Matemática Financeira

Prof. Dr. Rafael da Silva

Grandezas diretamente e inversamente proporcionais

Grandezas diretamente proporcionais

Uma pequena loja vende certo tipo de bolsa por R$ 40,00 a unidade. Chamando de x a quantidade vendida e y a receita (em reais) proveniente da venda dessas bolsas, teremos a seguinte correspondência:

x	1	2	3	4	5	...	n	...
y	40	80	120	160	200	...	40n	...

x	1	2	3	4	5	...	n	...
y	40	80	120	160	200	...	40n	...

Observe que, quando o valor de x dobra, também dobra o de y; quando triplica o valor de x, também triplica o de y, e assim por diante. Em consequência disso, a razão entre cada valor de y e o seu correspondente x vale 40; e a razão entre cada valor de x e o correspondente y também é constante e vale 1/40 . Nesse caso, dizemos que as grandezas expressas por x e y são **diretamente proporcionais**.

De modo geral, dizemos que duas grandezas são diretamente proporcionais quando a razão entre a medida y de uma e a correspondente x da outra ($x \neq 0$) for constante e diferente de zero, isto é, $y/x=k$, em que k é uma constante diferente de zero. A razão entre cada valor de x e seu correspondente y também é constante e vale $1/k$.

Grandezas inversamente proporcionais

Consideremos o seguinte problema. Numa estrada, a distância entre duas cidades é 240 km. Se um carro percorrer essa estrada a uma velocidade média x (em km/h), o tempo correspondente para ir de uma cidade à outra será y (em horas). Teremos a seguinte correspondência:

x	10	20	30	40	50	...	v	...
y	24	12	8	6	4,8	...	$\frac{240}{v}$	...

x	10	20	30	40	50	...	v	...
y	24	12	8	6	4,8	...	$\frac{240}{v}$	...

Observemos que, se a velocidade dobra, o tempo de viagem se reduz à metade; se a velocidade triplica, o tempo de viagem se reduz à terça parte, e assim por diante. Consequentemente, o produto de cada valor de x pelo correspondente y é constante e vale 240. Dizemos, então, que as grandezas expressas por x e y são **inversamente proporcionais**.

De modo geral, dizemos que duas grandezas são inversamente proporcionais quando o produto da medida y de uma e a correspondente x da outra for constante e diferente de zero, isto é, $y \cdot x = k$, em que k é uma constante diferente de zero. Se x e y forem inversamente proporcionais, y será diretamente proporcional ao inverso de x, pois

$$\frac{y}{\frac{1}{x}} = k.$$

Exemplo 03

Três sócios A, B e C resolveram abrir uma pizzaria. O primeiro investiu 30 mil reais, o segundo investiu 40 mil reais e o terceiro 50 mil reais. Após 1 ano de funcionamento, a pizzaria deu um lucro de 24 mil reais. Se esse lucro for distribuído aos sócios de forma que a quantia recebida seja diretamente proporcional ao valor investido, quanto recebeu cada um?

Exemplo 04

Três máquinas levam 2 horas para produzir um lote de 1 000 peças. Se o número de máquinas for inversamente proporcional ao número de horas para produzir o mesmo lote de 1 000 peças, quanto tempo será necessário para se produzir o lote com 4 máquinas?

Exercício 05

O número de litros de gasolina que um carro consome na estrada é diretamente proporcional ao número de quilômetros percorridos. Se ele consome 5 litros para percorrer 74 quilômetros, quanto consumirá para percorrer 380 quilômetros?

a) 21,18
b) 22,36
c) 25,68
d) 34,18

Exercício 06

Um escritório leva 60 horas para ser pintado por 4 pintores. Se o número de horas trabalhadas para pintar o escritório for inversamente proporcional ao número de pintores, em quantas horas 5 pintores pintarão o escritório?

R. 48

Exercício 07

Mantida a temperatura constante de um gás, a sua pressão P e o seu volume V são inversamente proporcionais (Lei de Boyle). Se a pressão sofrer um acréscimo de $\frac{1}{5}$, qual a correspondente diminuição do volume?

Exercício 07 - Resolução

Sejam P e V,os volumes iniciais. Pela Lei de Boyle, se mantivermos a temperatura constante, a pressão e o volume são inversamente proporcionais. Assim, dada uma constante k; podemos escrever que:

$$PV = k \rightarrow V = \frac{k}{P}$$

Se aumentarmos a pressão em ⅕, a nova pressão P’ será

$$P' = P + \frac{1}{5}P = \frac{6}{5}P$$

Assim, chamando de V' o novo volume, teremos

$$P'V' = k$$

$$\frac{6}{5}PV' = k$$

Isolando V’

$$V' = \frac{k}{\frac{6}{5}P} = \frac{6}{5} \cdot \frac{k}{P}$$

Como k/P = V, temos

$$V' = \frac{6}{5}V$$

Exercício 08

(PUC-RJ) Duas torneiras jogam água em um reservatório, uma na razão de 1 m^3 por hora e a outra na razão de 1 m^3 a cada 5 horas. Se o reservatório tem 12 m^3, em quantas horas ele estará cheio?

a) 8
c) 12
$\boxed{\text{b) 10}}$
d) 14
e) 16

Exercício 09

(UF Juiz de Fora-MG) Em um certo restaurante, as pizzas são feitas em fôrmas de base circular. Os preços das pizzas do mesmo tipo variam proporcionalmente em relação à área da base da fôrma. Se uma pizza feita numa forma cuja base tem 20 cm de diâmetro custa R$ 3,60, então uma outra pizza, do mesmo tipo, feita numa fôrma cuja base tem 30 cm de diâmetro, deve custar:

a) R$ 5,40

b) R$ 7,90

c) R$ 8,10

d) R$ 8,50

e) R$ 8,90

Exercício 09 – Solução

Seja P_1 o preço da pizza de diâmetro 20 cm, ou seja raio R_1 = 10 cm, e Seja P_2 o preço da pizza de diâmetro 30 cm, ou seja raio R_2 = 15 cm. Então temos a seguinte relação de proporção:

$$\frac{P_1}{A_1} = \frac{P_2}{A_2} = k$$

A é a área e que k é um constante, ou seja

$$\frac{3,6}{\pi R_1^2} = \frac{P_2}{\pi R_2^2}$$

Isolando P_2 temos

$$P_2 = 3,6 \times \frac{\pi R_2^2}{\pi R_1^2}$$

Substituindo R_1 e R_2 temos

$$P_2 = 3,6 \times \frac{15^2}{10^2} \equiv 3,6 \times \left(\frac{15}{10}\right)^2$$

$$P_2 = 3,6 \times 2,25 = 8,1$$

Exercício 10

(Faap-SP) Dois sócios lucraram R$ 5 000,00. O primeiro entrou para a sociedade com o capital de R$ 18 000,00 e o segundo com R$ 23 000,00. Se os lucros de cada sócio são proporcionais aos capitais, a diferença entre os lucros foi de aproximadamente:

a) R$ 509,00

b) R$ 609,00

c) R$ 709,00

d) R$ 809,00

e) R$ 1 009,00