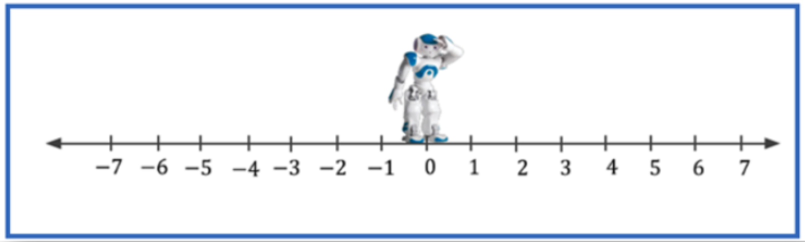
Stærðfræðiverkefni fyrir nemendur á aldrinum 6-106 ára

Ingólfur Gíslason

UNIVERSITY OF ICELAND

Talnamismunur og tugakerfi



Um verkefnið Vélmenni á talnalínu

Ingólfur Gíslason
2 February 2019 ·

Rannsóknarverkefni fyrir unga stærðfræðinga: setjið inn tölur á bilinu 1-9 til að gera jöfnurnar sannar. Notið hverja tölu bara einu sinni. Hvað er hægt að búa til margar mismunandi?

$$\square=\square+\square=\square+\square+\square$$

11 · 10 comments

Like · Comment · Send

THE ON–LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES ®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

Search

(Greetings from The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!)

A362717 Number of ways to write a + b + c = d + e = f with {a,b,c,d,e,f} a subset of [n] of size 6 and a < b < c and d < e. 2

```
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 4, 10, 20, 36, 60, 93, 141, 200,
280, 379, 505, 653, 842, 1057, 1321, 1622, 1982, 2384, 2864,
3390, 4006, 4684, 5464, 6311, 7286, 8334, 9524, 10806, 12246,
13785, 15513, 17346, 19386, 21555, 23949, 26479, 29272, 32209,
35429, 38820
```

(list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

Hvað er stærðfræðirannsókn?

Forsendur og frumsendur

- Stærðfræðirannsókn snýst um að alhæfa og álykta með afleiðslu um fyrirbæri út frá stærðfræðilegum eiginleikum þeirra.

- Í verðugu stærðfræðiverkefni felst að gera tilgátur sem fela í sér alhæfingar og að rökstyðja þær.

Hönnun stærðfræðiverkefna

- Hvernig hönnum við verkefni sem
  - öll geta glímt við (aðgengi)
  - leiðir öll inn í stærðfræðirannsókn
  - gefur færi á sífellt dýpri eða víðari spurningum
  - eykur meðvitund um möguleika á – og löngun til – að alhæfa

Hvernig umbreytum við æfingu í stærðfræðirannsókn?

- Hvaða alhæfingar eru í boði?
- Hvaða væntingar, tilgátur og undrunarefni eru í boði?
- Hvaða hugtakatengingar eru í boði?

Stærðfræðiþekking þín (kennarans) opnar þessi tækifæri.

Útlínur aðferðar

UNIVERSITY OF ICELAND

Brown og Walter (1983) stinga upp á eftirfarandi verklagi:

1. Skráum eiginleika (e. attributes) verkefnisins
2. Spyrjum „hvað ef ekki“
3. Þróum áhugaverðar spurningar um alhæfingar, útvíkkanir, tengingar

Prestage og Perk (2007) byggja á þessu og leggja til:

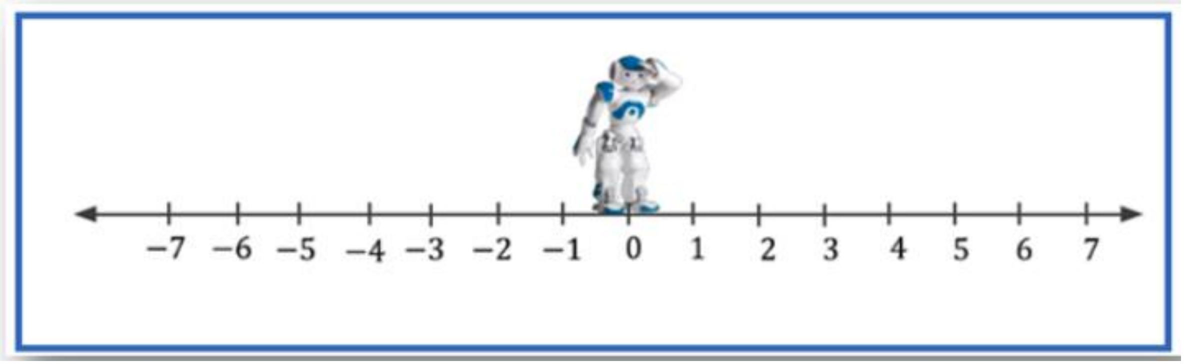
1. Takið eftir því sem er gefið í verkefninu og kennsluefninu
2. Breytið, bætið við eða fjarlægið eitthvað sem er gefið
3. Greinið stærðfræðina sem kemur í ljós og tækifærin fyrir nemendur og kennara
4. Veljið viðeigandi verkefni fyrir kennsluna

Sérhver setning í stærðfræði getur verið **undrunarefni** (Mason og Watson, 2005)

Þetta eru ekki reiknirit til að fara eftir heldur tæki til að beita frjálst eftir dómgreind og innsæi!

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1983). *The art of problem posing*. The Franklin Institute Press
Mason, J., & Watson, A. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Lawrence Erlbaum.
Prestage, S., & Perks, P. (2007). Developing teacher knowledge using a tool for creating tasks for the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4–6), 381–390.

Vélmenni á talnalínu (I/III)



Þú mátt gefa vélmenni tvenns konar skipanir:
A: Farðu fimm skref til hægri
B: Farðu þrjú skref til vinstri

Til dæmis myndi röðin A-B-B-A fara með vélmennið í 4.

Notið röð af skipununum A og B til að fara með vélmennið frá 0 til +2, -6, -1, +7, +6

Tilgangurinn (skv. upprunalegu efni):
Að nemendur kynnist því að nota **talnalínu** til að skynja og vinna með **neikvæðar** og jákvæðar tölur (fyrir 6.-7. bekk)

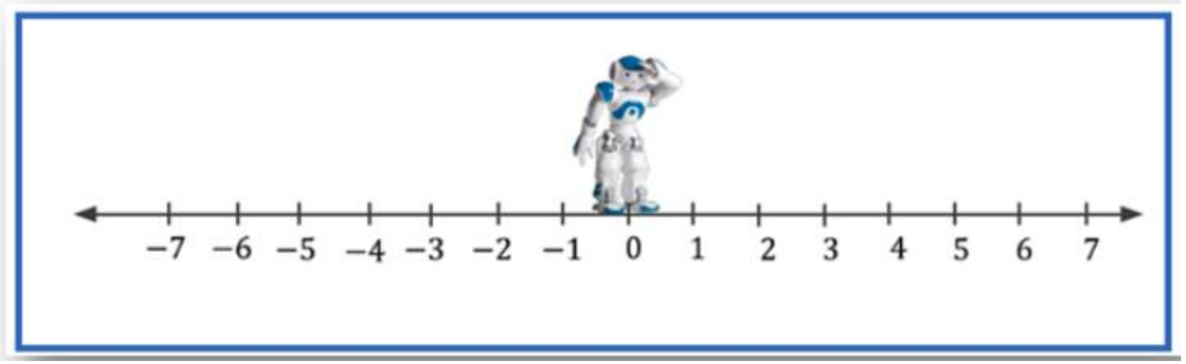
Eiginleikar – það sem er gefið:

- við ferðumst eftir **talnalínu**
- við fáum **tvo möguleika** á að færa vélmennið
- við megum fara **5** til hægri og **3** til vinstri
- tölurnar 5 og 3 eru báðar **oddatölur**
- tölurnar 5 og 3 eru báðar **frumtölur**
- tölurnar 5 og 3 eru **ósamþátta**
- **…**

„Hvað ef ekki" – breytum, fjarlægjum, bætum við:

- við ferðumst ekki á talnalínu heldur í hnitakerfi?
    - 2 áttir? 3 áttir? 4 áttir?
- við fáum einungis einn möguleika á færslu? Eða þrjá? …
- báðar tölurnar eru sléttar tölur?
- tölurnar hafa sameiginlegan frumþátt?
- nemendur fá að velja tölurnar?
- …

Vélmenni á talnalínu (II/III)



Væntingar og undrunarefni

- er þetta alltaf hægt?
- skiptir máli hvaða tvær tölur þetta eru?

Tilgátur og alhæfingar

Vélmennið kemst hvert sem er

- ef A = 5 og B = -3
- ef A og B eru tvær ólíkar frumtölur með ólík formerki
- ef A og B eru ósamþátta með ólík formerki

Vélmennið kemst hvert sem er innan „margföldunartöflu“ stærsta samdeilis en ekkert annað

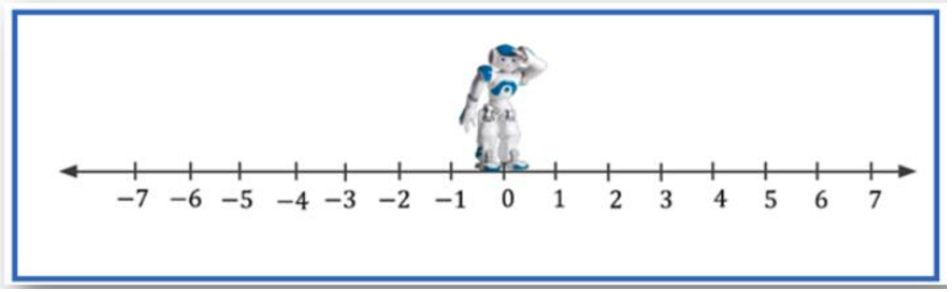
Röksemdir og sannanir

- við finnum fimm samliggjandi tölur og sjáum að með því að bæta 5 hverja þeirra við fáum við næstu fimm tölur (vísir að þrepasönnun fyrir allar jákvæðar tölur, og við getum gert sambærilegt fyrir þrjár samliggjandi tölur og dregið 3 frá hverri þeirra fyrir neikvæðu tölurnar)
- við finnum leið til að fá út 1 og til að fá -1 og rökstyðjum að við getum endurtekið þær skipanaraðir til að komast hvert sem er (einnig vísir að þrepasönnun)

Tengingar

- talnafræði: frumtölur, deilar, samdeilar, ósamþátta
  - **Jafna Bezout**: ef ssd (a,b) er d, þá eru til heilar tölur n og m þannig að $d = an + bm$ og hægt er að finna n og m með **reikniriti Evklíðs**

Vélmenni á talnalínu (III/III)



Robbi	Tóta
A: 5 skref í norður	A: 6 skref í norður
B: 3 skref í austur	B: 4 skref í austur
C: 2 skref í suður	C: 3 skref í suður
D: 4 skref í vestur	D: 2 skref í vestur

Útvíkkanir og fleiri tengingar?

- Línuleg algebra?
- Líkindareikningur?
- ...

1. Tóta færði sig samkvæmt skipununum ABCD og endaði þar með í punktinum (2, 3). Kemst Robbi þangað? Hvernig eða hvers vegna ekki?
2. Robbi færði sig samkvæmt skipunum sínum ABCD og endaði þar með í punktinum (-1,3). Kemst Tóta þangað? Hvernig eða hvers vegna ekki?
3. Lýstu mismunandi möguleikum Robba og Tótu til að komast um í hnitakerfinu. Hvert kemst Robbi? Hvert kemst Tóta?
4. Nú á að hanna skipanir fyrir tvö vélmenni með sama hætti (segja hve mörg skref í hverja átt þau mega fara). Þau byrja bæði á (0,0) en mega svo aldrei mætast á neinum öðrum stað.

Opin miðja: a + b + c = d + e = f (I/III)

MAKE IT EQUAL

Directions: Using the digits 1 to 9 at most one time each, place a digit in each box to create a true statement.

$\square = \square + \square = \square + \square + \square$

Veljið ólíkar tölur úr tölunum frá 1 upp í 9 til að setja í reitina þannig að jafnan verði sönn

Tilgangurinn (skv. upprunalegu efni):

- Að nemendur auki skilning sinn á jafnaðarmerkinu og læri að ákvarða hvort jöfnur með samlagningu og frádrætti séu sannar eða ósannar.
- Að öðlast dýpri og sveigjanlegri þekkingu á samlagningu

Opin miðja:

- Byrjunin er „lokuð“ (ekkert frelsi til að velja) og svarið er „lokað“ (rétt eða rangt) en miðjan er „opin“

Eiginleikar – það sem er gefið:

- tölurnar eru á bilinu 1—9
- náttúrlegar tölur
- veljum **ólíkar tölur**
- mynstrið:
  - tvö jafnaðarmerki
  - „3-2-1“
- summur (reikniaðgerðin er samlagning)

„Hvað ef ekki“ – breytum, fjarlægjum, bætum við:

- tölurnar eru á bilinu 1—*n*, fyrir önnur gildi á *n*
- tölurnar geta verið neikvæðar, brot, ...
- það má endurtaka tölur
- önnur mynstur:
  - a + b = c, a + b + c + d = e + f + g = h + i = j ...
- frádráttur, margföldun, deiling, einhverjar tvær, þrjár eða fjórar ...

Opin miðja: a + b + c = d + e = f (II/III)

MAKE IT EQUAL

Directions: Using the digits 1 to 9 at most one time each, place a digit in each box to create a true statement.

$$\square=\square+\square=\square+\square+\square$$

Væntingar og undrunarefni

- er þetta alltaf hægt?
- er bara eitt svar?

Tilgátur og alhæfingar

- Þetta er hægt á marga vegu. Á hve marga vegu?
  - Á hve marga vegu ef röð skiptir máli?
  - Á hve marga vegu ef við megum velja tölur 1 ... *n*

Röksemdir og sannanir

- við getum gert töflu sem sýnir skipulega alla möguleika

Tengingar

- talningafræði:
  - hvað eru ólíkir möguleikar (þurfum að ákveða hvort röð skiptir máli fyrir okkur)
  - skiptingar

Opin miðja: a + b + c = d + e = f (III/III)

UNIVERSITY OF ICELAND

MAKE IT EQUAL

Directions: Using the digits 1 to 9 at most one time each, place a digit in each box to create a true statement.

$$\square = \square + \square = \square + \square + \square$$

Útvíkkanir og fleiri tengingar?

- Leyfum tölurnar 1 - 10, 1 - 11, 1 - n

A362717:
Number of ways to write a + b + c = d + e = f with {a,b,c,d,e,f} a subset of [n] of size 6 and a < b < c and d < e.

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 4, 10, 20, 36, 60, 93, 141, 200, 280, 379, 505, 653, 842, 1057, 1321, 1622, 1982, 2384, 2864, …

$$\frac{-x^8(5x^7+4x^6+6x^5+6x^4+6x^3+5x^2+3x+1)}{(x^2+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)^2(x+1)^3(x-1)^5}$$

Jóhann Örn Sigurjónsson
Ég byrja á að hugsa þetta öfugt - hvaða summur er EKKI hægt að gera jafngildar með þessum skorðum? Ég sé til dæmis að minnsta summan, 1+2+3, getur aldrei gengið. Þá er strax búið að útiloka ansi marga möguleika fyrir töluna lengst til vinstri 🙂
6y Like Reply

Martin Swift
Fyrir aðeins eldri:

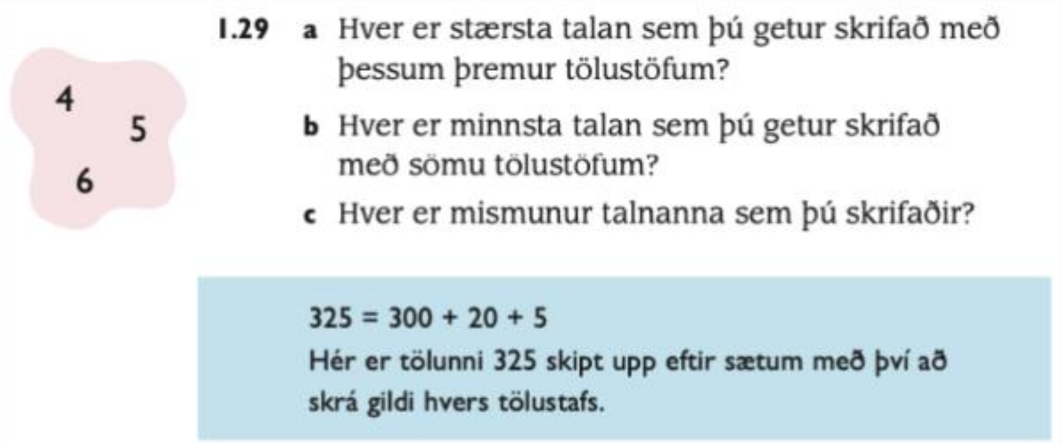
```
from itertools import permutations

perms = permutations(range(1,10), 6)

for p in perms:
if (p[0] == p[1] + p[2]) and (p[1] + p[2] == p[3]+p[4]+p[5]) \
and (p[1] < p[2]) and (p[3] < p[4]) and (p[4] < p[5]):
print('Lausn: '+ str(p[0]) + '=' +str(p[1])+ '+' +str(p[2])+ '=' +str(p[3])+ '+'
+str(p[4])+ '+' +str(p[5]))
```

6y Like Reply 2

Ingólfur Gíslason
Flott. Tölvan fann akkúrat þær lausnir sem ég fann! Væri hægt að láta nemendur gera eitthvað svona? (Og hvaða nemendur?)
Framhaldsverkefni: Athuga hvað gerist ef við fjölgum leyfilegum tölum? Ætli það sé hægt að skilja hvað gerist þá? Ef ég treysti forritinu fæ ég fyrir
1...8: 1 möguleika
1...9: 4
1...10: 10
1...11: 20
1...12: 36
6y Like Reply 2

Ingólfur Gíslason
Þetta þýðir þá sem dæmi að ef við leyfum allar náttúrlegar tölur frá 1 upp í 12 og eigum að velja 6 ólíkar tölur a, b, c, d, e, f þannig að a = b + c = d + e + f þá eru 36 möguleikar (við teljum ólíka röð innan summu ekki sem ólíkan möguleika, b + c er sama og c + b. Samkvæmt The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences get ekki séð að þessi talnaruna yfir fjölda möguleika hafi verið rannsökuð áður! Spurning um að láta vita af henni? https://oeis.org/search?q=1%2C+4%2C+10%2C+20%2C+36%2C+60%2C+93&sort=&language=&go=Search

Talnamismunur og tugakerfi (I/III)



4 5 6

1.29 **a** Hver er stærsta talan sem þú getur skrifað með þessum þremur tölustöfum?

b Hver er minnsta talan sem þú getur skrifað með sömu tölustöfum?

c Hver er mismunur talnanna sem þú skrifaðir?

325 = 300 + 20 + 5
Hér er tölunni 325 skipt upp eftir sætum með því að skrá gildi hvers tölustafs.

Mynd 1: dæmi 1.29 á bls. 13 í Stiku 1a Nemendabók

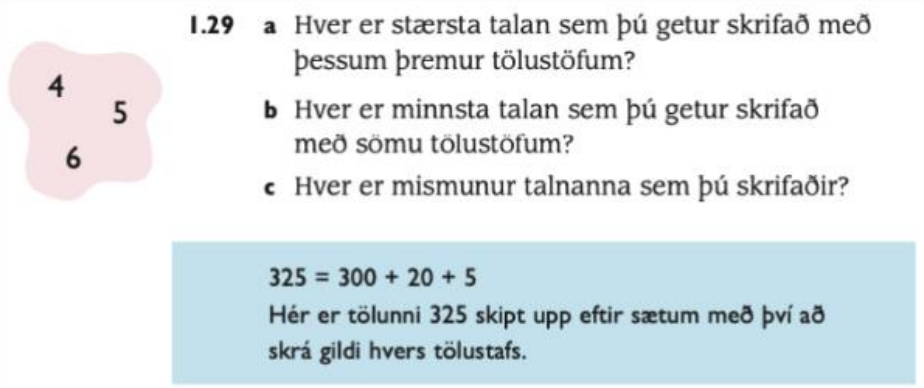
Mynd 2: Stika 1a Nemendabók

Eiginleikar – það sem er gefið:
- Gefnar eru **tölur**
- Tölurnar eru **þrjár** talsins
- Tölurnar eru **heilar**
- Tölurnar eru **jákvæðar**
- Tölurnar eru **nágrannatölur**
- Tölurnar eru skrifaðar með **einum tölustaf**
- Við eigum að finna **stærstu** og **minnstu** töluna sem hægt er að mynda
- Við eigum að reikna **mismun**

Tilgangurinn (skv upprunalegu efni)
Að nemendur í 5. bekk
- læri að nota tugakerfið (sætiskerfi)
- skilji muninn á gildi tölustafs og gildi tölu
- geti skipt tölum upp eftir sætum með því að skrá gildi hvers tölustafs (t.d. 234 = 200 + 30 + 4)

„Hvað ef ekki“ – breytum, fjarlægjum, bætum við:
- Hvað ef tölurnar væru **aðrar þrjár** nágrannatölur?
- Hvað ef tölurnar væru ekki **þrjár** talsins? (2, 4, 5, ...)
- Hvað ef tölurnar væru ekki **nágrannatölur**? Heldur væri annar fastur mismunur? Eða ekki?
- Hvað ef við reiknuðum **summu** en ekki mismun? **Margfeldi**? **Meðaltal**?

Talnamismunur og tugakerfi (II/III)


1.29 a Hver er stærsta talan sem þú getur skrifað með þessum þremur tölustöfum?

b Hver er minnsta talan sem þú getur skrifað með sömu tölustöfum?

c Hver er mismunur talnanna sem þú skrifaðir?

325 = 300 + 20 + 5

Hér er tölunni 325 skipt upp eftir sætum með því að skrá gildi hvers tölustafs.

Mynd 1: dæmi 1.29 á bls. 13 í Stiku 1a Nemendabók

Mynd 2: Stika 1a Nemendabók

Væntingar og undrunarefni

- er alltaf sama útkoma?
- af hverju?

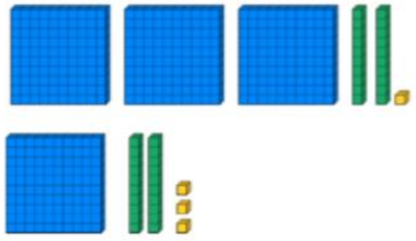
Tilgátur og alhæfingar

- Ef við förum eftir aðferðinni með tveimur mengjum af *k* tölum sem hægt er að raða í jafnmunarunur með sama mun, þá fæst sama útkoma
- Ef við höfum endanlegt mengi af náttúrlegum tölum og förum eftir aðferðinni þá mun 3 deila útkomunni.

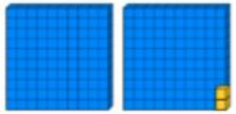
Röksemdir og sannanir

- ýmsar útgáfur af framsetningum í tugakerfi

	Hundruð	Tugir	Einingar
Stærri talan	A+2	A+1	A
Minni talan	A	A+1	A+2
Mismunur	2	0	-2



Við drögum neðri myndina frá efri myndinni og fáum því:

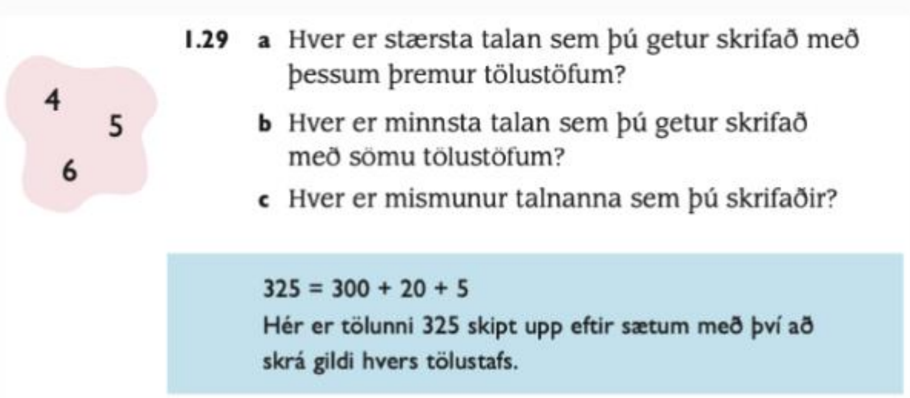


Til að búa til stærstu þriggja stafa töluna látum við stærsta tölustafinn í sætið fyrir hundruð (fremst), næst stærsta tölustafinn í tugasætið (í miðjuna) og svo minnsta tölustafinn í einingasætið (aftast). Til að búa til minnstu þriggja stafa töluna víxlum við á stöfum í hundraðssætinu og einingasætinu (röðin verður öfug). Munurinn á stærsta tölustafnum og minnsta tölustafnum er 2, af því að tölustafirnir eru nágrannatölur. Við getum því hugsað frádráttinn svona: Drögum fyrst frá hundruðin. Stærri þriggja stafa talan er alltaf tveim hundruðum stærri en sú tala sem dregin er frá, svo við fáum 200. Þá drögum við frá tugina en þeir eru jafn margir, svo við erum enn með 200. Þá drögum við frá einingarnar og lægsta talan hefur tveimur fleiri einingar svo við þurfum að draga 2 frá 200. Fáum 198.

Tengingar:

- talnaritunarkerfi (sætiskerfi, deilingarreglur, ...)
- munur á fyrirbæri og framsetningu

Talnamismunur og tugakerfi (III/III)



4 5 6

1.29 a Hver er stærsta talan sem þú getur skrifað með þessum þremur tölustöfum?

b Hver er minnsta talan sem þú getur skrifað með sömu tölustöfum?

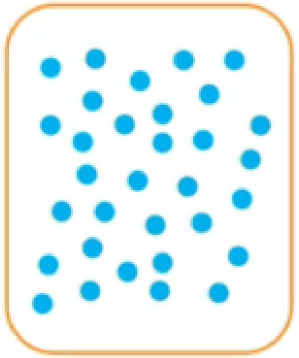
c Hver er mismunur talnanna sem þú skrifaðir?

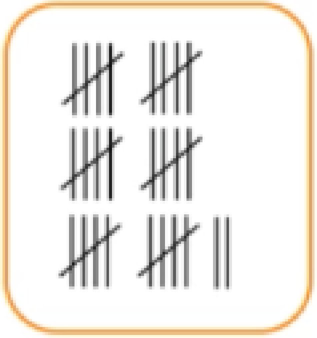
325 = 300 + 20 + 5

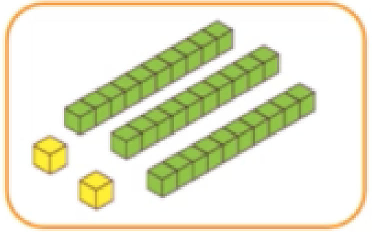
Hér er tölunni 325 skipt upp eftir sætum með því að skrá gildi hvers tölustafs.

Mynd 1: dæmi 1.29 á bls. 13 í Stiku 1a Nemendabók

Mynd 2: Stika 1a Nemendabók







XXXII

100000_2

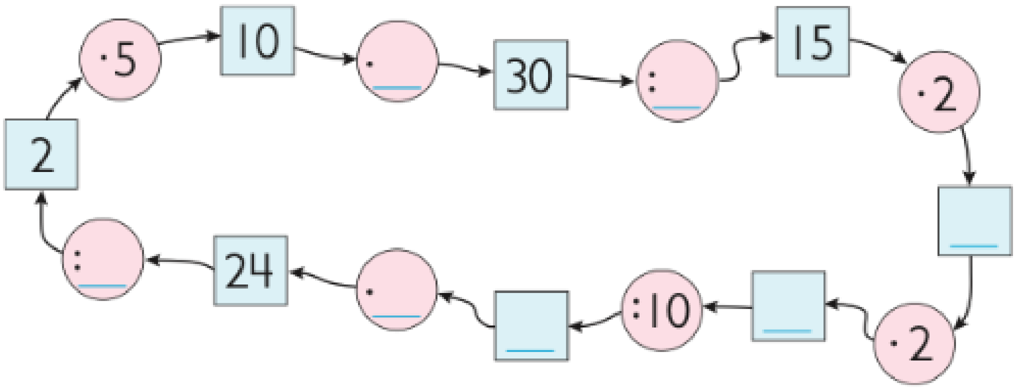
32

Útvíkkanir og fleiri tengingar?

- Önnur sætiskerfi
- Deilanleiki
- ...

Lokaverkefni

1.125 Hoppaðu frá einni tölu til þeirrar næstu með því annaðhvort að margfalda eða deila.
Skrifaðu tölurnar sem vantar.



- **Eiginleikar – það sem er gefið**
- **„Hvað ef ekki" – breytum, fjarlægjum, bætum við**
- **Væntingar og undrunarefni**
- **Tilgátur og alhæfingar**
- **Röksemdir og sannanir**
- **Tengingar og útvíkkanir**

- Sérhver setning í stærðfræði getur verið undrunarefni
- Í verðugu stærðfræðiverkefni felst að gera tilgátur sem fela í sér alhæfingar og að rökstyðja þær
- Til þess að geta leitt nemendur til undrunar og rannsókna þarf kennari að vita og geta meira en að reikna gefnu dæmin
- Það er hægt að fela reikniæfingar inni í áhugaverðari stærðfræðirannsóknum

Meiri umfjöllun

Á vefnum Flatarmál: málgagn Flatar, félags stærðfræðikennara

- Talnamismunur og tugakerfi
- Vélmenni á talnalínu

Á vefnum Open Middle

- Verkefnið _ + _ + _ = _ + _ = _

Á vef The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

- Runa A362717: Fjöldi leiða til að skrifa $a + b + c = d + e = f$ þar sem $\{a, b, c, d, e, f\}$ er 6 staka hlutmengi í $[n]$ og $a < b < c$ og $d < e$