UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
(DPI)

LISTA DE EXERCÍCIOS 1
RESPOSTAS

Rafael Zardo Crevelari – ES105468

Disciplina: Matemática Discreta
Professor: André Gustavo Dos Santos

01 de junho 2021

RESPOSTAS:

Exercício 1:

Para começar uma demonstração desse teorema, assumimos a hipótese P “N e M são dois números ímpares” e a conclusão Q “N mais M é par”. Admitindo que a hipótese dessa sentença seja verdadeira, ou seja, assumimos que N e M são ímpares. Temos que $N = 2K + 1$ e $M = 2J + 1$, em que K e J são algum inteiro. Queremos demonstrar que N mais M é par. Desse modo, somando N a M, chegamos a $N + M = (2K + 1) + (2J + 1) = 2K + 2J + 2 = 2(K + J + 1)$. Assim concluímos que $N + M$ resulta em um valor par, pois é da forma 2*(um número inteiro). Consequentemente, provamos por prova direta, que se N e M são dois números ímpares, então N mais M é par.

Exercício 2:

Para começar uma demonstração desse teorema, assumimos a hipótese P “3N+2 é par” e a conclusão Q “N é par”. Admitindo que a conclusão dessa sentença seja falsa, ou seja, assumimos que N é ímpar. Temos que $N = 2K + 1$, em que K é algum inteiro. Queremos demostrar que $3N + 2$ é ímpar. Desse modo, substituindo $2K + 1$ em N, chegamos a $3N + 2 = 3(2K + 1) + 2 = 6K + 5 = 6K + 4 + 1 = 2(3K + 2) + 1$. Isso nos diz que $3N + 2$ é ímpar, pois é da forma 2*(um número inteiro) + 1, e logo não é par. Isso é a negação da hipótese do teorema. Como a negação da conclusão da sentença condicional implica que a hipótese é falsa, a sentença original é verdadeira. Consequentemente, provamos por prova por contraposição, que se N é um número inteiro e $3N + 2$ é par, então N é par.

Exercício 3:

Seja P a proposição “3N + 2 é par” e Q a preposição “N é par”. Para construir uma demonstração por contradição, assumimos que ambas P e $\neg Q$ são verdadeiras. Ou seja, assumimos que $3N + 2$ é par e que N não o é. Como N não é par, sabemos que é ímpar. Primeiro, como N é ímpar, existe um inteiro K, tal que $N = 2K + 1$. Isso implica que $3N + 2 = 3(2K + 1) + 2 = 6K + 5 = 6K + 4 + 1 = 2(3K + 2) + 1$. Isso nos diz que $3N + 2$ é ímpar, pois é da forma 2*(um número inteiro) + 1. Note que a sentença “3N + 2 é ímpar” é o mesmo que $\neg P$, uma vez que um inteiro é ímpar se e somente se não for par. Como ambos P e $\neg P$ são verdadeiras, temos uma contradição. Isso completa a demonstração por contradição, demonstrando que se $3N + 2$ é par, então N é par.

Exercício 4:

Para começar uma demonstração desse teorema, assumimos a hipótese P “A e B são números reais e A é menor que B” e a conclusão Q “a média de A e B é maior que A”. Admitindo que a hipótese dessa sentença seja verdadeira, ou seja, assumimos que $A < B$. Queremos demonstrar que a média de A e B é maior que A. Desse modo, $A < B \Rightarrow A + A < B + A \Rightarrow (A + A) / 2 < (B+A) / 2 \Rightarrow 2A/2 < (B+A) / 2 \Rightarrow A < (B+A) / 2$. Assim concluímos a partir de $A < B$, que $A < (B+A) / 2$. Consequentemente, provamos por prova direta, que se A e B são números reais e A e menor que B, então a média de A e B é maior que A.

Exercício 5:

Para começar uma demonstração desse teorema, assumimos que os cubos perfeitos menores que 1000 são 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512 e 729. Queremos demonstrar que é impossível obter algum número N, cubo perfeito menor que 1000, a partir da soma de dois números, cubos perfeitos menores que 1000, menores que N. Assim, temos que:

Para $N = 8$, é impossível de obter N com a soma dos cubos de dois números inteiros positivos menores que N, uma vez que os cubos menores que N é apenas o número 1. Logo, temos que, $1 + 1 = 2$. Assim, é evidente que o valor das somas realizadas são todos diferentes de N.

Para N = 27, é impossível de obter N com a soma dos cubos de dois números inteiros positivos menores que N, uma vez que os cubos menores que N são os números 1 e 8. Logo, temos que, 1 + 1 = 2, 1 + 8 = 9 e 8 + 8 = 16. Assim, é evidente que o valor das somas realizadas são todos diferentes de N.

Para N = 64, é impossível de obter N com a soma dos cubos de dois números inteiros positivos menores que N, uma vez que os cubos menores que N são os números 1, 8 e 27. Logo, temos que, 1 + 1 = 2, 1 + 8 = 9, 1 + 27 = 28, 8 + 8 = 16, 8 + 27 = 35 e 27 + 27 = 54. Assim, é evidente que o valor das somas realizadas são todos diferentes de N.

Para N = 125, é impossível de obter N com a soma dos cubos de dois números inteiros positivos menores que N, uma vez que os cubos menores que N são os números 1, 8, 27 e 64. Logo, temos que, 1 + 1 = 2, 1 + 8 = 9, 1 + 27 = 28, 1 + 64 = 65, 8 + 8 = 16, 8 + 27 = 35, 8 + 64 = 72, 27 + 27 = 54, 27 + 64 = 91 e 64 + 64 = 128. Assim, é evidente que o valor das somas realizadas são todos diferentes de N.

Para N = 216, é impossível de obter N com a soma dos cubos de dois números inteiros positivos menores que N, uma vez que os cubos menores que N são os números 1, 8, 27, 64 e 125. Logo, temos que, 1 + 1 = 2, 1 + 8 = 9, 1 + 27 = 28, 1 + 64 = 65, 1 + 125 = 126, 8 + 8 = 16, 8 + 27 = 35, 8 + 64 = 72, 8 + 125 = 133, 27 + 27 = 54, 27 + 64 = 91, 27 + 125 = 152, 64 + 64 = 128, 64 + 125 = 189 e 125 + 125 = 250. Assim, é evidente que o valor das somas realizadas são todos diferentes de N.

Para N = 343, é impossível de obter N com a soma dos cubos de dois números inteiros positivos menores que N, uma vez que os cubos menores que N são os números 1, 8, 27, 64, 125 e 216. Logo, temos que, 1 + 1 = 2, 1 + 8 = 9, 1 + 27 = 28, 1 + 64 = 65, 1 + 125 = 126, 1 + 216 = 217, 8 + 8 = 16, 8 + 27 = 35, 8 + 64 = 72, 8 + 125 = 133, 8 + 216 = 224, 27 + 27 = 54, 27 + 64 = 91, 27 + 125 = 152, 27 + 216 = 243, 64 + 64 = 128, 64 + 125 = 189, 64 + 216 = 280, 125 + 125 = 250, 125 + 216 = 341 e 216 + 216 = 432. Assim, é evidente que o valor das somas realizadas são todos diferentes de N.

Para N = 512, é impossível de obter N com a soma dos cubos de dois números inteiros positivos menores que N, uma vez que os cubos menores que N são os números 1, 8, 27, 64, 125, 216 e 343. Logo, temos que, 1 + 1 = 2, 1 + 8 = 9, 1 + 27 = 28, 1 + 64 = 65, 1 + 125 = 126, 1 + 216 = 217, 1 + 343 = 344, 8 + 8 = 16, 8 + 27 = 35, 8 + 64 = 72, 8 + 125 = 133, 8 + 216 = 224, 8 + 343 = 351, 27 + 27 = 54, 27 + 64 = 91, 27 + 125 = 152, 27 + 216 = 243, 27 + 343 = 370, 64 + 64 = 128, 64 + 125 = 189, 64 + 216 = 280, 64 + 343 = 407, 125 + 125 = 250, 125 + 216 = 341, 125 + 343 = 468, 216 + 216 = 432, 216 + 343 = 559 e 343 + 343 = 686. Assim, é evidente que o valor das somas realizadas são todos diferentes de N.

Para N = 729, é impossível de obter N com a soma dos cubos de dois números inteiros positivos menores que N, uma vez que os cubos menores que N são os números 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343 e 512. Logo, temos que, 1 + 1 = 2, 1 + 8 = 9, 1 + 27 = 28, 1 + 64 = 65, 1 + 125 = 126, 1 + 216 = 217, 1 + 343 = 344, 1 + 512 = 513, 8 + 8 = 16, 8 + 27 = 35, 8 + 64 = 72, 8 + 125 = 133, 8 + 216 = 224, 8 + 343 = 351, 8 + 512 = 520, 27 + 27 = 54, 27 + 64 = 91, 27 + 125 = 152, 27 + 216 = 243, 27 + 343 = 370, 27 + 512 = 539, 64 + 64 = 128, 64 + 125 = 189, 64 + 216 = 280, 64 + 343 = 407, 64 + 512 = 576, 125 + 125 = 250, 125 + 216 = 341, 125 + 343 = 468, 125 + 512 = 637, 216 + 216 = 432, 216 + 343 = 559, 216 + 512 = 728, 343 + 343 = 686, 343 + 512 = 855 e 512 + 512 = 1024. Assim, é evidente que o valor das somas realizadas são todos diferentes de N.

Para N = 1, é impossível de obter N com a soma dos cubos de dois números inteiros positivos, uma vez que são todos maiores ou igual a 1, de modo que, qualquer soma supere o valor de N.

Consequentemente, provamos que não existe cubo perfeito menor que 1000 que seja soma dos cubos de dois inteiros positivos.

Exercício 6:

Para começar uma demonstração desse teorema, assumimos que o alfabeto possui 26 elementos. Admitindo que a sala possui K estudantes, ou seja, assumimos que K = 80. Considerando o pior caso, onde todos comecem os seus nomes com uma letra do alfabeto, podemos dividir a turma em 3 grupos de 26 pessoas, em que cada pessoa inicia seu nome com uma letra do alfabeto. Assim, garantimos que 3 pessoas terão a mesma letra do alfabeto no início de seus nomes. Além disso, temos J = K – 3 * 26 = 2, em que J são os estudantes que ficaram fora dos grupos, onde qualquer um deles podem assumir qualquer letra do alfabeto no início de seus nomes. Sabendo que qualquer um dos dois estudantes pode assumir qualquer letra do alfabeto, temos certeza de que teremos pelo menos 4 estudantes com a mesma letra inicial do alfabeto no nome. Consequentemente, provamos que em qualquer turma com 80 estudantes, pelo menos 4 tem nome iniciado com mesma letra.

Exercício 7:

Para mostrar que a sentença é falsa, procuramos um contraexemplo, que será um inteiro que não é a soma dos quadrados de três inteiros. Admitindo o valor 7, pois ele não pode ser escrito como a soma dos quadrados de três inteiros. Para mostrar esse caso, note que os quadrados que não excedem 7 são $0^2 = 0$, $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$. Mais que isso, não há como obter 7 da soma desses três quadrados, com apenas três termos. Consequentemente, mostramos que “todo inteiro positivo pode ser escrito como a soma do quadrado de três inteiros” é falsa.

Exercício 8:

Para começar uma demonstração desse teorema, seja P(n) a proposição que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = n * (n + 1) * (2*n + 1) / 6$. Devemos validar o passo base, em que P (1) é verdadeira, já que $1^2 = 1 * (1 + 1) * (2 * 1 + 1) \Rightarrow 1 = 6 / 6 \Rightarrow 1 = 1$. Além disso, devemos validar o passo de indução, assumindo que P(k) seja verdadeira, temos que: $1^2 + 2^2 + ... + k^2 = k * (k + 1) * (2 * k + 1) / 6$. Considerando essa hipótese, devemos mostrar que P(k+1) é verdadeira, ou seja, que $1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 = (k + 1) * (k + 2) * (2 * k + 3) / 6$. Desse modo, temos que: $P(k + 1) = 1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 \Rightarrow k * (k + 1) * (2 * k + 1) / 6 + (k + 1)^2$ (pela hipótese de indução) $\Rightarrow [k * (k + 1) * (2 * k + 1) + 6 * (k + 1) * (k + 1)] / 6 \Rightarrow [(k + 1) * (2 * k^2 + 7 * k + 6)] / 6 \Rightarrow (k + 1) * (k + 2) * (2 * k + 3) / 6$. Então, se P(k) é verdadeira, P(k + 1) também é. E isso completa a prova.

Exercício 9:

Para começar uma demonstração desse teorema, é necessário encontrar a formula $O = 1 / 1 * 2 + 1 / 2 * 3 + \cdots + 1 / n * (n + 1)$. Admitindo n = 1, n = 2, n = 3 e n = 4, temos, respectivamente, O = 1 / 2, O = 2 / 3, O = 3 / 4 e O = 4 / 5. Desse modo, podemos concluir que a formula dessa expressão é n / (n + 1). Com a fórmula obtida, podemos provar por indução que ela está correta.

Seja P(n) a proposição que $1 / 1 * 2 + 1 / 2 * 3 + \cdots + 1 / n * (n + 1) = n / (n + 1)$. Devemos validar o passo base, em que P (1) é verdadeira, já que $1 /1 * (1 + 1) = 1 / (1 + 1) \Rightarrow 1 = 1$. Além disso, devemos validar o passo de indução, assumindo que P(k) seja verdadeira, temos que: $1 / (1 * 2) + 1 / (2 * 3) + ... + 1 / (k * (k + 1)) = k / (k + 1)$. Considerando essa hipótese, devemos mostrar que P(k+1) é verdadeira, ou seja, que $1 / (1 * 2) + 1 / (2 * 3) + ... + 1 / (k * (k + 1)) + 1 / ((k + 1) * (k + 2)) = (k + 1) / (k + 2)$. Desse modo, temos que: $P(k + 1) = 1 / (1 * 2) + 1 / (2 * 3) + ... + 1 / (k * (k + 1)) + 1 / ((k + 1) * (k + 2) \Rightarrow k / (k + 1) + 1 / ((k + 1) * (k + 2))$ (pela hipótese de indução) $\Rightarrow [(k + 1) * (k + 1)] / [(k + 1) * (k + 2)] \Rightarrow (k + 1) / (k + 2)$. Então, se P(k) é verdadeira, P(k + 1) também é. E isso completa a prova.

Exercício 10:

Para mostrar que a sentença é falsa, procuramos um contraexemplo, que será um n inteiro não negativo que $n^2 + n + 41$ não é um número primo. Admitindo o valor $n = 40$, pois para este valor $n^2 + n + 41$ não assume um valor primo. Para mostrar esse caso, note que $40^2 + 40 + 41 = 1681$. Mais que isso, temos que 1681 é divisível por 41, que resulta em 41, logo o número é divisível para valores diferentes dele mesmo ou 1, o que confirma que ele não é um número primo. Consequentemente, mostramos que "$n^2 + n + 41$ é um número primo para todo inteiro não negativo" é falsa.