’

```
mean (diff(gtemp)) #media
sd (diff (gtemp)) / sqrt (length(diff (gtemp))) #error estandar
```

Una ventaja de diferenciar sobre la estimación de una tendencia, para eliminar las tendencias, es que no se estiman parámetros en la operación de diferenciación. Una desventaja, sin embargo, es que la diferenciación no arroja una estimación del proceso estacionario y_t .

De esta forma, si una estimación de y_t es esencial, entonces la estimación de una tendencia puede ser la forma más apropiada para eliminar las tendencias de la serie. Si el objetivo es forzar los datos a la estacionaridad, entonces la diferenciación puede ser más apropiada. La diferenciación también es una herramienta viable si la tendencia es fija.

En EE.UU. el procedimiento oficial de descomposición y ajuste estacional se llama:

X-13-ARIMA (<http://www.census.gov/srd/www/x13as/>)

2.3 Procesos no estacionarios, integrados y el test de raíz unitaria

Recordemos que si una serie de tiempo es estacionaria, su media, su varianza y su autocovarianza (en diferentes rezagos) permanecen iguales sin importar el momento del tiempo en el cual se midan; es decir, son **invariantes respecto al tiempo**.

Por otro lado, hemos visto que la estacionaridad es una característica deseable, por ejemplo, en términos de la normalidad de las variables. Sin embargo, en la práctica nos encontramos con:

- (i) Procesos No-estacionarios: Cuando un proceso estocástico de series de tiempo es dependiente del tiempo.
- (ii) Procesos Integrados: un proceso no-estacionario, el cual puede ser transformado a proceso estacionario diferenciando.

2.3.1 Procesos Integrados

Con respecto a los Procesos Integrados, partimos definiendo:

- La secuencia $\{x_t\}$ es integrada de orden d , $I(d)$, si esta requiere ser diferenciada d veces para llegar a ser estacionaria.
- Todos los **Procesos Integrados son no-estacionarios**, pero no todos los procesos no-estacionarios son integrados.
- Si la secuencia $\{x_t\}$ tiene una raíz unitaria, entonces, es un proceso integrado, y de aquí no-estacionario.

2.3.2 Consecuencias de los Procesos Integrados (Raíz Unitaria)

- Es importante señalar que los test estadísticos estándares no son apropiados cuando los MCO (OLS) son aplicados a procesos integrados, ver por ejemplo [Granger and Newbold \(1974\)](#).
- Si la secuencia $\{x_t\}$ es un proceso de raíz unitaria, entonces, cualquier shock tiene un efecto permanente (que no decae). De aquí, la serie de tiempo es modelada apropiadamente suponiendo una tendencia estocástica. La serie de tiempo entonces puede ser definida como estacionaria diferenciable, y se le deberá sacar la tendencia diferenciando.
- En este contexto, **los términos no-estacionariedad, caminata aleatoria, raíz unitaria y tendencia estocástica se consideran sinónimos.**

2.3.3 Test de Raíz Unitaria

Considere el siguiente proceso autoregresivo:

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.1)$$

Si $\alpha_1 = 1$, la secuencia x_t es una raíz unitaria.

El test estándar para probar esta hipótesis, consiste en restar x_{t-1} a la ecuación anterior de forma que:

$$\Delta x_t = \gamma x_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.2)$$

donde $\gamma = \alpha_1 - 1$, y $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$. En este contexto, probar la hipótesis que la ecuación (1) tiene una raíz unitaria, $\alpha_1 = 1$, es equivalente a probar la hipótesis de $\gamma = 0$ en ecuación (2). Este es básicamente el enfoque de Dickey-Fuller (DF) para raíces unitarias, ver por ejemplo [Dickey and Fuller \(1981\)](#). Adicionalmente existe el test aumentado de Dickey-Fuller (ADF), y muchos otros tests que se basan en lógicas similares, y que utilizaremos durante el curso.

Ejemplo de Test de Raíz Unitaria - Dickey-Fuller

‘Código R: Ejemplo Test de Raíz Unitaria - Dickey-Fuller ’

```
library(tseries)
adf.test(gtemp)
adf.test(resid(reg1))
adf.test(diff(gtemp))
```

Ejemplo: Resultados de Test de Raíz Unitaria - Dickey-Fuller**Augmented Dickey-Fuller Test**

data: gtemp

Dickey-Fuller = -2.0624, Lag order = 5, p-value = 0.5505

alternative hypothesis: stationary

Augmented Dickey-Fuller Test

data: resid(reg1)

Dickey-Fuller = -2.0624, Lag order = 5, p-value = 0.5505

alternative hypothesis: stationary

Augmented Dickey-Fuller Test

data: diff(gtemp)

Dickey-Fuller = -6.8179, Lag order = 5, p-value = 0.01

alternative hypothesis: stationary

Figure 2.5: Test de raíz unitaria Dickey-Füller para diferentes series: Arriba:serie original (gtemp). Medio: residuos de la regresión(resid(reg1)). Abajo: primera diferencia de la serie original (diff(gtemp))

2.4 Modelos ARIMA: modelando el corto plazo

En el año 1970, la metodología propuesta por George Box y Gwilym Jenkins, [Box and Jenkins \(1970\)](#), dos ingenieros con formación estadística sistematizan modelos estadísticos para el análisis de series temporales univariantes, teniendo en cuenta para esto la dependencia existente entre los datos.

Así, cada observación es modelada en función de los valores anteriores, la variable tiempo, por tanto, juega un papel fundamental.

Los modelos de predicción de Box-Jenkins pertenecen a la familia de modelos algebraicos lineales, que consideran que una serie temporal real constituye una probable realización de un determinado proceso estocástico.

Estos modelos se conocen con el nombre genérico de ARIMA (Auto-regresive Integrated Moving Average), el cual deriva de sus tres componentes Autoregresivo (AR), Integrado (I) de Medias

Móviles (MA). Modelar una serie temporal supone identificar un modelo ARIMA adecuado que se ajuste a la serie objeto de estudio, debe contener los mínimos elementos necesarios para describir el fenómeno y ser útil para realizar previsiones.

2.4.1 Sobre el operador de retroceso - backshift operator

Definition 9. Definición: operador de retroceso (backshift operator):

$$Bx_t = x_{t-1} \quad (2.3)$$

$$B^2x_t = B(Bx_t) = Bx_{t-1} = x_{t-2} \quad (2.4)$$

Así:

$$B^k x_t = x_{t-k} \quad (2.5)$$

De esta forma tenemos que la primera diferencia se puede definir en términos de lags, en otras palabras del operador de retroceso:

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1} = (1 - B)x_t \quad (2.6)$$

En general:

$$\Delta^d x_t = (1 - B)^d x_t \quad (2.7)$$

Definition 10. Definición: AR(p): Un modelo autorregresivo de orden p , frecuentemente abreviado como $AR(p)$, tiene la forma:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \epsilon_t \quad (2.8)$$

donde x_t es una serie estacionaria, y $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ son constantes. Si la media de x_t es μ , entonces podemos reemplazar $x_t - \mu$ en (2.8)

$$x_t - \mu = \phi_1(x_{t-1} - \mu) + \phi_2(x_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p(x_{t-p} - \mu) + \epsilon_t \quad (2.9)$$

$$x_t = \alpha + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \epsilon_t \quad (2.10)$$

donde $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p)$

Usando los operadores de retroceso $AR(p)$ queda como:

$$(1 - \phi_1 B + \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \quad (2.11)$$

o incluso más concisamente

$$\phi(B)x_t = \epsilon_t \quad (2.12)$$

2.4.2 Ejemplo Proceso Autoregresivo de Orden 1: AR(1)

En un procesos AR(1) la variable x_t queda únicamente por su valor pasado x_{t-1} :

$$x_t = \phi x_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.13)$$

donde como sabemos ϵ_t es un proceso de ruido blanco con media cero y varianza constante σ^2 , y ϕ es un parámetro. Para verificar que el modelo AR(1) es estacionario debemos probar que es:

(1) Estacionario en media

$$E(x_t) = E(\phi x_{t-1} + \epsilon_t) = \phi E(x_{t-1}) \quad (2.14)$$

Para que el proceso sea estacionario, la media debe ser constante y finita en el tiempo, lo que implica:

$$E(x_t) = \phi E(x_t) \implies E(x_t) = \frac{0}{1 - \phi} = 0 \quad (2.15)$$

Por lo tanto, para que el proceso sea estacionario el parámetro $\phi \neq 0$.

(2) Estacionario en covarianza

Para verificar que el modelo AR(1) sea estacionario, la varianza debe ser constante y finita en el tiempo:

$$\gamma = E(x_t - E(x_t))^2 = E(\phi x_{t-1} + \epsilon_t - 0)^2 = \phi^2 \text{var}(x_{t-1}) + \sigma^2 \quad (2.16)$$

Asumiendo que el proceso es estacionario:

$$E(x_t)^2 = \text{var}(x_{t-1}) = \text{var}(x_t) = \gamma \quad (2.17)$$

De aquí tenemos que:

$$\gamma = \phi^2 \gamma + \sigma^2 \quad (2.18)$$

Por lo que:

$$\gamma = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \quad (2.19)$$

Para que un proceso sea estacionario, varianza constante y finita, es necesario que $|\phi| < 1$.

Si se cumple que $|\phi| < 1$, entonces podemos representar el modelo AR(1) como un proceso lineal dado por:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{t-j} \quad (2.20)$$

La ecuación (2.20) se llama **solución estacionaria causal del modelo**. El término causal se refiere al hecho de que x_t no depende del futuro. De hecho, por simple sustitución,

$$\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{t-j}}_{x_t} = \phi \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-1-k} \right)}_{x_{t-1}} + \epsilon_t \quad (2.21)$$

2.4.3 Simulación modelo AR(1)

‘Código R: Simulación modelo AR(1)’

```
par(mar=c(1,1,1,1))
par(mfrow=c(2,1))
plot(arima.sim(list(order=c(1,0,0), ar=.9), n=100), ylab="x",
main=(expression(AR(1)~~~phi==+.9)))

plot(arima.sim(list(order=c(1,0,0), ar=-.9), n=100), ylab="x",
main=(expression(AR(1)~~~phi==-.9)))
```

Simulación AR(1)

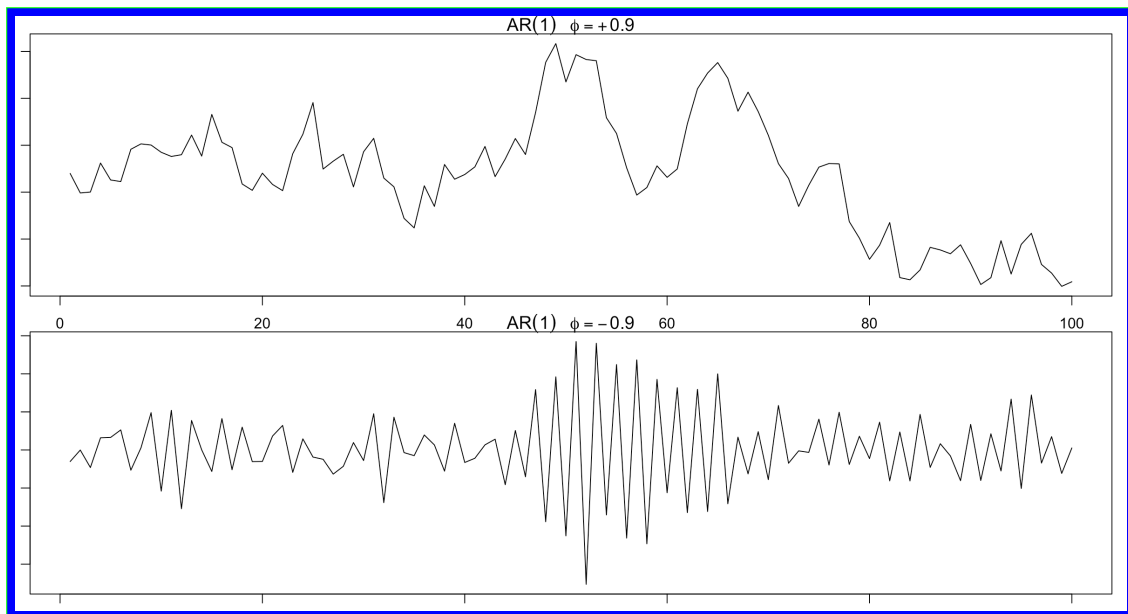


Figure 2.6: Simulaciones procesos AR(1): Arriba: $\phi = +0.9$. Abajo: $\phi = -0.9$

2.4.4 Identificación modelo AR(1)

Para el caso de un proceso del tipo AR, el correlograma, representación gráfica de la función de autocorrelación, tendrá un comportamiento amortiguado hacia cero con todos los valores positivos, en caso de que $\theta > 0$, o bien alternando el signo, comenzando con negativo, si $\theta < 0$.

Proceso Autoregresivo: AR(1)

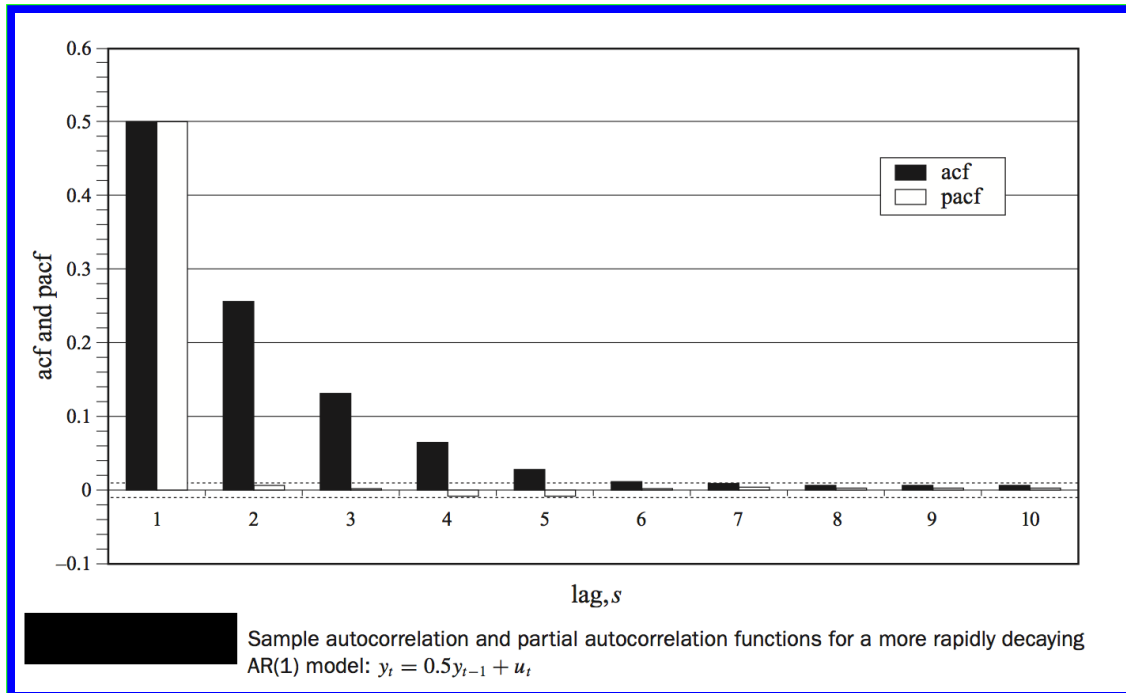


Figure 2.7: Autocorrelogramas para autocorrelación(acf) y autocorrelación parcial(pacf)

Proceso Autoregresivo: AR(1)

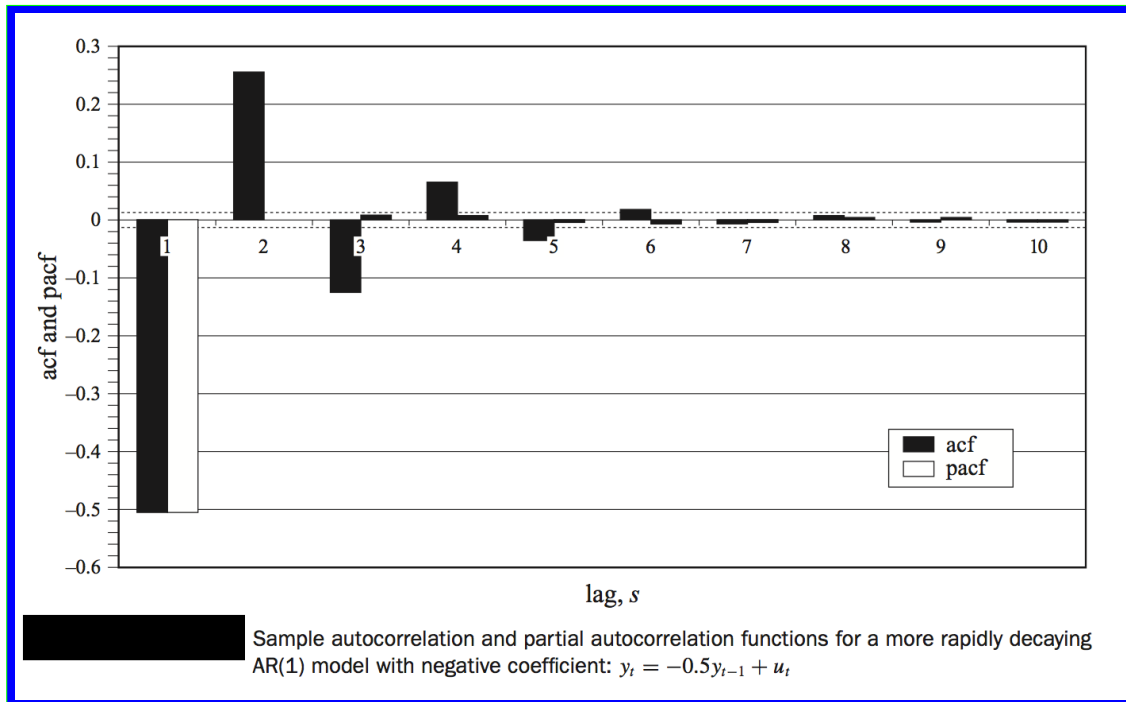


Figure 2.8: Autocorrelogramas para autocorrelación(acf) y autocorrelación parcial(pacf)

2.4.5 Media Móvil - MA (q)

Como una alternativa a la representación autorregresiva en la que se supone que el x_t en el lado izquierdo de la ecuación se combina linealmente, el modelo de promedio móvil de orden q , abreviado como $MA(q)$, asume que el ruido blanco ϵ_t usualmente a la mano derecha de la ecuación, se combinan linealmente para modelar los datos observados.

Definition 11. Definición: Media Móvil - $MA(q)$:

$$x_t = \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q\epsilon_{t-q} \quad (2.22)$$

donde hay q rezagos de la media móvil ϵ_t y $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_q$ son parámetros.

Aunque no es necesario, suponemos que ϵ_t es una serie de ruido blanco.

Definition 12. Definición: Media Móvil - MA(q): También podemos escribir el proceso MA(q) en la forma equivalente:

$$x_t = \theta_t(B)\epsilon_t \quad (2.23)$$

donde θ_t es el operador de promedio móvil definido como:

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q \quad (2.24)$$

A diferencia del proceso autorregresivo, el proceso de promedio móvil es estacionario para cualquier valor de los parámetros $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_q$.

Interpretación del model de media móvil - MA (q)

Así como un modelo autorregresivo es intuitivamente sencillo de comprender, la formulación de un modelo de medias móviles resulta frecuentemente no intuitivo. ¿Qué significa que una variable aleatoria se explique en función de los errores cometidos en períodos anteriores?, ¿De dónde vienen esos errores?, ¿Cuál es la justificación de un modelo de este tipo?. En realidad, un modelo de medias móviles puede obtenerse a partir de un modelo autorregresivo a partir de la realización de sucesivas sustituciones.

Interpretación del model de media móvil - MA (q)

Supongamos un modelo AR(1), sin término independiente:

$$x_t = \phi x_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.25)$$

si consideramos $t - 1$ en lugar de t el modelo sería en este caso:

$$x_{t-1} = \phi x_{t-2} + \epsilon_{t-1} \quad (2.26)$$

sustituyendo:

$$x_t = \phi^2 x_{t-2} + \phi \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.27)$$

si ahora sustituimos x_{t-2} por su expresión autorregresiva y así sucesivamente llegamos a un modelo del tipo:

$$x_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} + \theta^2\epsilon_{t-2} + \dots + \theta^q\epsilon_{t-q} \quad (2.28)$$

que es la expresión, sin término independiente, de un modelo de medias móviles como el planteado anteriormente. En realidad, de forma estricta, el paso de un modelo a otro debería realizarse al contrario, de un MA a un AR, utilizando el teorema general de descomposición de Wold.

‘Código R: ejemplo Simulación modelo MA(1)’

```
par(mfrow = c(2,1))
plot(arima.sim(list(order=c(0,0,1), ma=.5), n=100), ylab="x",
main=(expression(MA(1), theta==+.5)))
plot(arima.sim(list(order=c(0,0,1), ma=-.5), n=100), ylab="x",
main=(expression(MA(1), theta==-.5)))
```

Ejemplo 1: Simulación modelo MA(1)

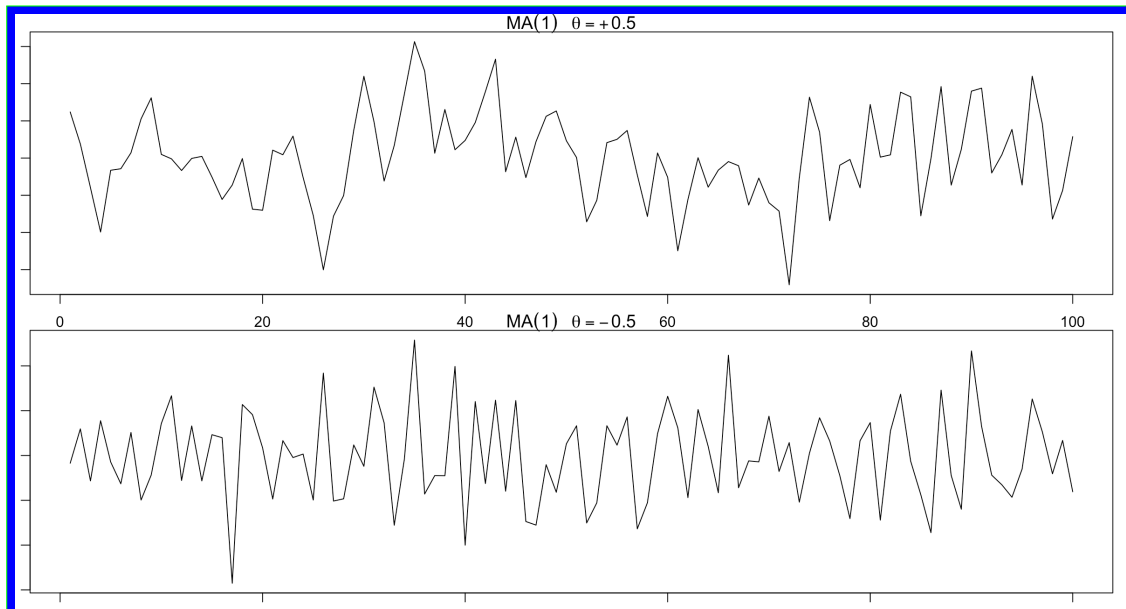


Figure 2.9: Procesos de medias móviles. Arriba: parámetro $\theta = +0.5$. Abajo: parámetro $\theta = -0.5$

Identificación modelo MA

Para la identificación de todos los componentes del modelo MA, tal como vimos para el modelo AR, se utiliza la función de autocorrelación (AFC) y la función de autocorrelación parcial (PAFC), y así se procede a la identificación de los componentes, en base a los gráficos de los distintos modelos teóricos.

Autocorrelograma de proceso de media móvil MA(1), $\theta = +0.5$

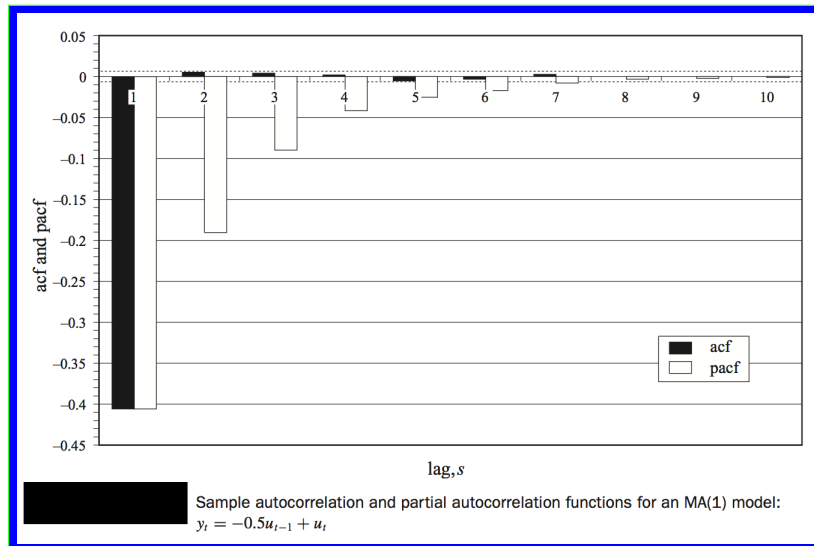


Figure 2.10: Autocorrelogramas para diferentes retardos de proceso de media móvil con $\theta = +0.5$ (lags). ACF(barras negras), PACF(barras blancas).

2.4.6 Identificación modelo ARMA

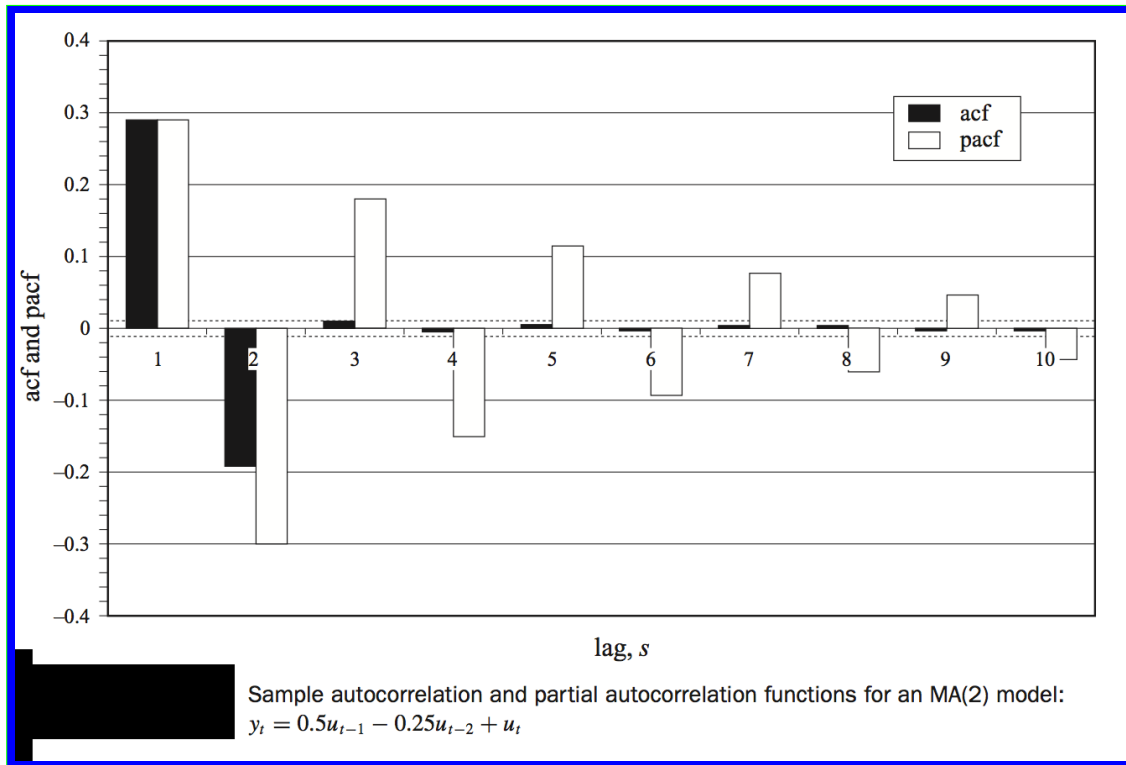
Autocorrelograma de proceso de media móvil MA(1), $\theta = -0.5$ 

Figure 2.11: Autocorrelogramas para diferentes retardos de proceso de media móvil con $\theta = -0.5(\text{lags})$. ACF(barras negras), PACF(barras blancas).

Definition 13. Definición: Modelo ARMA – ARMA(r, q):

Una serie de tiempo $\{x_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es un proceso ARMA(p, q), si es estacionario y

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} \quad (2.29)$$

Los parámetros p y q se llaman órdenes autoregresivos y promedios móviles, respectivamente.

Si x_t tiene una media distinta de cero μ , establecemos que $\alpha = \mu(1 - \theta_1 - \dots - \theta_q)$ y podemos re-escribimos el modelo como:

$$x_t = \alpha + \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} + w_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}. \quad (2.30)$$

2.4.7 Invertibilidad

Una serie temporal es invertible si los errores se pueden invertir en una representación de observaciones pasadas. Así por ejemplo, como ya vimos, el modelo AR es siempre invertible. En el caso del modelo ARMA, las raíces de las siguientes ecuaciones deben ser analizadas para garantizar invertibilidad.

$$\phi(z) = 1 + \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \dots + \phi_p z^p \quad (2.31)$$

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \dots + \theta_q z^q \quad (2.32)$$

En particular el modelo ARMA será invertible si y solo si $\theta(z) \neq 0$ para $|z| \leq 1$. En general, los valores propios son la solución del $\det(A - \lambda I) = 0$, vemos que este es casi el polinomio característico de las ecuaciones que definimos arriba. Por lo tanto, vemos que los valores propios de A son el inverso de las raíces del polinomio característico, y esa convergencia de la iteración hacia atrás ocurre cuando las raíces del polinomio característico se encuentran fuera del círculo unitario.

2.4.8 Estacionaridad e Invertibilidad

Wold demostró que todos los procesos estocásticos estacionarios de covarianza podrían descomponerse como la suma de procesos determinísticos y linealmente indeterministas los cuales no estaban correlacionados con todos los rezagos; es decir, si y_t es la covarianza estacionaria, entonces:

$$y_t = x_t + z_t \quad (2.33)$$

donde x_t es un proceso determinista estacionario en covarianza y z_t es linealmente indeterminista, con $Cov(x_t, z_s) = 0$ para todas los t y s . Este resultado proporciona una base teórica para la propuesta de Box y Jenkins para modelar procesos estacionarios de covarianza escalar (desestacionalizados) como son los procesos ARMA.

2.4.9 Modelos ARMA (p,q)

Como se indicó anteriormente, cuando $q = 0$, el modelo se denomina modelo autoregresivo de orden p , $AR(p)$, y cuando $p = 0$, el modelo se denomina modelo de promedio móvil de orden q , $MA(q)$.

Es útil escribir los modelos ARIMA usando el operador AR y el operador MA descritos anteriormente. En particular, el modelo $ARMA(p, q)$ puede escribirse entonces en forma concisa como:

$$\phi(B)x_t = \theta(B)\epsilon_t. \quad (2.34)$$

2.4.10 Modelos ARIMA (p, i, q)

El modelo ARMA gana su I y se convierte en ARIMA cuando debe ser integrado para lograr estacionaridad. El índice I será entonces el numero de veces que debe ser diferenciado.

2.4.11 Identificación modelo ARMA

Para la identificación de todos los componentes del modelo ARMA se utiliza la función de autocorrelación (AFC) y la función de autocorrelación parcial (PAFC), y así se procede a la identificación de los componentes estacional y no estacional por separado, en base a los gráficos de los distintos modelos teóricos.

Proceso autoregresivo de media móvil de orden (1,1): ARMA(1,1)

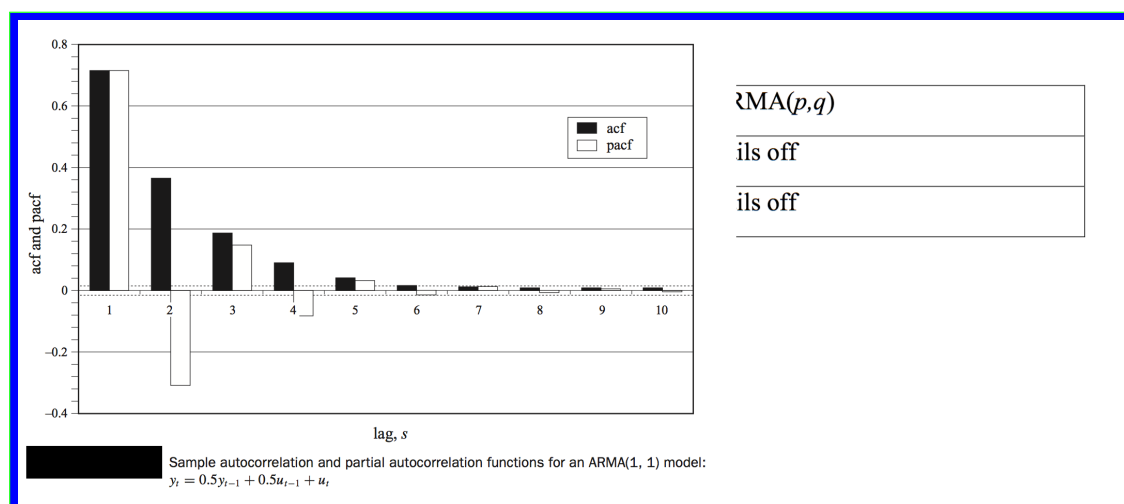


Figure 2.12: Autocorrelogramas para diferentes retardos(lags) para un proceso ARMA(1,1)

En resumen tendremos:

2.4.12 Modelos SARIMA (p,q)

Los modelos ARIMA también son capaces de modelar una amplia gama de datos estacionales. Los llamados modelos SARIMA, Seasonal ARIMA models, se obtienen al incluir términos estacionales adicionales en los modelos ARIMA que hemos visto hasta ahora, de la siguiente manera:

En resumen tendremos:

ACF and PACF properties			
	$AR(p)$	$MA(q)$	$ARMA(p,q)$
ACF	Tails off	Cuts off after lag q	Tails off
PACF	Cuts off after lag p	Tails off	Tails off

Figure 2.13: Tabla resumen de los modelos $AR(p)$, $MA(q)$ y $ARMA(p,q)$, con sus respectivos resultados esperados para las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF)

$$ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)m \quad (2.35)$$

donde m = número de períodos por temporada.

Usamos la notación en mayúsculas para las partes estacionales del modelo y la notación en minúsculas para las partes no estacionales del modelo.

La parte estacional del modelo consiste en términos que son muy similares a los componentes no estacionales del modelo, pero implican retrocesos del período estacional.

Evaluación estadística de un Modelo ARIMA

Se debe evaluar:

- A **Significancia estadística de los parámetros** Los coeficientes obtenidos en la estimación que no sean significativamente distintos de cero, a un nivel de significancia del 5%, no son necesarios, por lo que deben eliminarse.
- B **Estacionariedad e invertibilidad del modelo estimado.** Para valores de los coeficientes estimados próximos a la frontera de la no-estacionariedad, es conveniente llevar a cabo un test de raíces unitarias.
- C **Estabilidad del modelo estimado.** Aunque los parámetros sean significativos, el modelo puede ser rechazado si existe una fuerte correlación entre los parámetros del modelo. Esto ocurre cuando el coeficiente de correlación tiene un valor absoluto superior a 0,7, entonces es conveniente probar con modelos alternativos.

2.4.13 Sobre la Selección de Modelos

Puede ocurrir que varios modelos describan satisfactoriamente la serie temporal, por lo que sea necesario seleccionar el modelo más adecuado. Este proceso de selección puede ser sencillo o un poco más complejo, por lo que es necesario recurrir a criterios de selección de modelos. Los criterios más comunes en la selección de modelos son el AIC (Akaike Information Criterion) y el BIC (Bayesian Information Criterion) que es una extensión bayesiana del primero.

Criterios de Información

Definition 14. Definición: Akaike Information Criterion

$$AIC = \log \hat{\sigma}_k^2 + \frac{n + 2k}{n}$$

Donde $\hat{\sigma}_k^2 = \frac{SSE_k}{n}$, donde k es el número de parámetros del modelo, n el tamaño de la muestra, y SSE_k equivale a la suma de los residuos al cuadrado bajo el modelo k ($SSE_k = \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2$). El valor de k que produce el mínimo AIC representa el mejor modelo. La idea es que minimizar $\hat{\sigma}_k^2$ representa un objetivo razonable, excepto que disminuye monótonamente a medida que k aumenta. Por lo tanto, debemos penalizar la varianza del error por un término proporcional al número de parámetros.

Definition 15. Definición: Bias Corrected

$$AICc = \log \hat{\sigma}_k^2 + \frac{n + k}{n - k - 2}$$

Definition 16. Definición: Bayesian Information Criterion - BIC

$$AICc = \log \hat{\sigma}_k^2 + \frac{k \log n}{n}$$

BIC también se conoce como el **Schwarz Information Criterion (SIC)**. Varios estudios de simulación han verificado que BIC es adecuado para obtener el orden correcto en muestras grandes, mientras que AICc tiende a ser superior en muestras más pequeñas donde el número relativo de parámetros es grande.

En último término un modelo es mejor que otro si su predicción es mejor. Por otro lado, diremos que **una predicción, es mejor que otra, cuando comete un menor error extra-muestral**. Así, la precisión de los métodos utilizados para pronosticar se pueden medir por ejemplo a través de la función de pérdida: **Error cuadrático medio - Mean Square Error (MSE)**, con el fin de comprender qué modelo proporciona un mejor pronóstico extra-muestral sobre otro. Esto es:

$$\text{MSE} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{x}_t)^2 \quad (2.36)$$

donde x_t corresponde al valor real de la serie en el tiempo t y \hat{x}_t corresponde al valor pronosticado por el modelo propuesto en el mismo instante.

Otros criterios de selección de modelos que consideran el error extra-muestral son:

- i) el **Error Absoluto Medio (EAM) - mean absolute deviation (MAD)**,

$$\text{MAD} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |x_t - \hat{x}_t| \quad (2.37)$$

y

- ii) **Error Absoluto Porcentual Medio (EAPM) - mean absolute percentage error (MAPE)**

$$\text{MAPE} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| 1 - \frac{x_t}{\hat{x}_t} \right| \quad (2.38)$$

2.4.14 Ejemplo IPC en Chile

Considerando data mensual del IPC desde enero del 2013 a la fecha en Chile, obtenida de la página del Banco Central, intentaremos predecir el IPC (serie original).

‘Código R: Ejemplo IPC en Chile’

```
rm(list=ls())
data<-read.csv ("ipc.csv")
ipc <- ts(data[,2], start = c(2013,1), end=c(2018, 6),
          frequency = 12)
plot.ts(ipc, xlab='Years', ylab='Indice_de_Precios_al_Comsumidor')
```

Encontrando el orden del modelo. Tendencia, estacionaridad, autocorrelación.

‘Código R: Tendencia, estacionaridad, autocorrelación.’

```
#Descomposicion
fit <- stl(ipc, s.window="period")
plot(fit)
library("tseries")
#TestRaizUnitaria
adf.test(ipc)
adf.test(diff(ipc))
#FuncionAutocorrelacion_yAutocorrelacionParcial
acf(diff(ipc), lag=36, lwd=3)
pacf(diff(ipc), lag=36, lwd=3)
```

2.4.15 Descomposición de la serie

‘Código R: REVISAR: Diapo 59(125)’

```
train_series=ipc[1:44]
test_series=ipc[45:62]
arimaModel=arima(train_series, order=c(0,1,1))
forecast=predict(arimaModel, length(test_series))
mse <- sum((forecast$pred-test_series)^2)/length(test_series)
mad <- sum(abs(forecast$pred-test_series))/length(test_series)
mape <- sum(abs(1-test_series/forecast$pred))/length(test_series)
fit <- auto.arima(ipc)
summary(fit)
plot(fit)

mape <- 100*sum(abs(1-test_series/f[["mean"]]))/length(test_series)
accuracy(fit)
```

2.5 Metodología de Estimación de un Modelo ARIMA**2.5.1 Etapas de Estimación de un Modelo ARIMA**

- 1 **Recolección de datos:** Es recomendable disponer de a lo menos 50 datos, y en el caso de series mensuales, es conveniente trabajar con entre seis y diez años de datos.

- 2 **Representación gráfica de la serie:** Resulta de gran utilidad disponer de diversos gráficos de la serie y sus transformaciones para decidir sobre la estacionariedad de la misma.
- 3 **Transformación de la serie:** La transformación de la serie es muchas veces necesaria en caso de encontrarnos con no-estacionariedad.
- 4 **Eliminación de la tendencia:** Al comprobarse gráficamente la existencia de una tendencia, esta debe ser eliminada usando como vimos primeras diferencias, e incluso dos diferencias para una tendencia no lineal.
- 5 **Identificación del modelo:** Se debe determinar el tipo de modelo más adecuado, es decir, el orden de los procesos autorregresivos y de medias móviles de las componentes regular y estacional. Se suelen seleccionar varios modelos alternativos, estimarlos, y contrastarlos, antes de modelar definitivamente la serie.
- 6 **Estimación de los coeficientes del modelo:** A partir del modelo elegido se procede a la estimación de sus parámetros.
- 7 **Contraste de validez conjunta del modelo:** Se utilizan los diversos criterios y procedimientos vistos anteriormente para valorar el modelo o modelos seleccionados: test de significancia de parámetros, criterios de información, covarianzas entre estimadores, coeficiente de correlación, R^2 , i.e. suma de cuadrados de errores, etc.
- 8 **Análisis detallado de los errores:** Los errores extra-muestrales del modelo son determinantes para una valoración final del modelo. Las diferencias entre valores reales y estimados por el modelo son determinantes para una evaluación final del modelo.
- 9 **Selección del modelo:** Analizando los resultados de las fases anteriores se decidirá sobre el modelo adoptado. Si ninguno de los modelos estudiados nos proporciona resultados suficientemente satisfactorios se vuelve a la etapa 3, revisando todas las decisiones adoptadas.
- 10 **Predicción:** Se tomará el modelo válido como fórmula inicial de predicción. Será necesario comparar las predicciones con los valores ya conocidos y, posteriormente, analizar los errores extramuestrales.

2.6 Resumen de los pasos de Box-Jenkins

2.7 Tarea 2

Calibrar y evaluar los siguientes modelos para el precio de un commodity (0 activo en último caso) a su elección:

1. Camino aleatorio sin drift.,
 2. Camino aleatorio con drift.
 3. Promedio de los últimos 5 años.
 4. Promedio de los últimos 10 años.
 5. ARIMA(1,1,0).
 6. ARIMA(0,1,1).
 7. ARIMA(1,1,1).
 8. AR(1).
 9. AR(2).
 10. AR(3).
 11. α constante, $\psi = 1$ y δ sigue un camino aleatorio.
 12. $\psi=1, \delta=0$ y δ sigue un camino aleatorio.
 13. α constante, δ y ψ siguen caminos aleatorios con innovaciones independientes.
 14. $\delta = 0$, α y ψ siguen caminos aleatorios con innovaciones independientes.
 15. α constante, $\delta = 0$ y ψ sigue un camino aleatorio.
 16. α , δ y ψ siguen caminos aleatorios con innovaciones independientes.
 17. α constante, $\delta = 0$ y ψ sigue un AR(1).
 18. α y δ constantes, ψ sigue un AR(1).
- Basarse en paper anexo.

Instructor: Marcelo Villena Chamorro PhD.

Ejemplo IPC en Chile.

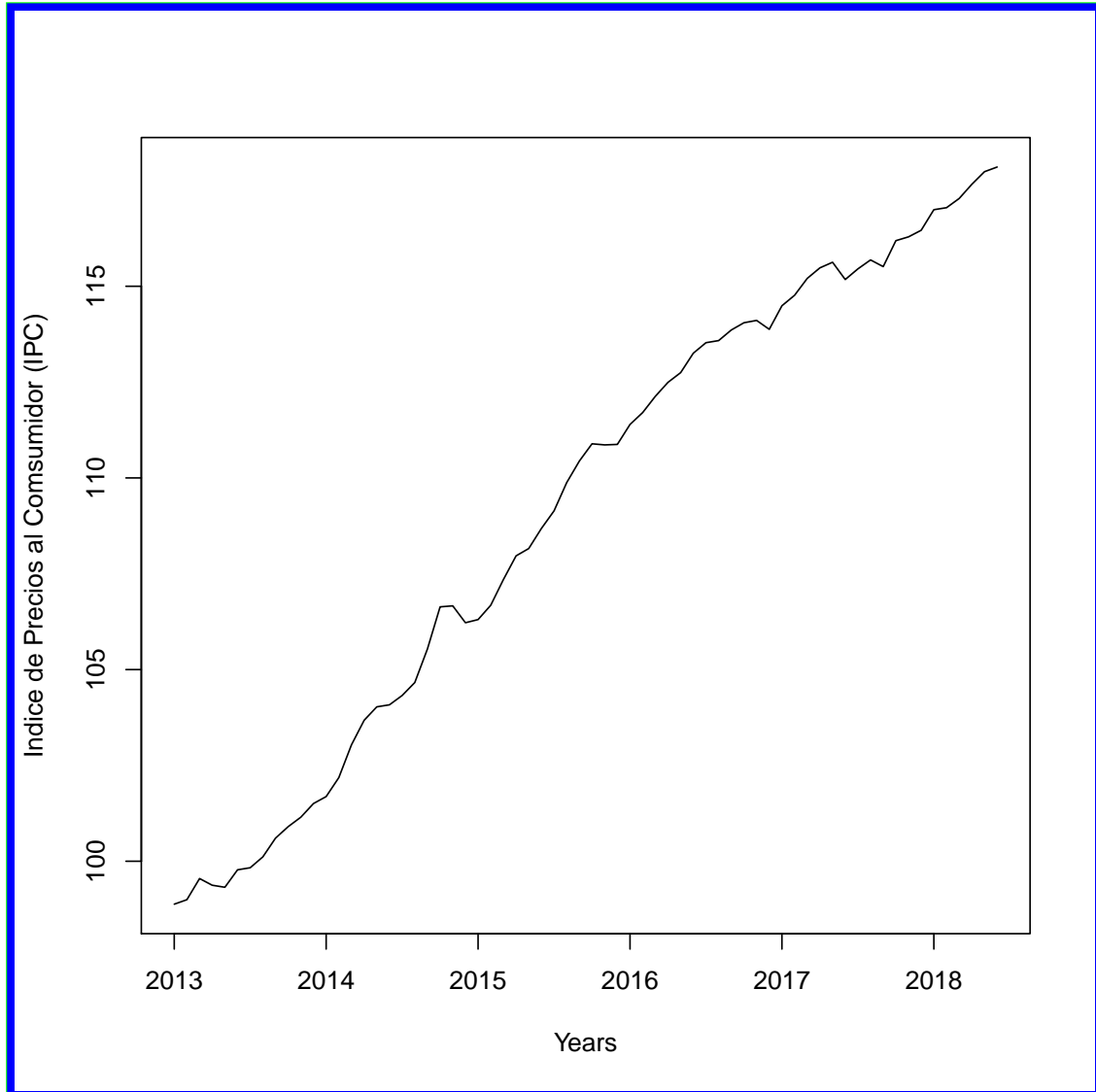


Figure 2.14: Serie de tiempo del índice de precios al consumidor (IPC) en Chile.

Ejemplo IPC: Descomposición de la serie de IPC

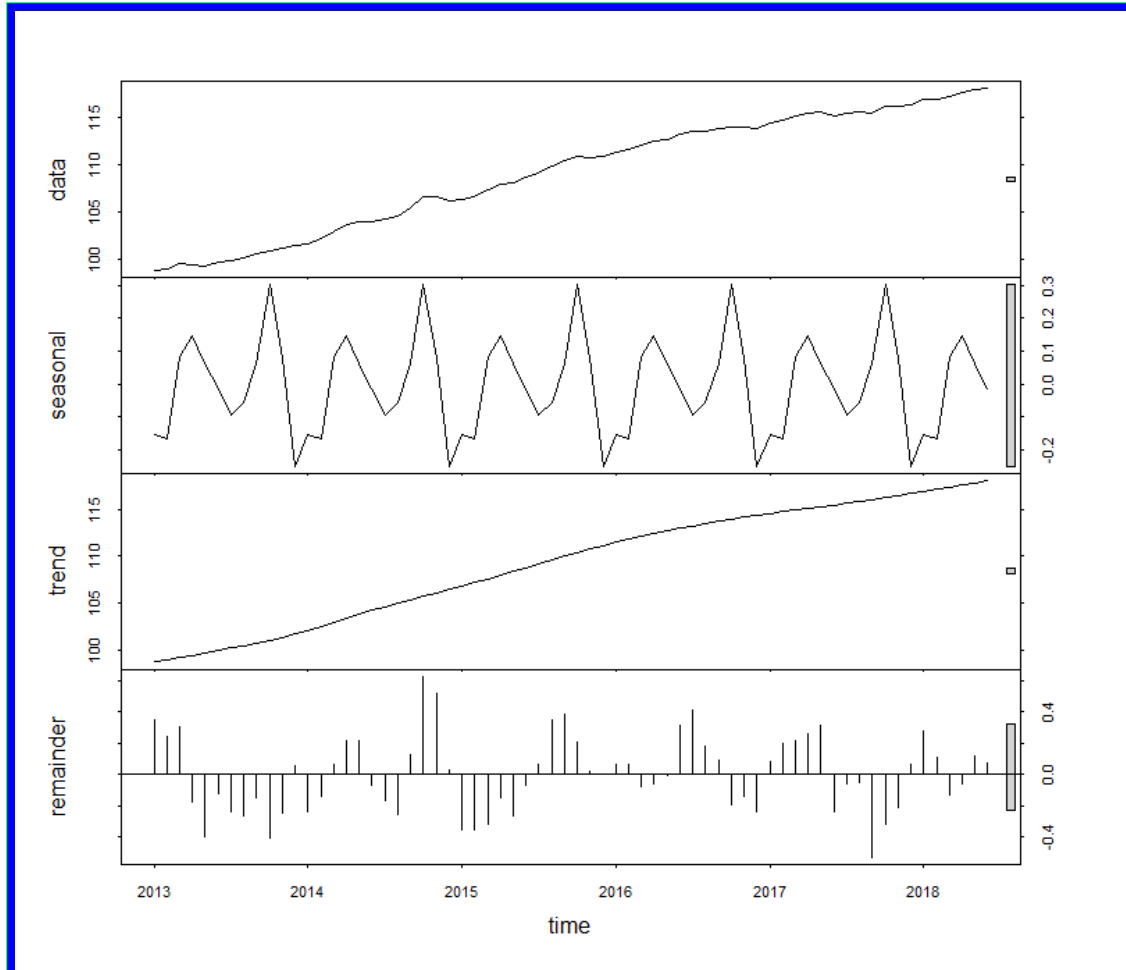


Figure 2.15: Diferentes componentes de la serie: data: serie original de IPC; seasonal: componente estacional; trend: tendencia de la serie; remainder: componentes irregulares.

Test de raíz unitaria

Augmented Dickey-Fuller Test

data: ipc

Dickey-Fuller = -0.11148, Lag order = 4, p-value = 0.99

alternative hypothesis: stationary

Augmented Dickey-Fuller Test

data: diff(ipc)

Dickey-Fuller = -5.8024, Lag order = 3, p-value = 0.01

alternative hypothesis: stationary

Figure 2.16: Test de Augmented Dickey-Füller sobre data original(ipc) y sobre primera diferencia de la data de ipc(diff(ipc))

Función de autocorrelación (AFC) y autocorrelación parcial (PAFC)

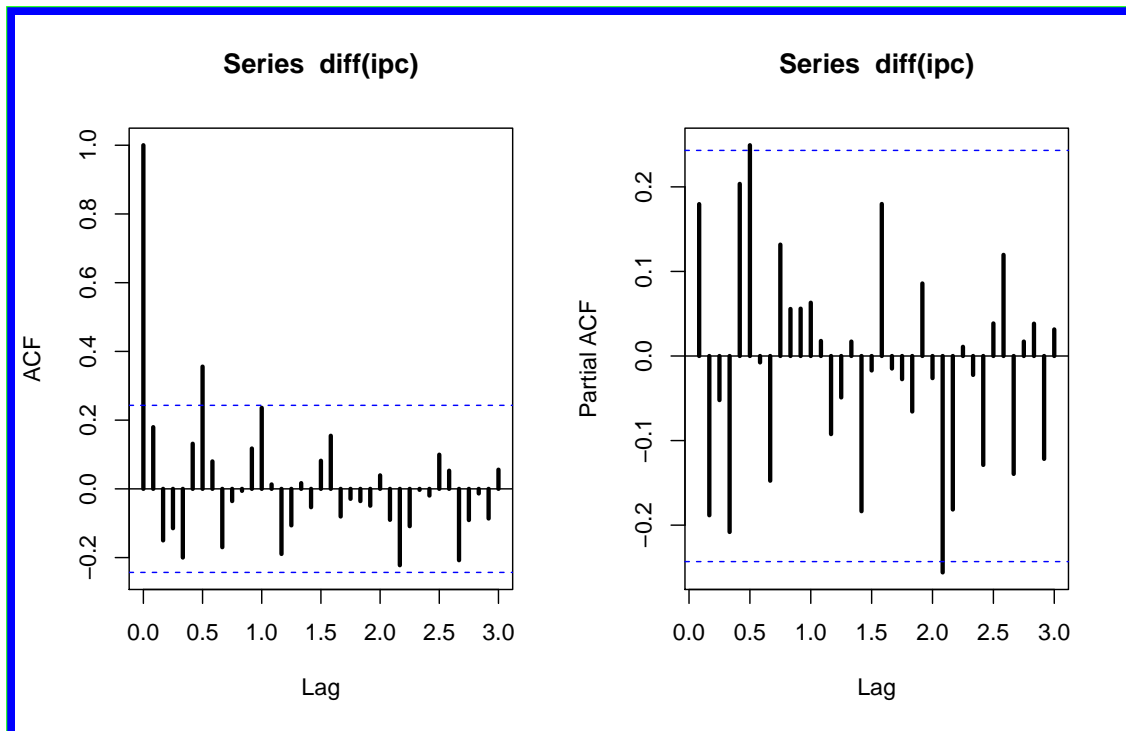


Figure 2.17: Izquierda: autocorrelacion de serie de ipc diferenciada. Derecha: autocorrelación parcial de serie de IPC diferenciada.

Resultado-Parámetros ajuste de modelo ARIMA(0,1,1) y Error de Forecast(MSE)

output ARIMA (0, 1, 1)

Call:

`arima(x = train.series, order = c(0, 1, 1))`

Coefficients:

ma1

0,8205

s.e. 0,0906

σ^2 estimated as 0,1029 : *loglikelihood* = -12,68, *aic* = 29,37

forecast ARIMA (0, 1, 1)

mse [1] 69.80031

Figure 2.18: Resultados del ajuste del modelo ARIMA(0,1,1) y su error de pronóstico

Pronósticos de modelo ARIMA(0,1,1)

```
$pred
Time Series:
Start = 45
End = 54
Frequency = 1
[1] 113,6141 113,6253 113,6292 113,6307 113,6311 113,6313
[7] 113,6314 113,6314 113,6314 113,6314
$se
Time Series:
Start = 45
End = 54
Frequency = 1
[1] 0,3128668 0,6841962 0,9882296 1,2406559 1,4565974
[6] 1,6465783 1,8174943 1,9738906 2,1188485 2,2545301
```

Figure 2.19: Pronóstico ARIMA(0,1,1)

Pronósticos de modelo AutoARIMA

output auto.arima

Series: ipc

ARIMA(0,1,1)(0,0,1)[12] with drift

Coefficients:

	ma1	sma1	drift
	0,2329	0,2483	0,2909
s.e.	0,1443	0,1396	0,0500

 σ^2 estimated as 0,07771 : *loglikelihood* = -8,01*AIC* = 24,02 *ICc* = 24,69 *BIC* = 32,72

Training set error measures:

	ME	RMSE	MAE	MPE
Training set	0,00467571	0,2701877	0,2012356	0,005434612
	MAPE	MASE	ACF1	
Training set	0,185618	0,05414794	-0,03368001	

Figure 2.20: Pronóstico auto ARIMA

Inverse MA roots - auto.arima

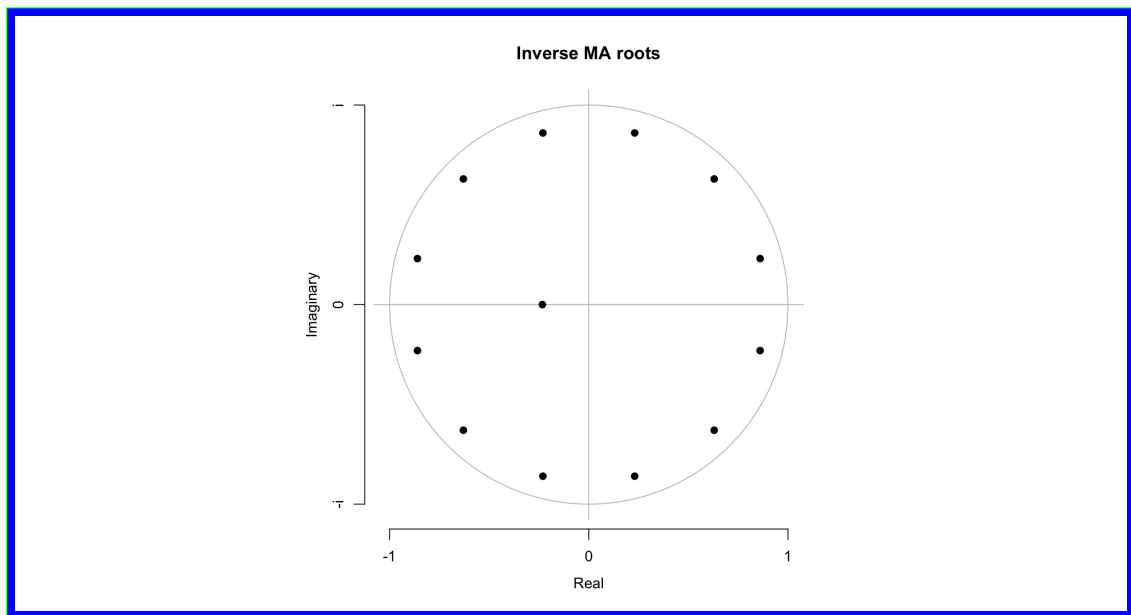


Figure 2.21: Soluciones de ecuación característica - Representación de círculo unitario

Forecasts from ARIMA(0,1,1)(0,0,1)[12] with drift

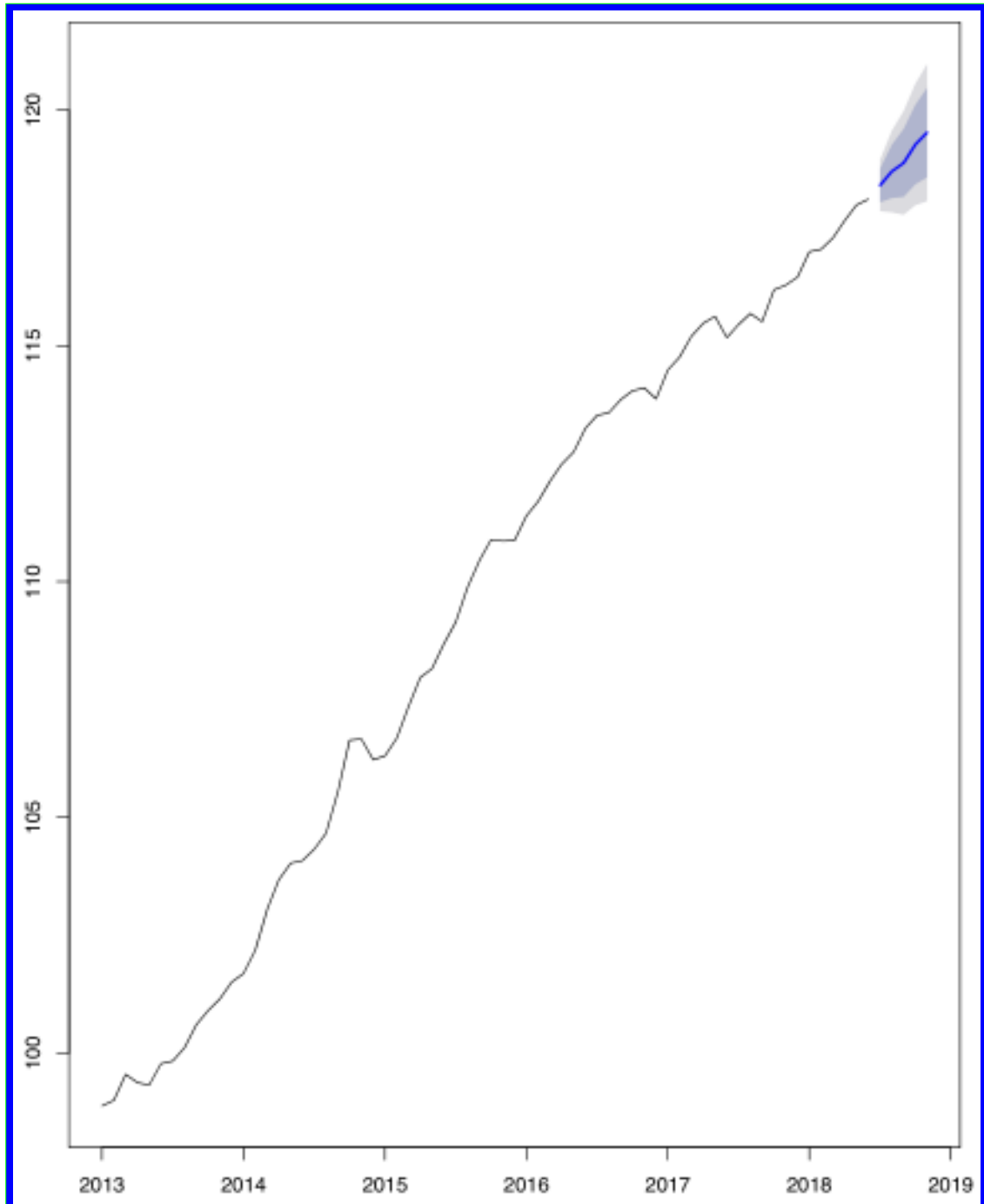


Figure 2.22: Ejemplo IPC en Chile: Forecast de modelo auto.arima

Resumen de los pasos de Box-Jenkins

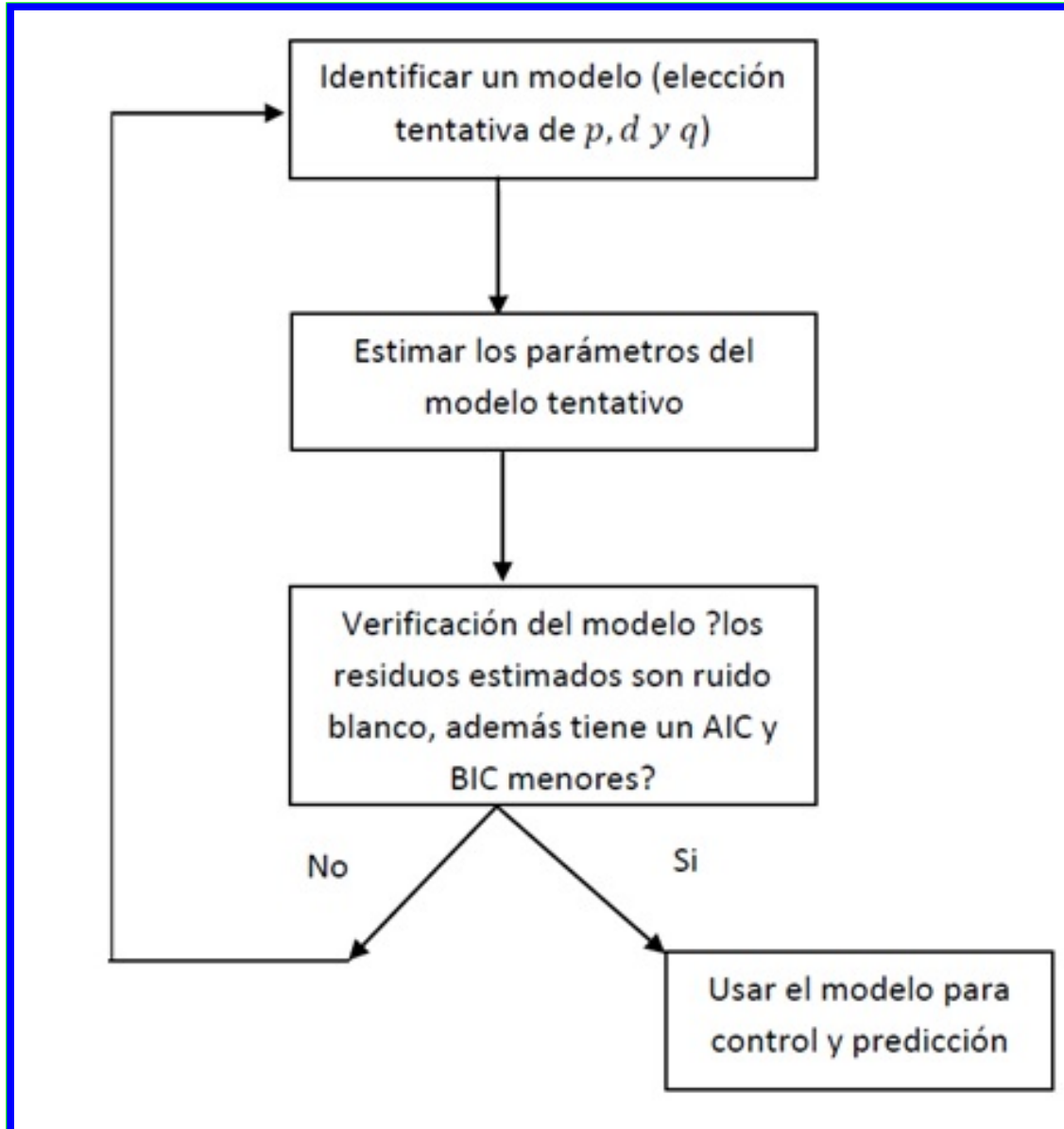


Figure 2.23: Metodología de Box-Jenkins

Bibliography

Box, G. E. P. and G. Jenkins (1970). *Time Series Analysis, Forecasting, and Control*. Francisco Holden-Day.

Dickey, D. A. and W. A. Fuller (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1057–1072.

Granger, C. W. and P. Newbold (1974). Spurious regressions in econometrics. *Journal of econometrics* 2(2), 111–120.