

**MODUL ANALISIS DERET WAKTU
(MA633530)**



**Oleh :
I Wayan Sumarjaya, S.Si., M.Stats**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS UDAYANA
SEMESTER GENAP 2015/2016**

KATA PENGANTAR

Modul Analisis Deret Waktu (MA633530) ini merupakan pengantar tentang analisis deret waktu yang menekankan pada analisis dalam domain waktu. Modul ini terdiri atas delapan bab. Bab 1 membahas konsep deret waktu yang meliputi plot data, tren, musiman, dan siklus. Selain itu dibahas pula klasifikasi data deret waktu. Eksplorasi data deret waktu dibahas pada Bab 2. Bab 3 membahas konsep proses stokastik dan stasioner terutama fungsi autokovarians, fungsi autokorelasi, dan sifat-sifatnya. Model-model deret waktu stasioner seperti AR, MA, dan ARMA dibahas pada Bab 4. Kemudian, untuk model deret waktu nonstasioner ARIMA dibahas secara rinci pada Bab 5.

Bab 6 membahas secara rinci inferensi model ARIMA. Materi pada Bab ini meliputi spesifikasi model, estimasi parameter, diagnostik model, dan peramalan. Bab 7 membahas model ARIMA untuk data musiman, disebut pula SARIMA. Materi kuliah diakhiri dengan pembahasan tentang model deret waktu heteroskedastik ARCH dan GARCH.

Akhir kata semoga modul ini bermanfaat bagi mahasiswa yang mengambil mata kuliah analisis deret waktu. Segala kritik dan saran guna perbaikan modul ini harap dikirim via email ke sumarjaya@unud.ac.id.

Bukit Jimbaran, Februari 2016

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR GAMBAR	v
DAFTAR TABEL	vii
BAB 1. Pengantar Analisis Deret Waktu	1
1.1 Konsep Deret Waktu	1
1.2 Contoh-contoh Deret Waktu	1
1.3 Jenis-jenis Deret Waktu	6
1.3.1 Deret Waktu Kontinu	9
1.3.2 Deret Waktu Diskret	9
1.4 Tujuan Analisis Deret Waktu	9
1.5 Klasifikasi Deret Waktu	10
1.5.1 Domain waktu dan domain frekuensi	10
1.5.2 Deret waktu kontinu dan diskret	11
1.5.3 Deret waktu univariat dan multivariat	11
1.5.4 Deret waktu stasioner dan nonstasioner	11
1.5.5 Deret waktu Gauss dan non-Gauss	11
1.5.6 Deret waktu linear dan nonlinear	11
BAB 2. Elemen Eksplorasi Data Deret Waktu	12
2.1 Plot Data Deret Waktu	12
2.2 Transformasi Data	12
2.3 Studi Latar Belakang Data Deret Waktu	14
2.4 Dekomposisi Klasik	16
2.4.1 Tren	17
2.4.2 Musiman	17
2.4.3 Siklus	17
2.4.4 Fluktuasi Tidak Beraturan	17
2.5 Karakteristik Data Deret Waktu	17
2.6 Latihan	17
BAB 3. Pengantar Proses Stasioner	20
3.1 Konsep Proses Stokastik	20
3.2 Konsep Proses Stasioner	21

3.3	Fungsi Autokovarians dan Autokorelasi Sampel	28
3.4	Proses-proses Linear	30
3.5	Lampiran: Varians, Kovarians, dan Korelasi	30
3.5.1	Sifat-sifat Varians	30
3.5.2	Sifat-sifat Kovarians	31
3.5.3	Sifat-sifat Korelasi	31
3.5.4	Sifat-sifat Fungsi Autokovarians dan Autokorelasi	31
3.6	Latihan Soal	32
BAB 4.	Model-model Deret Waktu Stasioner	34
4.1	Proses-proses Linear Umum	34
4.2	Proses Rerata Bergerak	36
4.2.1	Proses Rerata Bergerak Tingkat Satu	36
4.2.2	Proses Rerata Bergerak Tingkat Dua	36
4.2.3	Proses MA(q)	37
4.3	Proses Autoregresif	37
4.3.1	Proses Autoregresif Tingkat Pertama	37
4.3.2	Proses Autoregresif Tingkat Kedua	39
4.3.3	Proses Autoregresif Umum	40
4.4	Proses ARMA	41
4.4.1	Proses ARMA(1, 1)	41
4.5	Keterbalikan	42
4.6	Latihan	43
BAB 5.	Model-model Deret Waktu Nonstasioner	45
5.1	Model ARIMA($p, 1, q$)	45
5.2	Model IMA(1, 1)	46
5.3	Model ARI(1, 1)	46
5.4	Model ARIMA dengan Konstanta	47
5.5	Transformasi Data	47
5.6	Simulasi Model ARIMA	48
5.7	Latihan Soal	50
BAB 6.	Inferensi Model ARIMA	51
6.1	Spesifikasi Model	51
6.1.1	Sifat-sifat fungsi autokorelasi sampel	51
6.1.2	Fungsi autokorelasi parsial	52
6.1.3	Kriteria Informasi	55
6.1.4	Uji Akar Unit	56
6.2	Estimasi Parameter	58
6.3	Peramalan	60
6.3.1	Harapan bersyarat	60
6.3.2	Prediksi MSE minimum	60
6.3.3	Peramalan model ARIMA	62
6.3.4	Implementasi pada R	65
BAB 7.	Model ARIMA Musiman	66

7.1	Model SARIMA	66
7.1.1	Model MA Musiman	66
7.1.2	Model AR Musiman	67
7.2	Model ARMA Musiman Multiplikatif	68
7.3	Model ARIMA Musiman Nonstasioner	69
7.4	Contoh Kasus	69
7.4.1	Pemeriksaan Diagnostik	73
BAB 8.	Model Deret Waktu Heteroskedastik	75
8.1	Beberapa Ciri Deret Waktu Finansial	75
8.1.1	<i>Stylized Fact</i>	77
8.2	Model ARCH	79
8.3	Model GARCH	81
8.4	Estimasi Parameter	82
8.5	Diagnostik Model	82
8.6	Contoh Analisis Data NASDAQ	83
8.7	Catatan	89
	DAFTAR PUSTAKA	90

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Plot data bulanan total jumlah penumpang pesawat internasional pada periode 1949–1960.	2
Gambar 1.2	Plot data bulanan total jumlah penumpang pesawat internasional pada periode 1949–1960 dengan label. Inisial menunjukkan nama bulan dalam bahasa Inggris.	3
Gambar 1.3	Plot konsentrasi atmosfer CO ₂ dalam <i>parts per million</i> (ppm).	3
Gambar 1.4	Plot indeks penutupan JKSE untuk periode 4 Januari 2010 sampai dengan 23 Agustus 2012.	4
Gambar 1.5	Plot <i>electroencephalogram</i> (EEG).	5
Gambar 1.6	Plot data tahunan bintik matahari Wölf.	5
Gambar 1.7	<i>Southern Oscillation Index</i> (SOI) selama periode 1950–1995.	6
Gambar 1.8	Plot jumlah penduduk bulanan di Amerika Serikat untuk periode 1 Januari 1952 sampai dengan 1 Januari 2005.	7
Gambar 1.9	Plot kematian bulanan (laki-laki dan perempuan) di Inggris akibat bronkitis, asma, dan emfisema mulai 1974–1979.	7
Gambar 1.10	Plot gol pertandingan selama periode 1872–1987.	8
Gambar 1.11	banyak <i>lynx</i> yang terperangkap selama kurun waktu 1821–1934 di Kanada.	8
Gambar 2.1	(a) Plot deret waktu temperatur bulanan di Dubuque, Iowa; (b)plot jumlah penduduk bulanan di Amerika Serikat Januari 1952–Januari 2005 ; (c) plot jumlah penumpang pesawat internasional bulanan tahun 1949–1960;(d) dan plot bercak matahari Wölf tahun 1700–2001.	13
Gambar 2.2	Plot data jumlah penumpang pesawat internasional dan transformasi logaritmanya.	15
Gambar 2.3	Plot data deret waktu bintik <i>sunspot</i> Wolf tahun 1700–2001.	15
Gambar 2.4	Dekomposisi deret waktu jumlah penumpang pesawat internasional bulanan periode Januari 1949–Desember 1960.	18
Gambar 3.1	Plot 200 amatan dari realisasi $X_t = 2\cos(0,5t + 0,2\pi)$	21
Gambar 3.2	Plot 200 realisasi IID(0, 1).	24
Gambar 3.3	Fungsi autokovarians dan autokorelasi IID noise.	24
Gambar 3.4	Plot 200 realisasi langkah acak.	26
Gambar 3.5	Fungsi autokovarians dan autokorelasi langkah acak.	26
Gambar 3.6	Plot MA(1) untuk $\theta = 0,6$ dan $\theta = -0,6$	29
Gambar 5.1	Plot data AirPassengers dan transformasi log terhadap AirPassengers.	49
Gambar 5.2	Plot simulasi model ARI, IMA, dan ARIMA.	49

Gambar 6.1	Plot data Lake Huron dan <i>differencing</i> terhadap tren.	54
Gambar 6.2	Plot ACF dan PACF data Lake Huron dan <i>differencing</i> terhadap tren.	55
Gambar 7.1	Data konsentrasi co2 (dalam ppm).	70
Gambar 7.2	Plot ACF data co2.	70
Gambar 7.3	Plot <i>differencing</i> terhadap tren data co2.	71
Gambar 7.4	Plot ACF <i>differencing</i> terhadap tren data co2.	71
Gambar 7.5	Plot <i>differencing</i> terhadap musiman untuk data co2.	72
Gambar 7.6	Plot ACF <i>differencing</i> terhadap musiman untuk data co2.	72
Gambar 7.7	Plot sisaan model SARIMA untuk data co2.	73
Gambar 7.8	Plot Q-Q untuk data co2.	74
Gambar 8.1	Harga pembukaan saham NASDAQ periode 5 Februari 1971–15 Mei 2016.	76
Gambar 8.2	Return NASDAQ.	76
Gambar 8.3	ACF return NASDAQ.	76
Gambar 8.4	PACF return NASDAQ.	77
Gambar 8.5	ACF return mutlak NASDAQ.	77
Gambar 8.6	ACF return kuadrat NASDAQ.	78
Gambar 8.7	ACF dan PACF return kuadrat NASDAQ.	85

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Nilai λ dan Bentuk Transformasi Box–Cox yang Bersesuaian	14
Tabel 8.1	Model ARCH dan GARCH yang dicobakan pada data NASDAQ	88

BAB 1

Pengantar Analisis Deret Waktu

1.1 Konsep Deret Waktu

Pada subbab ini kita akan membicarakan konsep deret waktu (*time series*) disertai dengan beberapa contoh data deret waktu. Pada subbab-subbab berikutnya kita akan membicarakan elemen eksplorasi deret waktu dan alat-alat deskriptif sederhana yang kita perlukan.

Deret waktu didefinisikan sebagai kumpulan observasi atau amatan yang dibuat secara beruntun (*sequentially*) atau berurut sepanjang waktu. Biasanya observasi dalam deret waktu tidaklah bebas atau bisa dikatakan berkorelasi. Dengan demikian, urutan dari observasi menjadi penting. Hal ini tentu berakibat pada prosedur-prosedur dan teknik-teknik statistika yang berdasarkan pada asumsi bebas (*independent*) menjadi tidak berlaku lagi; sehingga, diperlukan metode-metode dan pendekatan-pendekatan yang berbeda.

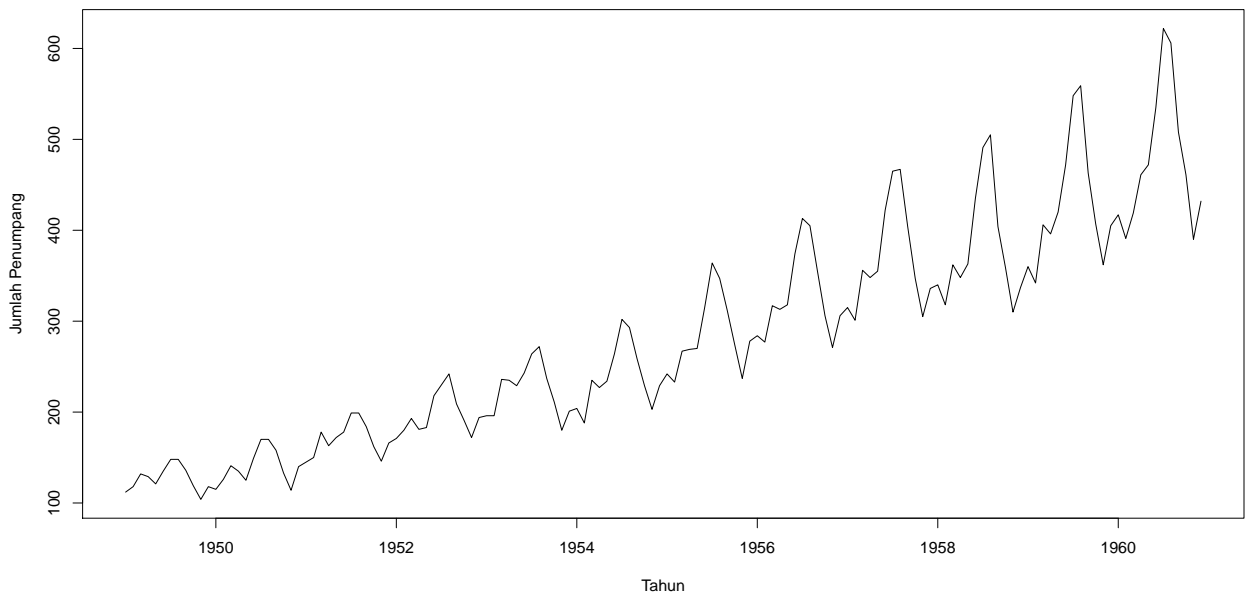
1.2 Contoh-contoh Deret Waktu

Deret waktu muncul dalam berbagai bidang, baik dalam bidang yang berkaitan dengan ilmu-ilmu eksakta maupun ilmu-ilmu sosial. Contoh-contoh berikut hanyalah merupakan sebagian kecil dari deret waktu yang dapat dijumpai dalam bidang industri, bisnis dan keuangan, kependudukan, kedokteran, ekologi, meteorologi, kesehatan, dan lain-lain.

Contoh 1.2.1. Berikut ini adalah plot data bulanan total jumlah penumpang pesawat internasional pada periode 1949–1960. Gambar 1.1 menunjukkan adanya tren naik dan fluktuasi musiman.

```
> ## Mengakses pustaka datasets  
> library(datasets)  
> help(datasets)  
> plot(AirPassengers,xlab="Tahun",ylab="Jumlah Penumpang")
```

Untuk memperjelas pola musiman tersebut, modifikasi plot dengan memberikan label inisial bulan akan membantu (lihat Gambar 1.2. Misalnya J = Januari, F = Februari, M = Maret dan seterusnya. Tentu saja dalam pembacaan plot kita harus membedakan antara Januari, Juni, dan Juli; Maret dan Mei; April dan Agustus. Namun, hal ini cukup gampang karena kita bisa lihat karakter-karakter plot yang berdekatan.



Gambar 1.1: Plot data bulanan total jumlah penumpang pesawat internasional pada periode 1949–1960.

```
> library(TSA)
> plot(AirPassengers,type="l",xlab="Tahun",ylab="Jumlah Penumpang")
> points(y=AirPassengers,x=time(AirPassengers),pch=as.vector(season(AirPassengers)))
```

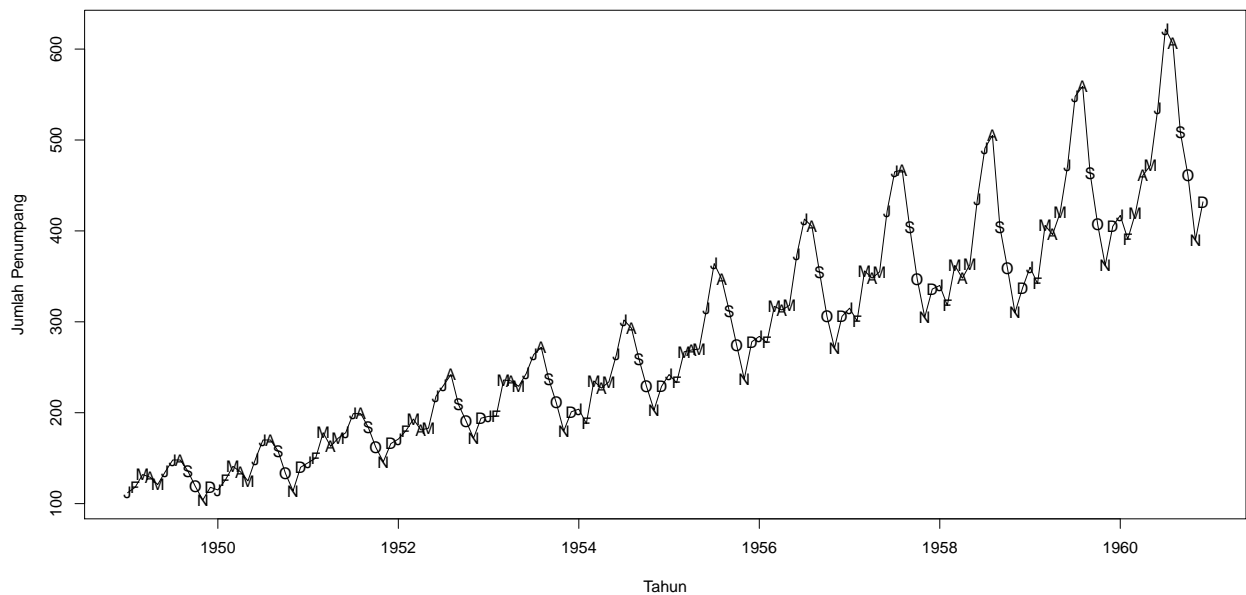
Berdasarkan modifikasi plot, kita bisa amati bahwa jumlah penumpang tertinggi terdapat pada bulan Juli–Agustus; sebaliknya, penumpang terendah terdapat pada bulan November. Pola-pola ini senantiasa berulang setiap tahunnya.

Contoh 1.2.2. Gambar 1.3 memperlihatkan konsentrasi atmosfer CO_2 dalam *parts per million* (ppm) untuk periode 1959–1997. Tampak jelas dari plot adanya tren naik dan pola musiman yang berulang. Coba Anda bandingkan dengan plot data penumpang pesawat pada contoh sebelumnya.

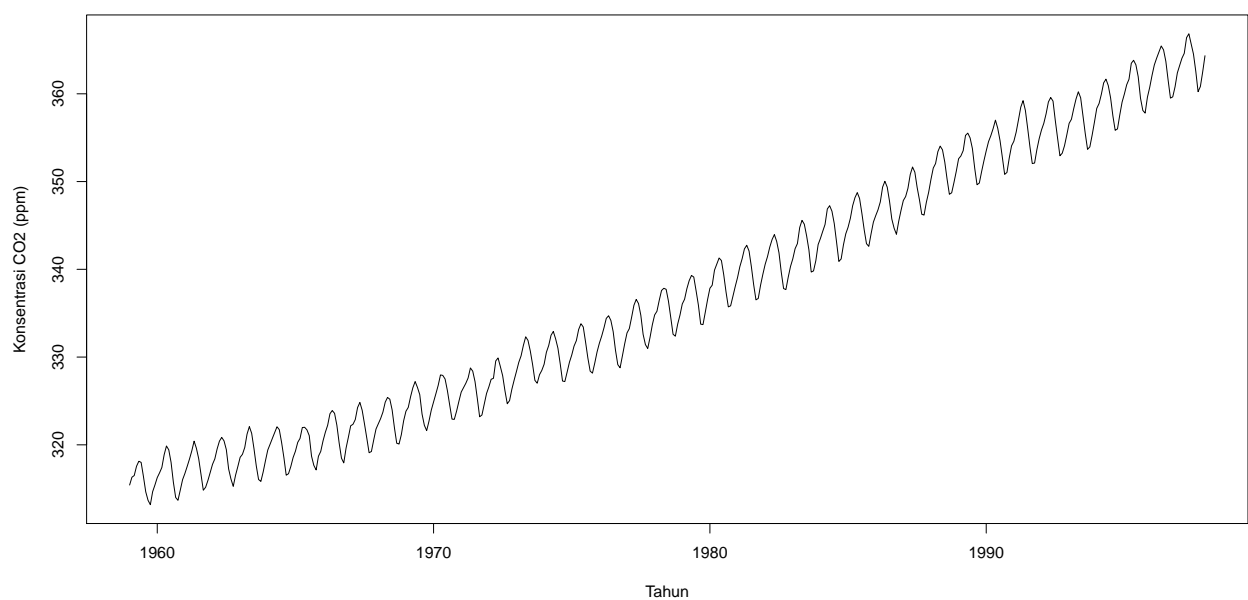
```
> plot(co2,xlab="Tahun",ylab="Konsentrasi CO2 (ppm)")
```

Contoh 1.2.3. Dalam bidang keuangan (*financial*) seperti indeks harga saham dan kurs mata uang berfluktuasi sangat tinggi. Berikut ini adalah plot data penutupan indeks Jakarta Stock Exchange (JKSE) untuk periode 4 Januari 2010 sampai dengan 23 Agustus 2012 (lihat Gambar 1.4). Data finansial seperti ini memiliki tren, namun berfluktuasi sehingga sering disebut tren stokastik.

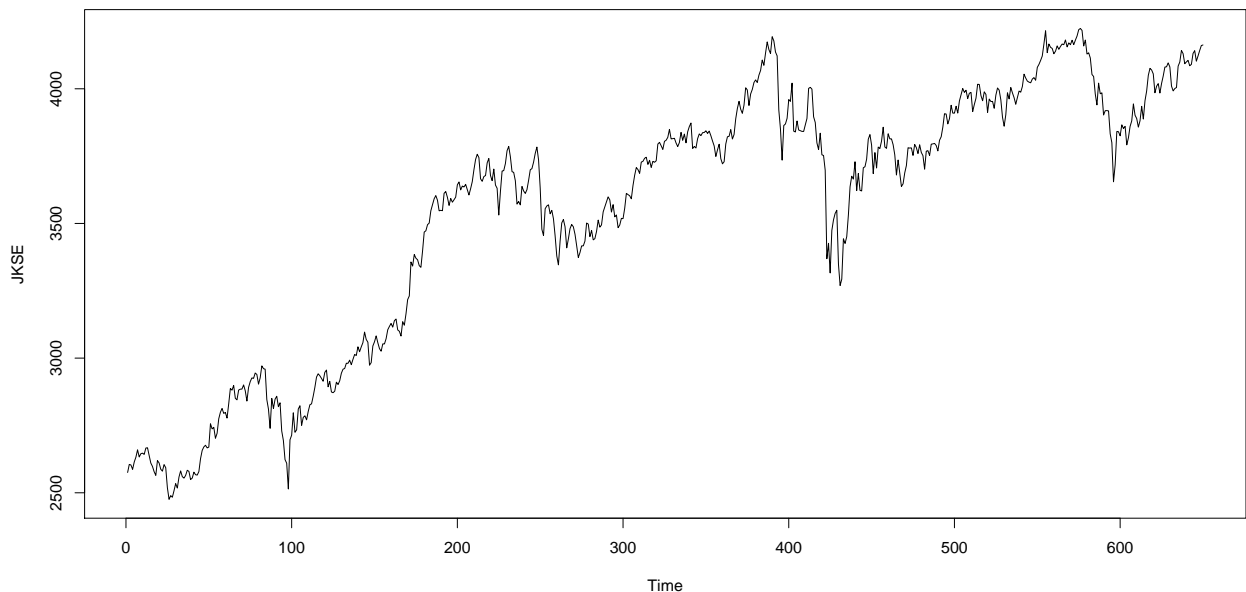
```
> JKSE <- scan("JKSE.txt")
> plot.ts(JKSE)
```



Gambar 1.2: Plot data bulanan total jumlah penumpang pesawat internasional pada periode 1949–1960 dengan label. Inisial menunjukkan nama bulan dalam bahasa Inggris.



Gambar 1.3: Plot konsentrasi atmosfer CO₂ dalam *parts per million* (ppm).



Gambar 1.4: Plot indeks penutupan JKSE untuk periode 4 Januari 2010 sampai dengan 23 Agustus 2012.

Contoh 1.2.4. Dalam bidang kedokteran dijumpai data deret waktu *electroencephalogram* (EEG) yang melacak gelombang otak yang dibuat oleh *electroencephalograph* untuk mendeteksi penyakit yang berhubungan dengan otak (*celebral disease*). Gambar 1.5 memperlihatkan plot EEG. Apa yang dapat Anda amati dari gambar tersebut?

```
> EEG <- scan("EEG.txt")
> plot.ts(EEG)
```

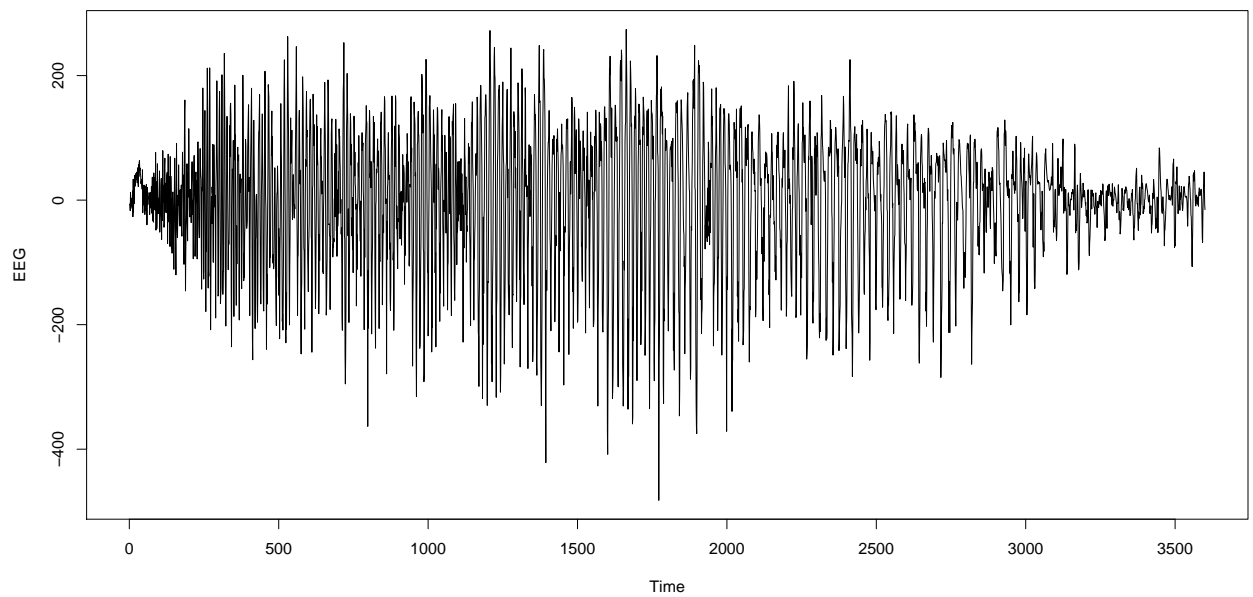
Contoh 1.2.5. Berikut ini adalah plot data tahunan bintik matahari Wölf untuk periode 1700–1983. Gambar 1.6 memperlihatkan pola siklus 10 tahunan. Silakan nanti Anda baca tentang bintik matahari dengan melakukan pencarian di Internet.

```
> wolfer <- scan("wolfer.txt", skip=1)
> plot.ts(wolfer)
```

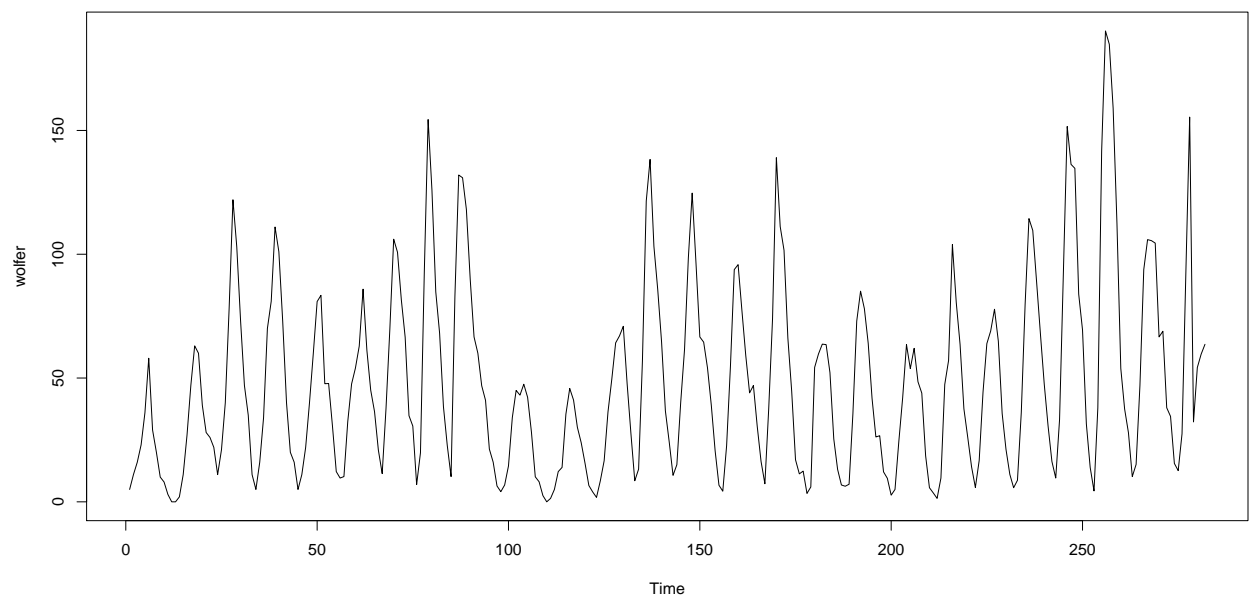
Contoh 1.2.6. Data berikut ini adalah data bulanan *Southern Oscillation Index* (SOI) selama periode 1950–1995. Indeks ini merupakan salah satu ukuran "El Nino-Southern Oscillation" yang merupakan salah satu data penting dalam studi klimatologi.

```
> SOI <- scan("SOI.txt")
> plot.ts(SOI)
```

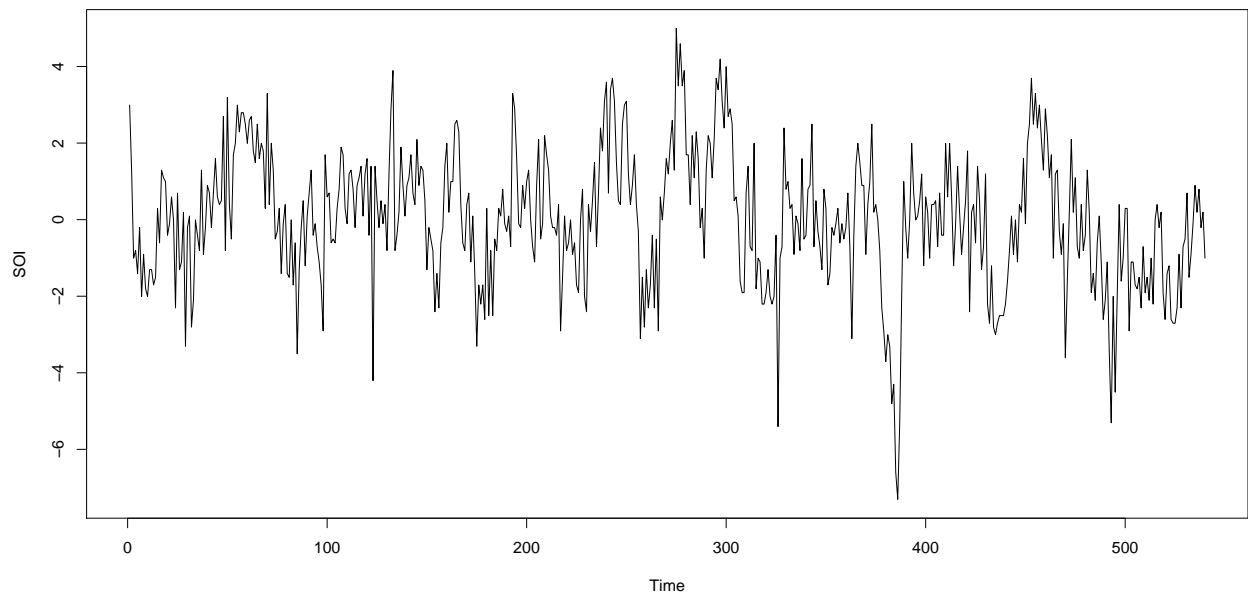
Contoh 1.2.7. Berikut ini adalah plot jumlah penduduk bulanan di Amerika Serikat mulai 1 Januari 1952 sampai dengan 1 Januari 2005.



Gambar 1.5: Plot *electroencephalogram* (EEG).



Gambar 1.6: Plot data tahunan bintik matahari Wölf.



Gambar 1.7: *Southern Oscillation Index (SOI)* selama periode 1950–1995.

```
> PopUSA <- read.table("PopUSA.txt",skip=3)
> PopUSA <- PopUSA[,3]
> plot.ts(PopUSA,xlab="Tahun",ylab="Jumlah Populasi")
```

Contoh 1.2.8. Gambar 1.9 memperlihatkan kematian bulanan (laki-laki dan perempuan) di Inggris akibat bronkitis, asma, dan emfisema selama kurun waktu 15 tahun.

```
> plot(ldeaths)
```

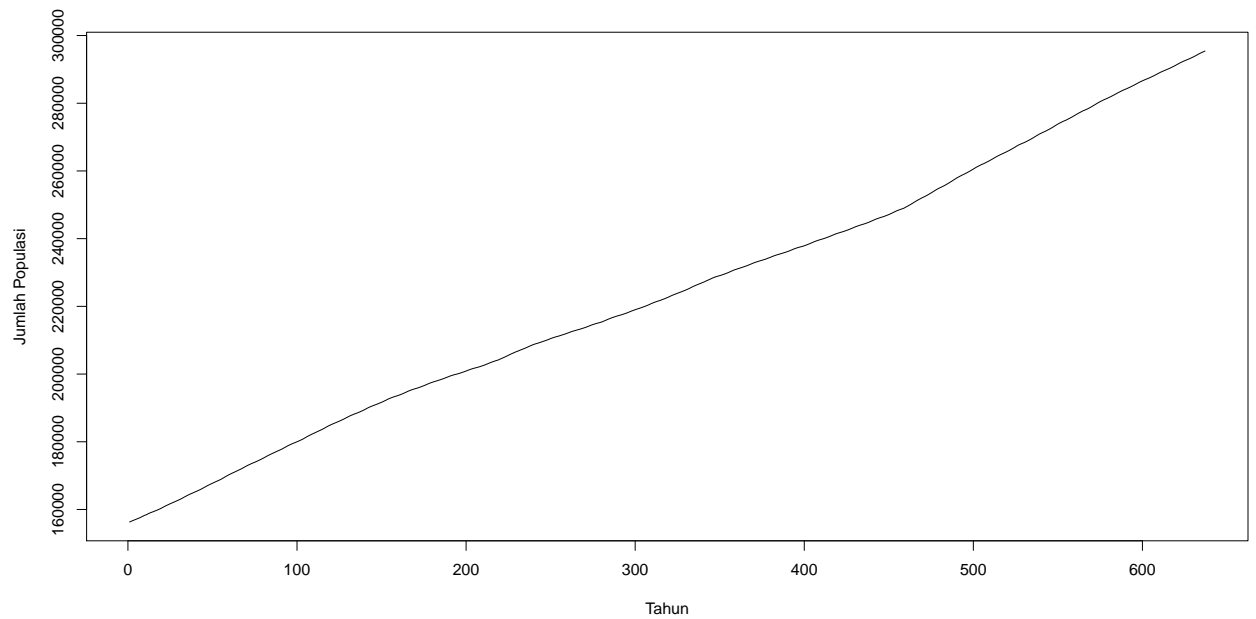
Contoh 1.2.9. Banyaknya gol dalam suatu pertandingan 1872–1987 dapat dilihat pada Gambar 1.10 berikut.

```
> goals <- read.table("goals.txt")
> plot.ts(goals[,1])
```

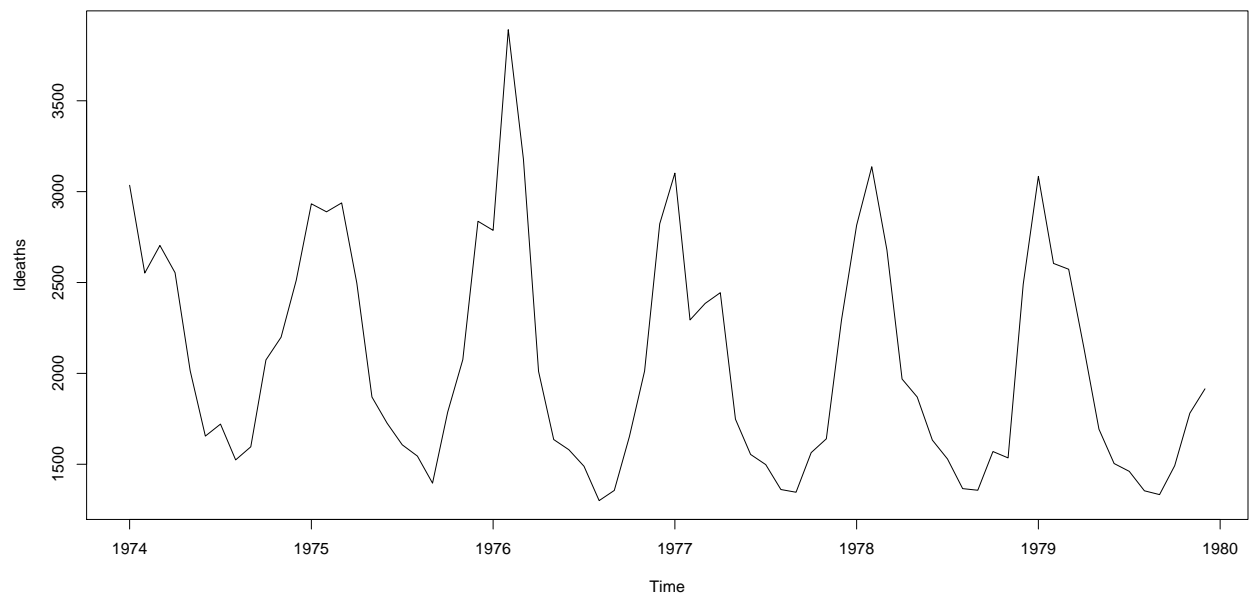
Contoh 1.2.10. Plot data berikut adalah banyak *lynx* yang terperangkap selama kurun waktu 1821–1934 di Kanada (lihat Gambar 1.11).

1.3 Jenis-jenis Deret Waktu

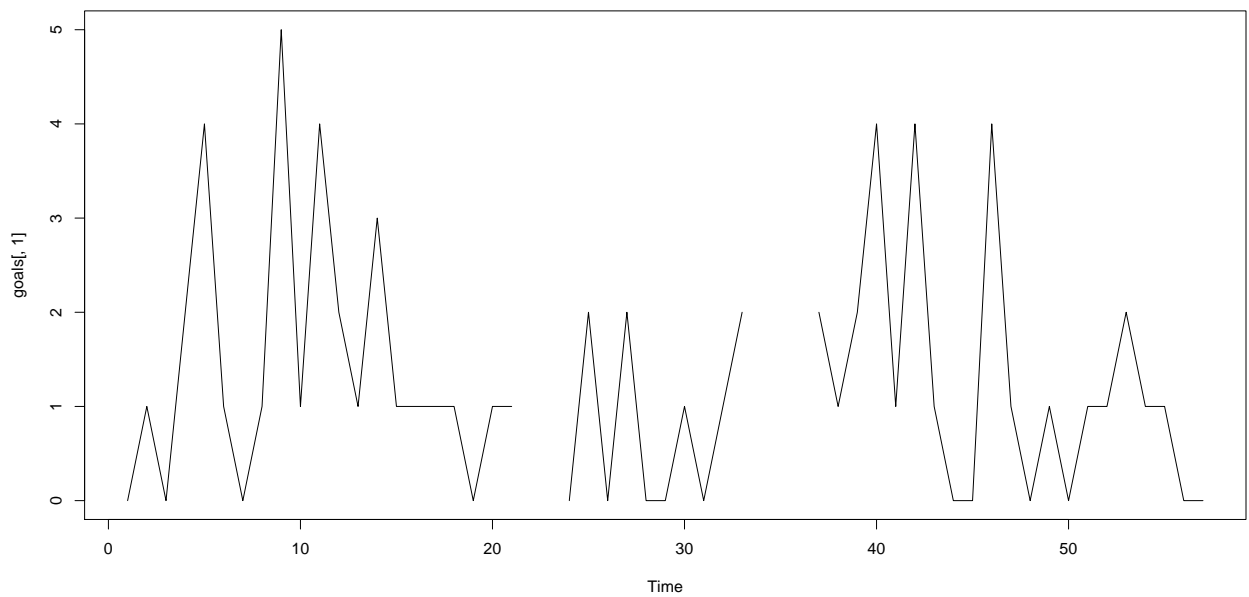
Jenis-jenis deret waktu dapat kita lihat dari berbagai sudut pandang. Berdasarkan jenis datanya deret waktu dapat dibagi menjadi dua yaitu deret waktu kontinu dan deret waktu diskret.



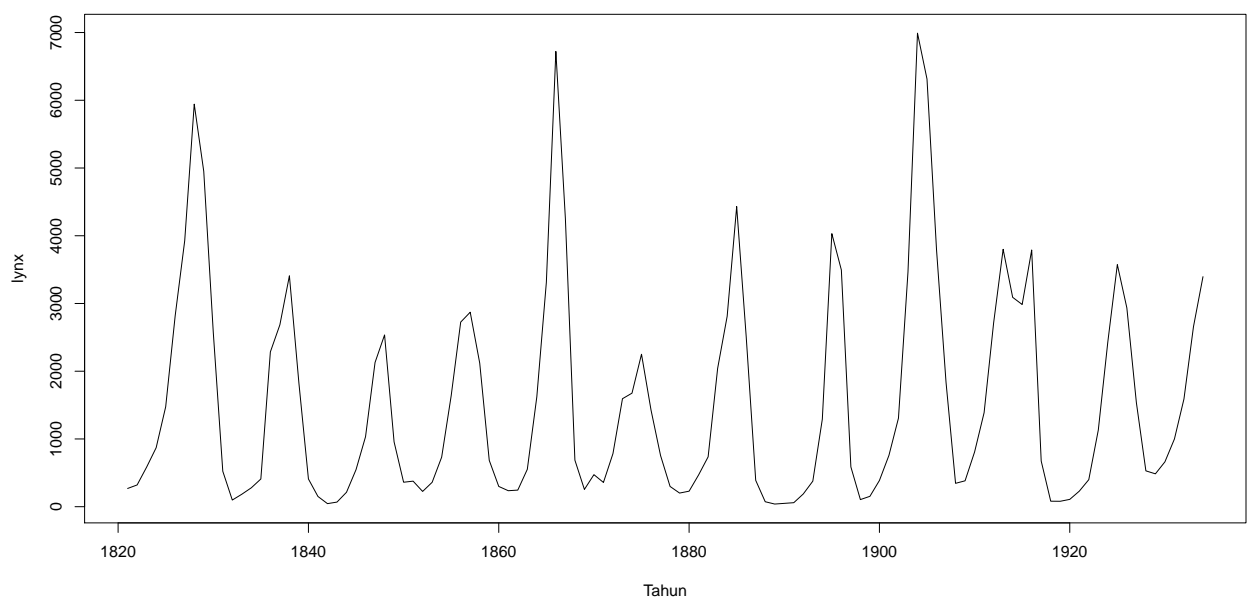
Gambar 1.8: Plot jumlah penduduk bulanan di Amerika Serikat untuk periode 1 Januari 1952 sampai dengan 1 Januari 2005.



Gambar 1.9: Plot kematian bulanan (laki-laki dan perempuan) di Inggris akibat bronkitis, asma, dan emfisema mulai 1974-1979.



Gambar 1.10: Plot gol pertandingan selama periode 1872–1987.



Gambar 1.11: banyak *lynx* yang teperangkap selama kurun waktu 1821-1934 di Kanada.

1.3.1 Deret Waktu Kontinu

Definisi 1.3.1. Deret waktu X_t dikatakan kontinu (*continuous time series*) jika observasi atau amatan dibuat atau dicatat secara kontinu pada suatu selang tertentu T .

Salah satu contoh deret waktu kontinu adalah biner. Istilah kontinu digunakan meskipun peubah terukur hanya mengambil nilai diskret.

1.3.2 Deret Waktu Diskret

Definisi 1.3.2. Deret waktu X_t dikatakan diskret (*discrete time series*) jika observasi hanya mengambil nilai pada waktu tertentu $T_0 = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dan biasanya berjarak atau berselang sama (*equally spaced*).

Istilah diskret digunakan meskipun peubah terukur adalah kontinu. Kita akan lebih banyak membicarakan tentang deret waktu diskret, sedangkan untuk deret waktu kontinu memerlukan pemahaman tentang analisis spektral terutama transformasi Fourier dan analisis harmonik.

Deret waktu diskret dapat terjadi dalam banyak cara. Misalkan kita punya deret waktu kontinu, kemudian kita ambil nilai-nilai pada selang yang sama untuk menghasilkan deret waktu diskret yang disebut deret tersampel (*sampled series*).

Dalam statistika kita biasanya berhubungan dengan sampel acak dari observasi bebas (*independent*). Namun dalam analisis deret waktu observasi biasanya tidak bebas (*not independent*) dan analisis harus mempertimbangkan urutan atau runtun observasi berdasarkan waktu. Deret waktu dikatakan deterministik jika deret waktu bisa diprediksi dengan tepat. Namun, kebanyakan deret waktu stokastik dengan nilai masa depan hanya sebagian dipengaruhi oleh nilai-nilai masa lalu. Untuk deret waktu stokastik biasanya prediksi yang tepat hampir tidak mungkin. Oleh karena itu, kita harus menganggap bahwa nilai masa datang memiliki distribusi peluang tertentu dengan berbekal pengetahuan tentang nilai-nilai masa lalu.

1.4 Tujuan Analisis Deret Waktu

Ada beberapa tujuan dari analisis deret waktu yaitu (lihat Chatfield (1984)):

1. Penggambaran (*description*)

Langkah pertama dalam analisis deret waktu biasanya adalah memplot data dan kemudian mencari beberapa ukuran-ukuran deskriptif sederhana dari deret tersebut. Dengan melihat plot kita bisa memperhatikan ada atau tidaknya komponen-komponen tren (*trend*), musiman (*seasonal*), dan komponen siklus (*cyclic*). Selain itu dengan melihat plot data deret waktu kita bisa mengamati adanya pencilan (*outliers*) dan adanya perubahan titik (*turning points*). Pencilan dapat berupa observasi yang benar (*valid*), namun dapat juga bersifat aneh (*freak*). Untuk perubahan titik biasanya berhubungan dengan perubahan dari tren naik menjadi tren turun. Selain itu, kita juga bisa menghitung statistik deskriptif dasar seperti fungsi autokorelasi, autokovarians, dan periodogram (Kitagawa (2010)).

2. Pemaparan (*explanation*)

Apabila observasi diambil pada dua atau lebih peubah, maka variasi dalam deret waktu bisa digunakan untuk menjelaskan variasi dalam deret waktu lain. Model regresi berganda dan sistem-sistem linear akan berguna dalam tahap ini. Sebagai contoh bagaimana air laut dipengaruhi oleh suhu dan tekanan.

3. Prediksi (*prediction*)

Dengan ketersediaan data deret waktu maka kita bisa meramal atau memprediksi nilai-nilai data untuk masa depan. Prediksi atau peramalan ini berhubungan erat dengan pengawasan karena suatu tindakan akan dilakukan oleh suatu perusahaan apabila terjadi sesuatu di luar dari prediksi targetnya.

4. Pengawasan (*control*)

Jika analisis deret waktu telah menunjukkan mutu dari proses produksi maka analisis digunakan untuk melakukan pengawasan terhadap proses. Dalam kendali mutu statistika observasi diplot dalam diagram kontrol, kemudian pengawas akan mempelajari diagram tersebut.

Dalam Kitagawa (2010) tujuan analisis deret waktu ada empat: penggambaran (*description*), pemodelan (*modelling*), prediksi (*prediction*), dan pengekstrakan sinyal (*signal extraction*). Pemodelan meliputi mengidentifikasi model yang tepat dalam menangkap struktur stokastik deret waktu (kita akan membahas ini lebih lanjut dalam konsep proses stasioner dan proses linear). Dalam pemodelan ini pulalah, kita akan memilih model yang layak dan menduga parameternya. Selanjutnya, pengekstrakan sinyal, kita mengekstrak informasi dasar atau berguna dari deret waktu yang disesuaikan dengan tujuan analisis.

Meskipun ada perbedaan pada tujuan kedua dan keempat pada Kitagawa (2010) dengan Chatfield (1984), kita tidak akan mempermasalahkannya. Kita akan lebih memusatkan perhatian pada prediksi atau peramalan.

1.5 Klasifikasi Deret Waktu

Klasifikasi deret waktu berikut dapat dilihat pada Kitagawa (2010).

1.5.1 Domain waktu dan domain frekuensi

Ditinjau dari segi domain, analisis deret waktu dapat dibagi menjadi dua:

1. Analisis deret waktu dalam domain waktu (*time domain*)

Deret waktu dianggap merupakan proses yang berjalan seiring dengan waktu. Analisis ini banyak melibatkan istilah-istilah dalam analisis regresi seperti autokorelasi (*autocorrelation*), autokovarians (*autocovarian*), dan autoregresif (*autoregressive*).

2. Analisis deret waktu dalam domain frekuensi (*frequency domain*)

Dalam analisis domain frekuensi, deret waktu dianggap sebagai akibat dari adanya komponen siklus pada frekuensi berbeda. Untuk mengestimasi fungsi ini digunakan prosedur yang disebut analisis spektral (*spectral analysis*).

Pada mata kuliah ini kita akan mempelajari analisis deret waktu dengan pendekatan domain waktu.

1.5.2 Deret waktu kontinu dan diskret

Pada subbab sebelumnya kita telah membicarakan sekilas tentang deret waktu kontinu dan diskret. Data yang dicatat secara kontinu disebut deret waktu kontinu. Contoh deret waktu kontinu adalah plot EEG. Sebaliknya, data yang dicatat pada selang waktu tertentu, misalnya per jam, disebut deret waktu diskret.

Deret waktu diskret dibedakan menjadi dua: selang ruang sama (*equally spaced intervals*) dan selang ruang tidak sama (*unequally spaced intervals*).

1.5.3 Deret waktu univariat dan multivariat

Deret waktu yang terdiri dari observasi tunggal pada setiap titik waktu disebut deret waktu *univariat*. Contoh-contoh yang telah kita bahas pada subbab sebelumnya semuanya adalah deret waktu univariat. Deret waktu yang diperoleh dengan mencatat secara simultan dua atau lebih fenomena disebut *deret waktu multivariat*. Pada mata kuliah ini kita akan mempelajari deret waktu univariat.

1.5.4 Deret waktu stasioner dan nonstasioner

Pada beberapa data deret waktu, kita akan menjumpai fenomena acak yang dianggap sebagai realisasi dari suatu model stokastik dengan struktur invarian (*invariant structure*). Deret seperti ini disebut dengan deret waktu pegun atau stasioner (*stationary*). Namun, jika struktur stokastik deret waktu tersebut berubah sepanjang waktu (*change over time*), deret tersebut disebut deret waktu takpegun atau takstasioner (*nonstationary*).

1.5.5 Deret waktu Gauss dan non-Gauss

Apabila deret waktu berdistribusi normal, deret waktu tersebut dikatakan deret waktu Gauss (*Gaussian time series*); sebaliknya, disebut deret waktu non-Gauss (*non-Gaussian time series*). Kebanyakan model yang akan kita pelajari adalah deret waktu Gauss.

1.5.6 Deret waktu linear dan nonlinear

Deret waktu yang dapat dinyatakan sebagai luaran suatu model linear disebut deret waktu linear (*linear time series*); sebaliknya, disebut deret waktu nonlinear (*nonlinear time series*).

BAB 2

Elemen Eksplorasi Data Deret Waktu

2.1 Plot Data Deret Waktu

Langkah pertama dalam analisis eksplorasi data melakukan plot terhadap data deret waktu. Berdasarkan plot ini dapat diamati ada atau tidaknya tren, pengaruh musiman, siklus, dan fluktuasi tak beraturan. Langkah ini bertujuan untuk mengidentifikasi pengaruh-pengaruh tersebut agar tidak terbawa ke dalam model. Pada langkah ini juga diperhatikan apakah transformasi terhadap data diperlukan.

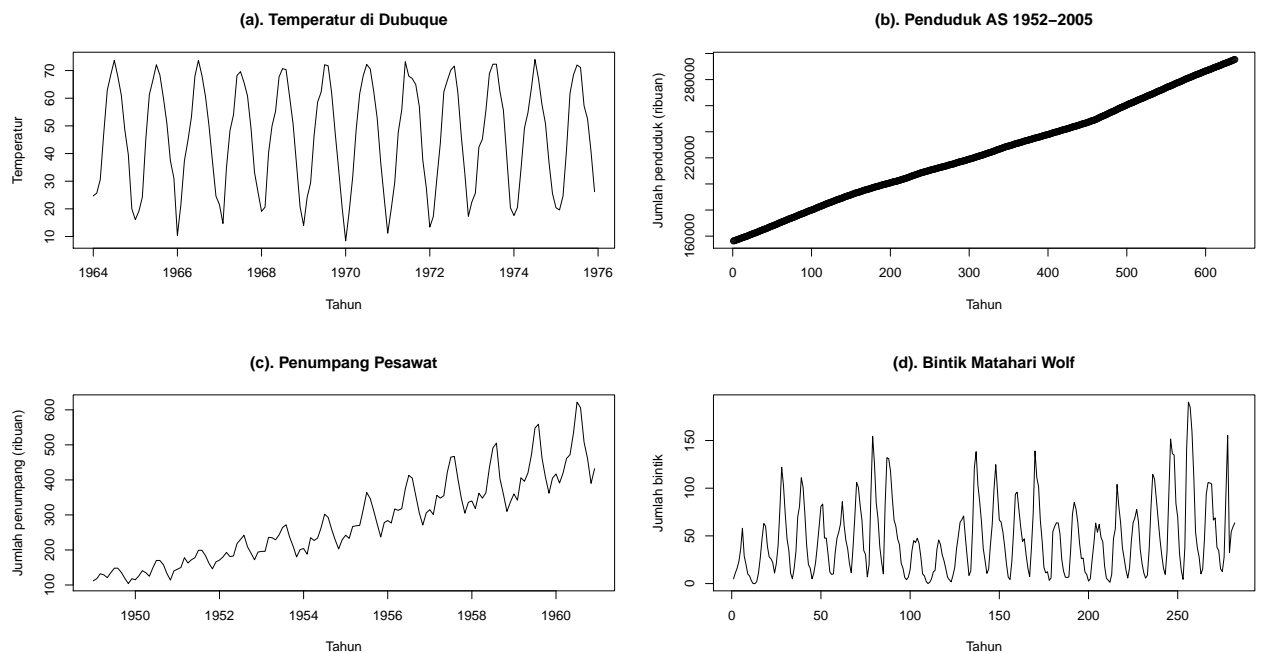
```
> par(mfrow=c(2,2))
> plot(tempdub,xlab="Tahun",ylab="Temperatur",
+ main="(a). Temperatur di Dubuque")
> plot(PopUSA,xlab="Tahun",ylab="Jumlah penduduk (ribuan)",
+ main="(b). Penduduk AS 1952–2005")
> plot(AirPassengers,xlab="Tahun",ylab="Jumlah penumpang (ribuan)",
+ main="(c). Penumpang Pesawat")
> plot.ts(wolfer,xlab="Tahun",ylab="Jumlah bintik",
+ main="(d). Bintik Matahari Wolf")
```

Berdasarkan Gambar 2.1 dapat diamati hal-hal berikut: Gambar 2.1 (a) tentang plot deret waktu temperatur bulanan di Dubuque, Iowa, memperlihatkan fluktuasi musiman yang sangat kuat, namun tren tidak terlihat (konstan); Gambar 2.1 (b) tentang plot deret waktu jumlah penduduk bulanan di Amerika Serikat untuk periode Januari 1952–Januari 2005 hanya memperlihatkan adanya pola tren naik; Gambar 2.1 (c) tentang plot jumlah penumpang pesawat internasional bulanan selama periode Januari 1949–Desember 1960 menunjukkan adanya tren naik dan pengaruh musiman yang kuat pada akhir deret; sementara Gambar 2.1 (d) merupakan plot jumlah bintik matahari Wölf selama periode 1700–2001 menunjukkan pola siklus yang sangat kuat.

2.2 Transformasi Data

Dari plot deret waktu akan bisa diamati apakah kita perlu melakukan transformasi data, misalnya logaritma atau akar kuadrat.

Tujuan melakukan transformasi adalah sebagai berikut:



Gambar 2.1: (a) Plot deret waktu temperatur bulanan di Dubuque, Iowa; (b) plot jumlah penduduk bulanan di Amerika Serikat Januari 1952–Januari 2005 ; (c) plot jumlah penumpang pesawat internasional bulanan tahun 1949–1960; (d) dan plot bercak matahari Wolf tahun 1700–2001.

1. Menstabilkan variansi

Jika terdapat tren dalam deret waktu dan variansi juga besar (naik) seiring rata-rata, maka disarankan untuk melakukan transformasi terhadap data. Begitu pula jika kita menemukan simpangan baku secara langsung proporsional dengan rata-rata maka transformasi logaritma diperlukan.

2. Membuat pengaruh musiman menjadi aditif

Jika terdapat tren dalam deret dan pengaruh musiman meningkat seiring dengan rata-rata, maka disarankan untuk mentransformasi data untuk membuat pengaruh musiman menjadi konstan. Namun, jika pengaruh musiman secara langsung proporsional dengan rata-rata, maka pengaruh musiman dikatakan dan transformasi logaritma diperlukan untuk menjadikan deret aditif. Perlu diingat bahwa transformasi ini hanya akan menstabilkan variansi jika galat (*error*) juga dianggap multiplikatif.

Ada tiga model musiman yang umum dipakai yaitu:

a) Model dekomposisi aditif, dengan bentuk

$$X_t = M_t + S_t + \varepsilon_t; \quad (2.1)$$

b) Model dekomposisi multiplikatif, dengan bentuk

$$X_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t; \quad (2.2)$$

Tabel 2.1: Nilai λ dan Bentuk Transformasi Box–Cox yang Bersesuaian

Nilai λ	Bentuk transformasi
-1	$1/X_t$
-0,5	$1/\sqrt{X_t}$
0	$\ln(X_t)$
0,5	$\sqrt{X_t}$
1	X_t

c) Model campuran aditif-multiplikatif, dengan bentuk

$$X_t = M_t \times S_t + \varepsilon_t; \quad (2.3)$$

dengan X_t menyatakan observasi pada saat t , M_t menyatakan tren, S_t menyatakan pengaruh musiman, dan ε_t menyatakan galat acak.

3. Menjadikan data berdistribusi normal.

Transformasi yang umum dipakai adalah transformasi pangkat (*power transformation*) Box–Cox yang didefinisikan sebagai

$$T(X_t) = \begin{cases} \frac{X_t^{(\lambda)}}{\lambda}, & \text{jika } \lambda \neq 0; \\ \ln(X_t), & \text{jika } \lambda = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Bentuk transformasi bersesuaian dengan λ dapat dilihat pada tabel berikut.

Contoh 2.2.1. Gambar 2.2 memperlihatkan plot jumlah penumpang pesawat internasional dan transformasi logaritmanya. Apa yang bisa Anda amati?

2.3 Studi Latar Belakang Data Deret Waktu

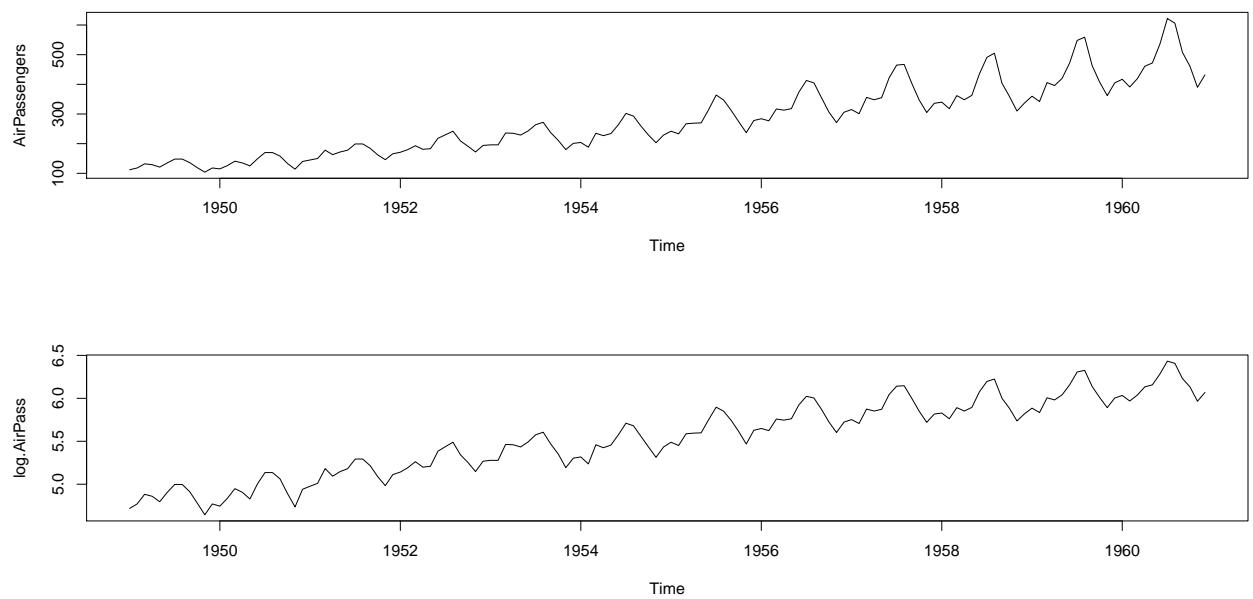
Latar belakang atau studi sebelumnya tentang data diperlukan untuk mengetahui karakteristik data dan juga apa saja yang bisa kita masukkan ke dalam model deret waktu. Sebagai contoh kita lihat kembali data bintik matahari Wölf. Jumlah bintik matahari Wölf mengikuti pola siklus dan berhubungan dengan gravitasi bumi. Menurut Samuel Schwabe pola ini berulang setiap 10 tahun sekali.

Berikut ini adalah sejarah tentang deret waktu jumlah bercak matahari Wölf, dikutip dari

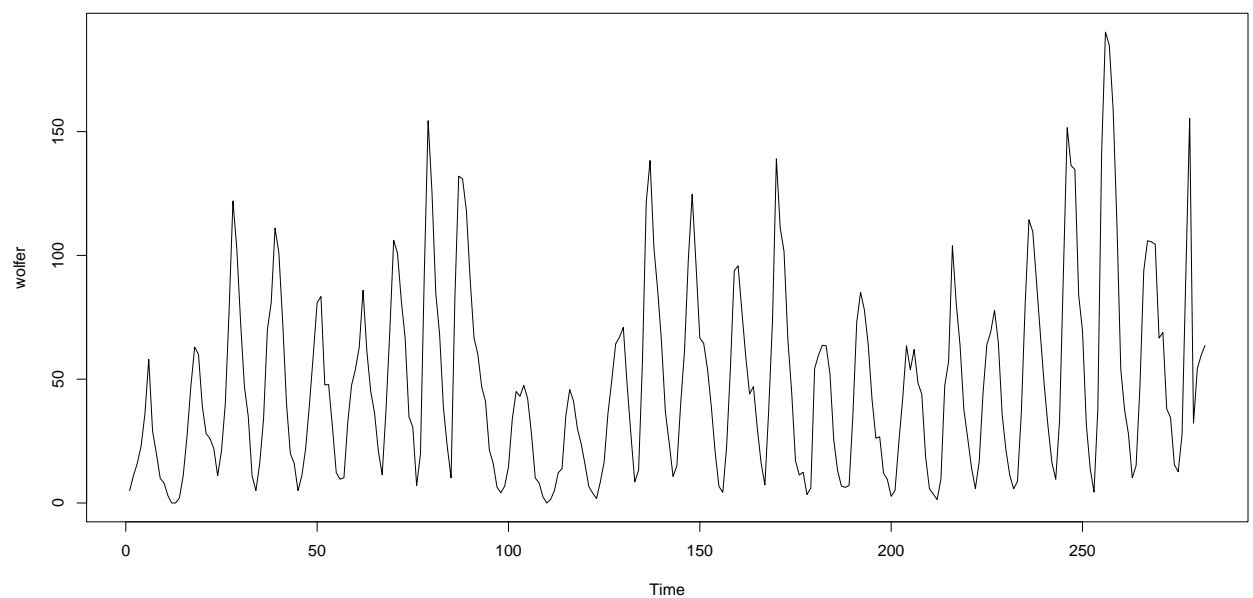
http://www.windows.ucar.edu/tour/link=/sun/activity/sunspot_history.html, diakses tanggal 1 Maret 2008.

History of Sunspot Observations

You may not know that humans have observed sunspots for a very long time. These records have been around so long in fact, that we can link sunspot number with solar activity. Large sunspots can sometimes be seen with just your eye, especially when the Sun is viewed through fog near the horizon at sunrise



Gambar 2.2: Plot data jumlah penumpang pesawat internasional dan transformasi logaritmanya.



Gambar 2.3: Plot data deret waktu bintang *sunspot* Wolf tahun 1700–2001.

or sunset. (WARNING: Never look directly at the Sun! Even a brief glance can damage your eyes!)

The first written record of sunspots was made by Chinese astronomers around 800 B.C. Court astrologers in ancient China and Korea, who believed sunspots foretold important events, kept records off and on of sunspots for hundred of years. An English monk named John of Worcester made the first drawing of sunspots in December 1128.

Soon after the invention of the telescope, several astronomers used the telescope to make observations of sunspots. This was around 1600. Astronomers of that time weren't quite sure what to make of these spots on the Sun. Some thought they were shadows of undiscovered planets crossing the Sun, while others believed they were dark clouds in the Sun's atmosphere. The movement of sunspots across the face of the Sun allowed astronomers in the early 1600's to make the first estimates of the Sun's rotation period (about 27 days).

In 1843 an amateur German astronomer named Samuel Schwabe discovered the rise and fall of yearly sunspot counts we now call the sunspot cycle. He first guessed the cycle's length at 10 years. Two French physicists, Louis Fizeau and Léon Foucault, took the first photo of the Sun and sunspots in April 1845. Around 1852 four astronomers noted that the period of the sunspot cycle was identical to the period of changes of geomagnetic activity at Earth, giving birth to the study of Sun-Earth connections we now call "space weather".

It would appear that sunspots not only have a connection to geomagnetic activity at Earth, but they play a role in climate change as well. In the last thousands of years, there have been many periods where there were not many sunspots found on the Sun. The most famous is a period from about 1645 to 1715, called the Maunder Minimum. This period corresponds to the middle of a series of exceptionally cold winters throughout Europe known as the Little Ice Age. Scientists still debate whether decreased solar activity helped cause the Little Ice Age, or if the cold snap happen to occur around the same time as the Maunder Minimum. In contrast, a period called the Medieval Maximum, which lasted from 1100 to 1250, apparently had higher levels of sunspots and associated solar activity. This time coincides (at least partially) with a period of warmer climates on Earth called the Medieval Warm Period. Sunspot counts have been higher than usual since around 1900, which has led some scientists to call the time we are in now the Modern Maximum.

2.4 Dekomposisi Klasik

Pada Bagian 2.1 telah dibahas hal-hal yang bisa diamati dari plot data: tren, musiman, siklus, fluktuasi tak beraturan, serta pencilan. Subbagian ini akan membahas pengertian komponen-komponen dalam dekomposisi klasik.

2.4.1 Tren

Tren merupakan perubahan jangka panjang baik naik maupun turun dalam data. Dalam pembicaraan tentang tren kita harus memperhatikan berapa banyak data yang ada dan juga penilain kita terhadap definisi jangka panjang. Sebagai contoh peubah-peubah keadaan cuaca biasanya memberikan variasi siklus pada periode yang sangat panjang, misalkan 75 tahun. Jika kita hanya punya data untuk 20 tahun saja, maka pola osilasi jangka panjang ini akan terlihat sebagai tren.

2.4.2 Musiman

Pola musiman muncul apabila deret dipengaruhi oleh faktor-faktor musiman, misalnya kuartalan, bulanan, harian, dan tahunan.

2.4.3 Siklus

Pola siklus muncul apabila data dipengaruhi fluktuasi jangka panjang yang biasanya berbentuk osilasi, misalnya gelombang sinus. Gejala-gejala fisika seperti gelombang tsunami yang terjadi setiap 100 tahun sekali, jumlah titik matahari Wölfer (*Wölfer sunspot*) biasanya membentuk suatu siklus. Perbedaan utama pola musiman dan siklus terletak pada panjang dan periodenya. Pada musiman pola cenderung memiliki panjang konstan dan terjadi berulang pada periode teratur; namun, pada siklus pola ini memiliki panjang yang bervariasi dan magnitudo yang juga bervariasi.

2.4.4 Fluktuasi Tidak Beraturan

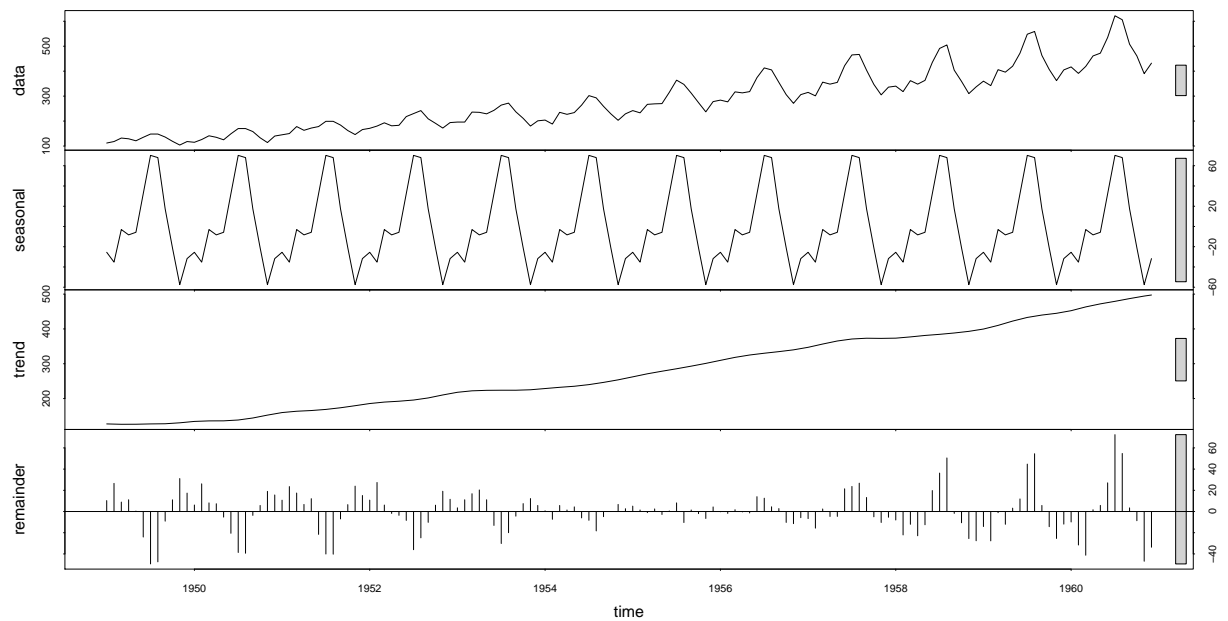
Setelah tren dan komponen siklus dihilangkan dari data, biasanya masih ada sisaan yang bisa acak atau tidak acak. Variasi tak beraturan ini biasanya dinyatakan oleh distribusi peluang tertentu.

2.5 Karakteristik Data Deret Waktu

Selain memperlihatkan adanya pola tren, pengaruh musiman, dan pengaruh siklus, plot deret waktu juga memberikan informasi tentang fluktuasi tak beraturan dan adanya pencilan (*outliers*). Hal ini akan berdampak pada pemodelan serta analisis yang digunakan. Gambar 2.4 menunjukkan dekomposisi deret waktu jumlah penumpang pesawat menggunakan fungsi `stl` pada R yang membagi deret waktu tersebut menjadi tiga dua komponen utama (musiman dan tren) dan sisaan (*remainder*).

2.6 Latihan

1. Pustaka `datasets` pada R menyediakan beberapa data deret waktu. Berikut ini nama-nama data deret waktu tersebut:
 - a) `airmiles`
 - b) `AirPassengers`



Gambar 2.4: Dekomposisi deret waktu jumlah penumpang pesawat internasional bulanan periode Januari 1949–Desember 1960.

- c) austres
- d) BJsales
- e) co2
- f) discoveries
- g) ldeaths
- h) JohnsonJohnson
- i) LakeHuron
- j) lh
- k) lynx
- l) nhtemp
- m) Nile
- n) nottem
- o) presidents
- p) sunspot.month
- q) sunspot.year
- r) treering
- s) UKDriverDeaths
- t) UKgas
- u) USAccDeaths

v) `uspop`

w) `WWWusage`

Untuk masing-masing data plotlah data di atas dan amati komponen-komponen apa saja yang ada pada data tersebut. Gunakan perintah `plot(namadata)` untuk memplot. Informasi singkat tentang data tersebut dapat dilakukan dengan mengetikkan perintah `help(namadata)`.

2. Carilah data deret waktu pada buku, jurnal, dan internet. Kemudian plotlah data tersebut. Anda juga mungkin mendekomposisi deret waktu tersebut dengan perintah `stl`.

BAB 3

Pengantar Proses Stasioner

Pada Bab 1 dan 2, kita telah membicarakan konsep analisis deret waktu, eksplorasi data deret waktu, dan metode dekomposisi klasik. Pada kebanyakan kasus, pendekatan dekomposisi klasik tidak tepat untuk data yang berfluktuasi tinggi atau data yang kita anggap sebagai realisasi dari proses stokastik. Pada Bab 3 dan bab-bab selanjutnya, kita akan membahas pemodelan dengan proses stokastik yang meliputi konsep proses stokastik, proses stasioner, dan proses linear.

3.1 Konsep Proses Stokastik

Langkah pertama dalam analisis deret waktu adalah memilih model matematika yang sesuai untuk data. Biasanya adalah suatu hal yang alamiah apabila kita menganggap masing-masing observasi masa depan yang tidak diketahui sebagai realisasi dari suatu peubah acak tertentu. Dengan kata lain, x_t adalah suatu nilai realisasi dari peubah acak tertentu X_t . Lebih lanjut deret waktu $\{x_t, t \in T_0\}$ adalah realisasi dari peubah acak $\{X_t, t \in T_0\}$. Berikut ini akan diberikan definisi proses stokastik secara formal.

Definisi 3.1.1 (Brockwell dan Davis, 1991). Suatu proses stokastik adalah keluarga peubah $\{X_t, t \in T\}$ yang didefinisikan pada ruang peluang (Ω, \mathcal{F}, P) .

Definisi 3.1.2 (Brockwell dan Davis, 1991). Fungsi $\{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ pada T disebut realisasi atau lintasan sampel (*sample-paths*) dari proses $\{X_t, t \in T\}$.

Beberapa catatan (lihat Brockwell and Davis (1991)):

1. Pada analisis deret waktu himpunan indeks atau parameter T adalah himpunan titik-waktu, biasanya $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\{1, 2, 3, \dots\}$, $[0, \infty)$, atau $(-\infty, \infty)$. Himpunan indeks T biasanya himpunan bagian dari \mathbb{R} .
2. Istilah deret waktu biasanya mengacu pada data dan realisasi dari proses.

Contoh 3.1.1. Misalkan A dan Θ adalah peubah-peubah acak bebas dengan $A \geq 0$ dan Θ berdistribusi secara seragam pada $[0, 2\pi)$. Suatu proses stokastik $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ dapat didefinisikan untuk $v \geq 0$ dan $r > 0$ oleh

$$X_t = r^{-1} A \cos(vt + \Theta). \quad (3.1)$$

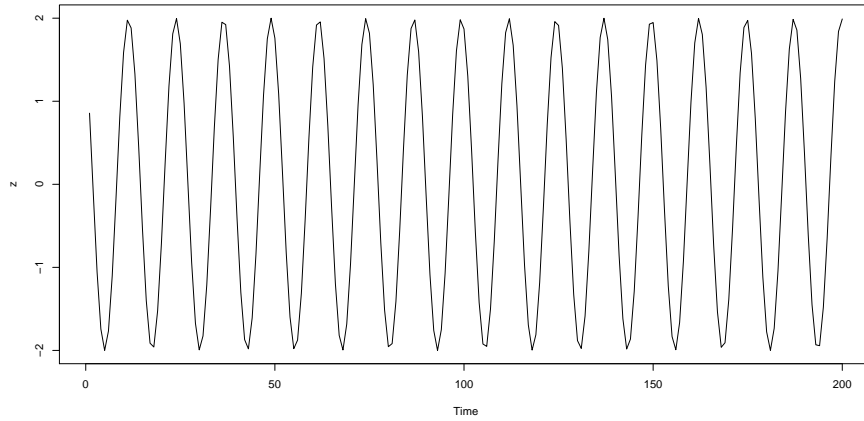
Salah satu realisasi Persamaan (3.1) adalah

$$X_t = 2\cos(0,5t + 0,2\pi). \quad (3.2)$$

Misalkan akan dibangkitkan 200 amatan yang merupakan realisasi dari Persamaan (3.2):

```
> t <- 1:200
> x <- 2*cos(0.5*t + 0.2*pi)
> plot.ts(x)
```

Gambar 3.1 memperlihatkan realisasi dari proses (3.2).



Gambar 3.1: Plot 200 amatan dari realisasi $X_t = 2\cos(0,5t + 0,2\pi)$.

3.2 Konsep Proses Stasioner

Salah satu konsep penting dalam proses stokastik adalah proses stasioner. Berikut ini akan diberikan definisi tentang stasioner kuat dan stasioner lemah.

Definisi 3.2.1 (Brockwell dan Davis, 2002). Misalkan $\{X_t\}$ adalah suatu deret waktu dengan $E(X_t^2) < \infty$. Fungsi nilai tengah (*mean function*) deret $\{X_t\}$ adalah

$$\mu_X(t) = E(X_t). \quad (3.3)$$

Definisi 3.2.2 (Brockwell dan Davis, 2002). Fungsi kovarians (*covariance function*) $\{X_t\}$ adalah

$$\begin{aligned} \gamma_X(r, s) &= \text{cov}(X_r, X_s) \\ &= E[(X_r - \mu_X(r))(X_s - \mu_X(s))]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

untuk semua bilangan bulat r dan s .

Definisi 3.2.3 (Brockwell dan Davis, 2002). Suatu deret waktu $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ dikatakan stasioner kuat (*strong stationary*) jika distribusi bersama (X_1, \dots, X_n) dan $(X_{1+h}, \dots, X_{n+h})$ adalah sama untuk semua bilangan bulat h dan $n > 0$.

Definisi 3.2.4 (Brockwell dan Davis, 2002). Suatu deret waktu $\{X_t\}$ dikatakan stasioner lemah (*weakly stationary*) jika

1. $\mu_X(t)$ bebas dari t ,
2. $\gamma_X(t+h, t)$ bebas dari t untuk masing-masing h .

Secara garis besar, suatu deret waktu $\{X_t, t = 0, \pm 1, \dots\}$ dikatakan stasioner jika deret tersebut memiliki sifat-sifat statistika seperti deret waktu-bergeser (*time-shifted*) $\{X_{t+h}, t = 0, \pm 1, \dots\}$ untuk setiap bilangan bulat h .

Berikut ini beberapa catatan yang perlu diperhatikan.

1. Stasioner kuat (*strong stationary*) disebut pula stasioner tegas (*strictly stationary*) atau stasioner lengkap (*completely stationary*).
2. Stasioner lemah (*weakly stationary*) disebut pula stasioner kovarians (*covariance stationary*) atau stasioner tingkat dua (*second order weakly stationary*).
3. Jika deret waktu $\{X_t\}$ stasioner kuat dan $E(X_t^2) < \infty$ untuk semua t , maka $\{X_t\}$ juga stasioner lemah.
4. Istilah stasioner biasanya mengacu kepada stasioner lemah seperti pada Definisi 3.2.4, kecuali dikatakan lain.
5. Bersesuaian dengan kondisi (2) pada Definisi 3.2.4 istilah fungsi kovarians yang mengacu kepada suatu deret stasioner $\{X_t\}$ maka yang dimaksud fungsi γ_X dari suatu peubah yang didefinisikan oleh

$$\gamma_X(h) = \gamma_X(h, 0) = \gamma_X(t+h, t). \quad (3.5)$$

Fungsi $\gamma_X(\cdot)$ disebut *fungsi autokovarians* adalah fungsi autokovarians pada nilai beda kala (*lag*) h .

Definisi 3.2.5 (Brockwell dan Davis, 2002). Misalkan $\{X_t\}$ adalah deret waktu stasioner. Fungsi autokovarians $\{X_t\}$ pada beda kala h adalah

$$\begin{aligned} \gamma_X(h) &= \text{cov}(X_{t+h}, X_t) \\ &= E[(X_{t+h} - \mu_X(t+h))(X_t - \mu_X(t))]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Definisi 3.2.6. Misalkan $\{X_t\}$ adalah deret waktu stasioner. Fungsi autokorelasi $\{X_t\}$ pada beda kala h adalah

$$\begin{aligned} \rho_X(h) &= \text{cor}(X_{t+h}, X_t) \\ &= \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Diskusi: Misalkan X , Y , dan Z peubah acak. Jika $E(X^2) < \infty$, $E(Y^2) < \infty$, $E(Z^2) < \infty$, dan a , b , serta c adalah sebarang konstanta bilangan real, maka

$$\text{cov}(aX + bY + c, Z) = a\text{cov}(X, Z) + b\text{cov}(Y, Z). \quad (3.8)$$

Sifat pada Persamaan (3.8) disebut sifat linear kovarians (*linearity property of covariance*). Coba Anda buktikan! Sifat-sifat varians, kovarians, dan korelasi dapat dilihat pada lampiran bab ini.

Contoh 3.2.1. Model paling sederhana untuk suatu deret waktu stasioner adalah model tanpa pengaruh tren dan musiman dengan amatan-amatan peubah-peubah acak yang saling bebas dan berdistribusi identik (*independent and identically distributed*) dengan nilai tengah nol. Barisan peubah acak X_1, X_2, \dots yang memiliki sifat ini disebut IID *noise*. Jika deret $\{X_t\}$ adalah IID *noise* dan $E(X_t^2) = \sigma^2 < \infty$ maka sifat pertama jelas dipenuhi karena $E(X_t) = 0$ untuk semua t . Selanjutnya,

$$\begin{aligned}\gamma_X(t+h, t) &= \text{cov}(X_{t+h}, X_t) \\ &= E[(X_{t+h} - \mu(X_{t+h}))(X_t - \mu(X_t))] \\ &= E[(X_{t+h} - 0)(X_t - 0)] \\ &= E[(X_{t+h}X_t)]\end{aligned}\tag{3.9}$$

Apabila $h = 0$, maka Persamaan (3.9) menjadi

$$\begin{aligned}\gamma_X(t, t) &= E[(X_{t+0}X_t)] \\ &= E[(X_t^2)] \\ &= \sigma^2.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Apabila $h = -1$, maka Persamaan (3.9) menjadi

$$\begin{aligned}\gamma_X(t-1, t) &= E[(X_{t-1}X_t)] \\ &= E(X_{t-1})E(X_t) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Selanjutnya, apabila $h = 1$, maka Persamaan (3.9) menjadi

$$\begin{aligned}\gamma_X(t+1, t) &= E[(X_{t+1}X_t)] \\ &= E(X_{t+1})E(X_t) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Dengan demikian nilai $\gamma_X(t+h, t)$ akan selalu bernilai 0 apabila $|h| \neq 0$. Berdasarkan Persamaan (3.10), (3.11), dan (3.12) diperoleh

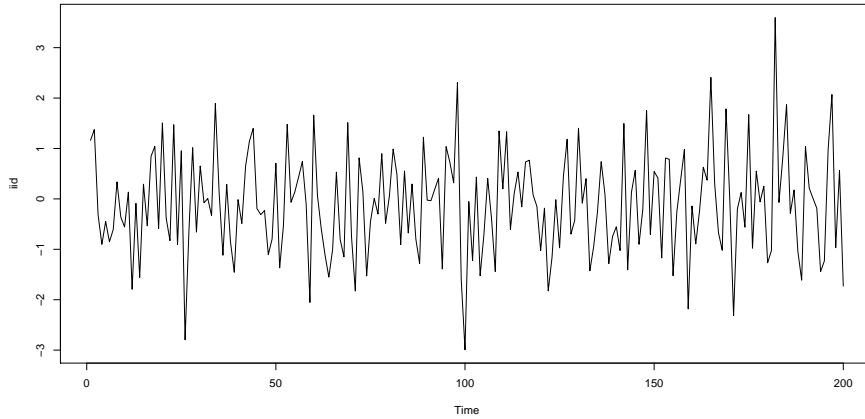
$$\gamma_X(t+h, t) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{jika } h = 0; \\ 0, & \text{jika } h \neq 0; \end{cases}\tag{3.13}$$

yang tidak tergantung pada t . Jadi IID *noise* dengan momen kedua hingga adalah stasioner dan dinotasikan

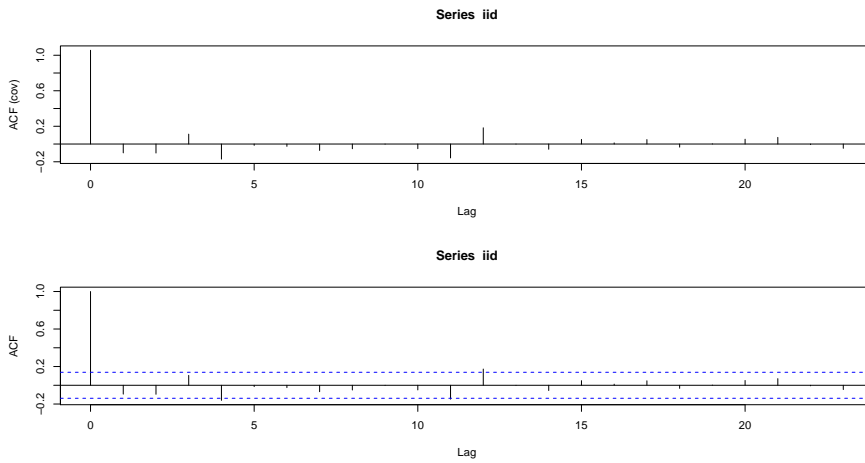
$$\{X_t\} \sim \text{IID}(0, \sigma^2).\tag{3.14}$$

Berikut ini 200 realisasi IID(0, 1) (lihat Gambar 3.2).

```
> iid <- rnorm(200, 0, 1)
> plot.ts(iid)
```



Gambar 3.2: Plot 200 realisasi IID(0, 1).



Gambar 3.3: Fungsi autokovarians dan autokorelasi IID noise.

Gambar 3.3 memperlihatkan fungsi autokovarians dan autokorelasi IID *noise*.

Contoh 3.2.2. Jika $\{X_t\}$ adalah barisan peubah-peubah acak yang tidak berkorelasi, masing-masing dengan nilai tengah 0 dan varians σ^2 , maka $\{X_t\}$ juga stasioner dengan fungsi kovarians yang sama seperti IID *noise* pada Contoh 3.2.1. Barisan ini disebut derau putih (*white noise*) dengan nilai tengah 0 dan varians σ^2 , dinotasikan

$$\{X_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2). \quad (3.15)$$

Contoh 3.2.3. Langkah acak (*random walk*) $\{S_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$, dimulai dari 0, diperoleh dengan menjumlahkan secara kumulatif peubah-peubah acak IID. Dengan demikian suatu langkah acak dengan nilai tengah 0 diperoleh dengan mendefinisikan $S_0 = 0$ dan

$$S_t = X_1 + X_2 + \dots + X_t, \quad \text{untuk } t = 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

dengan $\{X_t\}$ adalah IID *noise*. Jika $\{S_t\}$ adalah langkah acak dan $\{X_t\}$ adalah IID *noise* maka

$$\begin{aligned} E(S_t) &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_t) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_t) \\ &= 0 + 0 + \cdots + 0 \\ &= 0; \end{aligned} \tag{3.17}$$

dan

$$\begin{aligned} E(S_t^2) &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_t)^2 \\ &= E(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_t^2 + X_1X_2 + \cdots + X_{t-1}X_t) \\ &= E(X_1^2) + E(X_2^2) + \cdots + E(X_t^2) + 0 + \cdots + 0 \\ &= \sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2 \\ &= t\sigma^2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Pada Persamaan (3.18) $E(S_t^2) = t\sigma^2 < \infty$ untuk semua t . Selanjutnya akan kita hitung fungsi autokovarians sampel

$$\begin{aligned} \gamma_X(t+h, t) &= \text{cov}(S_{t+h}, S_t) \\ &= \text{cov}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{t+h}, S_t) \\ &= \text{cov}(X_1 + X_2 + \cdots + X_t + X_{t+1} + \cdots + X_{t+h}, S_t) \\ &= \text{cov}(S_t + X_{t+1} + \cdots + X_{t+h}, S_t) \\ &= E[(S_t + X_{t+1} + \cdots + X_{t+h} - \mu(S_t + X_{t+1} + \cdots + X_{t+h}))(S_t - \mu(S_t))] \\ &= E[(S_t + X_{t+1} + \cdots + X_{t+h} - 0)(S_t - 0)] \\ &= E[(S_t^2 + S_tX_{t+1} + \cdots + S_tX_{t+h})]. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Dengan demikian untuk $h \geq 0$ Persamaan (3.19) menjadi

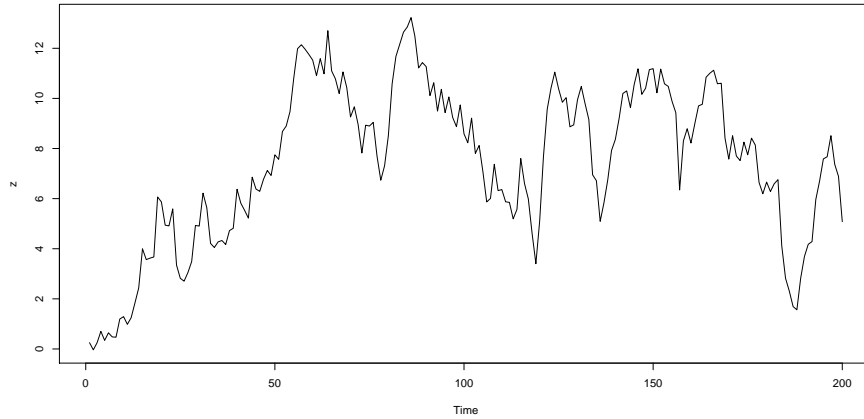
$$\begin{aligned} \gamma_X(t+h, t) &= E(S_t^2) + E(S_t)E(X_t) + \cdots + E(S_t)E(X_{t+h}) \\ &= E(S_t^2) \\ &= t\sigma^2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Mengingat $\gamma_X(t+h, t)$ bergantung pada t , maka $\{S_t\}$ tidaklah stasioner. Sebagai ilustrasi kita akan membangkitkan 200 realisasi dari langkah acak (lihat Gambar 3.4).

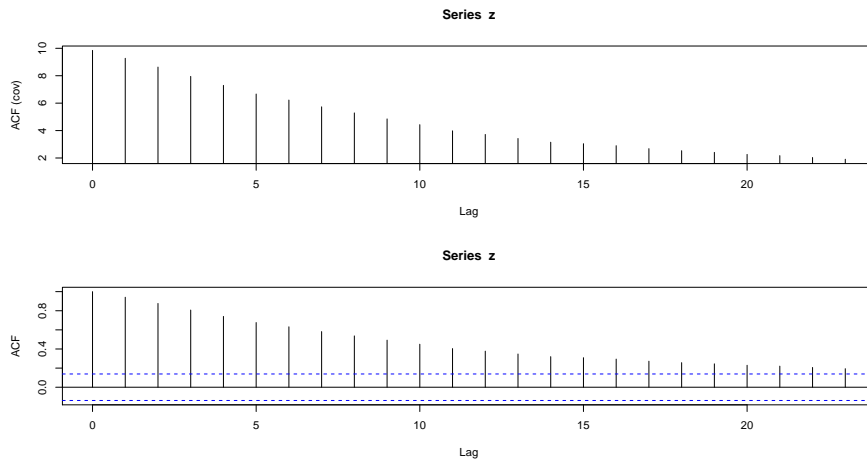
```
> x <- rnorm(200, 0, 1)
> x <- cumsum(x)
> plot.ts(x)
```

Gambar 3.5 memperlihatkan fungsi autokovarians dan autokorelasi langkah acak.

```
> acf(x, type="covariance")
> acf(x)
```



Gambar 3.4: Plot 200 realisasi langkah acak.



Gambar 3.5: Fungsi autokovarians dan autokorelasi langkah acak.

Contoh 3.2.4. Misalkan suatu deret waktu didefinisikan oleh

$$X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.21)$$

dengan $\{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ dan θ adalah konstanta bilangan real. Berdasarkan Persamaan (3.21) dapat dihitung

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}) \\ &= E(\varepsilon_t) + \theta E(\varepsilon_{t-1}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}
 \text{var}(X_t) &= \text{var}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) \\
 &= \text{var}(\varepsilon_t) + \theta^2\text{var}(\varepsilon_{t-1}) + 2\text{cov}(\varepsilon_t, \theta\varepsilon_{t-1}) \\
 &= \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 + 0 \\
 &= \sigma^2(1 + \theta^2).
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Berdasarkan Persamaan (3.23) diperoleh $E(X_t^2) = \sigma^2(1 + \theta^2) < \infty$. Kemudian kita dapat menghitung fungsi autokovarians X_t , yakni

$$\begin{aligned}
 \gamma_X(t + h, t) &= E[(X_{t+h} - \mu(X_{t+h}))(X_t - \mu(X_t))] \\
 &= E[(X_{t+h} - 0)(X_t - 0)] \\
 &= E[X_{t+h}X_t] \\
 &= E[(\varepsilon_{t+h} + \theta\varepsilon_{t+h-1})(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})]
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Untuk $h = 0$, Persamaan (3.24) menjadi

$$\begin{aligned}
 \gamma_X(t + h, t) &= E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})] \\
 &= E[(\varepsilon_t^2 + 2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta^2\varepsilon_{t-1}^2)] \\
 &= E(\varepsilon_t^2) + 2\theta E(\varepsilon_t) E(\varepsilon_{t-1}) + \theta^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) \\
 &= \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 \\
 &= \sigma^2(1 + \theta^2).
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Selanjutnya untuk $h = 1$, Persamaan (3.24) menjadi

$$\begin{aligned}
 \gamma_X(t + 1, t) &= E[(\varepsilon_{t+1} + \theta\varepsilon_t)(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})] \\
 &= E[(\varepsilon_{t+1}\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t+1}\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_t\varepsilon_t + \theta^2\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})] \\
 &= E(\varepsilon_{t+1}) E(\varepsilon_t) + \theta E(\varepsilon_{t+1}) E(\varepsilon_{t-1}) + \theta E(\varepsilon_t^2) + \theta^2 E(\varepsilon_t) E(\varepsilon_{t-1}) \\
 &= 0 + 0 + \theta\sigma^2 + 0 \\
 &= \theta\sigma^2.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Selanjutnya untuk $h = -1$, Persamaan (3.24) menjadi

$$\begin{aligned}
 \gamma_X(t - 1, t) &= E[(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})] \\
 &= E[(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}\varepsilon_t + \theta^2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1})] \\
 &= E(\varepsilon_{t-1}) E(\varepsilon_t) + \theta E(\varepsilon_{t-1}^2) + \theta E(\varepsilon_{t-2}) E(\varepsilon_t) + \theta^2 E(\varepsilon_{t-2}) E(\varepsilon_{t-1}) \\
 &= 0 + \theta\sigma^2 + 0 + 0 \\
 &= \theta\sigma^2.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Selanjutnya dapat dihitung untuk $|h| > 1$ nilai $\gamma_X(t + h, t) = 0$. (Coba Anda periksa untuk $h = \pm 2$ dan $h = \pm 3$). Dengan demikian fungsi autokovariansnya adalah

$$\gamma_X(t + h, t) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta^2), & \text{jika } h = 0; \\ \sigma^2\theta, & \text{jika } h = \pm 1; \\ 0, & \text{jika } |h| > 1. \end{cases} \tag{3.28}$$

Dengan demikian deret waktu X_t adalah stasioner. Kemudian, fungsi autokorelasi $\{X_t\}$ dapat dihitung untuk masing-masing h . Mengingat $\gamma_X(0) = \gamma_X(0, 0) = \gamma_X(t + 0, t) = \sigma^2(1 + \theta^2)$, maka untuk $h = 0$

$$\rho_X(0) = \frac{\gamma_X(0)}{\gamma_X(0)} = 1. \quad (3.29)$$

Untuk $h = 1$, $\gamma_X(1) = \gamma_X(t + 1, t) = \theta\sigma^2$ sehingga

$$\begin{aligned} \rho_X(1) &= \frac{\theta\sigma^2}{\sigma^2(1 + \theta^2)} \\ &= \frac{\theta}{(1 + \theta^2)}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Untuk $h = -1$, $\gamma_X(-1) = \gamma_X(t - 1, t) = \theta\sigma^2$ sehingga

$$\begin{aligned} \rho_X(-1) &= \frac{\theta\sigma^2}{\sigma^2(1 + \theta^2)} \\ &= \frac{\theta}{(1 + \theta^2)}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Untuk $|h| > 1$, nilai $\gamma_X(h) = 0$. Jadi

$$\rho_X(h) = \begin{cases} 1, & \text{jika } h = 0; \\ \frac{\theta}{(1 + \theta^2)}, & \text{jika } h = \pm 1; \\ 0, & \text{jika } |h| > 1. \end{cases} \quad (3.32)$$

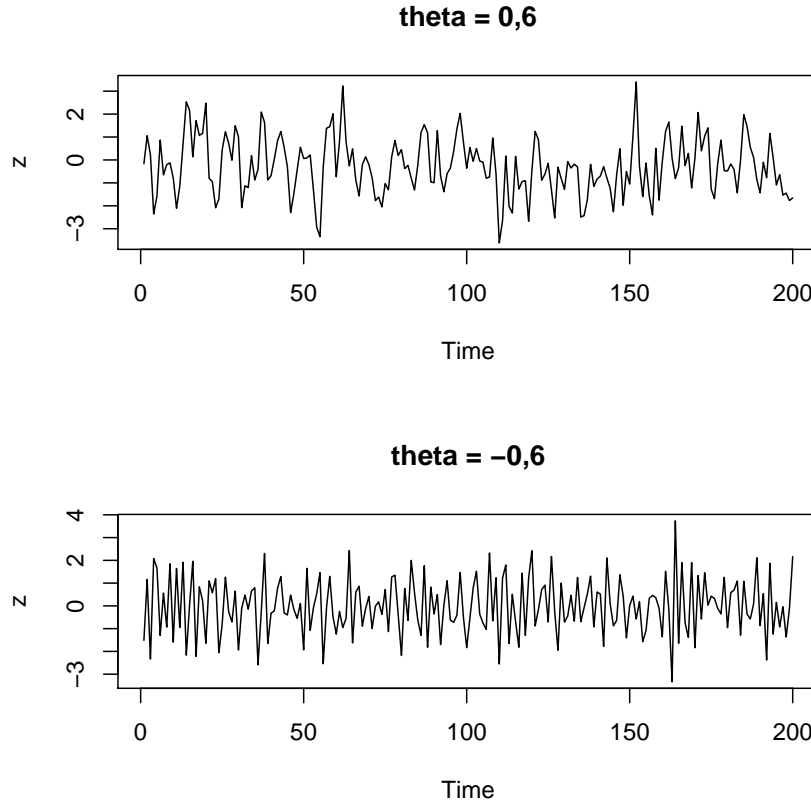
Proses pada Persamaan (3.21) disebut proses rerata bergerak (*moving average*) tingkat satu, dinotasikan MA(1). Berikut akan disimulasikan 200 realisasi MA(1) dengan $\theta = 0,6$ dan $\theta = -0,6$.

```
> par(mfrow=c(2,1))
> plot(arima.sim(list(order=c(0,0,1),ma=0.6), n=200),ylab="x",main="theta = 0,6")
> plot(arima.sim(list(order=c(0,0,1),ma=-0.6), n=200),ylab="x",main="theta = -0,6")
```

Gambar 3.6 memperlihatkan realisasi dari MA(1) dengan $\theta = \pm 0,6$.

3.3 Fungsi Autokovarians dan Autokorelasi Sampel

Kita telah melihat bagaimana cara menghitung fungsi autokorelasi dan autokovarians untuk beberapa model deret waktu sederhana. Dalam praktik kita tidak memulai dengan sebuah model, tetapi dengan data amatan $\{x_1, \dots, x_n\}$. Untuk mengetahui tingkat ketergantungan pada data dan memilih model untuk data kita akan menggunakan fungsi autokorelasi sampel. Jika kita yakin bahwa data adalah nilai realisasi dari suatu data deret waktu stasioner $\{X_t\}$, maka fungsi autokorelasi sampel akan memberikan estimasi terhadap fungsi autokorelasi $\{X_t\}$. Estimasi ini memberikan informasi model-model deret waktu stasioner yang cocok untuk mewakili ketergantungan pada data. Sebagai contoh, suatu fungsi autokorelasi sampel yang hampir nol untuk beda kala (*lag*) yang tidak nol menunjukkan model yang sesuai untuk data mungkin IID *noise*.

Gambar 3.6: Plot MA(1) untuk $\theta = 0,6$ dan $\theta = -0,6$.

Definisi 3.3.1 (Brockwell dan Davis, 2002). Misal x_1, \dots, x_n adalah amatan-amatan dari suatu deret waktu. Rerata sampel dari x_1, \dots, x_n adalah

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t. \quad (3.33)$$

Definisi 3.3.2 (Brockwell dan Davis, 2002). Fungsi autokovarians sampel didefinisikan sebagai

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_{t+|h|} - \bar{x})(x_t - \bar{x}), \quad -n < h < n, \quad (3.34)$$

dengan $\hat{\gamma}(-h) = \hat{\gamma}(h)$.

Definisi 3.3.3 (Brockwell dan Davis, 2002). Fungsi autokorelasi sampel didefinisikan sebagai

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}, \quad -n < h < n. \quad (3.35)$$

Berikut ini beberapa catatan penting untuk fungsi autokorelasi dan autokovarians sampel (lihat Brockwell dan Davis (2002)).

1. Untuk $h \geq 0$, fungsi autokorelasi sampel $\hat{\gamma}(h)$ hampir sama atau mendekati kovarians sampel $n - h$ pasangan amatan $(x_1, x_{1+h}), (x_2, x_{2+h}), \dots, (x_{n-h}, x_n)$. Perbedaan muncul pada saat penggunaan pembagi n dibandingkan $n - h$ dan pengurangan rata-rata keseluruhan (*overall mean*) \bar{x} dari masing-masing faktor pada penjumlahan. Penggunaan pembagi n menjamin bahwa matriks kovarians sampel $\hat{\Gamma}_n = [\hat{\gamma}(i - j)]_{i,j=1}^n$ adalah definit positif. Jumlah pada Persamaan (3.34) berjalan pada jangka terbatas karena x_{t+h} tidak tersedia untuk $t + h > n$ (Shumway dan Stoffer, 2006).
2. Matriks korelasi sampel $\hat{R}_n = [\hat{\rho}(i - j)]_{i,j=1}^n$ adalah definit positif. Masing-masing elemen diagonalnya sama dengan 1, karena $\hat{\rho}(0) = 1$.
3. Fungsi autokovarians dan autokorelasi sampel dapat dihitung untuk sebarang kumpulan data $\{x_1, \dots, x_n\}$ dan tidak terbatas hanya untuk amatan deret waktu stasioner. Untuk data yang mengandung tren $|\hat{\rho}(h)|$ akan menurun secara lambat seiring naiknya h , dan untuk data dengan komponen periodik deterministik $\hat{\rho}(h)$ akan menunjukkan tingkah laku serupa dengan periode yang sama.

3.4 Proses-proses Linear

Definisi 3.4.1. Suatu proses linear X_t didefinisikan sebagai suatu kombinasi linear dari variat derau putih (*white noise*) W_t , yakni

$$X_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j W_{t-j} \quad (3.36)$$

dengan $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

Fungsi autokovarians proses linear pada Persamaan (3.36) adalah

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{j+h} \psi_j. \quad (3.37)$$

Model-model proses linear seperti rerata bergerak (MA), proses autoregresif (AR), dan proses rerata bergerak autoregresif (ARMA) akan dibicarakan pada bab selanjutnya.

3.5 Lampiran: Varians, Kovarians, dan Korelasi

3.5.1 Sifat-sifat Varians

Berikut ini sifat-sifat penting varians:

1. $\text{var}(X) \geq 0$,
2. $\text{var}(a + bX) = b^2 \text{var}(X)$,
3. Jika X dan Y saling bebas, maka $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$

Coba Anda buktikan sifat-sifat di atas!

3.5.2 Sifat-sifat Kovarians

Sifat-sifat penting kovarians adalah sebagai berikut:

1. $\text{cov}(a + bX, c + dY) = bd \text{cov}(X, Y)$,
2. $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$,
3. $\text{cov}(X + Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z)$,
4. $\text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$,
5. $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$,
6. Jika X dan Y saling bebas, $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Coba Anda buktikan sifat-sifat di atas!

3.5.3 Sifat-sifat Korelasi

Sifat-sifat penting korelasi adalah sebagai berikut: $-1 \leq \text{cor}(X, Y) \leq 1$ dan

$$\text{cor}(a + bX, c + dY) = \text{sign}(bd) \text{cor}(X, Y) \quad (3.38)$$

dengan

$$\text{sign}(bd) = \begin{cases} 1, & \text{jika } bd > 0, \\ 0, & \text{jika } bd = 0, \\ -1, & \text{jika } bd < 0. \end{cases}$$

3.5.4 Sifat-sifat Fungsi Autokovarians dan Autokorelasi

Berikut ini adalah sifat-sifat penting fungsi autokovarians:

1. $\gamma(t, t) = \text{var}(X_t)$,
2. $\gamma(t, s) = \gamma(s, t)$,
3. $|\gamma(t, s)| \leq \sqrt{\gamma(t, t)\gamma(s, s)}$.

Untuk fungsi autokorelasi:

1. $\rho(t, t) = 1$,
2. $\rho(t, s) = \rho(s, t)$,
3. $|\rho(t, s)| \leq 1$.

Jika $\rho(t, s) = 0$, maka X_t dan X_s tidak berkorelasi.

3.6 Latihan Soal

1. Misalkan $E(X) = 4$, $\text{var}(X) = 3$, $E(Y) = 0$, $\text{var}(Y) = 4$, dan $\text{cor}(X, Y) = 0,35$. Hitung:
 - a) $\text{var}(X + Y)$
 - b) $\text{cov}(X, X + Y)$
 - c) $\text{cov}(X + Y, Y)$
 - d) $\text{cor}(X + Y, X - Y)$
2. Jika X dan Y tidak saling bebas, tetapi $\text{var}(X) = \text{var}(Y)$. Hitunglah $\text{cov}(X + Y, X - Y)$.
3. Misalkan $X_t = 5 + 2t + W_t$ dengan W_t adalah deret stasioner dengan fungsi autokovarians $\gamma(k)$.
 - a) Hitunglah fungsi nilai tengah untuk $\{X_t\}$.
 - b) Fungsi autokovarians untuk $\{X_t\}$.
 - c) Apakah $\{X_t\}$ stasioner?
4. Misalkan peubah acak A memiliki nilai tengah 0 dan varians 1 dan θ adalah peubah acak yang berdistribusi seragam pada selang $[-\pi, \pi]$ dan bebas dari A . Apakah model-model deret waktu berikut stasioner?
 - a) $X_t = (-1)^t A$;
 - b) $X_t = A \sin(\omega t + \theta)$;
 - c) $X_t = A \sin(2\pi t + \theta)$.
5. Misalkan $\{W_t\}$ adalah suatu barisan peubah acak normal bebas, masing-masing dengan rerata 0 dan varians σ^2 , dan misalkan a , b , dan c adalah konstanta. Berikut ini adalah beberapa model deret waktu:
 - a) $X_t = a + bW_t + cW_{t-2}$;
 - b) $X_t = W_1 \cos(ct) + W_2 \sin(ct)$;
 - c) $X_t = W_t \cos(ct) + W_{t-1} \cos(ct)$;
 - d) $X_t = a + bW_0$;
 - e) $X_t = W_0 \cos(ct)$;
 - f) $X_t = W_t W_{t-1}$.

Tentukan mana di antara proses-proses tersebut yang stasioner! Kemudian untuk masing-masing proses stasioner hitunglah fungsi nilai fungsi autokovarians, dan fungsi autokorelasinya.

6. Misalkan $\{X_t\}$ adalah proses rerata bergerak tingkat dua yang diberikan oleh

$$X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-2}$$

dengan $\{\varepsilon_t\} \sim \text{WN}(0, 1)$.

- a) Hitunglah fungsi autokovarians dan autokorelasi untuk proses ini saat $\theta = 0,8$.
- b) Lakukan seperti langkah (a) untuk $\theta = -0,8$.
- c) Hitunglah varians dari rerata sampel $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)/4$ pada saat $\theta = 0,8$.
- d) Lakukan simulasi model sebanyak 200 untuk kedua θ .

7. Misalkan suatu model deret waktu

$$X_t = \beta_1 + \beta_2 t + W_t$$

dengan β_1 dan β_2 adalah konstanta yang diketahui dan $W_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

- a) Apakah X_t stasioner?
 - b) Tunjukkan bahwa proses $U_t = X_t - X_{t-1}$ adalah stasioner!
8. Misalkan model langkah acak dengan dorongan δ (*random walk with drift*) diberikan oleh

$$X_t = \delta + X_{t-1} + W_t, \quad t = 1, 2, \dots,$$

dengan $X_0 = 0$ dan $W_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

- a) Tunjukkan bahwa model ini dapat ditulis sebagai $X_t = \delta t + \sum_{k=1}^t W_k$.
 - b) Hitunglah fungsi nilai tengah dan fungsi autokovariansnya.
 - c) Tunjukkan bahwa deret ini tidak stasioner.
9. Misalkan $\text{cov}(X_t, X_{t-h}) = \gamma(h)$ adalah bebas dari t , namun $E(X_t) = 3t$.
- a) Apakah $\{X_t\}$ stasioner?
 - b) Misalkan $Y_t = 7 - 3t + X_t$. Apakah $\{Y_t\}$ stasioner?
10. Misalkan $X_t = \varepsilon_t - \theta(\varepsilon_{t-1})^2$. Diasumsikan derau putih berdistribusi normal.
- a) Hitunglah fungsi autokorelasi $\{X_t\}$
 - b) Apakah $\{X_t\}$ stasioner?
11. Misalkan $X_1 = \theta_0 + \varepsilon_1$ dan untuk $t > 1$ definisikan X_t secara rekursif dengan $X_t = \theta_0 + X_{t-1} + \varepsilon_t$ dengan θ_0 adalah konstanta. Proses $\{X_t\}$ dikatakan langkah acak dengan hanyutan (*random walk with drift*).
- a) Tunjukkan bahwa X_t dapat ditulis sebagai $X_t = t\theta_0 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \dots + \varepsilon_1$.
 - b) Hitunglah fungsi nilai tengah X_t .
 - c) Hitunglah fungsi autokovarians untuk X_t .

BAB 4

Model-model Deret Waktu Stasioner

Pada bab sebelumnya kita telah membahas konsep-konsep dasar proses stasioner. Bab ini membahas suatu kelas model deret waktu parametrik yang digunakan secara luas yaitu model rerata bergerak autoregresif (*autoregressive moving average*). Bab ini diadaptasi dari Cryer dan Chan (2010).

4.1 Proses-proses Linear Umum

Misalkan $\{X_t\}$ menyatakan deret waktu teramati dan $\{\varepsilon_t\}$ menyatakan deret derau putih (*white noise*) yang tidak teramati, yakni barisan peubah acak saling bebas, memiliki nilai tengah nol, dan berdistribusi identik. Pada pembahasan-pembahasan selanjutnya, asumsi kebebasan (*independence*) dapat digantikan dengan asumsi yang lebih lemah, yaitu bahwa $\{\varepsilon_t\}$ adalah barisan peubah acak saling tidak berkorelasi.

Definisi 4.1.1. Suatu proses linear umum (*general linear process*) adalah proses yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear terbobot dari suku derau putih sekarang dan masa lalu yaitu

$$X_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots . \quad (4.1)$$

Jika ruas kanan pada persamaan (4.1) adalah deret tak berhingga, tentu kondisi tertentu harus diberikan pada bobot ψ sehingga secara matematika ekspresi tersebut berarti. Untuk itu cukup diasumsikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty. \quad (4.2)$$

Kita juga harus ingat bahwa $\{\varepsilon_t\}$ tidak teramati. Tanpa kehilangan sifat keberumuman kita dapat mengasumsikan bahwa koefisien ε_t adalah 1, demikian pula $\psi_0 = 1$.

Contoh 4.1.1. Salah satu contoh yang tidak sederhana adalah kasus pada saat ψ berbentuk barisan meluruh secara eksponensial, yaitu

$$\psi_j = \phi^j \quad (4.3)$$

dengan ϕ adalah bilangan yang berada antara -1 dan 1 . Pada kasus ini kita mempunyai deret waktu

$$X_t = \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots . \quad (4.4)$$

Selanjutnya kita peroleh

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \dots) = 0 \quad (4.5)$$

Demikian pula

$$\begin{aligned} \text{var}(X_t) &= \text{var}(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \dots) \\ &= \text{var}(\varepsilon_t) + \phi^2\text{var}(\varepsilon_{t-1}) + \phi^4\text{var}(\varepsilon_{t-2}) + \dots \\ &= \sigma_\varepsilon^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots) \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Kemudian kovarians

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_t, X_{t-1}) &= \text{cov}(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \dots, \varepsilon_{t-1} + \phi\varepsilon_{t-2} + \phi^2\varepsilon_{t-3} + \dots) \\ &= \text{cov}(\phi\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \text{cov}(\phi^2\varepsilon_{t-2}, \phi\varepsilon_{t-2}) + \dots \\ &= \phi\sigma_\varepsilon^2 + \phi^3\sigma_\varepsilon^2 + \phi^5\sigma_\varepsilon^2 \\ &= \phi\sigma_\varepsilon^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots) \\ &= \frac{\phi\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dengan demikian diperoleh

$$\text{cor}(X_t, X_{t-1}) = \frac{\frac{\phi\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}}{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}} = \phi. \quad (4.8)$$

Dengan cara yang sama kita dapat menghitung

$$\text{cov}(X_t, X_{t-h}) = \frac{\phi^h\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2} \quad (4.9)$$

dan

$$\text{cor}(X_t, X_{t-h}) = \phi^h. \quad (4.10)$$

Penting bagi kita untuk mengingat bahwa proses yang didefinisikan seperti ini adalah stasioner. Fungsi autokorelasi hanya bergantung pada beda kala waktu dan tidak tergantung pada waktu absolut.

Untuk proses linear $X_t = \varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \dots$ perhitungan serupa dengan contoh di atas menghasilkan

$$E(X_t) = 0 \quad (4.11)$$

$$\gamma(h) = \text{cov}(X_t, X_{t-h}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+h}, \quad h \geq 0 \quad (4.12)$$

dengan $\psi_0 = 1$. Sebagai catatan proses dengan mean taknol μ dapat ditambahkan pada persamaan (4.1). Namun, mengingat nilai tengah tidak memengaruhi sifat-sifat kovarians dari proses, kita asumsikan nilai tengah nol sampai kita mulai mencocokkan (*fitting*) model pada data.

4.2 Proses Rerata Bergerak

Pada kasus berhingga bobot ψ taknol, kita memperoleh proses rerata bergerak (*moving average process*). Bentuk ini dapat dinyatakan sebagai

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (4.13)$$

Deret ini disebut rerata bergerak tingkat q dan disingkat MA (q). Catatan pada beberapa buku lain MA (q) dinyatakan sebagai

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (4.14)$$

Istilah rerata bergerak berasal dari fakta bahwa X_t diperoleh dengan menerapkan bobot $1, -\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_q$ pada peubah $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}$ dan menggerakkan bobot dan menerapkannya pada $\varepsilon_{t+1}, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q+1}$ untuk mendapatkan X_{t+1} dan seterusnya.

4.2.1 Proses Rerata Bergerak Tingkat Satu

Proses rerata bergerak tingkat satu dinyatakan sebagai $X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$. Catatan tika bawah 1 pada θ dapat kita hilangkan karena θ hanya satu. Pada proses ini $E(X_t) = 0$ dan $\text{var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta^2)$. Kovarians dapat dihitung sebagai

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_t, X_{t-1}) &= \text{cov}(\varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \theta \varepsilon_{t-2}) \\ &= \text{cov}(-\theta \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) = -\theta \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

dan

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_t, X_{t-2}) &= \text{cov}(\varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2} - \theta \varepsilon_{t-3}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

karena tidak ada ε dengan tika bawah yang sama antara X_t dan X_{t-2} . Dengan cara yang sama $\text{cov}(X_t, X_{t-h}) = 0$ untuk $h \geq 2$. Artinya proses ini tidak memiliki korelasi di luar beda kala 1. Jadi untuk model MA (1) dengan bentuk $X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$ diperoleh

$$\begin{aligned} E(X_t) &= 0 \\ \gamma(0) &= \text{var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta^2) \\ \gamma(1) &= -\theta \sigma_\varepsilon^2 \\ \rho(1) &= -\theta/(1 + \theta^2) \\ \gamma(h) &= \rho(h) = 0, \quad h \geq 2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.2.2 Proses Rerata Bergerak Tingkat Dua

Proses rerata bergerak tingkat dua, MA(2) berbentuk:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \quad (4.18)$$

Dengan cara serupa kita akan peroleh

$$\gamma(0) = \text{var}(X_t) = \text{var}(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_\varepsilon^2, \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= \text{cov}(X_t, X_{t-1}) \\ &= \text{cov}(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2} - \theta_2 \varepsilon_{t-3}) \\ &= \text{cov}(-\theta_1 \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \text{cov}(-\theta_1 \varepsilon_{t-2}, -\theta_2 \varepsilon_{t-2}) \\ &= [-\theta_1 + (-\theta_1)(-\theta_2)] \sigma_\varepsilon^2 \\ &= (-\theta_1 + \theta_1 \theta_2) \sigma_\varepsilon^2, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \gamma(2) &= \text{cov}(X_t, X_{t-2}) = \text{cov}(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-3} - \theta_2 \varepsilon_{t-4}) \\ &= \text{cov}(-\theta_2 \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2}) \\ &= -\theta_2 \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Fungsi autokorelasi untuk MA(2) adalah sebagai berikut:

$$\rho(1) = \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \quad (4.22)$$

$$\rho(2) = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \quad (4.23)$$

$$\rho(h) = 0, \quad |h| > 2. \quad (4.24)$$

4.2.3 Proses MA(q)

Secara umum untuk proses MA(q) berbentuk $X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$ diperoleh

$$\gamma(0) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.25)$$

dan

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{-\theta_h + \theta_1 \theta_{h+1} + \theta_2 \theta_{h+2} + \dots + \theta_{q-h} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{untuk } h = 1, 2, \dots, q \\ 0, & \text{untuk } h > q. \end{cases} \quad (4.26)$$

4.3 Proses Autoregresif

Proses autoregresif secara harfiah berarti regresi pada dirinya sendiri. Proses autoregresif tingkat ke- p dari deret waktu $\{X_t\}$, disingkat AR(p), memenuhi persamaan

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t. \quad (4.27)$$

Diasumsikan ε_t saling bebas dengan X_{t-1}, X_{t-2}, \dots

4.3.1 Proses Autoregresif Tingkat Pertama

Pada subbagian ini kita akan membahas model autoregresif tingkat pertama berbentuk

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (4.28)$$

Deret ini adalah deret waktu stasioner dengan nilai tengah nol (buktikan!). Sekarang kita akan menghitung fungsi autokorelasi untuk proses AR ini. Ambil varians pada kedua sisi pada persamaan (4.28)

$$\gamma(0) = \phi^2 \gamma(0) + \sigma_\varepsilon^2. \quad (4.29)$$

Selanjutnya diperoleh

$$\gamma(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}. \quad (4.30)$$

Ingat bahwa untuk kondisi varians pada (4.30) $\phi^2 < 1$ atau $|\phi| < 1$. Sekarang perhatikan Persamaan (4.28). Kalikan kedua sisi dengan X_{t-h} , $h = 1, 2, \dots$ dan hitung nilai harapan

$$E(X_{t-h}X_t) = \phi E(X_{t-h}X_{t-1}) + E(\varepsilon_t X_{t-h}) \quad (4.31)$$

atau

$$\gamma(h) = \phi \gamma(h-1) + E(\varepsilon_t X_{t-h}). \quad (4.32)$$

Karena deret dianggap stationer dengan nilai tengah nol dan ε_t saling bebas dengan X_{t-h} diperoleh

$$E(\varepsilon_t X_{t-h}) = E(\varepsilon_t) E(X_{t-h}) = 0. \quad (4.33)$$

Dengan demikian diperoleh

$$\gamma(h) = \phi \gamma(h-1), \quad \text{untuk } h = 1, 2, 3, \dots \quad (4.34)$$

Untuk $h = 1$ kita peroleh

$$\gamma(1) = \phi \gamma(0) = \phi \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}. \quad (4.35)$$

Untuk $h = 2$ kita peroleh

$$\gamma(2) = \phi^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}. \quad (4.36)$$

Nah, dengan mudah dapat kita lihat bahwa

$$\gamma(h) = \phi^h \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}. \quad (4.37)$$

Dengan demikian

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi^h, \quad \text{untuk } h = 1, 2, 3, \dots \quad (4.38)$$

Karena $|\phi| < 1$, nilai fungsi autokorelasi menurun secara eksponensial seiring dengan naiknya jumlah beda kala h . Jika $0 < \phi < 1$ semua autokorelasi bernilai positif. Sebaliknya, jika $-1 < \phi < 0$, beda kala pertama bernilai negatif, dan nilai autokorelasi berubah-ubah dari positif ke negatif dan seterusnya menurun secara eksponensial.

Proses Linear Umum Model AR(1)

Definisi rekursif AR(1) pada (4.28) dapat dinyatakan sebagai proses linear. Jika kita ganti t dengan $t - 1$ kita memperoleh $X_{t-1} = \phi X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$. Mensubstitusikan pada (4.28) kita peroleh

$$\begin{aligned} X_t &= \phi(\phi X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 X_{t-2}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Jika kita ulangi proses substitusi ini sampai sebanyak $h - 1$ kali, kita akan peroleh

$$X_t = \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \phi^{h-1} \varepsilon_{t-h+1} + \phi^h X_{t-h}. \quad (4.40)$$

Dengan mengasumsikan $|\phi| < 1$ dan membiarkan h naik tanpa batas, maka kita memperoleh representasi tak berhingga

$$X_t = \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \phi^3 \varepsilon_{t-3} + \cdots \quad (4.41)$$

Bentuk ini merupakan representasi proses linear dengan $\psi_j = \phi^j$. Kestasioneran proses AR(1) hanya terjadi jika dan hanya jika $|\phi| < 1$. Kondisi ini disebut kondisi kestasioneran (*stationarity condition*).

4.3.2 Proses Autoregresif Tingkat Kedua

Proses autoregresif tingkat kedua, disingkat AR(2) berbentuk

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \quad (4.42)$$

dan diasumsikan ε_t saling bebas dengan $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \dots$. Untuk membahas kestasioneran, kita akan menggunakan polinomial karakteristik AR berbentuk

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 \quad (4.43)$$

dan persamaan karakteristik AR

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0. \quad (4.44)$$

Persamaan kuadrat pada (4.44) memiliki dua akar (bisa juga bilangan kompleks). Akar-akar persamaan kuadrat ini adalah

$$\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}. \quad (4.45)$$

Selanjutnya, kondisi kestasioneran akan tercapai apabila akar-akar ini melebihi 1 dalam nilai mutlak. Hal ini akan terpenuhi jika dan hanya jika ketiga kondisi berikut terpenuhi:

$$\phi_1 + \phi_2 < 1, \quad \phi_2 - \phi_1 < 1, \quad \text{dan} \quad |\phi_2| < 1. \quad (4.46)$$

Fungsi Autokorelasi Proses AR(2)

Dengan cara serupa untuk model AR(1) diperoleh

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \phi_2 \gamma(h-2) \quad h = 1, 2, 3 \dots \quad (4.47)$$

dan

$$\rho(h) = \phi_1 \rho(h-1) + \phi_2 \rho(h-2) \quad h = 1, 2, 3 \dots \quad (4.48)$$

Persamaan (4.47) dan (4.48) disebut dengan persamaan Yule Walker. Selanjutnya, dengan $h = 1$ dan menggunakan $\rho(0) = 1$ dan $\rho(-1) = \rho(1)$ kita peroleh $\rho(1) = \phi_1 + \phi_2 \rho(1)$, sehingga

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}, \\ \rho(2) &= \frac{\phi_2(1 - \phi_2) + \phi_1^2}{1 - \phi_2}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Bagaimana dengan varians model AR(2)? Dengan mengambil varians pada kedua sisi (4.42) diperoleh

$$\gamma(0) = (\phi_1^2 + \phi_2^2)\gamma(0) + 2\phi_1\phi_2\gamma(1) + \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.50)$$

atau

$$\gamma(0) = \left(\frac{1 - \phi_2}{1 + \phi_2} \right) \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2}. \quad (4.51)$$

4.3.3 Proses Autoregresif Umum

Model autoregresif tingkat ke- p berbentuk

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (4.52)$$

dengan polinomial karakteristik AR

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p \quad (4.53)$$

dan persamaan karakteristik

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p = 0. \quad (4.54)$$

Seperti pada pembahasan sebelumnya diasumsikan ε_t saling bebas dengan $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \dots$. Syarat perlu, bukan syarat cukup, agar stasioner adalah

$$\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p < 1 \quad (4.55)$$

dan $|\phi_p| < 1$. Dengan mengasumsikan kestasioneran dan nilai tengah 0, kalikan persamaan (4.52) dengan X_{t-h} , kemudian hitung nilai ekspektasinya, dan bagi dengan $\gamma(0)$ kita akan mendapatkan relasi rekursif berikut:

$$\rho(h) = \phi_1 \rho(h-1) + \phi_2 \rho(h-2) + \phi_3 \rho(h-3) + \dots + \phi_p \rho(h-p). \quad (4.56)$$

Selanjutnya untuk nilai $h = 1, 2, \dots$ dan menggunakan fakta bahwa $\rho(0) = 1$ dan $\rho(-h) = \rho(h)$ kita akan mendapatkan persamaan umum Yule-Walker sebagai berikut

$$\begin{aligned}\rho(1) &= \phi_1 + \phi_2\rho(1) + \phi_3\rho(2) + \dots + \phi_p\rho(p-1) \\ \rho(2) &= \phi_1\rho(1) + \phi_2 + \phi_3\rho(1) + \dots + \phi_p\rho(p-2) \\ &\vdots \\ \rho(p) &= \phi_1\rho(p-1) + \phi_2\rho(p-2) + \phi_3\rho(p-3) + \dots + \rho(p)\end{aligned}\quad (4.57)$$

Apabila nilai-nilai ϕ_1, \dots, ϕ_p diketahui, persamaan linear di atas dapat diselesaikan untuk mendapatkan nilai numerik $\rho(1), \dots, \rho(p)$. Mengingat bahwa

$$E(\varepsilon_t X_t) = E[\varepsilon_t(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t)] = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2. \quad (4.58)$$

Selanjutnya kalau kita kalikan persamaan (4.52) dengan X_t kita akan peroleh

$$\gamma(0) = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \dots + \phi_p\gamma(p) + \sigma_\varepsilon^2. \quad (4.59)$$

Kemudian menggunakan sifat $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$, diperoleh

$$\gamma(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1\rho(1) - \phi_2\rho(2) - \dots - \phi_p\rho(p)}. \quad (4.60)$$

4.4 Proses ARMA

Jika kita asumsikan deret waktu sebagian autoregresif dan sebagian lagi rerata bergerak, maka kita peroleh model deret waktu berbentuk

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (4.61)$$

Dalam hal ini dikatakan bahwa $\{X_t\}$ adalah proses rerata bergerak autoregresif (*autoregressive moving average*) dengan tingkat (*order*) p dan q . Proses ini dituliskan sebagai ARMA(p, q).

4.4.1 Proses ARMA(1, 1)

Model ARMA(1, 1) dapat dituliskan sebagai

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}. \quad (4.62)$$

Untuk mendapatkan persamaan tipe Yule-Walker, kita hitung

$$E(\varepsilon_t X_t) = E[\varepsilon_t(\phi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1})] = \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.63)$$

$$E(\varepsilon_{t-1} X_t) = E[\varepsilon_{t-1}(\phi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1})] = \phi \sigma_\varepsilon^2 - \theta \sigma_\varepsilon^2 = (\phi - \theta) \sigma_\varepsilon^2. \quad (4.64)$$

Kemudian kalikan persamaan (4.62) dengan X_{t-h} dan ambil nilai harapannya sehingga diperoleh

$$\gamma(0) = \phi\gamma(1) + [1 - \theta(\phi - \theta)]\sigma_\varepsilon^2, \quad (4.65)$$

$$\gamma(1) = \phi\gamma(0) - \theta\sigma_\varepsilon^2, \quad (4.66)$$

$$\gamma(h) = \phi\gamma(h-1), \quad \text{untuk } h \geq 2. \quad (4.67)$$

Setelah menyelesaikan dua persamaan pertama diperoleh

$$\gamma(0) = \frac{(1 - 2\phi\theta + \theta^2)}{1 - \phi^2} \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.68)$$

dan menyelesaikan persamaan rekursif tersebut diperoleh

$$\rho(h) = \frac{(1 - \theta\phi)(\phi - \theta)}{1 - 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{h-1}, \quad \text{untuk } h \geq 1. \quad (4.69)$$

Bentuk proses linear umum model ARMA(1, 1) dapat dinyatakan sebagai

$$X_t = \varepsilon_t + (\phi - \theta) \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{j-1} \varepsilon_{t-j} = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \text{untuk } j \geq 1. \quad (4.70)$$

Untuk proses ARMA(p, q) dengan asumsi bahwa ε_t saling bebas dengan $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \dots$ solusi stasioner akan ada jika dan hanya jika semua akar dari persamaan karakteristik AR $\phi(x) = 0$ lebih dari satu dalam modulus.

4.5 Keterbalikan

Kita telah melihat bahwa proses MA (1) memiliki fungsi autokorelasi yang sama jika θ diganti dengan $1/\theta$. Hal serupa juga terjadi untuk MA(2). Ketidaktunggalan (*lack of uniqueness*) MA harus diatasi sebelum mengambil simpulan tentang nilai-nilai parameter dari deret waktu amatan (kenapa?). Tampaknya ketidaktunggalan ini berhubungan dengan pertanyaan berikut. Suatu proses autoregresif selalu dapat dinyatakan sebagai proses linear umum melalui koefisien ψ sehingga suatu proses AR dapat pula dianggap sebagai proses rerata bergerak dengan tingkat tak berhingga (*infinite order*). Dapatkah proses rata-rata bergerak dinyatakan sebagai proses autoregresif? Sebagai contoh proses MA(1) dengan bentuk:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}. \quad (4.71)$$

Selanjutnya, tulis $\varepsilon_t = X_t + \theta \varepsilon_{t-1}$ kemudian ganti t dengan $t - 1$ dan substitusi ε_{t-1} kita akan peroleh

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= X_t + \theta(X_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-2}) \\ &= X_t + \theta X_{t-1} + \theta^2 \varepsilon_{t-2}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Jika $|\theta| < 1$ dan kita lanjutkan proses substitusi ini sampai tak berhingga, kita peroleh

$$\varepsilon_t = X_t + \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} + \dots \quad (4.73)$$

atau

$$X_t = (-\theta X_{t-1} - \theta^2 X_{t-2} - \theta^3 X_{t-3} - \dots) + \varepsilon_t. \quad (4.74)$$

Jika $|\theta| < 1$, kita lihat bahwa model MA(1) dapat dibalik menjadi model autoregresif dengan tingkat tak berhingga. Kita katakan bahwa model MA(1) dapat dibalik (*invertible*) jika dan hanya jika $|\theta| < 1$.

Untuk proses MA(q) umum, didefinisikan polinom karakteristik MA sebagai

$$\theta(x) = 1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \theta_3 x^3 - \dots - \theta_q x^q \quad (4.75)$$

dan persamaan karakteristik MA sebagai

$$1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \theta_3 x^3 - \dots - \theta_q x^q = 0. \quad (4.76)$$

Model MA (q) dikatakan terbalikkan jika terdapat koefisien π_j sedemikian hingga

$$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \pi_3 X_{t-3} + \dots + \varepsilon_t \quad (4.77)$$

jika dan hanya jika akar-akar karakteristik MA lebih dari 1 dalam modulus. Misalkan terdapat proses MA(1) dengan bentuk $X_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1}$ dan $X_t = \varepsilon_t + \frac{1}{2}\varepsilon_t$. Dalam hal sifat keterbalikkan manakah di antara kedua proses MA(1) tersebut yang terbalikkan?

4.6 Latihan

1. Hitunglah fungsi autokorelasi dari proses stasioner yang didefinisikan oleh

$$X_t = 5 + \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{4}\varepsilon_{t-2}$$

2. Sketsalah fungsi autokorelasi untuk model MA(2) dengan parameter

- a) $\theta_1 = 1,2$ dan $\theta_2 = -0,7$

- b) $\theta_1 = -1$ dan $\theta_2 = -0,6$

3. Tunjukkan bahwa pada saat θ diganti $1/\theta$ fungsi autokorelasi untuk MA(1) tidak berubah.

4. Misalkan $\{X_t\}$ adalah proses AR(1) dengan $-1 < \phi < 1$.

- a) Hitunglah fungsi autokovarians untuk $W_t = \Delta X_t = X_t - X_{t-1}$.

- b) Buktikan bahwa $\text{var}(W_t) = 2\sigma_\varepsilon^2/(1 + \phi)$.

5. Deskripsikan karakteristik-karakteristik penting dari fungsi autokorelasi proses-proses berikut:

- a) MA(1)

- b) MA(2)

- c) AR(1)

- d) AR(2)

- e) ARMA(1, 1)

6. Misalkan model ARMA(1, 2) dengan bentuk $X_t = 0,8X_{t-1} + \varepsilon_t + 0,7\varepsilon_{t-1} + 0,6\varepsilon_{t-2}$. Tunjukkan bahwa

- a) $\rho(h) = 0,8\rho(h-1)$ untuk $h > 2$

b) $\rho(2) = 0,8\rho(1) + 0,6\sigma_\varepsilon^2/\gamma(0)$

7. Misalkan model MA(2), yang satu memiliki parameter $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{6}$ dan yang lainnya memiliki parameter $\theta_1 = -1$ dan $\theta_2 = 6$.
8. Misalkan model AR(1) dengan bentuk $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$. Tunjukkan bahwa jika $|\phi| = 1$ proses tidak bisa stasioner.
9. Misalkan $\{X_t\}$ adalah proses AR(1) dengan $\rho(1) = \phi$. Definisikan barisan $\{b_t\} = X_t - \phi X_{t+1}$
 - a) Tunjukkan bahwa $\text{cov}(b_t, b_{t-h}) = 0$ untuk semua t dan h .
 - b) Tunjukkan bahwa $\text{cov}(b_t, X_{t+h}) = 0$ untuk semua t dan $h > 0$.

BAB 5

Model-model Deret Waktu Nonstasioner

Deret waktu $\{X_t\}$ dikatakan mengikuti model rerata bergerak terintegrasi autoregresif (*autoregressive integrated moving average*) jika beda (*difference*) ke- d $W_t = \nabla^d X_t$ adalah proses ARMA stasioner. Dengan kata lain, jika W_t mengikuti model ARMA(p, q), maka kita katakan $\{X_t\}$ adalah proses ARIMA(p, d, q). Pada praktiknya, biasanya nilai d dipilih $d = 1$ atau paling banyak $d = 2$.

5.1 Model ARIMA($p, 1, q$)

Contoh 5.1.1. Misalkan proses ARIMA($p, 1, q$) dengan $W_t = X_t - X_{t-1}$. Selanjutnya kita akan peroleh

$$W_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \cdots + \phi_p W_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (5.1)$$

atau dalam deret amatan

$$X_t - X_{t-1} = \phi_1 (X_{t-1} - X_{t-2}) + \phi_2 (X_{t-2} - X_{t-3}) + \cdots + \phi_p (X_{t-p} - X_{t-p-1}) + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (5.2)$$

yang dapat pula dituliskan sebagai

$$X_t = (1 + \phi_1)X_{t-1} + (\phi_2 - \phi_1)X_{t-2} + \cdots + (\phi_p - \phi_{p-1})X_{t-p} - \phi_p X_{t-p-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (5.3)$$

Bentuk ARIMA pada persamaan (5.3) dikatakan bentuk persamaan beda (*difference equation model*). Model ini tampak seperti ARMA($p + 1, q$). Namun, persamaan karakteristiknya memenuhi

$$1 - (1 + \phi_1)x - (\phi_2 - \phi_1)x^2 - \cdots - (\phi_p - \phi_{p-1})x^p + \phi_p x^{p+1} = (1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \cdots - \phi_p x^p)(1 - x). \quad (5.4)$$

Faktorisasi ini menunjukkan akar pada $x = 1$ yang mengimplikasikan ketakstasioneran. Akar sisanya menunjukkan akar dari polinom karakteristik proses ARMA stasioner ∇X_t .

Mengingat proses nonstationer tidak berada dalam ekuilibrium statistika, kita tidak dapat mengasumsikan bahwa proses tersebut pergi ke masa lalu secara tak terbatas atau bahwa proses tersebut mulai pada saat $t = -\infty$. Namun, kita bisa mengasumsikan bahwa proses ini mulai pada saat $t = -m$, katakanlah, $-m$ lebih awal dibandingkan waktu $t = 1$,

pada saat kita mengamati deret pertama kali. Misalkan kita ambil $X_t = 0$ untuk $t < -m$. Persamaan beda $X_t - X_{t-1} = W_t$ dapat diselesaikan dengan menjumlahkan kedua sisi dari $t = -m$ ke $t = t$ untuk mendapatkan representasi

$$X_t = \sum_{j=-m}^t W_j \quad (5.5)$$

untuk proses $\text{ARIMA}(p, 1, q)$. Untuk proses $\text{ARIMA}(p, 2, q)$ dapat dilakukan dengan menjumlahkan dua kali untuk mendapatkan

$$X_t = \sum_{j=-m}^t \sum_{i=-m}^j W_i = \sum_{j=0}^{t+m} (j+1)W_{t-j}. \quad (5.6)$$

Jika proses tidak berisi komponen autoregresif, maka model ARIMA dikatakan rerata bergerak terintegrasi (*integrated moving average*) dan disingkat $\text{IMA}(d, q)$. Demikian pula, apabila model ARIMA tidak berisi komponen rerata bergerak, maka model dikatakan terintegrasi autoregresif (*integrated autoregressive*) disingkat $\text{ARI}(p, d)$.

5.2 Model IMA(1, 1)

Model $\text{IMA}(1, 1)$ merupakan model yang sering dipakai dalam ekonomi dan bisnis. Bentuk persamaan beda model ini adalah

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_{t-1}. \quad (5.7)$$

Untuk menuliskan X_t secara eksplisit sebagai fungsi nilai derau masa kini dan masa lalu kita dapat menggunakan persamaan (5.5) dan fakta bahwa $W_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$. Lebih lanjut kita peroleh

$$X_t = \varepsilon_t + (1 - \theta)\varepsilon_{t-1} + (1 - \theta)\varepsilon_{t-2} + \cdots + (1 - \theta)\varepsilon_{-m} - \theta\varepsilon_{-m-1}. \quad (5.8)$$

Model ini, berbeda halnya dengan model ARMA stasioner, bobot pada suku derau putih (*white noise*) tidak meluruh sebagaimana kita melihat masa lalu.

5.3 Model ARI(1, 1)

Proses $\text{ARI}(1, 1)$ memenuhi

$$X_t - X_{t-1} = \phi(X_{t-1} - X_{t-2}) + \varepsilon_t \quad (5.9)$$

atau

$$X_t = (1 + \phi)X_{t-1} - \phi X_{t-2} + \varepsilon_t \quad (5.10)$$

dengan $|\phi| < 1$.

5.4 Model ARIMA dengan Konstanta

Asumsi standar dalam model ARIMA adalah bahwa model tersebut stasioner dengan nilai tengah (*mean*) nol. Jika ternyata nilai tengahnya tidak nol, katakanlah μ , maka dalam deret stasioner ARMA $\{W_t\}$ dapat dilakukan dengan dua cara. Pertama, kita dapat mengasumsikan bahwa

$$W_t - \mu = \phi_1(W_{t-1} - \mu) + \phi_2(W_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p(W_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad (5.11)$$

atau

$$W_t = \theta_0 + \phi_1 W_{t-1} + \cdots + \phi_p W_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (5.12)$$

Mengambil ekspektasi kedua sisi pada persamaan (5.12) diperoleh

$$\mu = \theta_0 + (\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p)\mu \quad (5.13)$$

atau

$$\mu = \frac{\theta_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p} \quad (5.14)$$

atau

$$\theta_0 = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p). \quad (5.15)$$

5.5 Transformasi Data

Pembedaan (*differencing*) merupakan salah satu cara untuk menstasionerkan data. Untuk data yang mengandung tren, maka *differencing* dilakukan terhadap tren. Jika data mengandung tren dan musiman maka *differencing* dilakukan terhadap tren dan musiman.

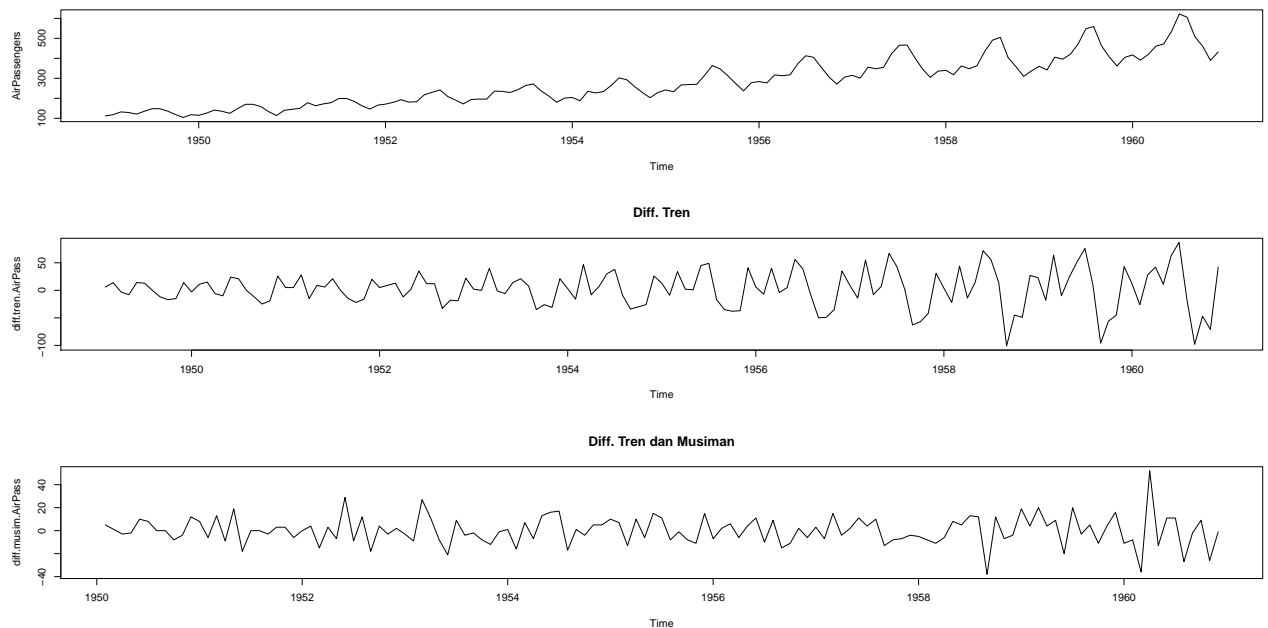
Contoh 5.5.1. Kita akan melakukan *differencing* terhadap tren dan kemudian musiman pada data AirPassengers.

```
> diff.tren.AirPass <- diff(AirPassengers, lag=1)
> diff.musim.AirPass <- diff(diff.tren.AirPass, lag=12)
> par(mfrow=c(3,1))
> plot(AirPassengers)
> plot(diff.tren.AirPass, main="Diff. Tren")
> plot(diff.musim.AirPass, main="Diff. Tren dan Musiman")
```

Alternatif lain untuk menstasionerkan data adalah dengan transformasi pangkat (*power transformation*) Box-Cox yang berbentuk

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}, & \text{untuk } \lambda \neq 0, \\ \log(x), & \text{untuk } \lambda = 0. \end{cases} \quad (5.16)$$

Suku x^λ merupakan bagian penting pada transformasi di atas. Selanjutnya mengurangi 1 dan membagi dengan λ akan membuat $g(x)$ berubah secara pelan-pelan sebagaimana λ mendekati nol. Sebagai catatan nilai $\lambda = \frac{1}{2}$ berarti transformasi akar kuadrat



untuk data dan $\lambda = -1$ berarti transformasi kebalikan. Transformasi pangkat ini hanya berlaku untuk data positif. Jika beberapa nilai data adalah nol atau negatif, konstanta positif bisa ditambahkan kepada semua nilai data agar membuat data menjadi positif sebelum akhirnya ditransformasi.

Contoh 5.5.2. Sebagai contoh kita akan melihat apakah data *AirPassengers* perlu ditransformasi. Untuk itu kita akan melihat nilai λ yang sesuai menggunakan library *forecast*.

```
> library(forecast)
> lambda.AirPass.1 <- BoxCox.lambda(AirPassengers, lower=-2, upper=2)
> lambda.AirPass.1
[1] -0.2947127
```

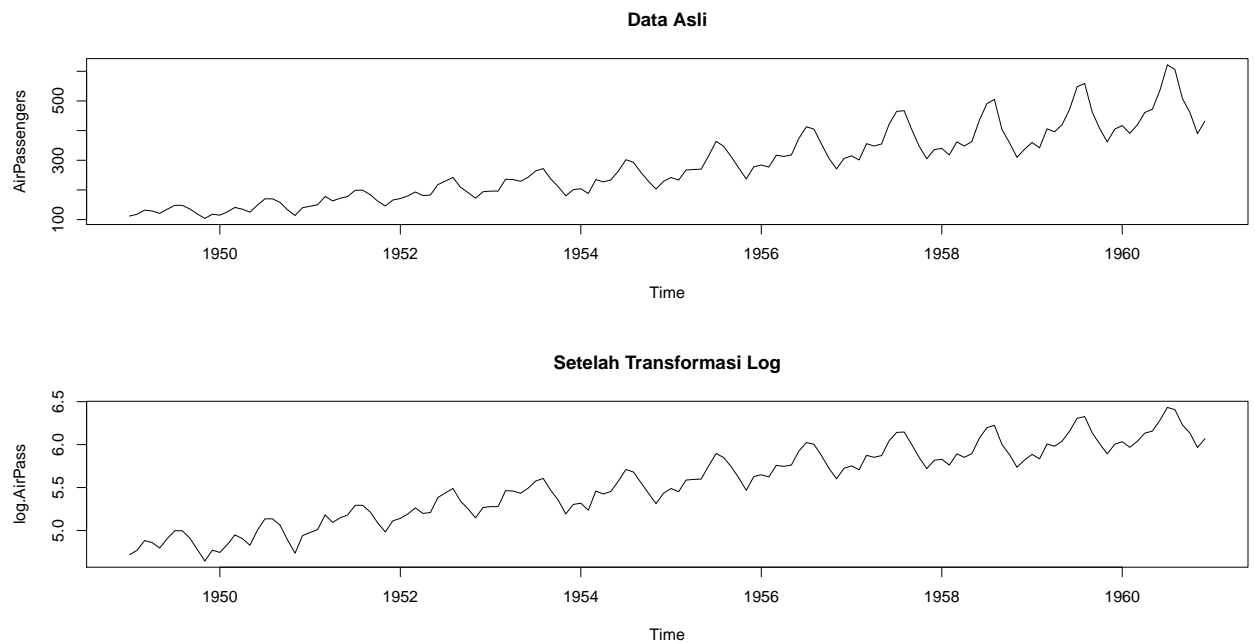
Diperoleh nilai $\lambda = -0,294127 \approx 0$, sehingga kita akan pilih transformasi logaritma untuk data. Perhatikan Gambar 5.1

5.6 Simulasi Model ARIMA

Simulasi ARMA dan ARIMA dapat dilakukan dengan perintah `arima.sim`.

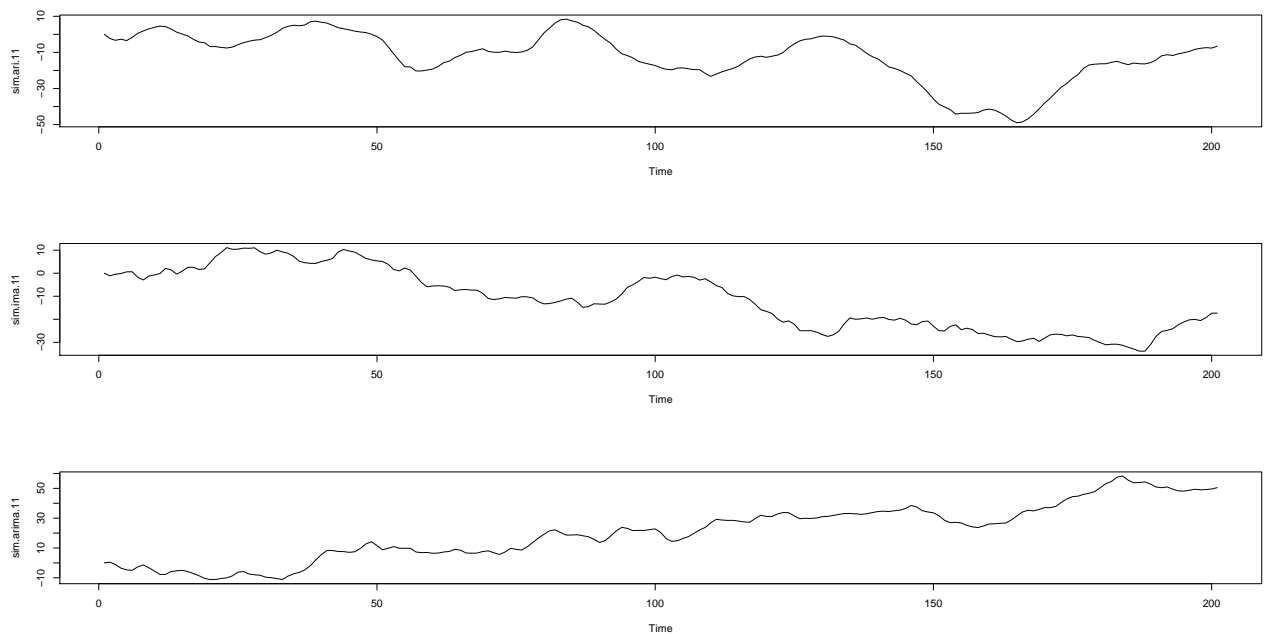
Contoh 5.6.1. Berikut ini kita akan mensimulasikan model $\text{ARI}(1, 1)$, $\text{IMA}(1, 1)$, dan $\text{ARIMA}(1, 1, 1)$ dengan realisasi sebanyak $n = 200$. Parameter untuk masing-masing model ARIMA adalah sebagai berikut: untuk $\text{ARI}(1, 1)$ parameter $\phi = 0,8$; untuk $\text{IMA}(1, 1)$ parameter $\theta = 0,8$, dan untuk $\text{ARIMA}(1, 1, 1)$ parameter $\phi = 0,2$ dan $\theta = 0,8$.

```
> sim.ari.11 <- arima.sim(list(order=c(1,1,0), ar=0.8), n=200)
> plot(sim.ari.11)
> sim.ima.11 <- arima.sim(list(order=c(0,1,1), ma=0.8), n=200)
```

Gambar 5.1: Plot data AirPassengers dan transformasi log terhadap AirPassengers.

```
> plot(sim.ima.11)
> sim.arima.11 <- arima.sim(list(order=c(1,1,1),ar=0.2,ma=0.8),n=200)
> plot(sim.arima.11)
```



Gambar 5.2: Plot simulasi model ARI, IMA, dan ARIMA.

5.7 Latihan Soal

- Identifikasi model ARIMA berikut. Dengan kata lain tentukan berapakah nilai p , d , q dan berapa nilai masing-masing parameter.
 - $X_t = X_{t-1} - 0,25X_{t-2} + \varepsilon_t - 0,1\varepsilon_{t-1}$.
 - $X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + \varepsilon_t$.
- Untuk masing-masing model ARIMA berikut hitunglah nilai $E(\nabla X_t)$ dan $\text{var}(\nabla X_t)$
 - $X_t = 3 + X_{t-1} + \varepsilon_t - 0,7\varepsilon_{t-1}$.
 - $X_t = 10 + 1,25X_{t-1} - 0,25X_{t-2} + \varepsilon_t - 0,1\varepsilon_{t-1}$.
 - $X_t = 5 + 2X_{t-1} - 1,7X_{t-2} + 0,7X_{t-3} + \varepsilon_t - 0,5\varepsilon_{t-1} + 0,25\varepsilon_{t-2}$.
- Misalkan $\{X_t\}$ adalah deret yang dibangkitkan dari deret $X_t = \varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t-2} + c\varepsilon_{t-3} + \dots + c\varepsilon_0$ untuk $t > 0$.
 - Hitung nilai tengah dan kovarians fungsi $\{X_t\}$. Apakah $\{X_t\}$ stasioner?
 - Hitung nilai tengah dan kovarians fungsi $\{\nabla X_t\}$. Apakah $\{\nabla X_t\}$ stasioner?
- Lihat kembali Latihan pada subbab 2.6 halaman 18–20. Untuk semua data amatilah apakah perlu dilakukan *differencing* untuk menstasionerkan data (baik tren maupun musiman)? Apakah perlu transformasi untuk menstasionerkan data?
- Gunakan kalkulus untuk menunjukkan bahwa untuk setiap $x > 0$ dan sebagaimana $\lambda \rightarrow 0$ maka $(x^\lambda - 1)/\lambda \rightarrow \log x$.

BAB 6

Inferensi Model ARIMA

Kita telah mempelajari suatu kelas model parametrik untuk deret waktu stasioner maupun nonstasioner yakni ARMA dan ARIMA. Pada bab ini kita akan mempelajari dan mengimplementasikan model-model tersebut. Dengan kata lain, kita akan mempelajari inferensi statistika untuk model-model tersebut. Kita akan mempelajari bagaimana: memilih nilai p , d , dan q (disebut spesifikasi model); mengestimasi parameter untuk model ARMA(p, d, q); dan memeriksa kesesuaian model dan memperbaikinya jika diperlukan.

6.1 Spesifikasi Model

Pada subbab ini kita akan membahas fungsi autokorelasi sampel, fungsi autokorelasi parsial, uji akar unit Dickey-Fuller, dan kriteria informasi.

6.1.1 Sifat-sifat fungsi autokorelasi sampel

Ingat kembali fungsi autokorelasi sampel yang didefinisikan oleh

$$\hat{\rho}(h) = r(h) = \frac{\sum_{t=h+1}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \quad (6.1)$$

untuk $h = 1, 2, \dots$. Tujuan kita adalah mengenali semaksimal mungkin pola r_h yang merupakan karakteristik pola ρ_h dari model ARMA. Sebagai contoh kita tahu bahwa $\rho(h) = 0$ untuk $h > q$ pada model MA(q). Namun, $r(h)$ hanyalah estimasi dari $\rho(h)$. Kita perlu menyelidiki lebih lanjut sifat-sifat pengambilan sampel untuk membandingkan korelasi dari sampel dan korelasi teoretisnya.

Melihat definisi fungsi autokorelasi sampel r_h , jelas bahwa distribusi sampel rasio jumlah kuadrat tersebut tidaklah mudah. Kita tahu bahwa ekspektasi dari rasio bukanlah rasio dari ekspektasi, artinya $E(X/Y) \neq E(X)/E(Y)$. Dengan demikian, kita akan menggunakan argumentasi sampel besar untuk membahas sifat-sifat sampel. Hasil dari sifat sampel besar ini telah dipelajari oleh Bartlett. Hasil-hasil tersebut antara lain sebagai berikut. Untuk sebarang m , distribusi bersama dari

$$\sqrt{n}(r(1) - \rho(1)), \sqrt{n}(r(2) - \rho(2)), \dots, \sqrt{n}(r(m) - \rho(m)) \quad (6.2)$$

sebagaimana $n \rightarrow \infty$ adalah distribusi normal dengan nilai tengah nol, varians c_{jj} , dan kovarians c_{ij} dengan

$$c_{ij} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} (\rho(h+i)\rho(h+j) + \rho(h-i)\rho(h+j) - 2\rho(i)\rho(j)\rho(h+j) - 2\rho(j)\rho(h)\rho(h+i) + 2\rho(i)\rho(j)\rho^2(h)). \quad (6.3)$$

Untuk n besar, kita katakan $r(h)$ mendekati normal dengan nilai tengah $\rho(h)$ dan varians c_{hh}/n . Selanjutnya, kita juga peroleh $\text{cor}(r(h), r(j)) \approx c_{hj}/\sqrt{c_{hh}c_{jj}}$. Apa yang dapat kita ambil sifat ini? Untuk n besar, varians $r(h)$ berbanding terbalik dengan ukuran sampel, tetapi $\text{cor}(r(h), r(j))$ mendekati konstan untuk n besar.

Contoh 6.1.1. Untuk proses AR(1) dengan $\rho(h) = \phi^h$ untuk $h > 0$, persamaan (6.3) untuk $i = j$ menghasilkan

$$\text{var}(r(h)) \approx \frac{1}{n} \left[\frac{(1 + \phi^2)(1 - \phi^{2h})}{1 - \phi^2} - 2h\phi^{2h} \right]. \quad (6.4)$$

Lebih lanjut

$$\text{var}(r_1) \approx \frac{1 - \phi^2}{n}. \quad (6.5)$$

Demikian pula, setelah melakukan banyak manipulasi aljabar, diperoleh

$$c_{ij} = \frac{(\phi^{j-1} - \phi^{j+i}(1 + \phi^2))}{1 - \phi^2}. \quad (6.6)$$

Kita peroleh, misalnya,

$$\text{cor}(r(1), r(2)) \approx 2\phi \sqrt{\frac{1 - \phi^2}{1 + 2\phi^2 - 3\phi^4}}. \quad (6.7)$$

Misalkan $\phi = \pm 0,9$, diperoleh $\text{var}(r_1) = 0,44^2/n$ dan $\text{cor}(r(1), r(2)) = \pm 0,97$.

Contoh 6.1.2. Untuk MA(1) diperoleh $c_{11} = 1 - 3\rho^2(1) + 4\rho^4(1)$ dan $c_{hh} = 1 + 2\rho^2(1)$ untuk $h > 1$ dan $c_{12} = 2\rho(1)(1 - \rho^2(1))$. Misalnya untuk $\theta = \pm 0,9$ diperoleh $\text{var}(r(1)) = 0,71^2/n$ dan $\text{cor}(r(1), r(2)) = \mp 0,86$.

6.1.2 Fungsi autokorelasi parsial

Ingat kembali bahwa fungsi autokorelasi untuk MA(q) adalah nol untuk beda kala (*lag*) selain q , jadi fungsi autokorelasi sampel merupakan indikator yang bagus untuk tingkat (*order*) dari proses. Namun, fungsi autokorelasi AR(p) misalnya tidaklah nol setelah beda kala tertentu. Bahkan, beda kala ini melemah (*die off*), bukan terpotong (*cut off*). Ini berarti kita memerlukan informasi lain untuk menentukan tingkat dari model autoregresif. Suatu fungsi yang didefinisikan sebagai korelasi antara X_t dan X_{t-h} setelah menghilangkan pengaruh variabel intervensi $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-h+1}$. Koefisien ini disebut autokorelasi parsial pada beda kala h dan dinotasikan ϕ_{hh} . Ada beberapa cara untuk mendefinisikan autokorelasi parsial ini. Jika X_t adalah deret waktu berdistribusi normal, maka

$$\phi_{hh} = \text{cor}(X_t, X_{t-h} | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-h+1}) \quad (6.8)$$

yakni ϕ_{hh} adalah korelasi distribusi bivariat dari X_t dan X_{t-h} bersyarat pada $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-h+1}$.

Metode umum untuk menentukan fungsi autokorelasi parsial untuk proses stasioner adalah dengan menggunakan persamaan Yule-Walker berikut:

$$\begin{aligned}\phi_{h1} + \rho(1)\phi_{h2} + \rho(2)\phi_{h3} + \dots + \rho(h-1)\phi_{hh} &= \rho(1) \\ \rho(1)\phi_{h1} + \phi_{h2} + \rho(1)\phi_{h3} + \dots + \rho(h-2)\phi_{hh} &= \rho(2) \\ &\vdots \\ \rho(h-1)\phi_{h1} + \rho(h-2)\phi_{h2} + \rho(h-3)\phi_{h3} + \dots + \phi_{hh} &= \rho(h)\end{aligned}\quad (6.9)$$

Levinson (1947) dan Durbin (1960) memberikan metode yang efisien untuk mendapatkan solusi persamaan (6.9) di atas. Secara terpisah mereka menemukan solusi rekursif

$$\phi_{hh} = \frac{\rho(h) - \sum_{j=1}^{h-1} \phi_{h-1,j} \rho(h-j)}{1 - \sum_{j=1}^{h-1} \phi_{h-1,j} \rho(j)} \quad (6.10)$$

dengan $\phi_{h,j} = \phi_{h-1,j} - \phi_{hh}\phi_{h-1,h-j}$ untuk $j = 1, 2, \dots, h-1$. Sebagai contoh menggunakan $\phi_{11} = \rho(1)$ kita peroleh

$$\phi_{22} = \frac{\rho(2) - \phi_{11}\rho(1)}{1 - \phi_{11}\rho(1)} = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)} \quad (6.11)$$

dengan $\phi_{21} = \phi_{11} - \phi_{22}\phi_{11}$ yang diperlukan untuk langkah selanjutnya. Dengan demikian kita peroleh

$$\phi_{33} = \frac{\rho(3) - \phi_{21}\rho(2) - \phi_{22}\rho(1)}{1 - \phi_{21}\rho(1) - \phi_{22}\rho(2)}. \quad (6.12)$$

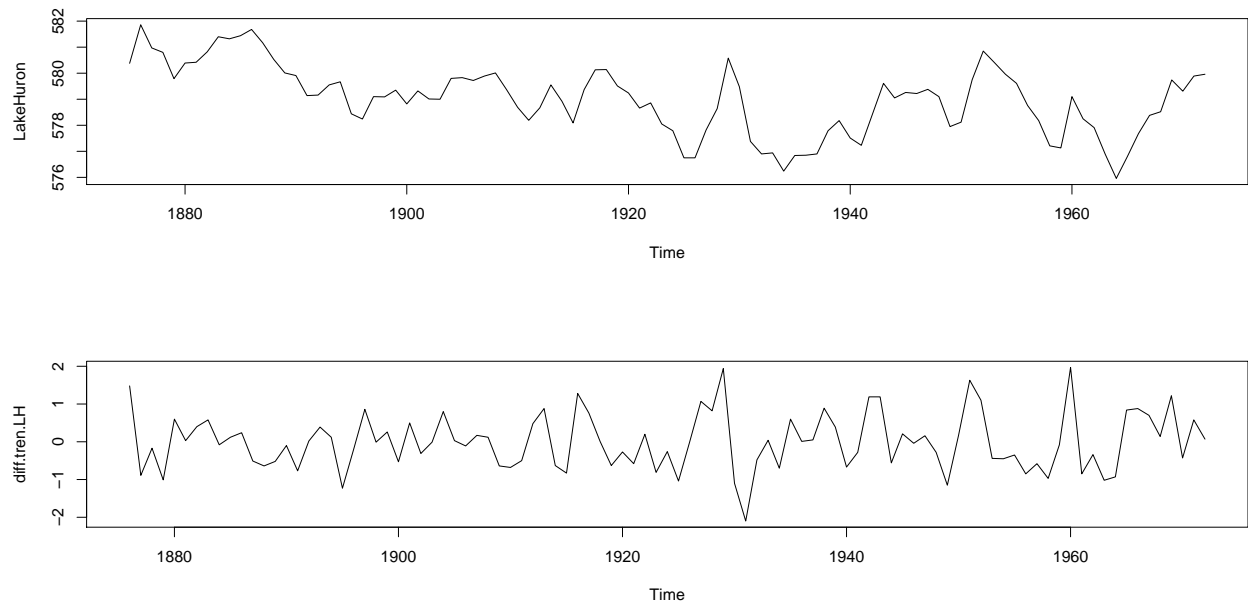
Kita dapat menghitung nilai numerik untuk ϕ_{hh} baik secara teoretis maupun empiris. Artinya, mengganti ρ dengan r kita akan memperoleh fungsi autokorelasi parsial sampel atau estimasinya. Berikut ini adalah tingkah laku fungsi autokorelasi dan autokorelasi parsial untuk model ARMA.

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p, q)
ACF	melemah	terpotong setelah beda kala q	melemah
PACF	terpotong setelah beda kala p	melemah	melemah

Contoh 6.1.3. Kita akan mengamati fungsi autokorelasi sampel (ACF) dan fungsi autokorelasi parsial sampel (PACF) dari data LakeHuron. Data ini merupakan data pengukuran ketinggian Danau Huron selama periode 1875–1972 dalam satuan kaki.

```
> par(mfrow=c(2,1))
> plot(LakeHuron)
> diff.tren.LH <- diff(LakeHuron, lag=1)
> plot(diff.tren.LH)
```

Terlebih dahulu kita plot data. Berdasarkan plot data dapat dilihat bahwa data tidak stasioner hal ini ditunjukkan oleh adanya tren menurun. Sehingga kita akan melakukan *differencing* terhadap tren. Selanjutnya kita akan lihat ACF dan PACF untuk data yang telah *di-differencing* tersebut.



Gambar 6.1: Plot data Lake Huron dan *differencing* terhadap tren.

```
> acf(diff.tren.LH)
> acf(diff.tren.LH,type="partial")
```

Kita peroleh plot ACF dan PACF sebagai berikut: Sebagai catatan garis putus-putus pada gambar diplot pada $\pm 2/\sqrt{n}$ yang berfungsi sebagai nilai kritis apakah koefisien autokorelasi secara signifikan berbeda dari nol. Melihat ACF, semua beda kala (*lag*) tidak ada yang signifikan. Pada PACF terlihat pada beda kala (*lag*) ke-2 terpotong, sehingga kandidat model setelah data ini di-*differencing* adalah AR(2).

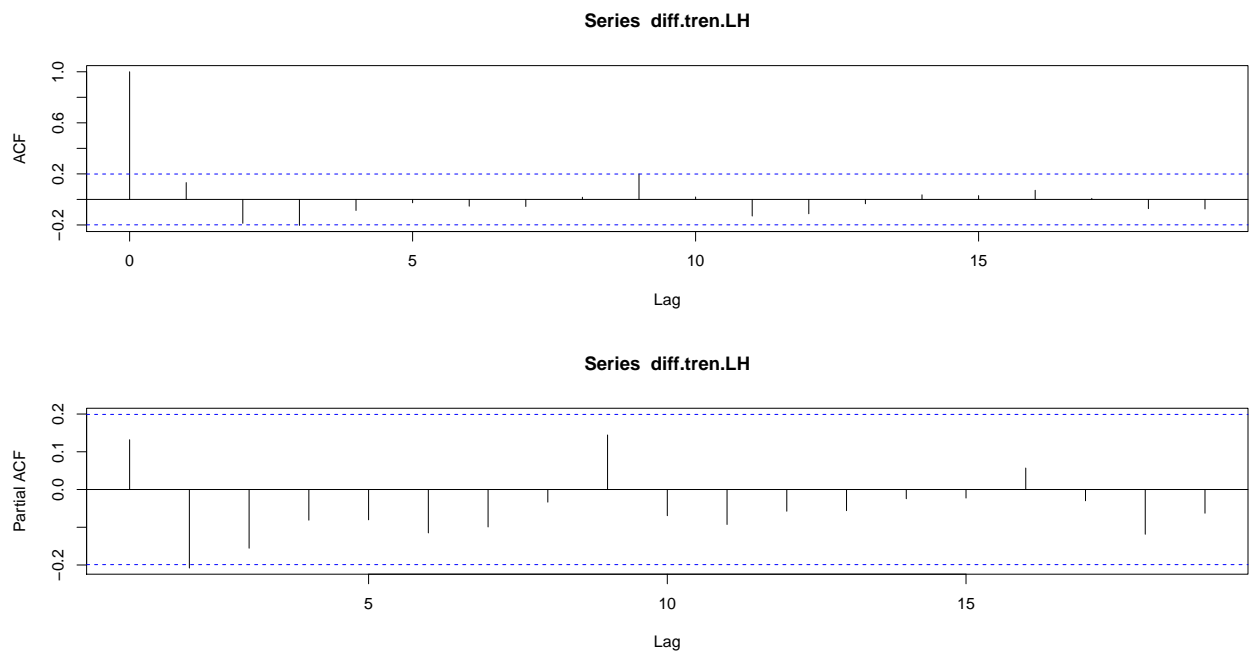
Fungsi autokorelasi diperluas

Model ARMA memiliki ACF dan PACF yang memiliki tak berhingga banyak nilai tak nol. Hal ini tentu saja menjadikannya susah untuk diidentifikasi kalau hanya menggunakan fungsi autokorelasi sampel dan fungsi autokorelasi parsial sampel. Salah satu fungsi yang bisa digunakan untuk membantu kita dalam mengidentifikasi adalah fungsi autokorelasi parsial yang diperluas (*extended autocorrelation function*, disingkat EACF). Misalkan

$$W_{t,k,j} = X_t - \tilde{\phi}_1 X_{t-1} - \cdots - \tilde{\phi}_k X_{t-k} \quad (6.13)$$

adalah sisaan autoregresif yang didefinisikan dengan koefisien AR yang diestimasi secara iteratif dengan mengasumsikan tingkat AR adalah k dan tingkat MA adalah j . Autokorelasi sampel $W_{t,k,j}$ dikatakan autokorelasi sampel yang diperluas (EACF). Fungsi EACF diimplementasikan pada pustaka TSA dalam fungsi `eacf`.

Contoh 6.1.4. Lihat kembali data Lake Huron yang telah di-*differencing*. Kita akan melihat EACF untuk data ini.

Gambar 6.2: Plot ACF dan PACF data Lake Huron dan *differencing* terhadap tren.

```
> diff.tren.LH <- diff(LakeHuron, lag=1)
> library(TSA)
> eacf(diff.tren.LH)
AR/MA
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
0 o o o o o o o o o o o o o o
1 x o o o o o o o o o o o o o
2 x o o o o o o o o o o o o o
3 x x o o o o o o o o o o o o
4 x o o x o o o o o o o o o o
5 x x x o o o o o o o o o o o
6 x o o o o o o o o o o o o o
7 x o o x o x o o x o o o o o
>
```

Untuk melihat tingkat (*order*) yang mungkin dapat dilihat dari daerah segitiga o. Melihat hasil EACF di atas disarankan model ARMA dengan $p = 0$, $q = 1$ atau MA(1). Kenapa hasil ini berbeda dengan hasil identifikasi kita menggunakan ACF saja? Tentu saja nanti kita bisa menggunakan kedua kandidat model dan memilih menggunakan kriteria informasi AIC dan BIC yang akan kita bicarakan pada bagian berikutnya.

6.1.3 Kriteria Informasi

Kriteria informasi yang lazim digunakan dalam memilih model ARIMA adalah Akaike Information Criterion (AIC) dan Bayesian Information Criterion (BIC). AIC didefinisikan

sebagai

$$AIC = -2\log(\text{maximum likelihood}) + 2k \quad (6.14)$$

dengan $k = p + q + 1$ jika model berisi intersep atau suku konstan dan $k = p + q$ jika tidak. Ukuran lain adalah BIC yang didefinisikan oleh

$$BIC = -2\log(\text{maximum likelihood}) + k\log n. \quad (6.15)$$

Model dengan nilai AIC dan BIC terkecil adalah kandidat model yang akan terpilih untuk digunakan pada tahap berikutnya seperti pemeriksaan diagnostik dan peramalan.

Contoh 6.1.5. Lihat kembali data Lake Huron. Kita telah melakukan *differencing* terhadap tren. Pada bagian ini kita akan melihat nilai AIC dan BIC dari Lake Huron. Ingat, kita akan menerapkan model ARIMA pada data asli.

```
> LakeHuron.ar2 <- arima(LakeHuron, order=c(2,1,0))
> LakeHuron.ar2
```

```
Call:
arima(x = LakeHuron, order = c(2, 1, 0))
```

```
Coefficients:
ar1      ar2
0.1728  -0.2233
s.e.    0.1012   0.1015
```

```
sigma^2 estimated as 0.5188:  log likelihood = -105.87,  aic = 215.74
> LakeHuron.ma1 <- arima(LakeHuron, order=c(0,1,1))
> LakeHuron.ma1
```

```
Call:
arima(x = LakeHuron, order = c(0, 1, 1))
```

```
Coefficients:
ma1
0.2003
s.e.  0.1145
```

```
sigma^2 estimated as 0.5398:  log likelihood = -107.75,  aic = 217.5
>
```

Dari luaran di atas diperoleh AIC untuk model AR(2) = 215,74 dan AIC untuk model MA (1) = 217,5. Jadi berdasarkan kriteria AIC kita akan memilih model AR(2).

6.1.4 Uji Akar Unit

Kita telah mempelajari bagaimana menggunakan *differencing* untuk mendapatkan deret waktu yang stasioner. Kita juga tahu bahwa *differencing* terhadap deret stasioner juga

akan menghasilkan deret waktu stasioner. Namun, *differencing* yang berlebihan (*overdifferencing*) akan mengakibatkan korelasi yang tidak perlu pada deret dan akan memperumit proses pemodelan. Selain itu, akibat dari *overdifferencing* adalah membuat model yang tidak *invertible*. Model yang tidak *invertible* menyebabkan masalah serius pada saat kita mengestimasi parameter model.

Sebagai contoh misalkan $\{X_t\}$ adalah langkah acak (*random walk*). Melakukan *differencing* dengan bentuk

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t. \quad (6.16)$$

Namun, jika kita *differencing* lagi, dengan kata lain melakukan *over differencing*, kita akan mendapatkan

$$\nabla^2 X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} \quad (6.17)$$

yang merupakan proses MA(1), tetapi dengan $\theta = 1$. Jika kita ambil dua kali *differencing* kita akan mengestimasi nilai parameter θ yang tidak perlu. Menspesifikasikan model MA(2, 1) tidaklah tepat dalam hal ini. Langkah acak (*random walk*) yang dianggap sebagai IMA(1, 1) dengan $\theta = 0$ adalah model yang tepat.

Untuk menghindari *overdifferencing* sangat disarankan untuk melihat dengan hati-hati setiap beda (*difference*) dan mengingat prinsip irit (*parsimony*).

Kita juga telah tahu bahwa meluruhnya autokorelasi sampel secara linear sering merupakan indikasi bahwa deret waktu tidak stasioner dan memerlukan *differencing*. Adalah hal yang berguna jika kita juga mengetahui bukti ketidakstasioneran pada mekanisme pembangkitan data. Hal ini dapat dilakukan melalui uji hipotesis. Misalkan model

$$X_t = \alpha X_{t-1} + Y_t, \quad \text{untuk } t = 1, 2, \dots \quad (6.18)$$

dengan $\{Y_t\}$ adalah proses stasioner. Proses $\{X_t\}$ tidak akan stasioner jika koefisien $\alpha = 1$, tetapi akan stasioner jika $|\alpha| < 1$. Misalkan $\{Y_t\}$ adalah proses AR(k) yaitu

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_k Y_{t-k} + \varepsilon_t. \quad (6.19)$$

Di bawah hipotesis nol bahwa $\alpha = 1$, $Y_t = X_t - X_{t-1}$. Misalkan $\beta = \alpha - 1$, kita akan peroleh

$$X_t - X_{t-1} = (\alpha - 1)X_{t-1} + Y_t \quad (6.20)$$

$$= \beta X_{t-1} + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_k Y_{t-k} + \varepsilon_t \quad (6.21)$$

$$= \beta X_{t-1} + \phi_1 (X_{t-1} - X_{t-2}) + \dots + \phi_k (X_{t-k} - X_{t-k-1}) + \varepsilon_t \quad (6.22)$$

dengan $\beta = 0$ di bawah hipotesis bahwa X_t adalah beda takstasioner (*difference nonstationary*). Dilain pihak jika $\{X_t\}$ adalah stasioner maka $-1 < \alpha < 1$, maka dapat dicek bahwa X_t masih memenuhi persamaan di atas namun dengan koefisien yang berbeda. Sebagai contoh,

$$\beta = (1 - \phi_1 - \dots - \phi_k)(1 - \alpha) < 0. \quad (6.23)$$

Sebenarnya $\{X_t\}$ adalah proses AR($k+1$) dengan persamaan karakteristik yang diberikan oleh

$$\Phi(x)(1 - \alpha x) = 0 \quad (6.24)$$

dengan $\Phi(x) = 1 - \phi_1 x - \dots - \phi_k x^k$. Jadi dengan demikian hipotesis nol berhubungan dengan kasus bahwa polinom karakteristik AR memiliki akar unit dan hipotesis alternatif yang menyatakan bahwa tidak memiliki akar unit. Dengan demikian, pengujian terhadap *differencing* pada dasarnya menguji akar unit pada polinom karakteristik AR dari deret $\{X_t\}$.

6.2 Estimasi Parameter

Secara umum ada beberapa metode untuk menduga parameter model ARMA(p, q) seperti metode momen, metode kuadrat terkecil, metode kemungkinan maksimum, dan kuadrat terkecil tak bersyarat. Pada bagian ini kita hanya akan membahas metode kemungkinan maksimum (*maximum likelihood*).

Untuk sebarang amatan X_1, X_2, \dots, X_n , deret waktu atau bukan, fungsi kemungkinan (*likelihood*) L didefinisikan sebagai densitas peluang bersama mendapatkan data yang diamati. Fungsi kemungkinan ini dianggap fungsi dari parameter yang tidak diketahui dengan amatan data dianggap tetap (*fixed*). Untuk model ARIMA fungsi kemungkinan L adalah fungsi dari ϕ, θ, μ , dan σ_ε^2 diketahui X_1, X_2, \dots, X_n .

Sebagai contoh perhatikan model AR(1) dengan bentuk

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6.25)$$

diasumsikan ε_t saling bebas dan berdistribusi normal dengan nilai tengah nol dan simpangan baku σ_ε . Fungsi densitas peluang masing-masing ε_t adalah

$$(2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-1/2} \exp(-\varepsilon_t^2/(2\sigma_\varepsilon^2)), \quad \text{untuk } -\infty < \varepsilon_t < \infty \quad (6.26)$$

dan mengingat saling bebas, fungsi densitas peluang bersama $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$ adalah

$$(2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{(n-1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=2}^n \varepsilon_t^2\right). \quad (6.27)$$

Sekarang misalkan

$$\begin{aligned} X_2 - \mu &= \phi(X_1 - \mu) + \varepsilon_2 \\ X_3 - \mu &= \phi(X_2 - \mu) + \varepsilon_3 \\ &\vdots \\ X_n - \mu &= \phi(X_{n-1} - \mu) + \varepsilon_n. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Selanjutnya diperoleh

$$f(x_2, x_3, \dots, x_n | x_1) = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-(n-1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=2}^n [(x_t - \mu) - \phi(x_{t-1} - \mu)]^2\right). \quad (6.29)$$

Fungsi kemungkinan yang bersesuaian adalah

$$L(\phi, \mu, \sigma_\varepsilon^2) = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-n/2} (1 - \phi^2)^{1/2} \exp[-S(\phi, \mu)/2\sigma_\varepsilon^2] \quad (6.30)$$

dengan

$$S(\phi, \mu) = \sum_{t=2}^n [(X_t - \mu) - \phi(X_{t-1} - \mu)]^2 + (1 - \phi^2)(X_1 - \mu)^2. \quad (6.31)$$

Fungsi $S(\phi, \mu)$ disebut fungsi jumlah kuadrat tak bersyarat (*unconditional sum-of-squares function*). Fungsi log kemungkinan (*log-likelihood*) dinotasikan

$$\ell(\phi, \mu, \sigma_\varepsilon^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2}\log(1 - \phi^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}S(\phi, \mu). \quad (6.32)$$

Menurunkan persamaan log kemungkinan terhadap masing-masing parameter ϕ , μ , dan σ_ε^2 akan diperoleh nilai dugaan masing-masing parameter. Salah satunya adalah

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{S(\hat{\phi}, \hat{\mu})}{n}. \quad (6.33)$$

Untuk nilai ϕ dan μ , $\ell(\phi, \mu, \sigma_\varepsilon^2)$ dapat dimaksimalkan secara analitik terhadap σ_ε^2 dan kita peroleh

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{S(\hat{\phi}), \hat{\mu}}{n}. \quad (6.34)$$

Sifat-sifat sampel besar

Untuk n besar, penduga akan mendekati normal dengan varians dan korelasi sebagai berikut:

AR(1) memiliki varians:

$$\text{var}(\hat{\phi}) \approx \frac{1 - \phi^2}{n} \quad (6.35)$$

AR(2) memiliki varians dan korelasi:

$$\text{var}(\hat{\phi}_1) \approx \text{var}(\hat{\phi}_2) \approx \frac{1 - \phi_2^2}{n} \quad (6.36)$$

dan

$$\text{cor}(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) \approx \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} = -\rho_1. \quad (6.37)$$

MA(1) memiliki varians:

$$\text{var}(\hat{\theta}) \approx \frac{1 - \theta^2}{n}. \quad (6.38)$$

MA(2) memiliki varians dan korelasi

$$\text{var}(\hat{\theta}_1) \approx \text{var}(\hat{\theta}_2) \approx \frac{1 - \theta_2^2}{n} \quad (6.39)$$

dan

$$\text{cor}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \approx -\frac{\theta_1}{1 - \theta_2}. \quad (6.40)$$

ARMA(1, 1) memiliki varians dan korelasi:

$$\text{var}(\hat{\phi}) \approx \left(\frac{1 - \phi^2}{n} \right) \left(\frac{1 - \phi\theta}{\phi - \theta} \right)^2 \quad (6.41)$$

$$\text{var}(\hat{\theta}) \approx \left(\frac{1 - \theta^2}{n} \right) \left(\frac{1 - \phi\theta}{\phi - \theta} \right)^2 \quad (6.42)$$

$$\text{cor}(\hat{\phi}, \hat{\theta}) \approx \frac{\sqrt{(1 - \phi^2)(1 - \theta^2)}}{1 - \phi\theta}. \quad (6.43)$$

Contoh 6.2.1. Lihat kembali data Lake Huron di atas. Kita peroleh estimasi untuk model AR(2) dengan estimasi parameter $\hat{\phi}_1 = 0,1728$ dan $\hat{\phi}_2 = -0,2233$.

6.3 Peramalan

Salah satu tujuan dari analisis deret waktu adalah peramalan. Yang tidak kalah pentingnya adalah penilaian tentang ketepatan peramalan tersebut. Pada bagian ini kita akan membahas peramalan dengan galat kuadrat rata-rata (*minimum square error*, disingkat MSE) minimum. Sebelum membahas MSE, kita akan meninjau kembali sifat-sifat harapan bersyarat dan prediksi MSE minimum. Subbagian ini diadaptasi dari Cryer dan Chan (2010).

6.3.1 Harapan bersyarat

Jika X dan Y memiliki fungsi densitas peluang bersama $f(x, y)$ dan fungsi densitas peluang marginal X dinyatakan sebagai $f(x)$, maka fungsi densitas peluang bersyarat (*conditional probability density function*) Y diketahui $X = x$ diberikan oleh

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} \quad (6.44)$$

dan nilai harapan bersyarat Y diketahui $X = x$ didefinisikan oleh

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) dy. \quad (6.45)$$

Beberapa sifat penting harapan bersyarat adalah sebagai berikut:

1. $E(aY + bZ + c|X = x)$,
2. $E[h(Y)|X = x] = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f(y|x) dx$,
3. $E[h(X)|X = x] = h(x)$,
4. $E[h(X, Y)|X = x] = E[h(x, Y)|X = x]$,
5. Jika $E(Y|X = x) = g(x)$, maka $g(X)$ adalah peubah acak dan dapat dibuktikan $E[g(X)] = E(Y)$ atau $E[E(Y|X)] = E(Y)$,
6. Jika X dan Y saling bebas, maka $E(Y|X) = E(Y)$.

6.3.2 Prediksi MSE minimum

Misalkan Y adalah peubah acak dengan nilai tengah μ_Y dan varians σ_Y^2 . Jika tujuan kita adalah memprediksi Y hanya menggunakan konstanta c , apakah pilihan terbaik untuk c ? Tentu saja kita harus mendefinisikan apa yang dimaksud dengan terbaik. Kriteria yang umum digunakan adalah memilih nilai c yang meminimalkan MSE, yaitu, meminimalkan

$$g(c) = E[(Y - c)^2] = E(Y^2) - 2c E(Y) + c^2. \quad (6.46)$$

Karena $g(c)$ adalah fungsi kuadratik dalam c , menyelesaikan $g'(c) = 0$ akan menghasilkan nilai minimum yang diinginkan. Kita peroleh

$$g'(c) = -2 E(Y - c) \quad (6.47)$$

sehingga nilai c yang optimal adalah

$$c = E(Y) = \mu. \quad (6.48)$$

Ingat pula bahwa

$$\min_{-\infty < c < \infty} g(c) = E(Y - \mu)^2 = \sigma_Y^2. \quad (6.49)$$

Sekarang misalkan kita memiliki peubah acak kedua X dan ingin menggunakan nilai amatan X untuk memprediksi Y . Andaikan fungsi linear $a + bX$ dapat digunakan untuk prediksi. Misalkan pula $\rho_{XY} = \text{cor}(X, Y)$. MSE diberikan oleh

$$g(a, b) = E(Y - a - bX)^2 \quad (6.50)$$

dan ekspansikan $g(a, b)$ sehingga diperoleh

$$g(a, b) = E(Y^2) + a^2 + b^2 E(X^2) - 2a E(Y) + 2ab E(X) - 2b E(XY). \quad (6.51)$$

Selanjutnya menurunkan parsial terhadap a dan b diperoleh

$$\frac{\partial g(a, b)}{\partial a} = 2a - 2E(Y) + 2b E(X) \quad (6.52)$$

$$\frac{\partial g(a, b)}{\partial b} = 2b E(X^2) + 2a E(X) - 2E(XY) \quad (6.53)$$

kemudian menyamakan kedua turunan parsial dengan nol akan diperoleh solusi

$$b = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{E(X^2) - [E(X)]^2} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)} = \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \quad (6.54)$$

$$a = E(Y) - b E(X) = \mu_Y - \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \mu_X. \quad (6.55)$$

Jika \hat{Y} adalah prediksi MSE minimum dari Y berdasarkan fungsi linear X , maka dapat kita tuliskan

$$\hat{Y} = \left[\mu_Y - \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \mu_X \right] + \left[\rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \right] X \quad (6.56)$$

atau

$$\left[\frac{\hat{Y} - \mu_Y}{\sigma_Y} \right] = \rho_{XY} \left[\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right] \quad (6.57)$$

atau bisa dituliskan sebagai bentuk

$$\hat{Y}^* = \rho_{XY} X^* \quad (6.58)$$

dengan \hat{Y}^* dan X^* adalah peubah yang distandarkan (*standardized variables*).

Sekarang kita rampatkan masalah dalam memprediksi Y dengan fungsi sebarang dari X . Kita perlu memilih fungsi $h(X)$ yang meminimalkan

$$E[Y - h(X)]^2 \quad (6.59)$$

atau dapat pula kita tulis sebagai

$$E[Y - h(X)]^2 = E[E(Y - h(X))^2 | X]. \quad (6.60)$$

Lebih lanjut dapat pula kita tulis sebagai

$$E[E(Y - h(X))^2 | X = x] = E[(Y - h(x))^2 | X = x]. \quad (6.61)$$

Untuk setiap nilai x , $h(x)$ adalah suatu konstanta. Kita dapat menggunakan sifat-sifat nilai harapan bersyarat. Dengan demikian, untuk setiap x , pilihan terbaik $h(x)$ adalah

$$h(x) = E(Y | X = x). \quad (6.62)$$

Dengan demikian, $h(X) = E(Y | X)$ adalah prediktor terbaik untuk Y dari semua fungsi X . Demikian pula apabila Y akan diprediksi oleh fungsi dari X_1, X_2, \dots, X_n maka prediktor MSE minimum diberikan oleh

$$E(Y | X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (6.63)$$

6.3.3 Peramalan model ARIMA

Pada bagian sebelumnya telah dijelaskan bagaimana menghitung prediktor MSE minimum. Berdasarkan data historis sampai waktu t , katakanlah $X_1, X_2, \dots, X_{t-1}, X_t$ kita akan meramalkan nilai $X_{t+\ell}$ yang akan terjadi ℓ unit waktu ke depan. Kita sebut waktu t sebagai awal ramalan (*forecast origin*) dan ℓ sebagai masa tenggang (*lead time*). Kita notasikan ramalan itu sendiri sebagai $\hat{X}_t(\ell)$. Secara umum kuadrat rata-rata galat (MSE) minimum untuk ramalan diberikan oleh persamaan berikut

$$\hat{X}_t(\ell) = E(X_{t+\ell} | X_1, X_2, \dots, X_t). \quad (6.64)$$

Pada sub-subbagian berikut kita akan membahas peramalan untuk beberapa model ARIMA.

Model AR(1)

Misalkan terdapat proses AR(1) dengan nilai tengah taknol memenuhi

$$X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t. \quad (6.65)$$

Misalkan kita akan meramalkan satu unit waktu ke depan. Mengganti t dengan $t + 1$ pada (6.65), akan diperoleh

$$X_{t+1} - \mu = \phi(X_t - \mu) + \varepsilon_{t+1}. \quad (6.66)$$

Diberikan $X_1, X_2, \dots, X_{t-1}, X_t$, akan diambil harapan bersyarat kedua sisi pada persamaan (6.66) akan diperoleh

$$\hat{X}_t(1) - \mu = \phi[E(X_t | X_1, X_2, \dots, X_t) - \mu] + E[\varepsilon_{t+1} | X_1, X_2, \dots, X_t]. \quad (6.67)$$

Berdasarkan sifat-sifat nilai harapan kita peroleh

$$E(X_t | X_1, X_2, \dots, X_t) = X_t. \quad (6.68)$$

Kemudian kita juga tahu bahwa ε_{t+1} saling bebas dengan $X_1, X_2, \dots, X_{t-1}, X_t$ sehingga kita peroleh

$$E(\varepsilon_{t+1}|X_1, X_2, \dots, X_t) = E(\varepsilon_{t+1}) = 0. \quad (6.69)$$

Sehingga persamaan (6.67) dapat ditulis sebagai

$$\hat{X}_t(1) = \mu + \phi(X_t - \mu). \quad (6.70)$$

Sekarang, apabila kita ganti t dengan $t + \ell$ pada (6.65) dan ambil harapan bersyarat pada kedua sisi akan dihasilkan

$$\hat{X}_t(\ell) = \mu + \phi[\hat{X}_t(\ell - 1) - \mu], \quad \text{untuk } \ell \geq 1 \quad (6.71)$$

karena $E(X_{t+\ell-1}|X_1, X_2, \dots, X_t) = \hat{X}_t(\ell - 1)$ dan untuk setiap $\ell \geq 1$, $\varepsilon_{t+\ell}$ saling bebas dengan $X_1, X_2, \dots, X_{t-1}, X_t$. Bentuk (6.71) disebut bentuk persamaan beda (*difference equation form*) dari peramalan. Apabila dilakukan iterasi mundur pada (6.71) kita akan memperoleh

$$\hat{X}_t(\ell) = \mu + \phi^\ell(X_t - \mu). \quad (6.72)$$

Coba Anda verifikasi persamaan (6.72)!

Contoh 6.3.1. Misalkan diperoleh estimasi $\phi = 0,575$ dan $\mu = 74,3293$. Kita akan peroleh

$$\hat{X}_t(1) = 74,3293 + (0,5705)(67 - 74,3293) = 70,14793. \quad (6.73)$$

Dengan cara serupa kita akan memperoleh $\hat{X}_t(2) = 71,94383$ dan $\hat{X}_t(10) = 74,30253$.

Galat peramalan satu langkah ke depan (*one-step-ahead forecast error*) $\varepsilon_t(1)$ diperoleh dari

$$\begin{aligned} \varepsilon_t(1) &= X_{t+1} - \hat{X}_t(1) \\ &= [\phi(X_t - \mu) + \mu + \varepsilon_{t+1}] - [\phi(X_t - \mu) + \mu] \\ &= \varepsilon_{t+1}. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Kemudian variansnya adalah $\text{var}(\varepsilon_t(1)) = \sigma_\varepsilon^2$.

MA(1)

Misalkan model MA(1) dengan nilai tengah taknol berbentuk

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}. \quad (6.75)$$

Seperti langkah pada subbagian sebelumnya, ganti t dengan $t + 1$ dan hitung harapan bersyarat pada kedua sisi sehingga diperoleh

$$\hat{X}_t(1) = \mu - \theta E(\varepsilon_t|X_1, X_2, \dots, X_t). \quad (6.76)$$

Untuk model yang dapat dibalik (*invertible*), ε_t adalah fungsi dari X_1, X_2, \dots, X_t akan diperoleh

$$E(\varepsilon_t|X_1, X_2, \dots, X_t) = \varepsilon_t. \quad (6.77)$$

Dengan demikian kita akan peroleh

$$\hat{X}_t(1) = \mu - \theta \varepsilon_t. \quad (6.78)$$

Glat peramalan satu langkah ke depan dapat dihitung sebagai berikut

$$\varepsilon_t(1) = X_{t+1} - \hat{X}_{t+1}(1) = (\mu + \varepsilon_{t+1} - \theta \varepsilon_t) - (\mu - \theta \varepsilon_t) = \varepsilon_{t+1}. \quad (6.79)$$

Untuk waktu tenggang yang lebih lama kita akan peroleh

$$\hat{X}_t(\ell) = \mu + E(\varepsilon_{t+\ell} | X_1, X_2, \dots, X_t) - \theta E(\varepsilon_{t+\ell-1} | X_1, X_2, \dots, X_t). \quad (6.80)$$

Namun, untuk $\ell > 1$, $\varepsilon_{t+\ell}$ dan $\varepsilon_{t+\ell-1}$ saling bebas dengan X_1, X_2, \dots, X_t . Sehingga harapan bersyarat keduanya adalah nol. Jadi

$$\hat{X}_t(\ell) = \mu \quad \text{untuk semua } \ell > 1. \quad (6.81)$$

ARMA(p, q)

Persamaan beda (*difference equation*) pada model stasioner ARMA(p, q) diberikan oleh

$$\begin{aligned} \hat{X}_t(\ell) = & \phi_1 \hat{X}_t(\ell-1) + \phi_2 \hat{X}_t(\ell-2) + \dots + \phi_p \hat{X}_t(\ell-p) + \theta_0 \\ & - \theta_1 E(\varepsilon_{t+\ell-1} | X_1, X_2, \dots, X_t) - \theta_2 E(\varepsilon_{t+\ell-2} | X_1, X_2, \dots, X_t) \\ & - \dots - \theta_q E(\varepsilon_{t+\ell-q} | X_1, X_2, \dots, X_t) \end{aligned} \quad (6.82)$$

dengan

$$E(\varepsilon_{t+j} | X_1, X_2, \dots, X_t) = \begin{cases} 0, & \text{jika } j > 0; \\ \varepsilon_{t+j}, & \text{jika } j \leq 0. \end{cases} \quad (6.83)$$

Contoh 6.3.2. Misalkan untuk model ARMA(1,1) kita akan peroleh

$$\hat{X}_t(1) = \phi X_t + \theta_0 - \theta \varepsilon_t \quad (6.84)$$

dan

$$\hat{X}_t(2) = \phi \hat{X}_t(1) + \theta_0. \quad (6.85)$$

Secara umum, kita akan peroleh

$$\hat{X}_t(\ell) = \phi \hat{X}_t(\ell-1) + \theta_0, \quad \text{untuk } \ell > 2. \quad (6.86)$$

Dengan melakukan iterasi bentuk ini dapat ditulis sebagai

$$\hat{X}_t(\ell) = \mu + \phi^\ell (X_t - \mu) - \phi^{\ell-1} \theta \varepsilon_t, \quad \text{untuk } \ell \geq 1. \quad (6.87)$$

ARIMA(p, d, q)

Peramalan model nonstationer ARIMA serupa dengan peramalan model ARMA. Sebagai contoh model ARIMA($p, 1, q$) yang dapat dituliskan sebagai model nonstationer ARMA($p+1, q$). Model ARIMA ini dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} X_t = & \xi_1 X_{t-1} + \xi_p X_{t-p} + \xi_{p+1} X_{t-p-1} \\ & \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \end{aligned} \quad (6.88)$$

dengan $\xi_1 = 1 + \phi_1$, $\xi_j = \phi_j - \phi_{j-1}$, untuk $j = 1, 2, \dots, p$ dan $\xi_{p+1} = -\phi_p$.

Contoh 6.3.3. Model ARIMA(1,1,1) dengan bentuk

$$X_t = (1 + \phi)X_{t-1} - \phi X_{t-2} + \theta_0 + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}. \quad (6.89)$$

Kita akan peroleh

$$\begin{aligned} \hat{X}_t(1) &= (1 + \phi)X_t - \phi X_{t-1} + \theta_0 - \theta \varepsilon_t \\ \hat{X}_t(2) &= (1 + \phi)\hat{X}_t(1) - \phi X_t + \theta_0 \end{aligned}$$

dan secara umum

$$\hat{X}_t(\ell) = (1 + \phi)\hat{X}_t(\ell - 1) - \phi \hat{X}_t(\ell - 2) + \theta_0. \quad (6.90)$$

6.3.4 Implementasi pada R

Kita tidak akan membahas teori melakukan peramalan, namun hanya akan menggunakan Peramalan model ARIMA dapat dilakukan dengan fungsi `predict` pada R. Misalkan kita akan meramalakan data Lake untuk enam tahun ke depan.

```
> predict(LakeHuron.ar2,6)
$pred
Time Series:
Start = 1973
End = 1978
Frequency = 1
[1] 579.8426 579.8067 579.8267 579.8382 579.8357 579.8327
$se
Time Series:
Start = 1973
End = 1978
Frequency = 1
[1] 0.7202803 1.1101254 1.3152876 1.4687093 1.6166856 1.7582081
>
```

Diperoleh hasil ramalan untuk enam tahun ke depan sebagai berikut: 579,8426; 579,8067; 579,8267; 579,8382; 579,8357; 579,8327.

BAB 7

Model ARIMA Musiman

Pada bagian sebelumnya kita telah mempelajari model ARIMA untuk data yang tidak mengandung musiman. Pada beberapa kasus pengaruh musiman terlihat jelas pada data, misalnya data tingkat CO₂ (lihat co2 pada R).

7.1 Model SARIMA

Seperti halnya pembahasan pada model ARIMA, kita akan memulai dengan proses stasioner kemudian dilanjutkan dengan proses nonstasioner. Misalkan s menyatakan periode musiman yang diketahui. Sebagai contoh $s = 12$ untuk deret bulanan dan $s = 4$ untuk deret kuartalan.

7.1.1 Model MA Musiman

Misalkan suatu deret waktu dibangkitkan berdasarkan proses

$$X_t = \varepsilon_t - \Theta \varepsilon_{t-12}. \quad (7.1)$$

Ingat bahwa

$$\text{cov}(X_t, X_{t-1}) = \text{cov}(\varepsilon_t - \Theta \varepsilon_{t-12}, \varepsilon_{t-1} - \Theta \varepsilon_{t-13}) = 0, \quad (7.2)$$

tetapi

$$\text{cov}(X_t, X_{t-12}) = \text{cov}(\varepsilon_t - \Theta \varepsilon_{t-12}, \varepsilon_{t-12} - \Theta \varepsilon_{t-24}) = -\Theta \sigma_\varepsilon^2. \quad (7.3)$$

Apa yang bisa kita amati? Deret itu stasioner dan memiliki autokorelasi tak nol hanya pada beda kala (*lag*) 12. Apabila kita generalisasi apa yang telah diperoleh tadi, dapat didefinisikan model musiman tingkat Q dengan periode s , dinotasikan MA(Q), sebagai

$$X_t = \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-s} - \Theta_2 \varepsilon_{t-2s} - \cdots - \Theta_Q \varepsilon_{t-Qs} \quad (7.4)$$

dengan polinom karakteristik MA yang didefinisikan oleh

$$\Theta(x) = 1 - \Theta_1 x^s - \Theta_2 x^{2s} - \cdots - \Theta_Q x^{Qs}. \quad (7.5)$$

Fungsi autokorelasi MA(Q) hanya bernilai tak nol pada beda kala $s, 2s, 3s, \dots, Qs$. Lebih lanjut dapat ditunjukkan bahwa

$$\rho(hs) = \frac{-\Theta_h + \Theta_1 \Theta_{h+1} + \Theta_2 \Theta_{h+2} + \cdots + \Theta_{Q-h} \Theta_Q}{1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \cdots + \Theta_Q^2} \quad (7.6)$$

untuk $k = 1, 2, \dots, Q$. Catatan, model musiman MA dapat dianggap sebagai model nonmusiman MA dengan tingkat $q = Qs$ tetapi dengan semua nilai θ nol kecuali beda kala musiman $s, 2s, 3s, \dots, Qs$.

7.1.2 Model AR Musiman

Model autoregresif musiman juga dapat didefinisikan seperti halnya model MA. Misalkan model

$$X_t = \Phi X_{t-12} + \varepsilon_t \quad (7.7)$$

dengan $|\Phi| < 1$ dan ε_t saling bebas dengan X_{t-1}, X_{t-2}, \dots . Dapat ditunjukkan bahwa $|\Phi| < 1$ menjamin kestasioneran. Mengalikan kedua sisi persamaan (7.7) dengan X_{t-h} dan menghitung nilai harapannya kemudian membagi dengan $\gamma(0)$, akan diperoleh

$$\rho(h) = \Phi \rho(h-12), \quad \text{untuk } h \geq 1. \quad (7.8)$$

Jelas bahwa

$$\rho(12) = \Phi \rho(0) = \Phi \quad (7.9)$$

$$\rho(24) = \Phi \rho(12) = \Phi^2. \quad (7.10)$$

Secara umum

$$\rho(12h) = \Phi^h \quad \text{untuk } h = 1, 2, \dots \quad (7.11)$$

Perhatikan bahwa jika kita ambil $h = 1$ dan $h = 11$ pada persamaan (7.8) dan menggunakan sifat $\rho(h) = \rho(-h)$, akan diperoleh

$$\rho(1) = \Phi \rho(11), \quad (7.12)$$

dan

$$\rho(11) = \Phi \rho(1) \quad (7.13)$$

yang berarti $\rho(1) = \rho(11) = 0$. Dengan cara serupa kita dapat menunjukkan bahwa $\rho(h) = 0$ kecuali pada beda kala musiman 12, 24, 36, Menggunakan contoh AR(1) musiman ini, kita sekarang dapat mendefinisikan model AR musiman tingkat P dengan periode musiman s sebagai

$$X_t = \Phi_1 X_{t-1s} + \Phi_2 X_{t-2s} + \dots + \Phi_P X_{t-Ps} + \varepsilon_t \quad (7.14)$$

dengan polinom karakteristik musiman

$$\Phi(x) = 1 - \Phi_1 x^s - \Phi_2 x^{2s} - \dots - \Phi_P x^{Ps}. \quad (7.15)$$

Ingat bahwa, kita selalu mensyaratkan ε_t dan X_{t-1}, X_{t-2}, \dots saling bebas. Kemudian model AR musiman ini dapat dianggap sebagai model AR(p) dengan tingkat $p = Ps$. Koefisien ϕ bernilai tak nol hanya pada beda kala $s, 2s, 3s, \dots, Ps$.

7.2 Model ARMA Musiman Multiplikatif

Misalkan terdapat model dengan polinom karakteristik MA berbentuk

$$(1 - \theta x)(1 - \Theta x^{12}) \quad (7.16)$$

yang kalau kita kalikan akan menghasilkan

$$1 - \theta x - \Theta x^{12} + \theta \Theta x^{13}. \quad (7.17)$$

Model yang bersesuaian dengan polinom karakteristik ini adalah

$$X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} - \Theta \varepsilon_{t-12} + \theta \Theta \varepsilon_{t-13} \quad (7.18)$$

Untuk model (7.18) kita bisa mengecek bahwa fungsi autokorelasi bernilai tak nol hanya pada beda kala 1, 11, 12, dan 13. Kita peroleh

$$\gamma(0) = (1 + \theta^2)(1 + \Theta^2)\sigma_\varepsilon^2, \quad (7.19)$$

$$\rho(0) = -\frac{\theta}{1 + \theta^2}, \quad (7.20)$$

$$\rho(11) = \rho(13) = \frac{\theta \Theta}{(1 + \theta^2)(1 + \Theta^2)}, \quad (7.21)$$

$$\rho(12) = -\frac{\Theta}{1 + \Theta^2}. \quad (7.22)$$

Model ARIMA musiman multiplikatif $\text{ARMA}(p, q) \times (P, Q)_s$ dengan periode musiman s adalah model dengan polinom karakteristik AR $\phi(x)\Phi(x)$ dan polinom karakteristik MA $\theta(x)\Theta(x)$ dengan

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p, \quad (7.23)$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi_1 x^s - \Phi_2 x^{2s} - \dots - \Phi_P x^{Ps}, \quad (7.24)$$

$$\theta(x) = 1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \dots - \theta_q x^q, \quad (7.25)$$

dan

$$\Theta(x) = 1 - \Theta_1 x^s - \Theta_2 x^{2s} - \dots - \Theta_Q x^{Qs}. \quad (7.26)$$

Sebagai contoh model dengan $P = q = 1$ dan $p = Q = 0$ dengan $s = 12$ yaitu

$$X_t = \Phi X_{t-12} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}. \quad (7.27)$$

Menggunakan teknik-teknik yang telah kita pelajari, kita akan memperoleh

$$\gamma(1) = \Phi \gamma(11) - \theta \sigma_\varepsilon^2, \quad (7.28)$$

$$\gamma(k) = \Phi \gamma(h - 12), \quad \text{untuk } h \geq 12. \quad (7.29)$$

Setelah pemilihan beberapa nilai h , kita peroleh

$$\gamma(0) = \left(\frac{1 + \theta^2}{1 - \Phi^2} \right) \sigma_\varepsilon^2, \quad (7.30)$$

$$\rho(12h) = \Phi^h, \quad \text{untuk } h \geq 1, \quad (7.31)$$

$$\rho(12h - 1) = \rho(12h + 1) = \left(-\frac{\theta \Phi^h}{1 + \theta^2} \right), \quad \text{untuk } h = 0, 1, 2, \dots \quad (7.32)$$

7.3 Model ARIMA Musiman Nonstasioner

Suatu alat penting dalam memodelkan proses musiman nonstasioner adalah perbedaan musiman (*seasonal difference*). Perbedaan musiman periode s untuk deret waktu $\{X_t\}$ dinotasikan $\nabla_s X_t$ yang didefinisikan oleh

$$\nabla_s X_t = X_t - X_{t-s}. \quad (7.33)$$

Sebagai contoh untuk deret musiman kita mempertimbangkan perubahan dari Januari ke Januari, Februari ke Februari, dan seterusnya. Untuk deret dengan panjang n , perbedaan musiman akan memiliki panjang $n-s$; dalam hal ini, s adalah nilai data yang hilang karena perbedaan musiman. Sebagai contoh, andaikan perbedaan musiman cocok, misalkan proses yang dibangkitkan menurut proses

$$X_t = S_t + e_t, \quad (7.34)$$

$$S_t = S_{t-s} + \varepsilon_t, \quad (7.35)$$

dengan $\{e_t\}$ dan $\{\varepsilon_t\}$ adalah derau putih (*white noise*) yang saling bebas. Mengingat $\{S_t\}$ nonstasioner, $\{Y_t\}$ juga nonstasioner. Namun, jika kita lakukan

$$\nabla_s X_t = S_t - S_{t-s} + e_t - e_{t-s} \quad (7.36)$$

$$= \varepsilon_t + e_t - e_{t-s}. \quad (7.37)$$

Jelas bahwa $\nabla_s X_t$ stasioner dan memiliki fungsi autokorelasi seperti model MA(1)_s.

Suatu proses $\{X_t\}$ dikatakan model ARIMA musiman multiplikatif dengan tingkat reguler nonmusiman p , d , dan q ; tingkat musiman P , D , dan Q dan periode musiman s jika deret beda

$$W_t = \nabla^d \nabla_s^D X_t \quad (7.38)$$

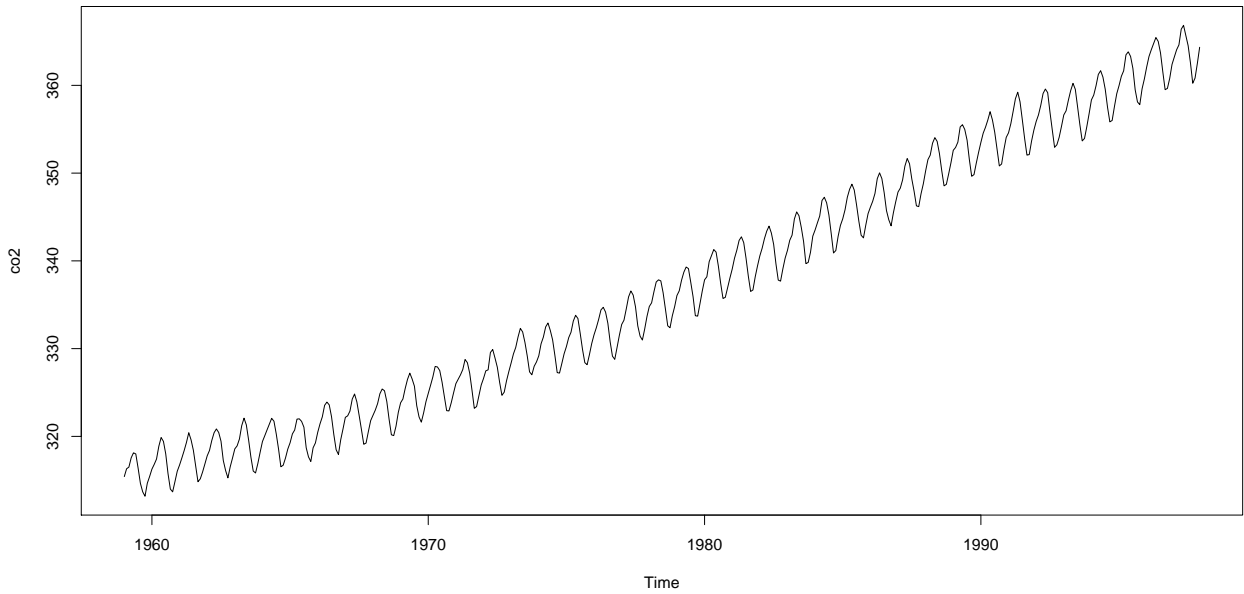
yang memenuhi model ARMA(p, q) \times (P, Q)_s dengan periode musiman s . Kita katakan bahwa $\{X_t\}$ adalah model ARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s dengan periode musiman s .

7.4 Contoh Kasus

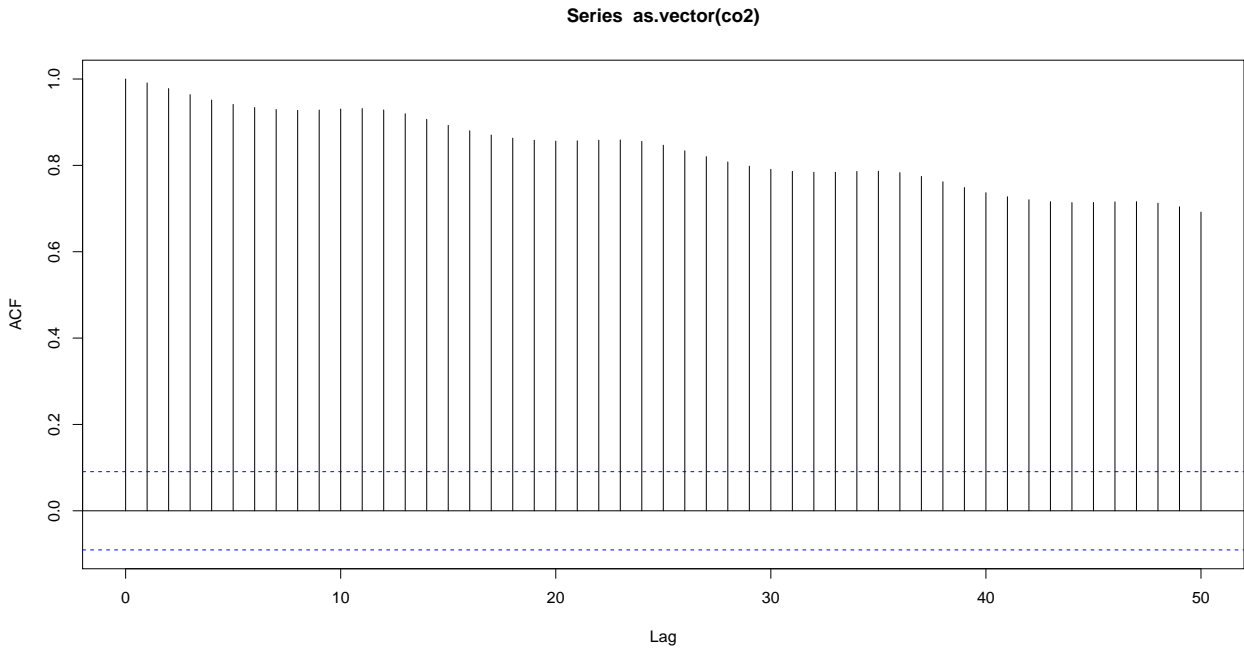
Lihat kembali data co2 (lihat juga Gambar 7.1). Data memperlihatkan tren naik dan pola musiman. Fungsi autokorelasi sampel untuk data co2 dapat dilihat pada Gambar 7.2. Plot ACF memperlihatkan pengaruh musiman yang kuat, terutama pada beda kala 12, 24, 36, dan seterusnya. Selanjutnya, kita lakukan *differencing* terhadap tren (lihat Gambar 7.3). Tampak bahwa terdapat pengaruh musiman yang kuat pada data yang telah di-*differencing*. Oleh karena itu, kita akan melakukan differencing terhadap tren. Plot fungsi autokorelasi untuk data *differencing* terhadap tren dapat dilihat pada Gambar 7.4. Kemudian, kita *differencing* terhadap musiman (lihat Gambar 7.5) dan plot ACF dapat dilihat pada Gambar 7.6. Berdasarkan plot ini kita menganggap model dengan beda kala 1 dan 12 mungkin cocok. Model yang kita cobakan berbentuk ARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)₁₂ yaitu

$$\nabla_{12} \nabla X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} - \Theta \varepsilon_{t-12} + \theta \Theta \varepsilon_{t-13}. \quad (7.39)$$

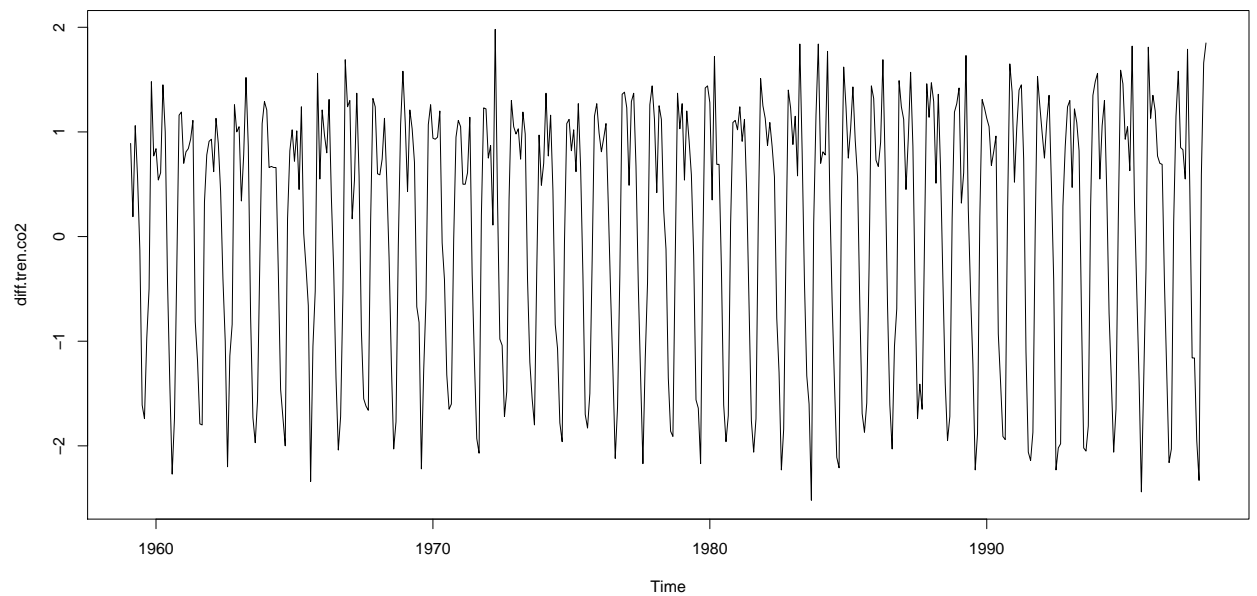
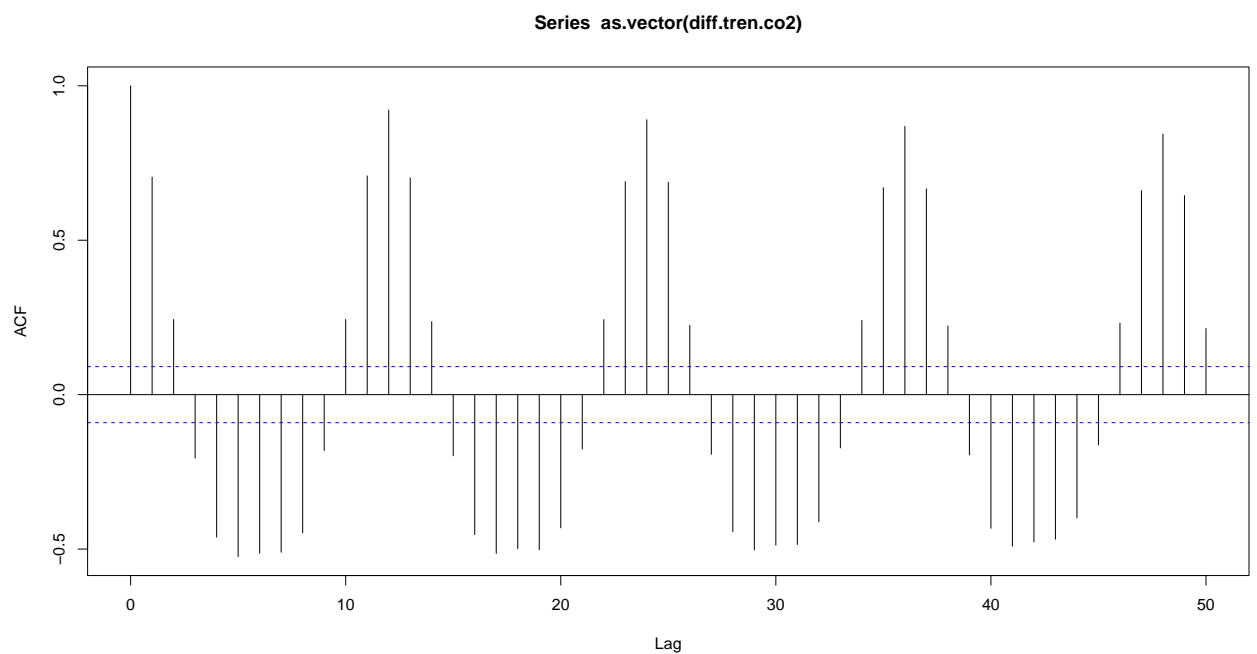
Selanjutnya diperoleh luaran sebagai berikut:

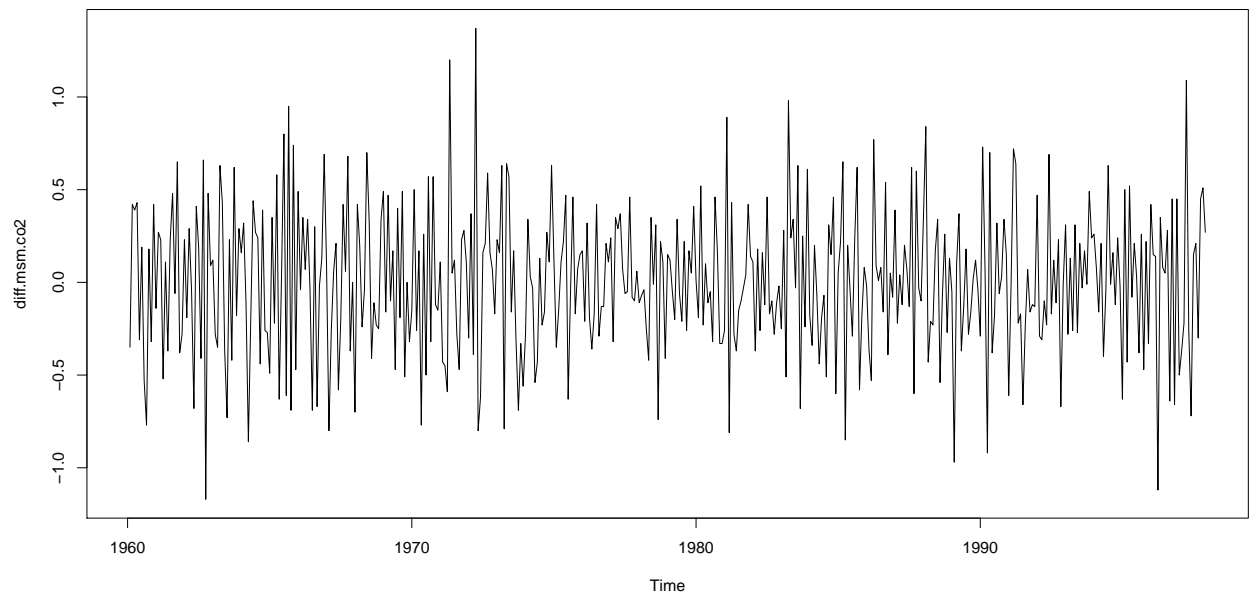


Gambar 7.1: Data konsentrasi co2 (dalam ppm).

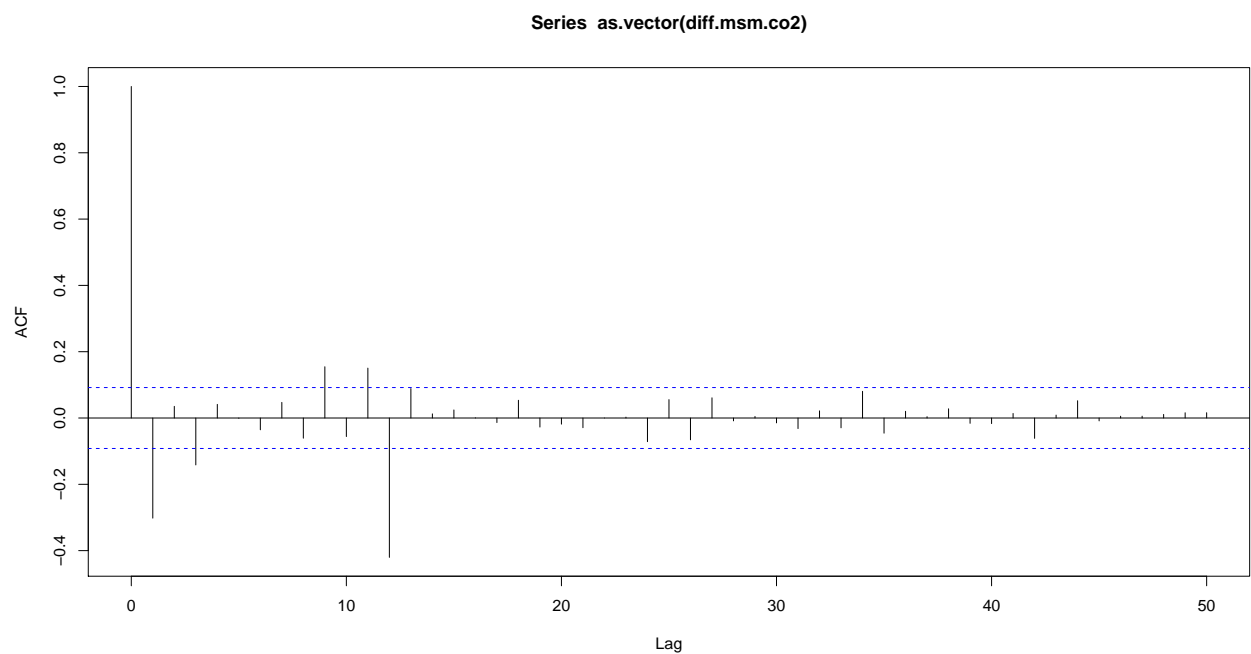


Gambar 7.2: Plot ACF data co2.

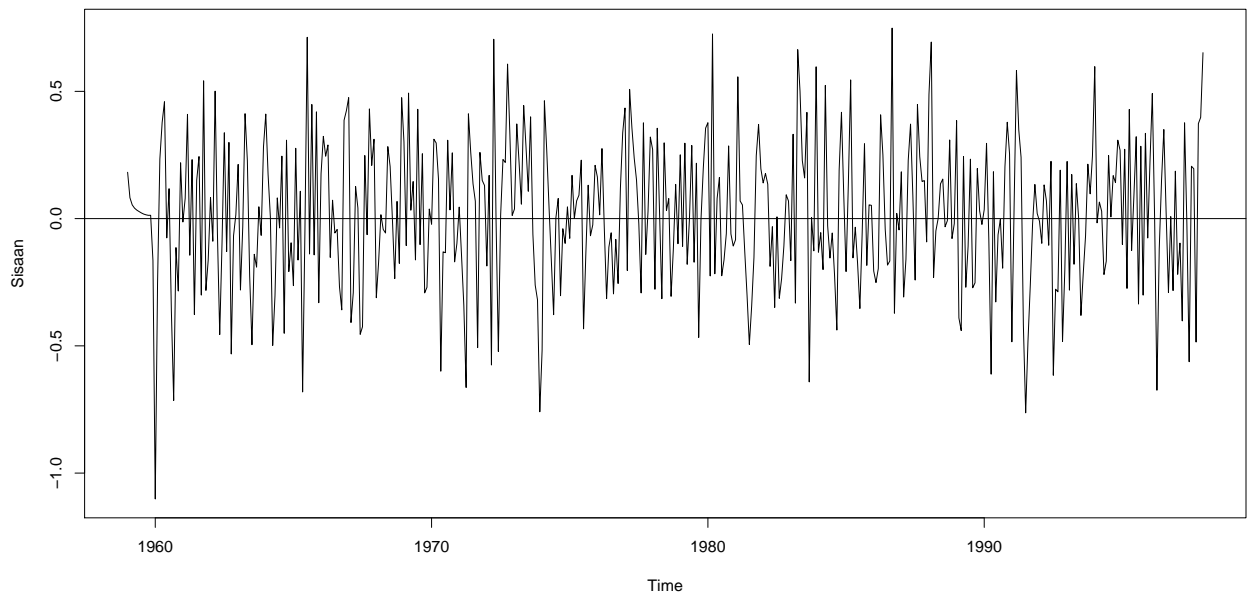
Gambar 7.3: Plot *differencing* terhadap tren data co2.Gambar 7.4: Plot ACF *differencing* terhadap tren data co2.



Gambar 7.5: Plot *differencing* terhadap musiman untuk data co2.



Gambar 7.6: Plot ACF *differencing* terhadap musiman untuk data co2.



Gambar 7.7: Plot sisaan model SARIMA untuk data co2.

```
> sarima.co2
```

Call:

```
arima(x = co2, order = c(0, 1, 1), seasonal = list(order = c(0, 1, 1), period = 12))
```

Coefficients:

```
ma1      sma1
-0.3501  -0.8506
s.e.    0.0496   0.0257
```

σ^2 estimated as 0.0826: log likelihood = -86.08, aic = 178.16

Dengan demikian kita peroleh $\hat{\theta} = -0,3501$ dan $\hat{\theta} = -0,8506$.

7.4.1 Pemeriksaan Diagnostik

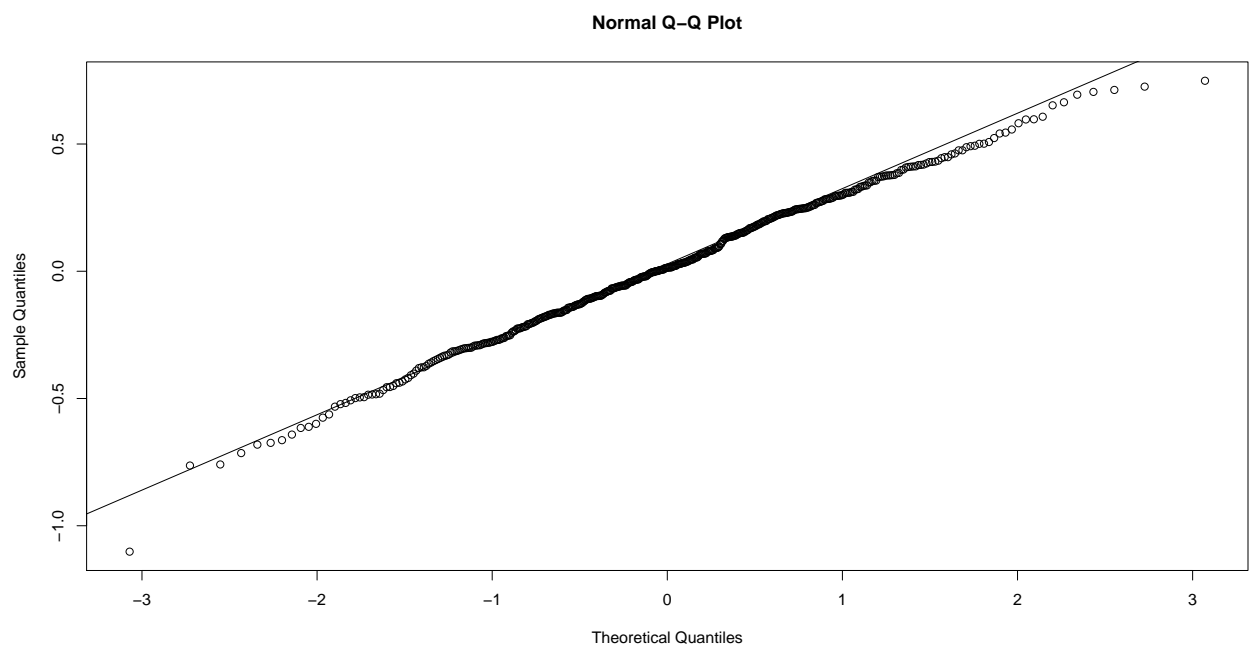
Seperti halnya pada model ARIMA, diagnostik serupa dapat dilakukan. Plot sisaan dapat dilihat pada Gambar 7.7 dan plot Q-Q dapat dilihat pada Gambar 7.8.

Uji kenormalan dengan uji Shapiro menghasilkan p-value 0,3078. Artinya tidak cukup bukti untuk mengatakan sisaan tidak normal.

```
> shapiro.test(residuals(sarima.co2))
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data: residuals(sarima.co2)
W = 0.99611, p-value = 0.3078
```



Gambar 7.8: Plot Q-Q untuk data co2.

BAB 8

Model Deret Waktu Heteroskedastik

Model deret waktu yang telah kita bicarakan selama ini adalah model deret waktu yang berhubungan dengan nilai tengah bersyarat (*conditional mean*) dari struktur deret waktu. Dengan kata lain, model ARIMA yang telah kita pelajari pada bab-bab sebelumnya berhubungan dengan prediksi nilai tengah bersyarat nilai masa depan berdasarkan data sekarang dan masa lalu. Varians bersyarat (*conditional variance*) pada model ARIMA selalu sama dengan varians galat (*noise*) untuk nilai proses sekarang dan masa lalu. Namun, dalam praktiknya varians bersyarat pada mungkin berubah atau bervariasi dengan nilai sekarang dan masa lalu proses. Hal ini berarti varians bersyarat ini adalah proses acak yang disebut proses varians bersyarat (*conditional variance process*). Sebagai contoh *return* harian harga saham sering kali memiliki varians bersyarat yang lebih tinggi pada pergerakan tertentu jika dibandingkan pada periode yang stabil.

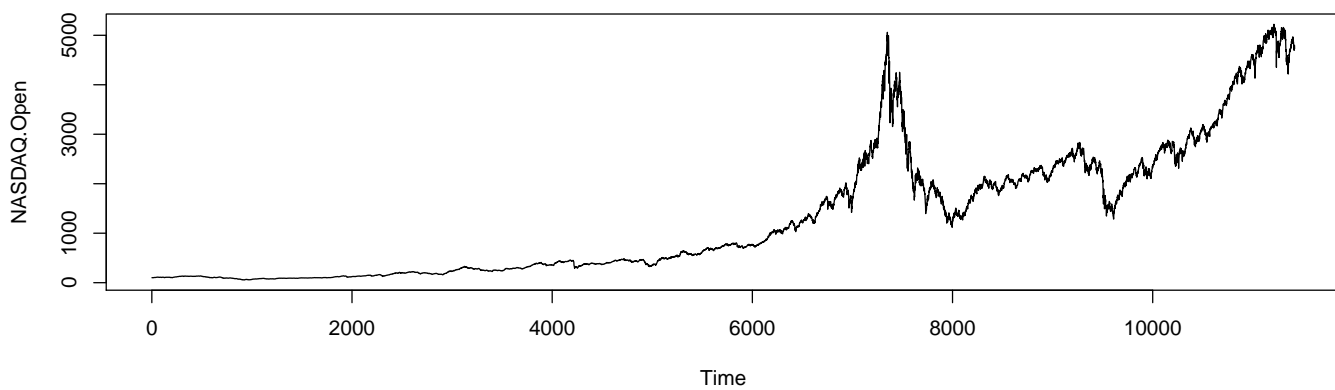
Varians bersyarat *return* pada aset finansial biasanya diambil sebagai ukuran risiko aset. Pada pasar yang efisien, nilai harapan *return* seharusnya nol, sehingga deret *return* seharusnya derau putih *derau putih*.

8.1 Beberapa Ciri Deret Waktu Finansial

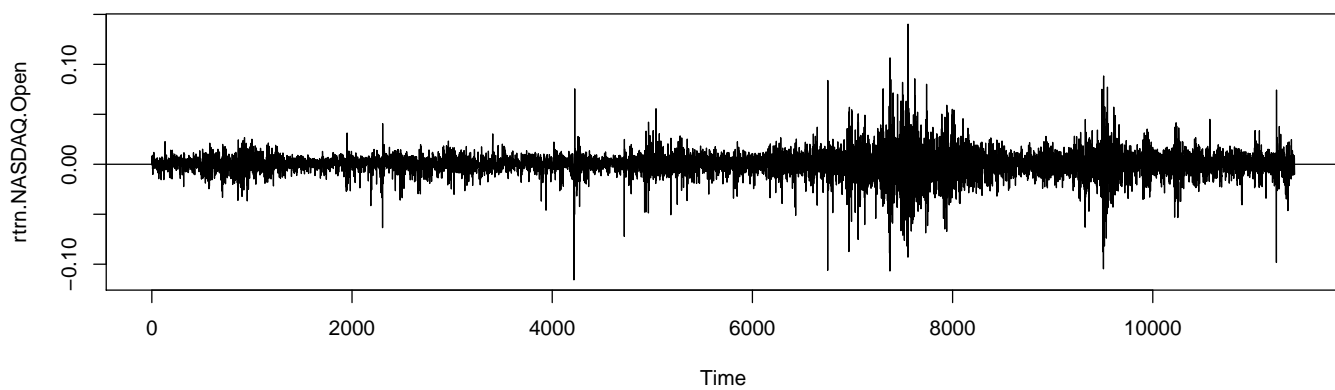
Saham biasanya tidak diperdagangkan pada akhir pekan atau hari libur. Dengan kata lain hanya diperdagangkan pada *trading days*, sehingga biasanya saham tidak berubah pada akhir pekan atau hari libur. Untuk mempermudah kita akan menganalisis data dengan menganggap data tersebut memiliki jarak yang sama. Berikut ini adalah plot data harga pembukaan saham NASDAQ periode 5 Februari 1971–15 Mei 2016 (lihat Gambar 8.1). Plot ini memperlihatkan tren global naik. Misalkan $\{p_t\}$ adalah deret waktu dari harga harian aset finansial. *Return* (dalam hal ini log return) pada hari ke- t sebagai

$$r_t = \log(p_t) - \log(p_{t-1}). \quad (8.1)$$

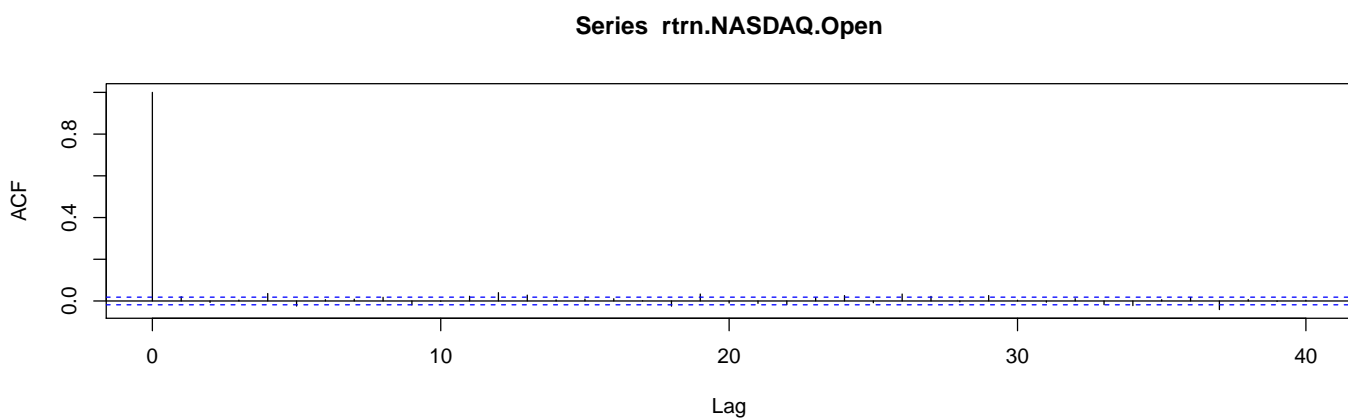
Kadang-kadang *return* dikalikan 100 agar bisa diinterpretasikan sebagai persentase perubahan dalam harga. Selain itu, hal ini juga akan mengurangi kesalahan numerik dari raw return yang bisa menjadi bilangan yang sangat kecil dan juga pembulatan pada beberapa perhitungan. Fungsi autokorelasi sampel dan fungsi autokorelasi parsial untuk return NASDAQ dapat dilihat pada Gambar 8.3 dan Gambar 8.4. Fungsi autokorelasi sampel untuk return mutlak dan return kuadrat NASDAQ dapat dilihat pada Gambar 8.5 dan Gambar 8.6. Apa tujuan kita melakukan hal ini? Pada deret waktu yang telah kita pelajari kita harus bisa membedakan deret waktu yang tidak berkorelasi dan deret waktu yang saling



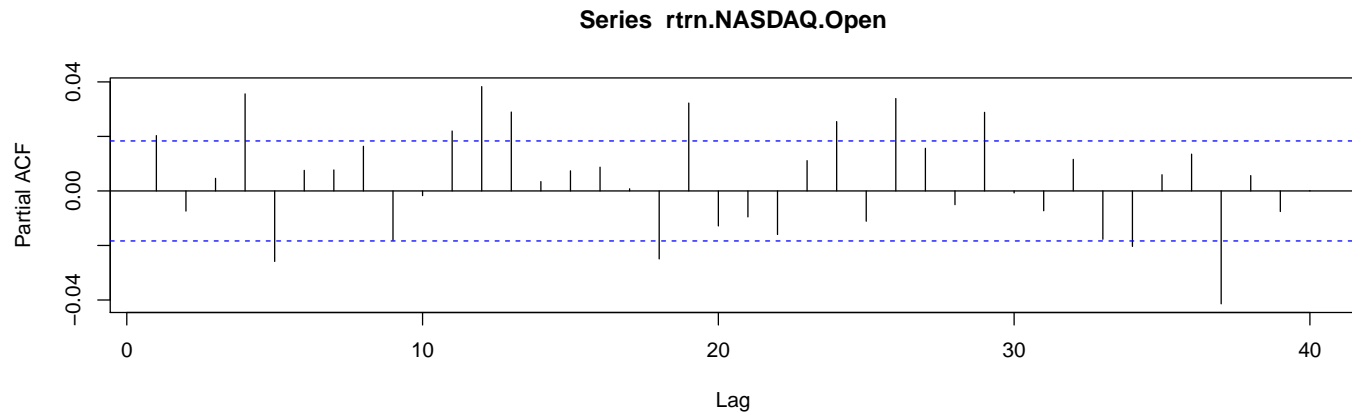
Gambar 8.1: Harga pembukaan saham NASDAQ periode 5 Februari 1971–15 Mei 2016.



Gambar 8.2: Return NASDAQ.

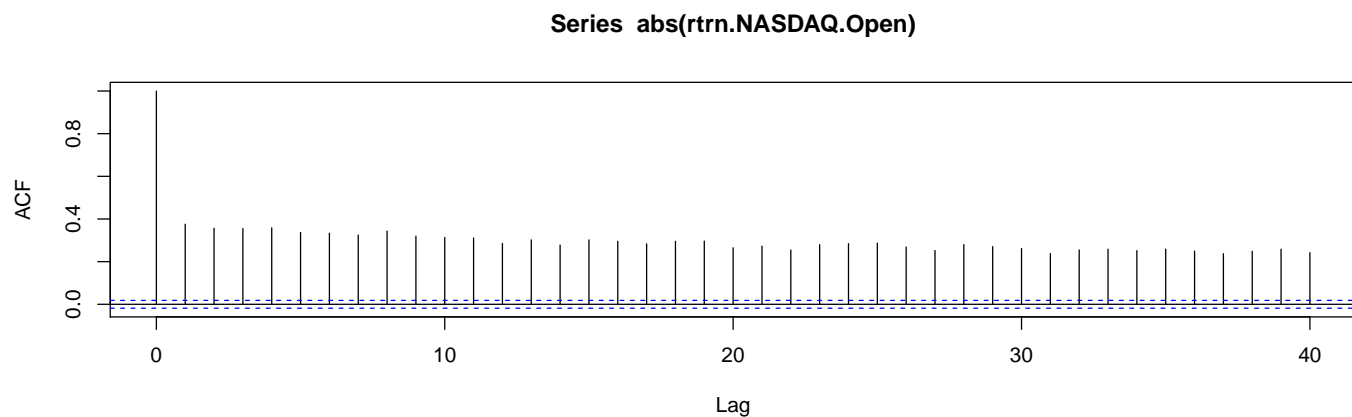


Gambar 8.3: ACF return NASDAQ.



Gambar 8.4: PACF return NASDAQ.

bebas. Jika deret waktu betul-betul saling bebas, transformasi nonlinear seperti logaritma, nilai absolute, atau mengkuadratkan tidak mengubah sifat saling bebas. Namun, hal ini tidaklah benar untuk korelasi karena korelasi hanya mengukur kebergantungan linear. Struktur kebergantungan serial tingkat-tinggi pada data dapat dieksplorasi dengan mempelajari struktur autokorelasi pada return mutlak atau return kuadrat. Artinya, jika ACF dan PACF sampel dari return mutlak dan return kuadrat. Lihat kembali data NASDAQ. Apa yang dapat Anda simpulkan? Uji formal untuk melihat ada atau tidak autokorelasi pada data return kuadrat berautokorelasi atau tidak adalah uji Box-Ljung dan McLeod Li.

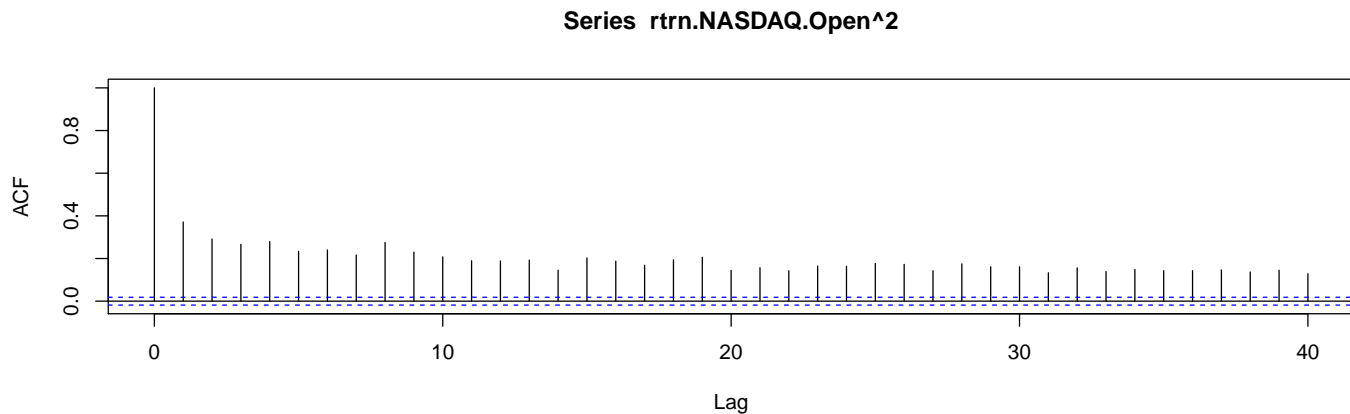


Gambar 8.5: ACF return mutlak NASDAQ.

8.1.1 *Stylized Fact*

Ciri khas lain data finansial, terutama saham, disebut *stylized fact* yang memuat informasi tentang kurtosis dan kepencongan (*skewness*). Kepencongan suatu peubah acak X didefinisikan oleh

$$E(X - \mu)^3 / \sigma^3 \quad (8.2)$$



Gambar 8.6: ACF return kuadrat NASDAQ.

dengan μ adalah nilai tengah X dan σ adalah simpangan baku dari Y . Kepencongan dapat diestimasi menggunakan

$$g_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})}{n\hat{\sigma}^3} \quad (8.3)$$

dengan $\hat{\sigma}^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2 / n$. Kemudian, kurtosis didefinisikan sebagai

$$E(X - \mu)^4 / \sigma^4 - 3 \quad (8.4)$$

yang dapat diestimasi menggunakan

$$g_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4}{n\hat{\sigma}^4} - 3. \quad (8.5)$$

Nilai pada (8.5) disebut kurtosis berlebih (*excess kurtosis*). Jika kurtosis positif, sebaran data disebut *heavy-tailed*; jika kurtosis negatif, sebaran data disebut *light-tailed*. Berikut ini luaran untuk data return saham NASDAQ:

```
> library(fBasics)
> basicStats(rtrn.NASDAQ.Open)
rtrn.NASDAQ.Open
nobs          11417.000000
NAs            0.000000
Minimum       -0.115694
Maximum        0.140231
1. Quartile   -0.004662
3. Quartile    0.006062
Mean           0.000338
Median         0.001054
Sum            3.856736
SE Mean        0.000118
LCL Mean       0.000106
UCL Mean       0.000570
Variance       0.000160
```

Stdev	0.012638
Skewness	-0.450038
Kurtosis	10.715766

Terlihat bahwa data return saham mengalami kurtosis berlebih $7,715766 > 0$ yang termasuk kategori distribusi ekor gemuk (*heavy-tailed*).

8.2 Model ARCH

Pada bagian sebelumnya telah dijelaskan bahwa data *return* $\{r_t\}$ biasanya memperlihatkan *volatility clustering*. Artinya, varians bersyarat r_t diberikan nilai return sebelumnya tidaklah konstan. Varians bersyarat disebut pula volatilitas bersyarat (*conditional volatility*) dari return r_t disimbolkan $\sigma_{t|t-1}^2$. Tika bawah $t - 1$ menyatakan bahwa kondisi bersyarat yang dimaksud sampai dengan waktu $t - 1$. Apabila r_t ada, nilai r_t^2 merupakan penduga takbias dari $\sigma_{t|t-1}^2$. Pada bagian ini kita akan membicarakan model ARCH(1) yang mengasumsikan deret return $\{r_t\}$ dibangkitkan dari proses berikut:

$$r_t = \sigma_{t|t-1} \varepsilon_t, \quad (8.6)$$

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 \quad (8.7)$$

dengan α dan ω adalah parameter yang tidak diketahui, $\{\varepsilon_t\}$ adalah barisan berdistribusi saling bebas dan idek dengan nilai tengah nol dan varians satu (disebut juga inovasi) dan ε_t saling bebas dengan r_{t-j} , untuk $j = 1, 2, \dots$. Inovasi ε_t diasumsikan memiliki varians satu sehing varians bersyarat r_t sama dengan $\sigma_{t|t-1}^2$. Perhatikan bahwa

$$E(r_t^2 | r_{t-j}, j = 1, 2, \dots) = E(\sigma_{t|t-1}^2 \varepsilon_t^2 | r_{t-j}, j = 1, 2, \dots) \quad (8.8)$$

$$= \sigma_{t|t-1}^2 E(\varepsilon_t^2 | r_{t-j}, j = 1, 2, \dots) \quad (8.9)$$

$$= \sigma_{t|t-1}^2 E(\varepsilon_t^2) \quad (8.10)$$

$$= \sigma_{t|t-1}^2. \quad (8.11)$$

Pada (8.9) $\sigma_{t|t-1}$ diketahui karena telah diberikan data masa lalu atau sebelumnya. Kemudian pada (8.10) kita tahu bahwa ε_t saling bebas dengan *return* sebelumnya dan pada (8.11) diasumsikan bahwa varians ε_t sama dengan satu.

Lihat kembali model (8.7), meskipun model ARCH seperti model regresi, namun faktanya adalah varians bersyarat tersebut tidak bisa diamati secara langsung (sehingga berupa variabel laten). Hal ini tentu membuat penggunaan model ARCH dalam analisis data menjadi sulit. Misalnya, tidaklah jelas bagaimana mengeksplorasi struktur regresi secara grafis. Oleh karena itu, kita perlu mengganti varians bersyarat dengan dengan sesuatu yang bisa diamati. Misalkan

$$\eta_t = r_t^2 - \sigma_{t|t-1}^2. \quad (8.12)$$

Dapat ditunjukkan bahwa deret $\{\eta_t\}$ adalah deret yang tidak berkorelasi dengan nilai tengah nol. Lebih lanjut, η_t tidak berkorelasi dengan return masa lalu. Substitusikan $\sigma_{t|t-1}^2 = r_t^2 - \eta_t$ ke dalam Persamaan (8.7) menghasilkan

$$r_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \eta_t. \quad (8.13)$$

Dengan demikian, kita melihat bahwa kuadrat *return* memenuhi model AR(1) di bawah asumsi model ARCH(1) untuk deret *return*. Mengingat kuadrat *return* haruslah taknegatif, maka cukup beralasan kalau kita membatasi parameter ω dan σ taknegatif. Demikian pula, apabila deret *return* stasioner dengan varians σ^2 maka dengan mengambil ekspektasi pada kedua sisi pada (8.13) kita akan peroleh

$$\sigma^2 = \omega + \alpha\sigma^2. \quad (8.14)$$

Dengan demikian $\sigma^2 = \omega/(1 - \alpha)$ sehingga $0 \leq \alpha < 1$. Kondisi $0 \leq \alpha < 1$ merupakan syarat perlu dan cukup untuk stasioner lemah untuk model ARCH(1). Salah satu sifat penting model ARCH(1) adalah bahwa jika inovasi η_t berdistribusi normal, distribusi stasioner model ARCH(1) dengan $0 < \alpha < 1$ memiliki ekor gemuk (*fat tails*) dengan kata lain terjadi kurtosis berlebih. Lihat kembali Persamaan (8.6). Apabila kita pangkatkan empat dan ambil ekspektasi, akan diperoleh

$$E(r_t^4) = E[E(\sigma_{t|t-1}^4 \varepsilon_t^4 | r_{t-j}, j = 1, 2, \dots)] \quad (8.15)$$

$$= E[\sigma_{t|t-1}^4 E(\varepsilon_t^4 | r_{t-j}, j = 1, 2, \dots)] \quad (8.16)$$

$$= E[\sigma_{t|t-1}^4 E(\varepsilon_t^4)] \quad (8.17)$$

$$= 3 E(\sigma_{t|t-1}^4). \quad (8.18)$$

Sekarang misalkan $E(\sigma_{t|t-1}^2) = \tau$. Kemudian apabila kita kuadratkan dan ambil ekspektasi kedua sisi pada Persamaan (8.7) akan diperoleh

$$\tau = \omega^2 + 2\omega\alpha\sigma^2 + \alpha^2 3\tau \quad (8.19)$$

atau

$$\tau = \frac{\omega^2 + 2\omega\alpha\sigma^2}{1 - 3\alpha^2} \quad (8.20)$$

yang membuat kondisi keberhinggaan untuk τ yakni $0 \leq \alpha < 1/\sqrt{3}$; dalam hal ini ARCH(1) akan memiliki momen keempat berhingga.

Salah satu kegunaan utama model ARCH adalah untuk memprediksi varians bersyarat. Sebagai contoh, kita mungkin tertarik untuk meramalkan ℓ langkah ke depan dari varians bersyarat

$$\sigma_{t+\ell|t}^2 = E(r_{t+h}^2 | r_t, r_{t-1}, \dots). \quad (8.21)$$

Untuk $\ell = 1$ akan diperoleh

$$\sigma_{t+1|t}^2 = \omega + \alpha r_t^2 = (1 - \alpha)\sigma^2 + \alpha r_t^2. \quad (8.22)$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\sigma_{t+\ell|t}^2 = E(r_{t+h}^2 | r_t, r_{t-1}, \dots) \quad (8.23)$$

$$= E[E(\sigma_{t+\ell|t+\ell-1}^2 \varepsilon_{t+\ell}^2 | r_{t+\ell-1}, r_{t+\ell-2}, \dots) | r_t, r_{t-1}, \dots] \quad (8.24)$$

$$= E[\sigma_{t+\ell|t+\ell-1}^2 E(\varepsilon_{t+\ell}^2 | r_t, r_{t-1}, \dots)]$$

$$= E(\sigma_{t+\ell|t+\ell-1}^2 | r_t, r_{t-1}, \dots)$$

$$= \omega + \alpha E(r_{t+\ell-1}^2 | r_t, r_{t-1}, \dots)$$

$$= \omega + \alpha \sigma_{t+\ell-1|t}^2 \quad (8.25)$$

dengan $\sigma_{t+\ell|t}^2 = r_{t+\ell}^2$ untuk $\ell < 0$.

Model ARCH(1) pada (8.7) dapat dikembangkan menjadi ARCH tingkat q , yakni ARCH(q), dengan bentuk

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q r_{t-q}^2. \quad (8.26)$$

8.3 Model GARCH

Pendekatan lain untuk memodelkan varians bersyarat adalah dengan menambahkan p beda kala pada varians bersyarat. Model ini akan menghasilkan model GARCH dengan tingkat p dan q , dinotasikan GARCH(p, q), dengan bentuk

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{t-1|t-2}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p|t-p-1}^2 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q r_{t-q}^2. \quad (8.27)$$

Model (8.27) dapat pula dinyatakan dalam notasi pergeseran mundur (*backshift*) B sebagai

$$(1 - \beta_1 B - \cdots - \beta_p B^p) \sigma_{t|t-1}^2 = \omega + (\alpha_1 B + \cdots + \alpha_q B^q) r_t^2. \quad (8.28)$$

Pada bagian sebelumnya kita telah mendefinisikan $\eta_t = r_t^2 - \sigma_{t|t-1}^2$ atau $\sigma_{t|t-1}^2 = r_t^2 - \eta_t$. Kemudian apabila disubstitusikan ke Persamaan (8.27) akan menghasilkan

$$r_t^2 = \omega + (\beta_1 + \alpha_1) r_{t-1}^2 + \cdots + (\beta_{\max(p,q)} + \alpha_{\max(p,q)}) r_{t-\max(p,q)}^2 + \eta_t - \beta_1 \eta_{t-1} - \cdots - \beta_p \eta_{t-p} \quad (8.29)$$

dengan $\beta_k = 0$ untuk semua bilangan bulat $k > p$ dan $\alpha_k = 0$ untuk $k > q$. Ini berarti model GARCH(p, q) untuk deret return berimplikasi bahwa model return kuadrat adalah model ARMA($\max(p, q), p$). Sehingga teknik identifikasi model ARMA untuk deret return kuadrat dapat digunakan untuk mengidentifikasi p dan $\max(p, q)$.

Kondisi kestasioneran untuk model GARCH dapat diperoleh sebagai berikut. Asumsikan untuk sementara bahwa proses return adalah stasioner lemah. Ambil ekspektasi pada kedua sisi pada Persamaan (8.27) akan menghasilkan varians tak bersyarat (*unconditional variance*)

$$\sigma^2 = \omega + \sigma^2 \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\beta_i + \alpha_i) \quad (8.30)$$

atau

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\beta_i + \alpha_i)} \quad (8.31)$$

yang akan berhingga jika

$$\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\beta_i + \alpha_i) < 1. \quad (8.32)$$

Kondisi (8.32) merupakan syarat perlu dan syarat cukup untuk stasioner lemah dari suatu model GARCH(p, q). Peramalan untuk ℓ langkah ke depan, yakni untuk sebaran $\ell > 1$ dinyatakan oleh

$$\sigma_{t+\ell|t}^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t+\ell-i|t}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \hat{\sigma}_{t+\ell-i|t+\ell-i-1}^2 \quad (8.33)$$

dengan

$$\sigma_{t+\ell|t}^2 = r_{t+\ell}^2, \quad \text{untuk } \ell < 0 \quad (8.34)$$

dan

$$\hat{\sigma}_{t+\ell-i|t+\ell-i-1}^2 = \begin{cases} \sigma_{t+\ell-i|t}^2, & \text{untuk } \ell - i - 1 > 0, \\ \sigma_{t+\ell-i|t+\ell-i-1}^2, & \text{untuk } \ell \text{ lainnya.} \end{cases} \quad (8.35)$$

8.4 Estimasi Parameter

Estimasi parameter dapat dilakukan dengan metode kemungkinan maksimum (*maximum likelihood estimation*). Misalkan terdapat model GARCH(1, 1)

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1|t-2}^2 \quad (8.36)$$

untuk $t \geq 2$ dengan nilai awal $\sigma_{1|0}^2$ dan varians tak bersyarat $\sigma^2 = \omega / (1 - \alpha - \beta)$. Fungsi densitas peluang bersyarat

$$f(r_t | r_{t-1}, \dots, r_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{t|t-1}^2}} \exp[-r_t^2 / (2\sigma_{t|t-1}^2)] \quad (8.37)$$

dan fungsi densitas peluang bersama

$$f(r_n, \dots, r_1) = f(r_{n-1}, \dots, r_1) f(r_n | r_{n-1}, \dots, r_1). \quad (8.38)$$

Selanjutnya dengan mengiterasi formula terakhir akan diperoleh fungsi log-likelihood berikut

$$\log L(\omega, \alpha, \beta) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\log(\sigma_{i-1|i-2}^2) + \frac{r_i^2}{\sigma_{i-1|i-2}^2} \right]. \quad (8.39)$$

Secara umum, tidak ada solusi bentuk tertutup untuk Persamaan log likelihood pada (8.39). Jadi, diperlukan metode numerik untuk menyelesaikannya.

8.5 Diagnostik Model

Pemeriksaan diagnostik dapat dilakukan, misalnya, dengan melihat sisaan terstandar (*standardized residuals*) yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\hat{\varepsilon}_t = \frac{r_t}{\hat{\sigma}_{t|t-1}}. \quad (8.40)$$

Statistik Ljung-Box

$$Q(p) = T(T+2) \sum_{i=1}^p \frac{\hat{\rho}_i^2}{T-i} \quad (8.41)$$

juga dapat digunakan untuk kecocokan persamaan nilai tengah persamaan volatilitas. Hipotesis null uji Ljung-Box is that there is no autocorrelation.

Selain itu kita juga dapat menggugurkan uji Langrange Multipler (LM) of the form

$$LM = T \cdot R^2 \quad (8.42)$$

dengan T adalah ukuran sampel. Hipotesis null uji adalah tidak terdapat efek ARCH yaitu $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$.

Kita juga bisa menguji sisaan terstandarkan mutlak (*absolute standardized residuals*) menggunakan statistik uji *generalized portmanteau* berbentuk

$$n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m q_{i,j} \hat{\rho}_{i,1} \hat{\rho}_{j,1} \quad (8.43)$$

dengan $q_{i,j}$ adalah elemen matriks

$$Q = \left[I - \frac{1}{2(\kappa + 2)} J \Lambda J^T \right]^{-1}. \quad (8.44)$$

Uji kenormalan sisaan juga dapat dilakukan secara formal dengan uji Shapiro-Wilk atau Jarque-Berra. Demikian pula, apabila model GARCH dispesifikasikan dengan benar maka sebaran $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ akan menyebar normal. Selain itu alat diagnostik grafis seperti plot QQ dapat digunakan untuk menilai asumsi distribusi model. Jika diasumsikan galat berdistribusi normal, plot sisaan terstandarkan seharusnya tidak ada korelasi serial, tidak ada heteroskedastisitas atau kebergantungan linear yang lain.

8.6 Contoh Analisis Data NASDAQ

Pada bagian sebelumnya kita telah melihat bahwa data NASDAQ memiliki kurtosis berlebih. Kita akan lihat apakah data ini menyebar normal melalui uji kenormalan Jarque-Berra.

```
> ## Uji kenormalan return NASDAQ
> library(tseries)
> jarque.bera.test(rtrn.NASDAQ.Open)
```

Jarque Bera Test

```
data:  rtrn.NASDAQ.Open
X-squared = 55034, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

Hasil pengujian kenormalan menggunakan statistik uji Jarque-Berra menghasilkan p-value yang sangat kecil. Hal ini berarti tidak cukup bukti untuk menerima hipotesis kenormalan. Dengan demikian data return NASDAQ tidak menyebar normal.

Kemudian, kita akan menguji secara formal apakah terdapat autokorelasi pada data return NASDAQ.

```
> library(FinTS)
> AutocorTest(rtrn.NASDAQ.Open)
```

Box-Ljung test

```
data:  rtrn.NASDAQ.Open
X-squared = 35.991, df = 10, p-value = 8.448e-05
```

Pengujian autokorelasi menghasilkan p-value $8,448 \times 10^{-5} < 0$. Hal ini berarti tidak cukup bukti untuk menerima hipotesis null bahwa tidak terdapat autokorelasi pada data. Bagaimana dengan data return kuadrat dan return mutlak?

```
> AutocorTest(abs(rtrn.NASDAQ.Open))
```

Box-Ljung test

```
data: abs(rtrn.NASDAQ.Open)
X-squared = 13378, df = 10, p-value < 2.2e-16
```

```
> AutocorTest(rtrn.NASDAQ.Open^2)
```

Box-Ljung test

```
data: rtrn.NASDAQ.Open^2
X-squared = 8031.7, df = 10, p-value < 2.2e-16
```

Hasil pengujian autokorelasi pada return kuadrat dan return mutlak juga menunjukkan terdapat autokorelasi pada data. Sekarang, kita akan menguji apakah ada efek ARCH atau tidak pada data return NASDAQ.

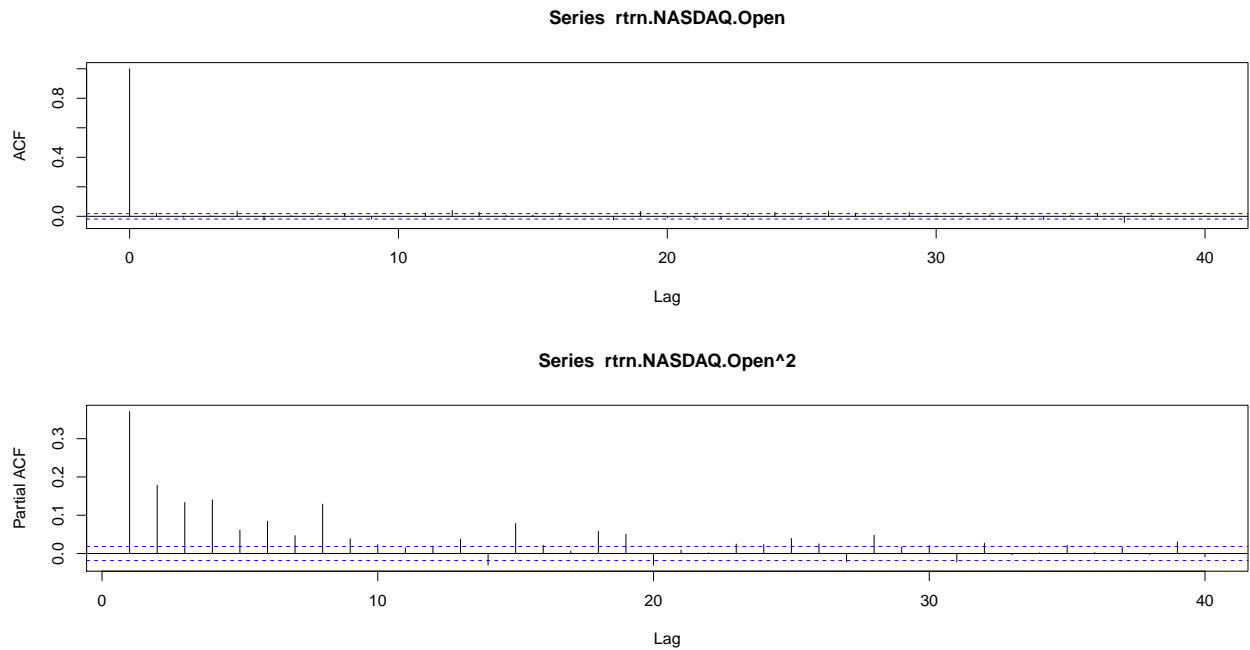
```
> ArchTest(rtrn.NASDAQ.Open)
```

ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

```
data: rtrn.NASDAQ.Open
Chi-squared = 2529.9, df = 12, p-value < 2.2e-16
```

Kita lihat bahwa p-value = $2,2 \times 10^{-16} < 0$. Jadi hipotesis null bahwa tidak ada efek ARCH ditolak. Dengan demikian, kita akan mencoba model GARCH. Identifikasi plot ACF pada return kuadrat tidak memberikan gambaran yang jelas apakah terdapat lag yang signifikan (terpotong). PACF return kuadrat memperlihatkan pola yang meluruh (*decay*). Oleh karena itu, kita dapat menggunakan EACF sebagai alat bantu.

```
> library(TSA)
> eacf(rtrn.NASDAQ.Open^2)
AR/MA
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
0 x x x x x x x x x x x x x
1 x x x x x x x x o o o o x x
2 x x x x o o x x x o o o o x
3 x x x o o x x x x x o o o x
4 x x x o x o x x x o o o o x
5 x x x x x o o x x o x o o x
6 x x x x x x x x x o x x x x
7 x x x x x x x o o o x x x o
```



Gambar 8.7: ACF dan PACF return kuadrat NASDAQ.

Penggunaan EACF juga tidak banyak membantu. Strategi kita adalah memodelkan dengan ARCH/GARCH tingkat yang tinggi, kemudian menurunkan tingkat jika ternyata tidak signifikan. Kita akan mencoba tingkat yang lebih tinggi, misalnya ARCH(6). Berikut ini contoh luaran untuk model ARCH(6):

```
> summary(arch6.NASDAQ)
```

Title:

GARCH Modelling

Call:

```
garchFit(formula = ~garch(6, 0), data = rtrn.NASDAQ.Open)
```

Mean and Variance Equation:

```
data ~ garch(6, 0)
```

```
<environment: 0x0a7f18bc>
```

```
[data = rtrn.NASDAQ.Open]
```

Conditional Distribution:

```
norm
```

Coefficient(s):

mu	omega	alpha1	alpha2	alpha3	alpha4
0.00071228	0.00002365	0.20300251	0.14133713	0.16778652	0.13332534
alpha5	alpha6				
0.15625929	0.10190889				

Std. Errors:

based on Hessian

Error Analysis:

Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	7.123e-04	7.728e-05	9.217 < 2e-16 ***
omega	2.365e-05	1.014e-06	23.321 < 2e-16 ***
alpha1	2.030e-01	1.451e-02	13.992 < 2e-16 ***
alpha2	1.413e-01	1.283e-02	11.020 < 2e-16 ***
alpha3	1.678e-01	1.395e-02	12.031 < 2e-16 ***
alpha4	1.333e-01	1.296e-02	10.286 < 2e-16 ***
alpha5	1.563e-01	1.324e-02	11.800 < 2e-16 ***
alpha6	1.019e-01	1.258e-02	8.102 4.44e-16 ***

Signif. codes: 0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1 1

Log Likelihood:

36720.51 normalized: 3.216301

Description:

Thu May 19 23:35:28 2016 by user: wayan

Standardised Residuals Tests:

Statistic p-Value

Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	0
Shapiro-Wilk Test	NA
Ljung-Box Test	0
Ljung-Box Test	0
Ljung-Box Test	0
Ljung-Box Test	1.633949e-06
Ljung-Box Test	2.914976e-06
Ljung-Box Test	2.124511e-06
LM Arch Test	2.667432e-06

Information Criterion Statistics:

AIC	BIC	SIC	HQIC
-6.431201	-6.426056	-6.431202	-6.429471

Jika Anda lanjutkan ke tingkat yang lebih rendah sampai AR(1) juga akan diperoleh semua koefisien signifikan. Kita juga akan coba model GARCH(1,1). Berikut luaran model:

```
> summary(garch11.NASDAQ)
```

Title:

GARCH Modelling

Call:

```
garchFit(formula = ~garch(1, 1), data = rtrn.NASDAQ.Open)
```

Mean and Variance Equation:

```
data ~ garch(1, 1)
```

```
<environment: 0x0bf908ac>
```

```
[data = rtrn.NASDAQ.Open]
```

Conditional Distribution:

```
norm
```

Coefficient(s):

```
mu      omega      alpha1      beta1
0.00064142  0.00000179  0.12158521  0.86955036
```

Std. Errors:

```
based on Hessian
```

Error Analysis:

```
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu      6.414e-04  7.646e-05  8.389  <2e-16 ***
omega   1.790e-06  1.887e-07  9.486  <2e-16 ***
alpha1  1.216e-01  7.034e-03  17.285  <2e-16 ***
beta1   8.696e-01  6.994e-03  124.328  <2e-16 ***
```

```
---
```

```
Signif. codes:  0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1 1
```

Log Likelihood:

```
36932.55      normalized:  3.234873
```

Description:

```
Thu May 19 23:22:25 2016 by user: wayan
```

Standardised Residuals Tests:

Statistic p-Value

```
Jarque-Bera Test  R    Chi^2  11441    0
Shapiro-Wilk Test  R    W      NA      NA
Ljung-Box Test     R    Q(10)  232.8105  0
Ljung-Box Test     R    Q(15)  250.2465  0
Ljung-Box Test     R    Q(20)  265.6991  0
Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  15.02672  0.1310908
Ljung-Box Test     R^2  Q(15)  17.56842  0.286034
Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  18.75014  0.5381162
LM Arch Test       R    TR^2   16.38459  0.174249
```

Information Criterion Statistics:

AIC	BIC	SIC	HQIC
-6.469046	-6.466473	-6.469046	-6.468181

Berikut ini adalah nilai AIC untuk model ARCH dan GARCH yang dicobakan. Berdasarkan

Tabel 8.1: Model ARCH dan GARCH yang dicobakan pada data NASDAQ

Model	AIC
ARCH(10)	-6,454788
ARCH(9)	-6,450359
ARCH(8)	-6,445348
ARCH(7)	-6,437935
ARCH(6)	-6,431201
ARCH(5)	-6,422426
ARCH(4)	-6,394003
ARCH(3)	-6,355158
ARCH(2)	-6,276990
ARCH(1)	-6,151260
GARCH(1,1)	-6,469046
GARCH(1,2)	-6,471520

Tabel 8.1 dapat dilihat nilai AIC minimum adalah pada model GARCH(1,1) dan GARCH(1,2). Pada kebanyakan kasus model GARCH(1,1) sangat baik dalam memodelkan. Kita juga bisa mencoba GARCH(2,1) tetapi koefisien α_2 tidak signifikan. Perlu dicatat juga bahwa semua model ARCH yang dicobakan semuanya signifikan, namun AIC terkecil terdapat pada GARCH(1,2). Kita akan modelkan volatilitas NASDAQ dengan GARCH(1,2). Selanjutnya, kita akan meramalkan volatilitas untuk 12 hari *trading* ke depan. Berikut luaran ramalan tersebut:

```
> predict(garch12.NASDAQ, 12)
meanForecast  meanError standardDeviation
1  0.0006691292 0.008392434      0.008392434
2  0.0006691292 0.008179061      0.008179061
3  0.0006691292 0.008366775      0.008366775
4  0.0006691292 0.008373890      0.008373890
5  0.0006691292 0.008459790      0.008459790
6  0.0006691292 0.008509320      0.008509320
7  0.0006691292 0.008573756      0.008573756
8  0.0006691292 0.008630326      0.008630326
9  0.0006691292 0.008689192      0.008689192
10 0.0006691292 0.008745861      0.008745861
11 0.0006691292 0.008802360      0.008802360
12 0.0006691292 0.008857814      0.008857814
```


8.7 Catatan

Kita telah memodelkan volatilitas deret waktu dengan GARCH. Dalam pemodelan ini kita belum melakukan pemeriksaan diagnostik lebih lanjut. Misalnya apakah plot QQ sudah mendukung model yang dicobakan, atau apakah distribusi inovasi perlu diganti, misalnya t atau distribusi lain. Kemudian, pengembangan GARCH belum dicoba seperti EGARCH, TGARCH, dan lain-lain. Namun, diharapkan ide tentang heteroskedastik dapat dipahami.

DAFTAR PUSTAKA

Peter J. Brockwell and Richard A. Davis. *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991. ISBN 0-387-97429-6.

Christopher Chatfield. *The Analysis of Time Series: An Introduction*. Chapman and Hall Ltd, London, third edition, 1984. ISBN 0-412-26030-1.

Genshiro Kitagawa. *Introduction to Time Series Modeling*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2010.