Álgebra Lineal

Introducción

1. Matrices y vectores
2. Suma, resta y multiplicación por escalares
3. Operaciones con vectores
4. Representación vectorial de objetos
5. Multiplicación de matrices
6. Matriz inversa y traspuesta
7. Combinaciones lineales

Álgebra Lineal

1. Matrices y Vectores

Matrices

Un conjunto de datos típico en Estadística y Machine Learning

FTHG	FTAG	FTR	HTHG	HTAG	HTR	HS	AS	HST	AST	HF	AF	HC	AC	HY	AY	HR	AR	B365H	B365D	B365A	BWH	BWD	BWA	IWH	IWD	IWA	LBH	LBD	LBA	PSH	PSD	PSA	WHH	WHD	WHA	SJH	SJD	SJA
2	0	H	1	0	H	16	15	6	2	13	6	6	5	1	1	0	0	1,73	3,6	4,75	1,72	3,6	4,75	1,7	3,6	4,7	1,66	3,6	5	1,79	3,74	5,12	1,75	3,75	4,5	1,67	3,6	5,5
1	0	H	0	0	D	9	11	1	2	15	23	9	6	3	5	0	0	1,53	4	6	1,57	4	5,5	1,55	3,9	5,6	1,57	3,75	6	1,56	4,33	6,78	1,55	4	6	1,57	4	6
1	2	A	1	1	D	8	13	2	3	10	8	5	5	1	0	0	0	2,5	3,3	2,8	2,6	3,3	2,65	2,4	3,3	2,75	2,6	3,3	2,6	2,69	3,35	2,86	2,5	3,3	2,8	2,63	3,25	2,75
7	0	H	6	0	H	22	4	13	1	15	16	9	3	1	3	0	0	1,08	10	26	1,08	10,5	23	1,1	8	20	1,08	10	23	1,09	14	30	1,08	11	23	1,09	9,5	29
1	2	A	0	2	A	14	13	5	4	15	17	7	6	1	4	0	0	2	3,3	3,75	2	3,3	3,8	2	3,3	3,6	2	3,3	3,5	2,13	3,37	3,95	2,15	3,25	3,5	2	3,4	3,8
2	1	H	1	1	D	20	11	9	4	11	20	5	7	1	2	0	0	1,17	7	17	1,16	7,75	13,5	1,17	6,5	14	1,15	6,5	15	1,16	9	19,3	1,17	7,5	15	1,17	7	17
1	3	A	1	1	D	14	16	5	6	12	13	1	9	4	4	0	0	2,8	3,3	2,5	2,7	3,4	2,5	2,6	3,2	2,6	2,75	3,3	2,5	2,89	3,39	2,64	2,8	3,3	2,5	2,63	3,4	2,63
2	3	A	1	0	H	15	14	2	4	17	14	6	10	2	0	0	0	2,6	3,2	2,75	2,55	3,25	2,75	2,5	3,3	2,65	2,37	3,2	2,87	2,7	3,32	2,87	2,5	3,2	2,9	2,5	3,25	2,88
2	2	D	1	0	H	15	6	10	5	23	12	7	2	4	4	0	0	2,2	3,2	3,4	2,15	3,4	3,3	2,2	3,3	3,1	2,2	3,3	3,25	2,23	3,33	3,69	2,15	3,25	3,5	2,2	3,3	3,4
3	0	H	2	0	H	11	8	5	1	16	11	3	4	2	2	0	0	2,25	3,25	3,25	2,2	3,3	3,25	2,1	3,3	3,3	2,2	3,3	3,3	2,31	3,42	3,39	2,25	3,3	3,2	2,25	3,25	3,3
2	0	H	1	0	H	8	18	2	5	15	20	5	10	2	2	0	0	1,62	3,75	5,5	1,62	3,7	5,75	1,7	3,6	4,7	1,66	3,6	5,5	1,65	4,14	5,82	1,67	3,6	5,5	1,62	4	5,5
2	2	D	1	2	A	14	16	5	7	15	17	2	7	2	1	0	0	1,85	3,5	4,2	1,8	3,4	4,6	1,85	3,45	4	1,85	3,5	4,2	1,91	3,63	4,54	1,83	3,5	4,4	1,83	3,6	4,33
1	1	D	1	0	H	12	11	2	4	9	12	4	2	4	3	0	0	3,2	3,4	2,2	3,4	3,3	2,15	3	3,3	2,25	3,2	3,3	2,25	3,32	3,47	2,27	3,2	3,3	2,25	3,13	3,5	2,25
3	1	H	1	1	D	13	8	3	2	17	12	6	3	3	3	0	0	3	3,25	2,38	3,1	3,3	2,25	2,9	3,3	2,3	3,1	3,3	2,3	3,18	3,43	2,41	3,2	3,3	2,25	3	3,4	2,38
2	1	H	1	1	D	17	6	6	2	11	25	8	3	4	2	0	0	1,85	3,6	4	1,85	3,4	4,33	1,85	3,45	4	1,9	3,4	4	1,88	3,7	4,6	1,85	3,5	4,33	1,83	3,5	4,5
5	0	H	3	0	H	14	7	5	1	11	9	8	3	0	1	0	0	1,29	5,25	10	1,34	4,75	9,25	1,35	4,8	7,6	1,33	5	9	1,32	5,6	11,58	1,33	5	9	1,3	5,25	11
1	2	A	0	0	D	20	13	6	4	9	18	12	8	1	3	0	1	1,8	3,5	4,5	1,72	3,7	4,75	1,7	3,7	4,5	1,7	3,6	5	1,86	3,64	4,78	1,75	3,6	4,75	1,73	3,6	5
0	0	D	0	0	D	8	18	3	3	17	18	5	7	3	5	0	0	3,5	3,3	2,1	3,5	3,25	2,1	2,85	3,3	2,35	3,2	3,25	2,25	3,54	3,45	2,21	3,4	3,3	2,15	3,4	3,3	2,2
0	1	A	0	1	A	9	15	3	11	14	12	2	11	3	2	0	0	13	6	1,22	14	6,25	1,2	10,3	5,5	1,25	12	6	1,22	13,7	6,78	1,25	12	7	1,2	15	6,5	1,2
0	1	A	0	1	A	8	21	3	8	14	10	5	8	4	2	0	0	7,5	5,5	1,33	9,25	5,25	1,3	10	5,2	1,27	9	5,5	1,3	9,11	5,52	1,37	8	5,5	1,33	10	5,5	1,3
2	2	D	2	1	H	9	15	5	9	18	18	4	5	3	5	1	0	2	3,3	3,8	2	3,3	3,8	2,1	3,3	3,3	2,05	3,4	3,5	2,07	3,68	3,79	2,05	3,4	3,6	2,05	3,4	3,8
1	2	A	0	1	A	23	6	8	2	14	17	8	1	4	3	1	0	1,73	3,6	4,75	1,8	3,7	4,2	2	3,3	3,6	1,8	3,5	4,5	1,83	3,74	4,8	1,83	3,75	4	1,83	3,6	4,5
1	1	D	1	0	H	17	3	4	1	9	6	6	5	1	2	0	0	2,2	3,3	3,3	2,2	3,2	3,4	2,1	3,3	3,3	2,2	3,3	3,3	2,23	3,47	3,53	2,25	3,2	3,3	2,15	3,3	3,6
0	3	A	0	2	A	9	9	3	4	15	14	7	8	3	2	0	0	2,5	3,2	2,88	2,5	3,25	2,8	2,5	3,3	2,65	2,45	3,2	2,87	2,65	3,31	2,93	2,62	3,1	2,8	2,6	3,2	2,88
1	0	H	0	0	D	21	16	6	0	19	8	10	5	2	2	0	0	2,1	3,3	3,5	2,1	3,3	3,5	2	3,3	3,6	2,15	3,3	3,4	2,27	3,37	3,53	2,25	3,2	3,3	2,1	3,4	3,6
0	0	D	0	0	D	10	8	3	3	19	14	7	7	2	4	0	0	2,05	3,4	3,6	2	3,5	3,6	1,9	3,45	3,8	2,05	3,4	3,5	2,11	3,58	3,76	2,05	3,4	3,6	2	3,5	3,8
3	1	H	2	0	H	20	12	7	2	15	13	9	6	1	2	0	0	1,17	7	16	1,16	7,75	13,5	1,2	6,5	10,3	1,18	7,5	12	1,18	8,4	17,8	1,17	7,5	15	1,2	7	15
2	2	D	1	1	D	15	15	7	6	17	13	10	1	3	3	0	1	1,62	3,8	5,5	1,57	3,9	5,75	1,65	3,8	4,7	1,66	3,75	5	1,62	4,14	6,27	1,6	4	5,5	1,67	3,75	5,5
1	2	A	0	1	A	10	16	4	9	19	21	5	5	2	4	0	0	2,9	3,3	2,38	2,8	3,25	2,5	2,75	3,3	2,4	2,87	3,4	2,37	2,88	3,51	2,58	2,8	3,3	2,5	2,75	3,4	2,6
2	3	A	2	3	A	16	20	10	9	20	11	5	7	2	3	0	0	5,5	4,33	1,53	6,25	4,4	1,48	5	3,9	1,6	6	4,33	1,5	6,13	4,54	1,57	5,5	4,33	1,55	5,75	4,33	1,57
4	2	H	2	1	H	20	7	8	2	15	17	8	1	2	4	0	0	1,25	6	11	1,26	5,5	11	1,27	5,2	10	1,28	5,5	9,5	1,27	6,32	13,73	1,25	5,5	12	1,25	6,25	12
3	2	H	1	0	H	19	7	10	2	12	17	6	9	2	5	0	0	1,18	7	15	1,18	7	13,5	1,15	7	15	1,16	7,5	13	1,19	8,48	15,71	1,17	7,5	13	1,17	7,5	17

Matrices

- Formalmente, tenemos los datos en una matriz de *n* filas (observaciones) y *k* columnas (variables)

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$$

Matriz 3x2

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \end{bmatrix}$$

Matriz 2x3

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1k} \\ m_{21} & m_{21} & \cdots & m_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nk} \end{bmatrix}$$

Matriz *n* x *k*

- A veces el principal interés se centra en una sola variable (aprendizaje supervisado)
- Otras veces todas las variables son igual de importantes (aprendizaje no supervisado)

Elementos de una matriz

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 87 \\ 25 & -3 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

A_{ij}: valor de la matriz *A* en la fila *i* y la columna *j*

$A_{12} = 87$

$A_{31} = -6$

$A_{23} = ?$ $\longleftarrow$ No definido (error)

Vectores

Son matrices *n* x 1

$$v = \begin{bmatrix} 13 \\ 25 \\ 66 \\ 48 \end{bmatrix}$$ Vector de 4 dimensiones

$v_1 = 13$

$v_3 = 66$

Indexación:

$$v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Un “escalar” corresponde a un número real

Escalar

$$3$$

Vector

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

THE BRIDGE
DIGITAL TALENT ACCELERATOR

Álgebra Lineal

2. Suma, Resta y Multiplicación por escalares

Suma de Matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

3x2 3x2 3x2

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \text{error}$$

Multiplicación por un escalar

$$2 \times \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 16 \\ 4 & -6 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \times 2$$

3x2 3x2

$$\begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} /4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2x2 2x2

Combinación de operaciones

$$\boxed{3 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} /3}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Álgebra Lineal

3. Operaciones con vectores

Producto escalar de dos vectores

Es un número real

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow a \cdot b = 1 \times -2 + 3 \times 5 = 13$$

$$c = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow c \cdot d = -1 \times 1 + 0 \times 2 + 2 \times 3 = 5$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathrm{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Módulo o norma de un vector

Es un número real mayor o igual a cero

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Vectores unitarios

- Son vectores con norma igual a 1
- Todo vector puede convertirse en unitario al dividirlo por su norma

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

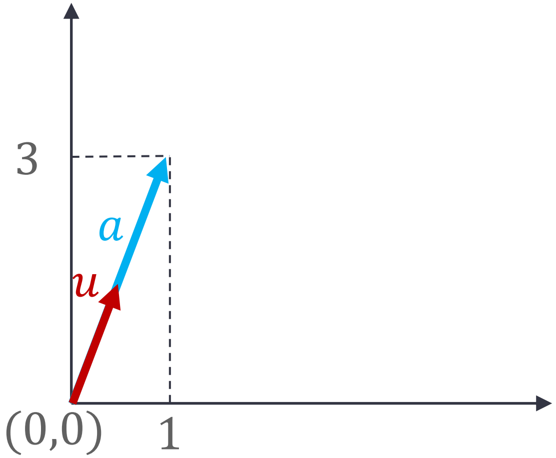
$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} / \sqrt{10} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$$|u| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{10}})^2 + (\frac{3}{\sqrt{10}})^2} = \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{9}{10}} = \sqrt{1} = 1$$

Vectores: representación geométrica

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} / \sqrt{10} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$



Vectores: representación geométrica

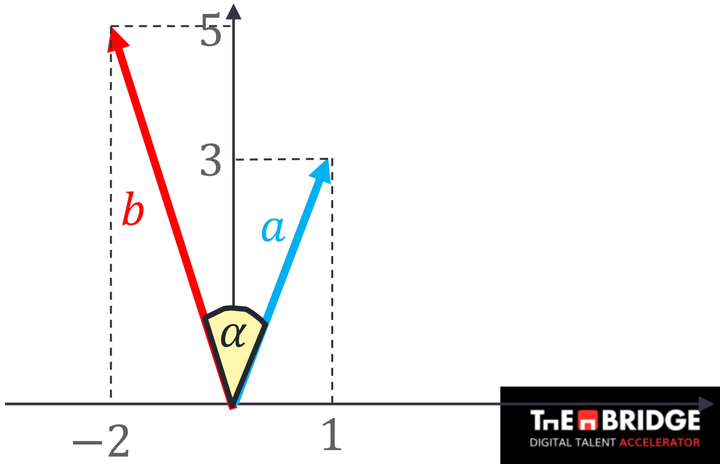
- El producto escalar de dos vectores también se puede calcular como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman

$$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}$$

- Esta propiedad nos permite calcular el ángulo entre dos vectores

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow a \cdot b = 1 \times -2 + 3 \times 5 = 13$$

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{13}{\sqrt{10} \times \sqrt{29}} = 0.76 \Rightarrow \alpha = 40.23°$$



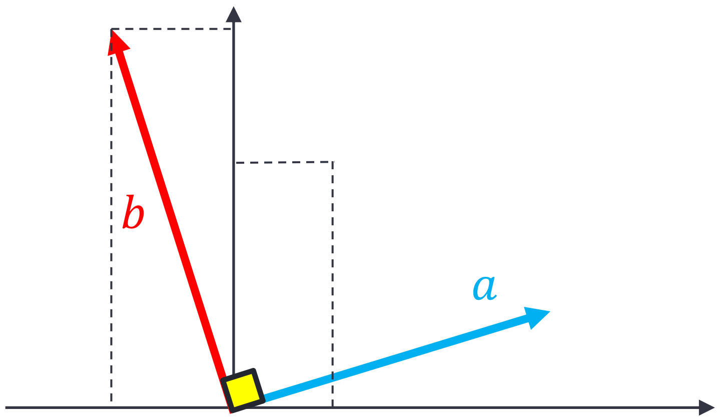
$$|a| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$
$$|b| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

THE BRIDGE
DIGITAL TALENT ACCELERATOR

Vectores: representación geométrica

- Si dos vectores son ortogonales (perpendiculares), su producto escalar es cero

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(90) = 0$$



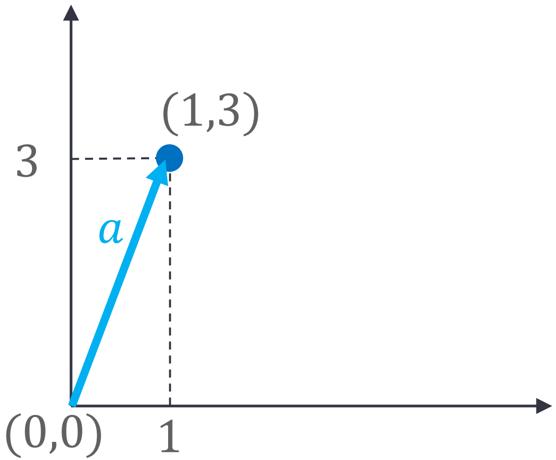
Álgebra Lineal

4. Representación vectorial de objetos

Vectores y puntos

- Un conjunto de *n* números reales $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ se puede representar:
  - Como un punto en el espacio n-dimensional
  - Como un vector con punto inicial en el origen de coordenadas y punto final $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



THE BRIDGE
DIGITAL TALENT ACCELERATOR

Representación vectorial de objetos

- Cualquier objeto puede representarse con un vector n-dimensional, cuyas componentes son los atributos del objeto
- Ejemplos:
  - Alumno = [Marta, 23, Mujer, 7.8] ← [nombre,edad,sexo,nota media]
  - Empleado = [Juan, Derecho, Financiero, 28.000] ← [nombre,formación,dpto,salario]
  - Película = [Drama, Acción, Aventura, Ciencia Ficción]
  - Futbolista = [10,5,0,13,1] ← [pases, pérdidas, goles, asistencias]
- La representación vectorial permite calcular distancias (o similitudes) entre pares de objetos

Representación vectorial de objetos

- Las variables categóricas pueden transformarse en numéricas:

Titanic = [Drama, Aventura]
Misión Imposible = [Acción, Ciencia Ficción]

Película	Drama	Acción	Aventura	Ciencia Ficción
Titanic	1	0	1	0
Misión Imposible	0	1	0	1

Pablo = [Hombre, 23, Economía, 23.000]
Carmen= [Mujer, 25, Derecho, 23.000]

Nombre	Sexo	Edad	Economía	Derecho	Salario
Pablo	1	23	1	0	23.000
Carmen	0	25	0	1	23.000

Distancia

- La distancia mide lo “lejanos” que están dos puntos u objetos
- Propiedades de una distancia:

  i. $dist(A,B) = dist(B,A)$ y $dist(A,B) \geq 0$

  ii. $dist(A,A) = 0$

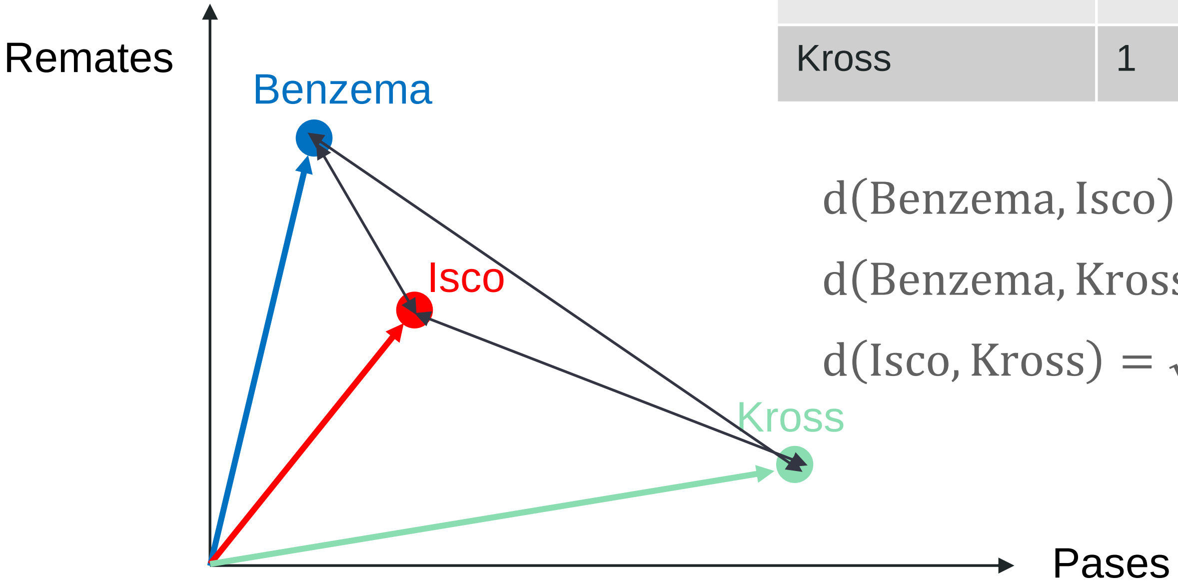
  iii. $dist(A,C) \leq dist(A,B) + dist(B,C)$

- **Distancia euclídea** entre dos puntos A y B

$$A = (1,3)$$
$$B = (2,5)$$
$$d_e(A,B) = \sqrt{(2-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5}$$

Distancia

- Ejemplo



Jugador	Remates	Pases
Benzema	6	1
Isco	4	2
Kross	1	8

$$\mathrm{d}(\mathrm{Benzema}, \mathrm{Isco}) = \sqrt{(6-4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{Benzema}, \mathrm{Kross}) = \sqrt{(6-1)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{74}$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{Isco}, \mathrm{Kross}) = \sqrt{(4-1)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{45}$$

Distancia

Name	Age	Nationality	Overall	Potential	Value	Wage	Special	Preferred Fc	Internation	Weak Foot	Skill Moves	Work Rate	Body Type	Real Face	Position	Jersey Numl	Joined	Loaned Fror	Contract Val	Height	Weight	LS	ST	RS	LW	LF
L. Messi	31	Argentina	94	94	€110.5M	€565K	2202	Left	5	4	4	Medium/ M	Messi	Yes	RF	10	Jul 1, 2004		2021	5'7	159lbs	88+2	88+2	88+2	92+2	93+2
Cristiano Ronaldo	33	Portugal	94	94	€77M	€405K	2228	Right	5	4	5	High/ Low	C. Ronaldo	Yes	ST	7	Jul 10, 2018		2022	6'2	183lbs	91+3	91+3	91+3	89+3	90+3
Neymar Jr	26	Brazil	92	93	€118.5M	€290K	2143	Right	5	5	5	High/ Medi	Neymar	Yes	LW	10	Aug 3, 2017		2022	5'9	150lbs	84+3	84+3	84+3	89+3	89+3
De Gea	27	Spain	91	93	€72M	€260K	1471	Right	4	3	1	Medium/ M	Lean	Yes	GK	1	Jul 1, 2011		2020	6'4	168lbs					
K. De Bruyne	27	Belgium	91	92	€102M	€355K	2281	Right	4	5	4	High/ High	Normal	Yes	RCM	7	Aug 30, 2015		2023	5'11	154lbs	82+3	82+3	82+3	87+3	87+3
E. Hazard	27	Belgium	91	91	€93M	€340K	2142	Right	4	4	4	High/ Medi	Normal	Yes	LF	10	Jul 1, 2012		2020	5'8	163lbs	83+3	83+3	83+3	89+3	88+3
L. Modrić	32	Croatia	91	91	€67M	€420K	2280	Right	4	4	4	High/ High	Lean	Yes	RCM	10	Aug 1, 2012		2020	5'8	146lbs	77+3	77+3	77+3	85+3	84+3
L. Suárez	31	Uruguay	91	91	€80M	€455K	2346	Right	5	4	3	High/ Medi	Normal	Yes	RS	9	Jul 11, 2014		2021	6'0	190lbs	87+5	87+5	87+5	86+5	87+5
Sergio Ramos	32	Spain	91	91	€51M	€380K	2201	Right	4	3	3	High/ Medi	Normal	Yes	RCB	15	Aug 1, 2005		2020	6'0	181lbs	73+3	73+3	73+3	70+3	71+3
J. Oblak	25	Slovenia	90	93	€68M	€94K	1331	Right	3	3	1	Medium/ M	Normal	Yes	GK	1	Jul 16, 2014		2021	6'2	192lbs					
R. Lewandowski	29	Poland	90	90	€77M	€205K	2152	Right	4	4	4	High/ Medi	Normal	Yes	ST	9	Jul 1, 2014		2021	6'0	176lbs	87+3	87+3	87+3	83+3	86+3
T. Kroos	28	Germany	90	90	€76.5M	€355K	2190	Right	4	5	3	Medium/ M	Normal	Yes	LCM	8	Jul 17, 2014		2022	6'0	168lbs	78+3	78+3	78+3	81+3	82+3
D. Godín	32	Uruguay	90	90	€44M	€125K	1946	Right	3	3	2	Medium/ Hi	Lean	Yes	CB	10	Aug 4, 2010		2019	6'2	172lbs	64+3	64+3	64+3	61+3	62+3
David Silva	32	Spain	90	90	€60M	€285K	2115	Left	4	2	4	High/ Medi	Normal	Yes	LCM	21	Jul 14, 2010		2020	5'8	148lbs	77+3	77+3	77+3	85+3	84+3
N. Kanté	27	France	89	90	€63M	€225K	2189	Right	3	3	2	Medium/ Hi	Lean	Yes	LDM	13	Jul 16, 2016		2023	5'6	159lbs	72+3	72+3	72+3	77+3	77+3
P. Dybala	24	Argentina	89	94	€89M	€205K	2092	Left	3	3	4	High/ Medi	Normal	Yes	LF	21	Jul 1, 2015		2022	5'10	165lbs	83+3	83+3	83+3	87+3	86+3
H. Kane	24	England	89	91	€83.5M	€205K	2165	Right	3	4	3	High/ High	Normal	Yes	ST	9	Jul 1, 2010		2024	6'2	196lbs	86+3	86+3	86+3	82+3	84+3
A. Griezmann	27	France	89	90	€78M	€145K	2246	Left	4	3	4	High/ High	Lean	Yes	CAM	7	Jul 28, 2014		2023	5'9	161lbs	86+3	86+3	86+3	87+3	87+3
M. ter Stegen	26	Germany	89	92	€58M	€240K	1328	Right	3	4	1	Medium/ M	Normal	Yes	GK	22	Jul 1, 2014		2022	6'2	187lbs					
T. Courtois	26	Belgium	89	90	€53.5M	€240K	1311	Left	4	2	1	Medium/ M	Courtois	Yes	GK	1	Aug 9, 2018		2024	6'6	212lbs					
Sergio Busquets	29	Spain	89	89	€51.5M	€315K	2065	Right	4	3	3	Medium/ M	Lean	Yes	CDM	5	Sep 1, 2008		2023	6'2	168lbs	71+3	71+3	71+3	74+3	76+3
E. Cavani	31	Uruguay	89	89	€60M	€200K	2161	Right	4	4	3	High/ High	Lean	Yes	LS	21	Jul 16, 2013		2020	6'1	170lbs	85+3	85+3	85+3	81+3	83+3
M. Neuer	32	Germany	89	89	€38M	€130K	1473	Right	5	4	1	Medium/ M	Normal	Yes	GK	1	Jul 1, 2011		2021	6'4	203lbs					
S. Agüero	30	Argentina	89	89	€64.5M	€300K	2107	Right	4	4	4	High/ Medi	Stocky	Yes	ST	10	Jul 28, 2011		2021	5'8	154lbs	86+3	86+3	86+3	86+3	87+3
G. Chiellini	33	Italy	89	89	€27M	€215K	1841	Left	4	3	2	Medium/ Hi	Normal	Yes	LCB	3	Jul 1, 2005		2020	6'2	187lbs	58+3	58+3	58+3	54+3	55+3
K. Mbappé	19	France	88	95	€81M	€100K	2118	Right	3	4	5	High/ Medi	Lean	Yes	RM	10	Jul 1, 2018		2022	5'10	161lbs	85+3	85+3	85+3	87+3	87+3
M. Salah	26	Egypt	88	89	€69.5M	€255K	2146	Left	3	3	4	High/ Medi	PLAYER_BOD	Yes	RM	10	Jul 1, 2017		2023	5'9	157lbs	83+3	83+3	83+3	87+3	86+3
Casemiro	26	Brazil	88	90	€59.5M	€285K	2170	Right	3	3	2	Medium/ Hi	Normal	Yes	CDM	14	Jul 11, 2013		2021	6'1	185lbs	72+3	72+3	72+3	69+3	73+3
J. Rodríguez	26	Colombia	88	89	€69.5M	€315K	2171	Left	4	3	4	Medium/ M	Normal	Yes	LAM	10		Real Madric	Jun 30, 2019	5'11	172lbs	80+3	80+3	80+3	84+3	83+3
L. Insigne	27	Italy	88	88	€62M	€165K	2017	Right	3	3	4	High/ Medi	Normal	Yes	LW	10	Jul 1, 2010		2022	5'4	130lbs	78+3	78+3	78+3	86+3	85+3
Isco	26	Spain	88	91	€73.5M	€315K	2137	Right	3	3	4	High/ Medi	Normal	Yes	LW	22	Jul 3, 2013		2022	5'9	174lbs	76+3	76+3	76+3	84+3	83+3
C. Eriksen	26	Denmark	88	91	€73.5M	€205K	2117	Right	3	5	4	High/ Medi	Lean	Yes	CAM	10	Aug 30, 2013		2020	5'11	168lbs	79+3	79+3	79+3	84+3	84+3
Coutinho	26	Brazil	88	89	€69.5M	€340K	2175	Right	3	4	5	High/ High	Normal	Yes	LW	7	Jan 6, 2018		2023	5'8	150lbs	79+3	79+3	79+3	86+3	85+3
P. Aubameyang	29	Gabon	88	88	€59M	€265K	2069	Right	3	4	4	Medium/ Lc	Lean	Yes	LM	14	Jan 31, 2018		2021	6'2	176lbs	84+3	84+3	84+3	83+3	83+3
M. Hummels	29	Germany	88	88	€46M	€160K	2038	Right	4	3	3	High/ Medi	Normal	Yes	LCB	5	Jul 1, 2016		2021	6'3	203lbs	69+3	69+3	69+3	68+3	69+3
Marcelo	30	Brazil	88	88	€43M	€285K	2279	Left	4	4	5	High/ Low	Normal	Yes	LB	12	Jan 1, 2007		2022	5'9	176lbs	80+3	80+3	80+3	84+3	83+3
G. Bale	28	Wales	88	88	€60M	€355K	2279	Left	4	3	4	High/ Medi	Lean	Yes	ST	11	Sep 2, 2013		2022	6'1	181lbs	86+3	86+3	86+3	86+3	86+3

Fuente: https://www.kaggle.com/karangadiya/fifa19/version/4

Similitud

- La similitud mide lo “cercanos” que están dos puntos u objetos
- Propiedades de una similitud:

    i. $simil(A, B) = simil(B, A)$ y $1 \geq simil(A, B) \geq 0$

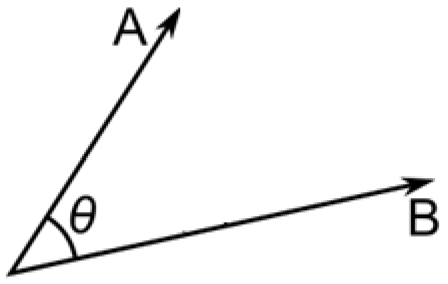
    ii. $simil(A, A) = 1$

- A partir de una distancia, se puede calcular una similitud: $simil(A, B) = \frac{1}{1+dist(A,B)}$

- Existen numerosas métricas de similitud, una de ellas es la **similitud del coseno**

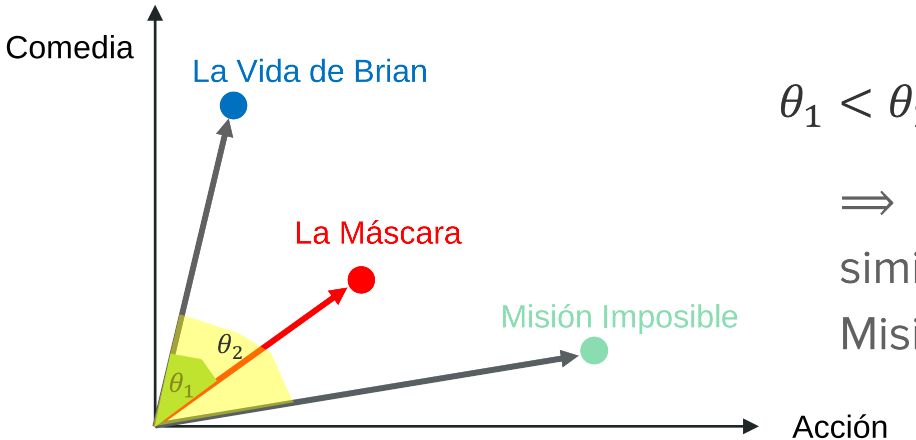
Similitud del coseno

$$simil(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \cos(\theta) = \frac{v_A v_B}{|v_A| \cdot |v_{\mathrm{B}}|}$$



A y B son los objetos

v_A y v_B son los vectores que representan los objetos A y B

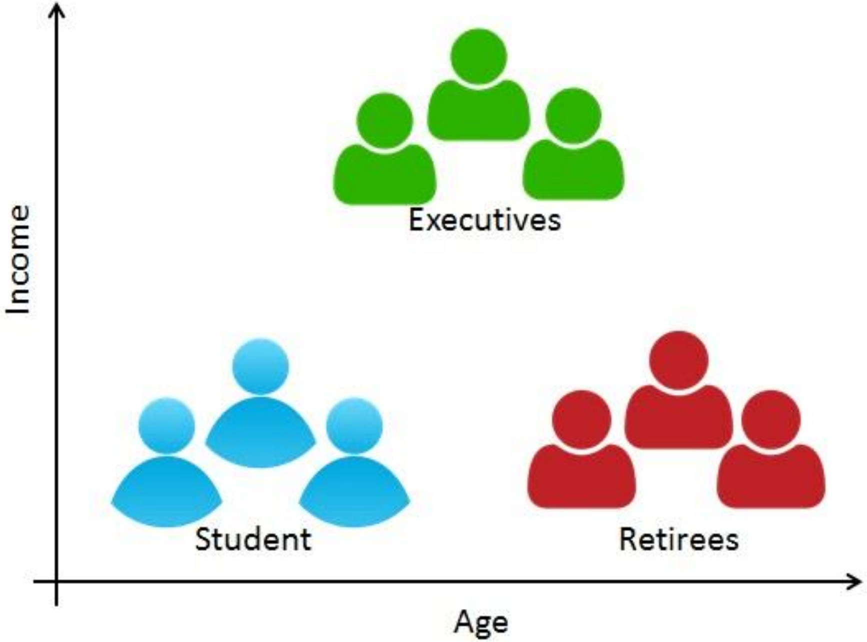


$$\theta_1 < \theta_2 \Longrightarrow \cos(\theta_1) > \cos(\theta_2)$$

$\Longrightarrow$ La Vida de Brian es más similar a La Máscara que a Misión Imposible

Ejemplo: Segmentación

Cliente	Income	Age
A	1000	18
B	5000	33
C	500	21
D	2500	78
E	4200	35
…	…	…



Álgebra Lineal

5. Multiplicación de matrices

Multiplicaciones de matrices y vectores

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 15 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow & 2 \times 1 + 4 \times 5 = 22 \\ \rightarrow & 0 \times 1 + 3 \times 5 = 15 \\ \rightarrow & -1 \times 1 + 0 \times 5 = -1 \end{matrix}$$

$\boxed{3}$x$\boxed{2}$ $\boxed{2}$x$\boxed{1}$ 3x1

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3x4 4x1 3x1

Multiplicaciones entre matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}\text{x}\boxed{3}$ $\boxed{3}\text{x}\boxed{2}$ 2x2

Propiedades de la multiplicación de matrices

- La multiplicación de matrices no es conmutativa (en general)

$$A \times B \neq B \times A$$

- Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

➢ Si las matrices tienen diferentes dimensiones:

A (matriz 3x2); B (matriz 2x3)

$\Longrightarrow A \times B$ (matriz 3x3)

$B \times A$ (matriz 2x2)

Propiedades de la multiplicación de matrices

- La propiedad asociativa sí se cumple en la multiplicación de matrices

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

- La propiedad distributiva también se cumple

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

Matriz Identidad

- Si pensamos en números reales, solamente existe uno que no altera una multiplicación (el número 1), tal que $1 \times z = z$, para cualquier z
  - $1 \times 5 = 5$
  - $99 \times 1 = 99$

- Cuando operamos con matrices, denotamos la matriz Identidad, I, tal que $A \times I = I \times A = A$, para cualquier matriz A

$$I_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidad

- Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

3x2 2x2

$$\begin{bmatrix} 12 & 8 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

2x3 3x3

Álgebra Lineal

6. Matriz Inversa y Traspuesta

Matriz inversa

- En el mundo de los números reales...

$$4 \times (4)^{-1} = 1$$

Número inverso $4^{-1} = \frac{1}{4}$

No todos los números tienen inverso

- En el mundo de las matrices...

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \ ? \ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$

No todas las matrices tienen inversa

Matriz inversa

- Si A es una matriz cuadrada (nxn), y tiene inversa (A^{-1}), entonces:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- Ejemplo: $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.375 & -0.125 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$

- Las matrices que no tienen inversa se conocen como matrices **singulares**

Ejemplo de matriz singular: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Matriz traspuesta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Sea A una matriz n x m y $B = A^T \Rightarrow B$ es una matriz m x n y $B_{ij} = A_{ji}$

Álgebra Lineal

7. Combinaciones Lineales

Combinaciones Lineales

- Consiste en combinar las operaciones de suma y multiplicación por escalares

- Ejemplo:

$y = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de los vectores $\mathrm{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathrm{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$y = 3x_1 + 2x_2 \begin{bmatrix} 3 \times 1 + 2 \times 0 \\ 3 \times 0 + 2 \times 1 \\ 3 \times 3 + 2 \times 1 \\ 3 \times 1 + 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

THE BRIDGE
DIGITAL TALENT ACCELERATOR

Combinaciones Lineales

- Si una matriz tiene combinaciones lineales entre sus filas y/o columnas, no tendrá inversa

- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$ (la columna 3 es la suma de las dos primeras columnas)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$ (la tercera fila es la primera + 2 veces la segunda)

Conclusiones Álgebra Lineal

1.1 Matrices y vectores

1.2 Suma, resta y multiplicación por escalares

1.3 Operaciones con vectores

1.4 Representación vectorial de objetos

1.5 Multiplicación de matrices

1.6 Matriz inversa y traspuesta

$$v = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2v = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} \quad 2\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$v \cdot 2v = 50 + 8 = 58$$

$$|v| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b)$$

Película	Drama	Acción	Aventura
Titanic	1	0	1
El Padrino	1	1	0

$$\mathrm{A} \times 2A = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ -16 & 2 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d(Titanic, Padrino) = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$AA^{-1} = I \quad \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¡Gracias!

Contacto: Rafael Zambrano
rafael@thebridgeschool.es