

Nótur um stærðfræðimenntun

Ingólfur Gíslason

2026-01-09

Contents

1	Um textann	5
1.1	Notkun bókar og tungumál	5
2	Skilningur	7
2.1	Venslaskilningur og tækniskilningur	7
2.2	Skilningur í daglegu máli og í stærðfræði	7
3	Talnaskyn, táknskyn, aðgerðaskyn	11
3.1	Talnaskyn (number sense)	11
3.2	Táknskyn (symbol sense)	11
3.3	Aðgerðaskyn (operation sense)	12

Chapter 1

Um textann

Þessi texti er verk í vinnslu. Hann er um stærðfræðimenntun, einkum kennslu og nám (frekar en kerfis- eða félagsfræðilega sýn). Hún er hugsuð sem kennsluefni í námskeiðinu Stærðfræði í grunnskóla sem er fyrir stærðfræðikennaranema við Menntavísindasvið Háskóla Íslands. Hún gæti þó nýst nemendum í öðrum námskeiðum eða starfandi kennurum. Textinn byggir víða á bók Henri Picciotto og Robin Pemantle, *There Is No One Way to Teach Math* og á að þjóna sem stuðningur og dýpkun við lestur og notkun þeirrar bókar.

Í textanum er áherslan á undirstöðuhugtök og praktískar leiðir í kennslu, auk rýni í stærðfræðilegt efni grunnskólans. Gengið er út frá því að lesendur vinni bæði saman og með kennara, en áhugasamar manneskjur utan slíks samhengis gætu ef til vill nýtt sér textann líka.

1.1 Notkun bókar og tungumál

Ég ávarpa lesanda textans ýmist sem nemanda (hann), lesanda (hann), en stundum nota ég „þau“, „öll“, og önnur orð til að gefa til kynna að öll eru velkomin að lesa og læra af þessum texta, og persónur í verkefnatextum geta verið af ólíku kyni.

Bókina má aðlaga og nýta að vild, að hluta eða í heild, með eftirfarandi skilyrðum:

1. Bókin sé ekki nýtt til að valda manneskjum skaða, græða peninga, eða til að stuðla að auknum ójöfnuði milli fólks.
2. Ef umtalsverðir hlutar eru nýttir í öðru verki sé upprunans hér getið.

Chapter 2

Skilningur

Hvað er skilningur? Hvað er skilningur í stærðfræði?

2.1 Venlaskilningur og tækniskilningur

Við getum rifjað upp tvígreiningu Richard Skemps í venlaskilning og tækniskilning. Í örstuttu máli drögum við þessi hugtök saman:

- Venlaskilningur er að vita hvernig hægt er að setja nota stærðfræðihugtök og -aðferðir og vita hvers vegna þær eru viðeigandi og hvers vegna þær skila réttum niðurstöðum.
- Tækniskilningur er að vita hvernig á að reikna tiltekin dæmi án þess að vita hvers vegna þau eru reiknuð á þann hátt, hvort það sé vit í reikningunum, eða hvernig aðferðin tengist öðrum aðferðum eða hugtökum.

Í bók Picciotto og Pemantle er *skilningur* nokkurn veginn það sama og Skemp kallar venlaskilning.

2.2 Skilningur í daglegu máli og í stærðfræði

Til frekari dýptar getum við velt fyrir okkur hvað orðið skilningur eiginlega merkir. Í skáldsögu Fríðu Ísberg, *Merking* (annað mikilvægt hugtak!) segir:

Íslenska orðið „skilningur“ hefur ákveðna einangrunarmerkingu; við reynum að skilja eitt frá öðru - hið ljóta frá hinu fallega, manninn frá dýrinu - til að einangra það og eyða svo því sem við viljum ekki. En latneska orðið „comprehendere“ - sem enskan notar - er andstæða þess: það þýðir að taka saman. „Com-“ er svipað forskeyti og „sam-“ á íslensku og „prehendere“ þýðir að grípa, ná tökum á einhverju. (bls. 194)

Fleiri rannsakendur hafa lagt áherslu á að skilningur felist bæði í að aðskilja, greina sundur, og líka að taka saman, ná utan um, grípa um. Mjög fróðleg umfjöllun um skilning í íslensku og í sögulegu ljósi kennslubóka í stærðfræði er í grein Kristínar Bjarnadóttur (2022), Er áhersla á skilning nýmæli? *Skírnir*, 196(2), 371–390.

Til að skýra betur hvað það merkir að *skilja hugtak* segja Picciotto og Pemantle að það að skilja hugtak ætti yfirleitt að þýða að nemandi geti:

- Útskýrt það, útskýra *hvers vegna* eitthvað er eins og það er, ekki bara nefna orð. Við ættum að biðja nemendur reglulega að útskýra bæði munnlega og skriflega.
- Að snúa ferlum við. Þú skilur ekki dreifireglu nema þú getir þáttað líka, þú skilur ekki jöfnur nema þú getir búið til (margar) jöfnur sem hafa lausnina 4, og getir búið til jöfnu út frá grafi. Það að geta snúið við ferlum (reversibility) er prófsteinn á skilning, leið til að dýpka skilning, og í sumum tilvikum önnur leið að skilningi.
- Sveigjanleg notkun margra leiða. Að skilja jöfnur: með prófun, með gröfum, með töflum, með tækni, auk bókstafareiknings.
- Að geta *tengt milli ólíkra framsetninga*, til dæmis tákna (algebrustæða), töflu (gildistöflu) og grafs (teikning í hnitakerfi).
- Yfirfærsla á ný samhengi. Til dæmis að tengja hlutföll við einslaga myndir, og fjarlægð milli punkta við reglu Pýþagórasar.
- Að vita hvenær það á ekki við. Dæmi: ekki eru öll sambönd línuleg. Þess vegna er mikilvægt að rannsaka gagndæmi, hvenær eitthvað á ekki við.

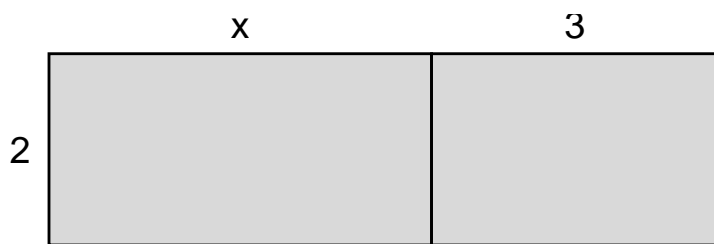
2.2.1 Verkefni

Hugsum okkur spurninguna

$$\text{Af hverju er } 2(x + 3) = 2x + 6?$$

Hvaða ályktanir um skilning nemanda getum dregið út frá eftirfarandi „svörum“, og hvernig gætum við brugðist við svörunum til að kanna skilninginn betur:

1. „Það er út af dreifireglunni?“
2. „Til dæmis ef $x = 1$ þá þetta bara $2(1 + 3) = 2 \cdot 4$ og það er alveg eins hægt að skipta 4 niður og margfalda hvern hlut fyrir sig, $2 \cdot 1 = 2$ og $2 \cdot 3 = 6$ og leggja saman, $2 + 6 = 8$.“
3. „Ef ég skoða rétthyrning með eina hlið 2 og hina $x + 3$ og reikna flatarmálið, þá skiptir ekki máli hvort ég reikna hvern bít fyrir sig og legg saman eða allan í einu“ (með fylgir eftirfarandi teikning):



Chapter 3

Talnaskyn, táknskyn, aðgerðaskyn

Orðið skyn á hér að fela í sér bæði skilning og skynjun.

3.1 Talnaskyn (number sense)

Með talnaskyni er meðal annars átt við að hve miklu leyti við getum reiknað í huganum, tengt saman talnastaðreyndir sem við þekkjum og áttað okkur á stæðarsamanburði talna. Hugarreikningur - notkun þekktra staðreynda og að átta sig á samanburði talna (líka brota).

3.1.1 Dæmi

- Ef við reiknum $13 - 9$ með því að hugsa $13 = 10 + 3$ og notum okkur að $10 - 9 = 1$ til að sjá að $13 - 9 = 10 - 9 + 3 = 1 + 3 = 4$.
- Ef við reiknum $4 \cdot 13 = 2 \cdot 2 \cdot 13 = 2 \cdot 26 = 52$

Skoðið fleiri dæmi á „Ég leysi stundum vandamálið með svona hringjum“ Hugsun barna um margföldun.

3.2 Táknskyn (symbol sense)

Með táknskyni er meðal annars átt við:

- a. Að geta valið hvort gagnlegt sé að nota tákn (eins og bókstafi fyrir breytur og óþekktar tölur) við lausn verkefnis eða ekki
- b. Að geta túlkað tákn sem notuð eru til að lýsa reikningum eða aðstæðum
- c. Fimi í bókstafareikningi (að umbreyta táknaðunum í aðrar jafngildar táknaðunur)

d. Val á réttum táknum fyrir tilteknaðar aðstæður

3.2.1 Verkefni

Eftirfarandi spurningar reyna á táknskyn með ólíkum hætti. Í hverri línu er fullyrðing sem segja á hvort sé stundum, alltaf eða aldrei sönn. Við höfum áhuga á skilningi svo hér þarf að útskýra *hvers vegna* í sérhverjum lið. Við viljum líka benda á undir hvaða flokk táknskyns hér að ofan hvert reynir helst á.

- $x + 2 < 2x$.
- $-x$ er neikvæð tala.
- Það skiptir máli hvort við skrifum $4a + 10$ eða $4b + 10$.
- Ef a og b eru breytur, þá er ómögulegt að $a = b$.
- $(x + 5)^2 = x^2 + 5^2$.
- $-(y - 1) = -y - 1$?
- $-a^2 = (-a)^2$?
- Ef þú margfaldar þrjár tölur sem standa saman í talnaröðinni (eins og 13, 14 og 15) verður útkoman alltaf margfeldi af 6 (með öðrum orðum: 6 gengur upp í henni).
- Ef 3 gengur upp í þversummu tölu þá gengur 3 gengur upp í tölunni.

Táknskyn er ekki eitthvað sem kemur fljótt eða sjálfkrafa. Það þarf að kenna nemendum að vinna með tákni.

3.3 Aðgerðaskyn (operation sense)

Sameiginlegt með talnaskyni og táknskyni er aðgerðaskyn. Þá er átt við að skilja reikniðgerðir, ólíka eiginleika þeirra og tengsl þeirra á milli, auk þess að hafa vit á því að nota þær við viðeigandi aðstæður og verkefnum.

3.3.1 Dæmi

Skodum rununa 5, 8, 11, 14, 17... Hvað er í gangi hér?

- Endurtekin samlagning, $5, 5 + 3, 5 + 3 + 3, \dots$ sem hægt er að tjá með margföldun
- Táknað með $5 + 3n$ og tengist framsetningu á línu $y = 3x + 5$

Við viljum meðal annars að nemendur skilji að endurtekna samlagningu má reikna með margföldun, og átti sig á og geti notað dreifiregluna $a(b + c)$ í sinni talnahugsun og hugarreikningi.

3.3.2 Verkefni

Víxlregla um samlagningu segir að jafnan $a + b = b + a$ sé alltaf sönn.

1. Gildir víxlregla um frádrátt? Er hægt að segja eitthvað um tölurnar a og b ef $a - b = b - a$?
2. Er einhver regla á því hvað gerist ef liðum er víxlað í frádrætti? Hvað gerist?
3. Gildir víxlregla um margföldun?
4. Gildir víxlregla um deilingu?