Equação do Calor

Cristiano Kenji Nacayama   Francisco Barone Gasparini Mugnaini
Marcelo Ferreira de Almeida   Rafael Palheta Tokairin

Abril de 2024

1 Condições de contorno homogêneas

Vamos denotar por $u(x,t)$ a temperatura da barra em um ponto $0 \leq x \leq L$ no instante $t \geq 0$. A variação de temperatura da barra é descrita pela equação do calor:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

em que α é a difusividade térmica, e depende do material do qual a barra é feita.

Vamos admitir ainda que conhecemos a temperatura inicial da barra, ou seja, temos a condição inicial

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Também vamos impor as seguintes condições de contorno para as extremidades da barra:

$$u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

O objetivo será encontrar $u(x,t)$ que satisfaz a equação do calor e essas condições iniciais e de contorno, ou seja, devemos resolver

$$\begin{cases} \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. & (1) \\ u(0,t) = 0, \quad \forall t > 0. & (2) \\ u(L,t) = 0, \quad \forall t > 0. & (3) \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. & (4) \end{cases}$$

1.1 Método de separação de variáveis

Para resolver o problema (1)-(4), usaremos o método de separação de variáveis, que consiste nos seguintes passos, [1]:

Passo 1: Fazendo $u(x,t) = X(x)T(t)$, obtemos de (1) duas equações ordinárias: uma para X e outra para T.

Passo 2: Achamos soluções dessas equações ordinárias que satisfazem as condições de fronteira (2)-(3).

Passo 3: Finalmente, usando séries de Fourier, faremos uma composição das soluções obtidas no **Passo 2** para obtermos a solução de (1) que satisfaz (2)-(4), ou seja, a solução do nosso modelo.

1.2 Solução para contorno homogêneo

Após aplicar o método de separação de variáveis, a expressão para $u(x,t)$ é dada por:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-\frac{m^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right),$$

onde os coeficientes c_m são dados por:

$$c_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

1.3 Exemplo 1

Encontre a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 50 cm de comprimento, insulada nos lados, inicialmente a uma temperatura uniforme de 20K em toda a barra e cujas extremidades são mantidas a 0K para todo $t \geq 0$, [2].

Para resolução e visualização, foi criado um algoritmo em Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

L = 50
alpha = 1

def f(x):
    return 20

def c_m(m):
    integral = np.vectorize(lambda x: f(x) * np.sin(m * np.pi * x / L))
    result, _ = quad(integral, 0, L)
    return (2 / L) * result

def u(x, t, num_terms=50):
    if t == 0:
        return np.full_like(x, f(x))  # u(x, 0) = 20
    else:
        coefficients = [c_m(m) for m in range(1, num_terms + 1)]
        sum_terms = np.zeros_like(x)
        for m in range(1, num_terms + 1):
            cm = coefficients[m - 1]
            term = cm * np.exp(-(m**2 * np.pi**2 * alpha**2 * t) / L**2) * np.sin(m * np.pi * x / L)
            sum_terms += term
        return sum_terms

x_vals = np.linspace(0, L, 100)

t_values = [0, 20, 50, 150, 300]

fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(16, 6))

# Plot 3D
X, T = np.meshgrid(x_vals, t_values)
U = np.array([u(x_vals, t) for t in t_values])
```

```python

ax_3d = fig.add_subplot(122, projection='3d')
ax_3d.plot_surface(X, T, U, cmap='viridis')
ax_3d.set_xlabel('x')
ax_3d.set_ylabel('t')
ax_3d.set_zlabel('u(x, t)')
ax_3d.set_title('3D')

# Plot 2D
for t in t_values:
    u_values = u(x_vals, t)
    axes[0].plot(x_vals, u_values, label=f't = {t}')

axes[0].set_xlabel('x')
axes[0].set_ylabel('u(x, t)')
axes[0].set_title('2D')
axes[0].legend()
axes[0].grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Listing 1: Código Python para resolver Exemplo 1.

Como saída, foi obtido:

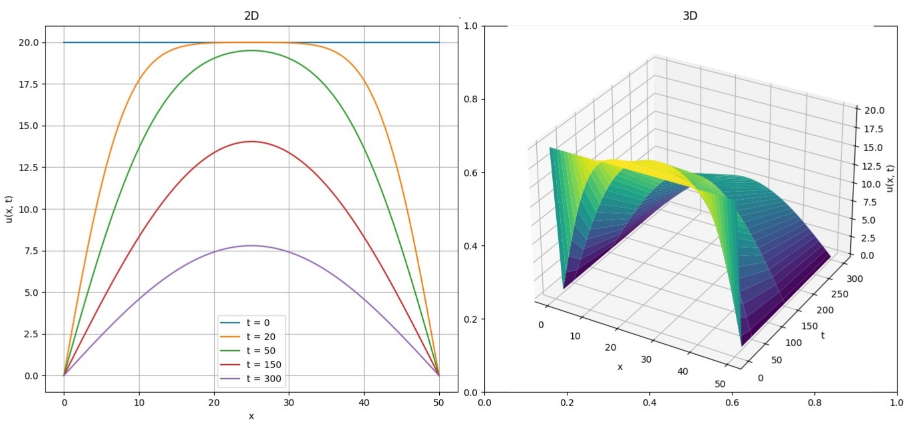


Figure 1: Resultado Exemplo 1.

1.4 Exemplo 2

Encontre a temperatura $u(x, t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 20 cm de comprimento, insulada nos lados, inicialmente a temperatura definida por f(x) = 2x na barra e cujas extremidades são mantidas a 0K para todo $t >= 0$

Para resolução e visualização, foi criado um código em Julia:

```julia
import Plots
import Integrals

function cm(f::Function, L::Number, x::Number)::Function
    function (m::Integer)
        p = Integrals.IntegralProblem((x, _) -> f(x) * sin(m * π * x / L), 0, L)
        (2 / L) * Integrals.solve(p, Integrals.QuadGKJL()).u
    end
end

function u(f::Function, L::Number, α::Number)::Function
    function (t::Number)
        function (x::Number, n::Integer=500)
            c = cm(f, L, x)
            bm(m) = c(m) * ℯ^(-(m^2 * π^2 * α^2 * t) / L^2)
            sum = 0
            for m in 1:n
                sum += bm(m) * sin(m * π * x / L)
            end
            sum
        end
    end
end

function plot_2d(f::Function, L::Number, α::Number, t::Matrix=[0 20 50 150 300])
    uxt = u(f, L, α)
    x = range(0, L, length=100)
    ux = vec([uxt(ti).(x) for ti in t])
    labels = ["t = $ti" for ti in t]
    Plots.plot(x, ux, labels=labels, xlabel="x", ylabel="u(x, t)", title="2d", size=(1000, 700))
end
function plot_3d(f::Function, L::Number, α::Number, ts::StepRangeLen=range(0, 300, length=50))
    U(x, t) = u(f, L, α)(t)(x)
    xs = range(0, L, length=length(ts))
    X = [x for x in xs for _ in ts]
    T = [t for _ in xs for t in ts]
    U = @. U(X, T)
    Plots.surface(T, X, U, xlabel="t", ylabel="x", zlabel="u(x, t)", title="3d", size=(1000, 700))
end

function main()
    f(x) = 2 * x
    L = 20
    α = 1
    p2d = plot_2d(f, L, α)
    p3d = plot_3d(f, L, α)
    p = Plots.plot(p2d, p3d, layout=(1, 2))
    Plots.savefig(p, "calor.png")
end

if abspath(PROGRAM_FILE) == @__FILE__
    main()
end
```

Figure 2: Código 2.

Como saída, foi obtido:

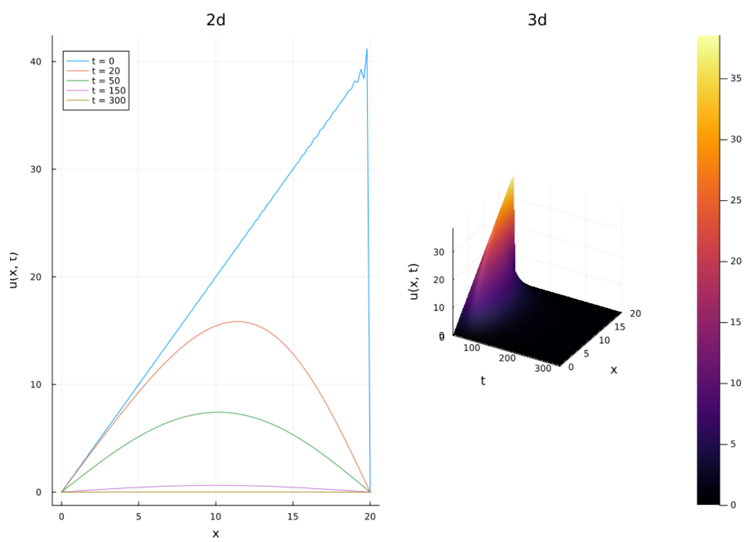


Figure 3: Resultado Exemplo 2.

2 Condições de contorno não-homogêneas

Num problema de condução de calor com condições de contorno não-homogêneas, devemos resolver

$$\begin{cases} \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (1) \\ u(0,t) = T_1, & \forall t > 0. \quad (2) \\ u(L,t) = T_2, & \forall t > 0. \quad (3) \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \quad (4) \end{cases}$$

2.1 Método de separação de variáveis

Utiliza-se os mesmos passos vistos na equação do calor com condições de contorno homogêneas.

2.2 Solução para contorno não-homogêneo

Admitimos $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$. Dessa forma, após aplicar o método de separação de variáveis, obtemos:

$$u(x,t) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-\frac{m^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right),$$

onde os coeficientes c_m são dados por:

$$c_m = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x) - (T_2 - T_1)\frac{x}{L} - T_1\right] \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

2.3 Exemplo 3

Encontre a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 25 cm de comprimento, isolada tanto nas extremidades quanto nos lados, cuja temperatura inicial é $u(x,0) = x$ para $0 < x < 25$, [2].

Para resolução e visualização, foi criado um algoritmo em Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

L = 25
T1 = 0
T2 = 0
alpha = 1

def f(x):
    return x

def c_m(m):
    integral = lambda x: (f(x) - (T2 - T1) * x / L - T1) * np.sin(m * np
    .pi * x / L)
    result, _ = quad(integral, 0, L)
    return (2 / L) * result

```

```python
def u(x, t, num_terms=50):
    if t == 0:
        return np.full_like(x, f(x))  # u(x, 0) = x
    else:
        u_val = (T2 - T1) * x / L + T1
        for m in range(1, num_terms + 1):
            cm = c_m(m)
            u_val += cm * np.exp(-(m**2 * np.pi**2 * alpha**2 * t) / L**2) * np.sin(m * np.pi * x / L)
        return u_val

x_vals = np.linspace(0, L, 100)

t_values = [0, 10, 20, 40, 120]

fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(16, 6))

# Plot 3D
X, T = np.meshgrid(x_vals, t_values)
U = np.array([u(x_vals, t) for t in t_values])

ax_3d = fig.add_subplot(122, projection='3d')
ax_3d.plot_surface(X, T, U, cmap='viridis')
ax_3d.set_xlabel('x')
ax_3d.set_ylabel('t')
ax_3d.set_zlabel('u(x, t)')
ax_3d.set_title('3D')

# Plot 2D
for t in t_values:
    u_values = u(x_vals, t)
    axes[0].plot(x_vals, u_values, label=f't = {t}')

axes[0].set_xlabel('x')
axes[0].set_ylabel('u(x, t)')
axes[0].set_title('2D')
axes[0].legend()
axes[0].grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Listing 2: Código Python para resolver Exemplo 2.

Como saída, foi obtido:

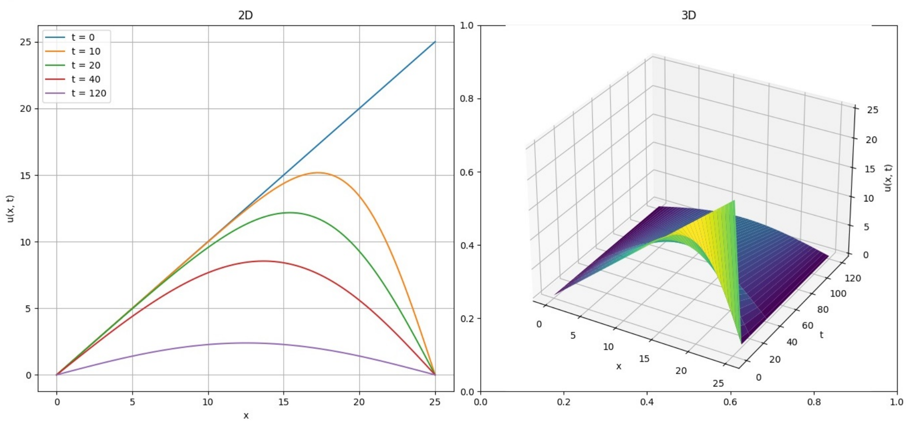
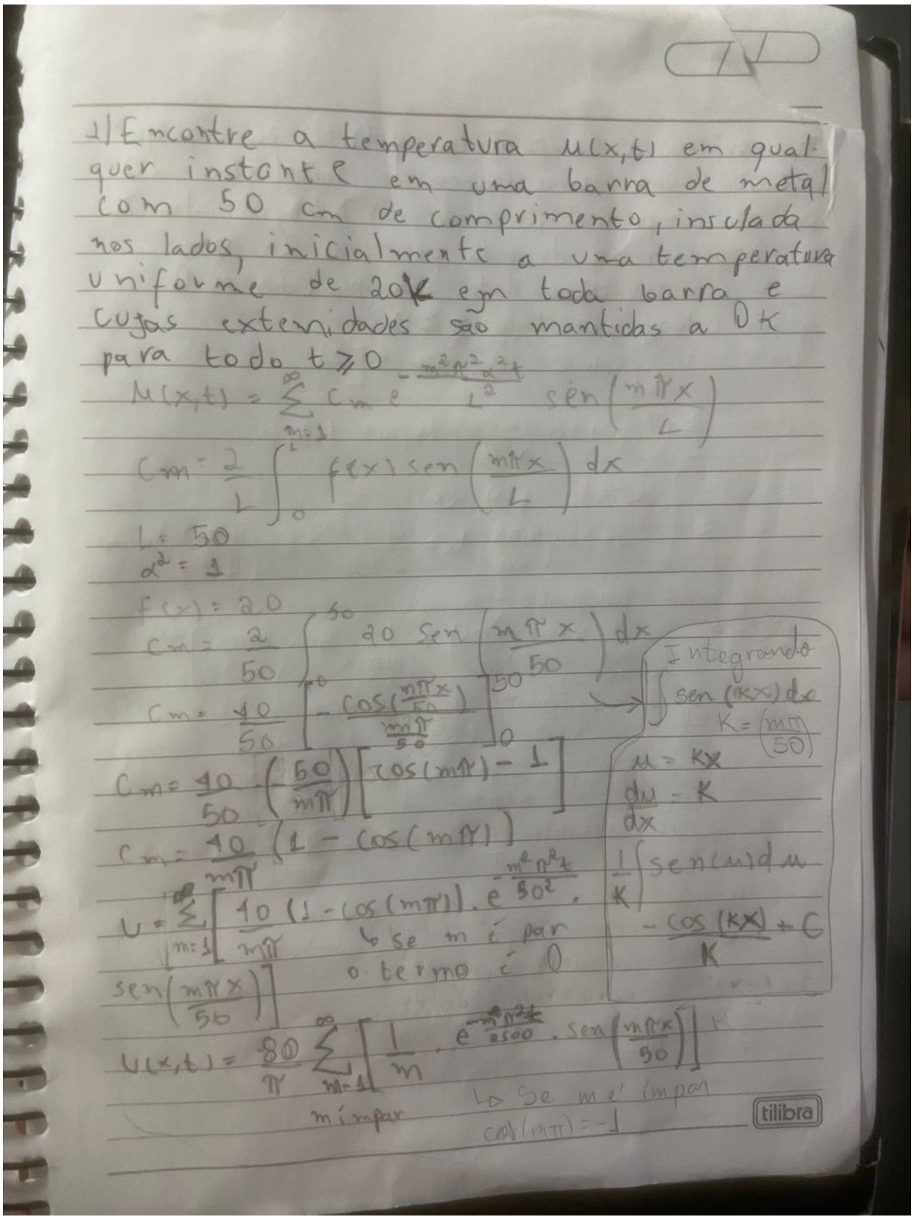


Figure 4: Resultado Exemplo 3.

3 Resolução analítica dos Exemplos

3.1 Exemplo 1



1) Encontre a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 50 cm de comprimento, insulada nos lados, inicialmente a uma temperatura uniforme de 20K em toda barra e cujas extenidades são mantidas a 0K para todo $t \geq 0$

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-\frac{m^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$C_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

$L = 50$

$\alpha^2 = 1$

$f(x) = 20$

$$C_m = \frac{2}{50}\int_0^{50} 20 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{50}\right)dx$$

$$C_m = \frac{40}{50}\left[-\frac{\cos\left(\frac{m\pi x}{50}\right)}{\frac{m\pi}{50}}\right]_0^{50}$$

Integrando

$\int \operatorname{sen}(Kx)\,dx$, $K = \left(\frac{m\pi}{50}\right)$

$u = Kx$

$\frac{du}{dx} = K$

$\frac{1}{K}\int \operatorname{sen}(u)\,du$

$-\frac{\cos(Kx)}{K} + C$

$$C_m = \frac{40}{50}\cdot\left(-\frac{50}{m\pi}\right)\left[\cos(m\pi) - 1\right]$$

$$C_m = \frac{40}{m\pi}\left(1-\cos(m\pi)\right)$$

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{40}{m\pi}\left(1-\cos(m\pi)\right)\cdot e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{50^2}}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{50}\right)\right]$$

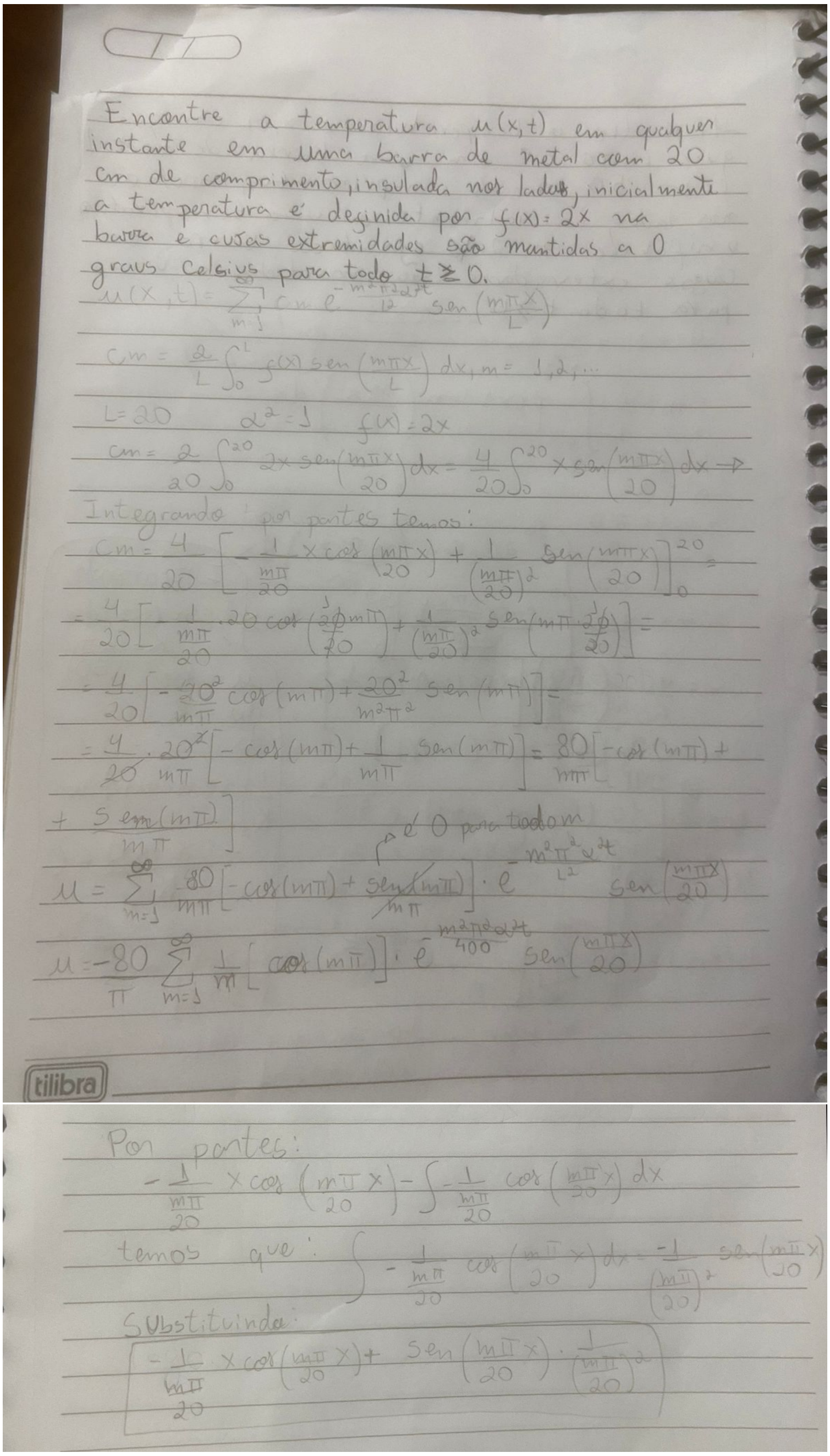
↳ se m é par o termo é 0

$$u(x,t) = \frac{80}{\pi}\sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ ímpar}}}^{\infty}\left[\frac{1}{m}\cdot e^{-\frac{m^2\pi^2 t}{2500}}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{50}\right)\right]$$

↳ se m é ímpar $\cos(m\pi) = -1$

Figure 5: Resultado Exemplo 1.

3.2 Exemplo 2



Encontre a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 20 cm de comprimento, insulada nos lados, inicialmente a temperatura é definida por $f(x) = 2x$ na barra e cujas extremidades são mantidas a 0 graus Celsius para todo $t \geq 0$.

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-\frac{m^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$c_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

$L = 20 \quad \alpha^2 = 1 \quad f(x) = 2x$

$$c_m = \frac{2}{20}\int_0^{20} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)dx = \frac{4}{20}\int_0^{20} x\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)dx \Rightarrow$$

Integrando por partes temos:

$$c_m = \frac{4}{20}\left[-\frac{1}{\frac{m\pi}{20}} x\cos\left(\frac{m\pi x}{20}\right) + \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{20}\right)^2}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)\right]_0^{20} =$$

$$= \frac{4}{20}\left[-\frac{1}{\frac{m\pi}{20}}\cdot 20\cos\left(\frac{\cancel{20}m\pi}{\cancel{20}}\right) + \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{20}\right)^2}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi\cancel{20}}{\cancel{20}}\right)\right] =$$

$$= \frac{4}{20}\left[-\frac{20^2}{m\pi}\cos(m\pi) + \frac{20^2}{m^2\pi^2}\operatorname{sen}(m\pi)\right] =$$

$$= \frac{4}{\cancel{20}}\cdot\frac{20^{\cancel{2}}}{m\pi}\left[-\cos(m\pi) + \frac{1}{m\pi}\operatorname{sen}(m\pi)\right] = \frac{80}{m\pi}\left[-\cos(m\pi) + \frac{\operatorname{sen}(m\pi)}{m\pi}\right]$$

é 0 para todo m

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{80}{m\pi}\left[-\cos(m\pi) + \frac{\operatorname{sen}(m\pi)}{m\pi}\right]\cdot e^{-\frac{m^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)$$

$$u = -\frac{80}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\cos(m\pi)\right]\cdot e^{\frac{m^2\pi^2\alpha^2 t}{400}}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)$$

Por partes:

$$-\frac{1}{\frac{m\pi}{20}} x\cos\left(\frac{m\pi}{20}x\right) - \int -\frac{1}{\frac{m\pi}{20}}\cos\left(\frac{m\pi}{20}x\right)dx$$

temos que: $\int -\frac{1}{\frac{m\pi}{20}}\cos\left(\frac{m\pi}{20}x\right)dx = \frac{-1}{\left(\frac{m\pi}{20}\right)^2}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)$

Substituindo:

$$\boxed{-\frac{1}{\frac{m\pi}{20}} x\cos\left(\frac{m\pi}{20}x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{20}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{m\pi}{20}\right)^2}}$$

Figure 6: Resultado Exemplo 2.

3.3 Exemplo 3

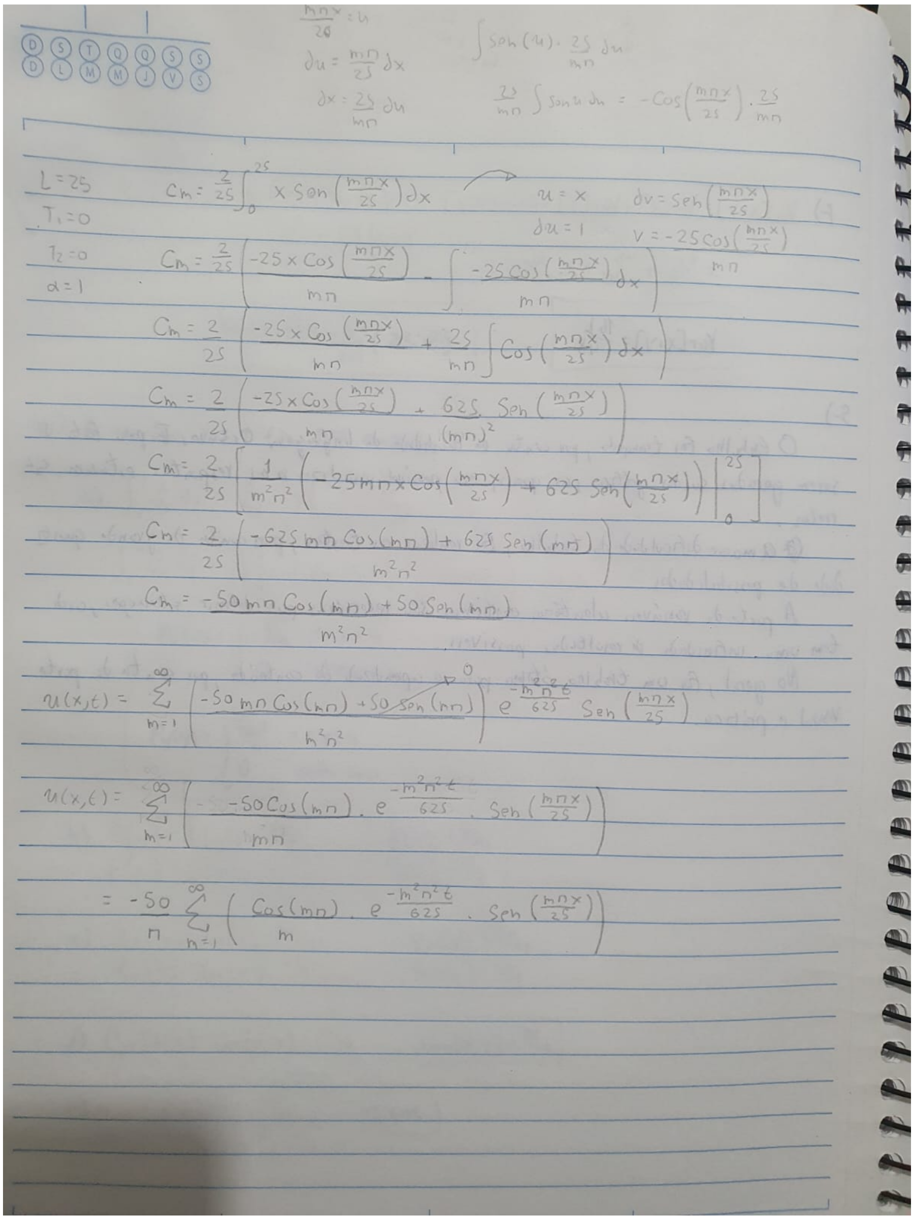


Figure 7: Resultado Exemplo 3.

Referências

[1] Autores Desconhecidos. Capítulo 4: Equações diferenciais parciais. Material de aula. Departamento de Engenharia Elétrica, UNESP.

[2] Marcos Eduardo Valle. Cálculo iii: Aula 25 – separação de variáveis e a equação do calor. *Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, Universidade Estadual de Campinas*, 2019. Aula ministrada no curso MA311 - Cálculo III.