UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
(DPI)

LISTA DE EXERCÍCIOS 2
RESPOSTAS

Rafael Zardo Crevelari – ES105468

Disciplina: Matemática Discreta
Professor: André Gustavo Dos Santos

21 de junho 2021

RESPOSTAS:

Exercício 1:

Letra A) Para começar, podemos perceber que a prova possui uma questão, com 4 opções de escolha, sabendo que podemos escolher somente 1 das 4, temos a seguinte combinação: $C_{4,1}$ = 4! / (1! * 3!) = 4. Desse modo, em uma questão temos 4 formas diferentes de escolher umas das alternativas. Sabendo que a prova possui 10 questões, em que elas devem ser respondidas sem depender da resposta anterior, é evidente que existem etapas sucessivas e independentes, considerando a regra do produto, a quantidade de possibilidades de responder essa prova de formas diferentes com relação as escolhas das alternativas se dão pela multiplicação da quantidade de possíveis escolhas de cada questão, ou seja: 4 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 *4 * 4 = 4^{10} = 1048576. Assim, existem 1048576 possibilidades diferentes de responder a prova.

Letra B) Para começar, podemos perceber que a probabilidade de acertar uma questão é de ¼. Sabendo que a prova possui 10 questões, em que elas devem ser respondidas sem depender da resposta anterior, é evidente que existem etapas sucessivas e independentes, considerando a regra do produto, a probabilidade de acertar todas as questões da prova de forma aleatória, se dá pela multiplicação da probabilidade de acertar cada questão, ou seja: ¼ * ¼ * ¼ * ¼ * ¼ * ¼ * ¼ * ¼ * ¼ * ¼ = $(¼)^{10}$ = 1/1048576. Assim, a probabilidade de um estudante acertar todas as questões respondendo-as de forma aleatória é de 1/1048576.

Exercício 2:

Letra A) Para começar, sabemos que uma sequência possui as letras A, C, G ou T. Sabendo disso, um elemento da sequência pode ser constituído por A, C, G ou T, ou seja, 4 opções. Diante disso, existem 4 opções para o primeiro elemento, 4 opções para o segundo elemento, 4 opções para o terceiro elemento e assim por diante até o sétimo elemento. Podemos perceber etapas sucessivas, logo pela regra do produto, temos que 4 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 = 4^7 = 16384. Assim, existem 16384 sequências diferentes de 7 elementos.

Letra B) Para começar, sabemos que uma sequência possui as letras A, C, G ou T. Sabendo disso, um elemento da sequência, desconsiderando o primeiro elemento, pode ser constituído por A, C, G ou T, ou seja, 4 opções. Diante disso, existe 1 opção para o primeiro elemento, uma vez que as sequencias devem começar com A, 4 opções para o segundo elemento, 4 opções para o terceiro elemento e assim por diante até o sétimo elemento. Podemos perceber etapas sucessivas, logo pela regra do produto, temos que 1 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 = 1 * 4^6 = 4096. Assim, existem 4096 sequências diferentes de 7 elementos que começam com a letra A.

Letra C) Para descobrir as sequências que começam ou terminam com A, devemos dividir em 3 situações o problema.

1° Situação: Para começar, sabemos que uma sequência possui as letras A, C, G ou T. Sabendo disso, um elemento da sequência, desconsiderando o primeiro elemento, pode ser constituído por A, C, G ou T, ou seja, 4 opções. Diante disso, existe 1 opção para o primeiro elemento, uma vez que nessa situação as sequências devem começar com A, 4 opções para o segundo elemento, 4 opções para o terceiro elemento e assim por diante até o sétimo elemento. Podemos perceber etapas sucessivas, logo pela regra do produto, temos que 1 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 = 1 * 4^6 = 4096. Assim, existem 4096 sequências diferentes de 7 elementos que começam com a letra A.

2° Situação: Para começar, sabemos que uma sequência possui as letras A, C, G ou T. Sabendo disso, um elemento da sequência, desconsiderando o último elemento, pode ser constituído por A, C, G ou T, ou seja, 4 opções. Diante disso, existem 4 opções para o primeiro elemento, 4 opções para o segundo elemento, 4 opções para o terceiro elemento e assim por diante até o sexto elemento, além disso existe 1 opção para o sétimo e último elemento, uma vez que nessa situação as sequências devem terminar com A. Podemos perceber etapas sucessivas, logo pela regra do produto, temos que 4 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 * 1 = 1 * 4^6 = 4096. Assim, existem 4096 sequências diferentes de 7 elementos que terminam com a letra A.

3° Situação: Para começar, sabemos que uma sequência possui as letras A, C, G ou T. Sabendo disso, um elemento da sequência, desconsiderando o primeiro e o último elemento, pode ser constituído por A, C, G ou T, ou seja, 4 opções. Diante disso, existe 1 opção para o primeiro elemento, uma vez nessa situação as sequências devem começar com A, 4 opções para o segundo elemento, 4 opções para o terceiro elemento e assim por diante até o sexto elemento, além disso existe 1 opção para o sétimo e último elemento, uma vez que nessa situação as sequências devem terminar com A. Podemos perceber etapas sucessivas, logo pela regra do produto, temos que 1 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 * 1 = 1 * 1 * 4^5 = 1024. Assim, existem 1024 sequências diferentes de 7 elementos que começam e terminam com a letra A.

Desse modo, para encontrar quantas sequências de 7 elementos que começam ou terminam com A, devemos somar as 4096 sequências diferentes de 7 elementos que começam com a letra A (1° Situação) com as 4096 sequências diferentes de 7 elementos que terminam com a letra A (2° Situação). Desse modo, temos 8192 sequencias diferentes, contudo, é necessário remover as sequências diferentes de 7 elementos que começam e terminam com a letra A (3° Situação), uma vez que elas estão contidas tanto nos elementos da 1° e 2° situação, portanto estão sendo contabilizados duas vezes. Assim, temos 8192 – 1024 = 7168 sequencias de 7 elementos que começam ou terminam com A.

Letra D) Para começar, sabemos que uma sequência possui as letras A, C, G ou T. Porém, devemos contar as sequencias que não possuem A. Sabendo disso, um elemento da sequência pode ser constituído por C, G ou T, ou seja, 3 opções. Diante disso, existem 3 opções para o primeiro elemento, 3 opções para o segundo elemento, 3 opções para o terceiro elemento e assim por diante até o sétimo elemento. Podemos perceber etapas sucessivas, logo pela regra do produto, temos que 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 = 3^7 = 2187. Assim, existem 2187 sequências diferentes que não possuem a letra A.

Exercício 3:

Letra A) Para começar, para encontrar um número X divisível por 3, basta dividir X por 3, caso o resto da equação seja 0, podemos concluir que X é divisível por 3. Desse modo, os números divisíveis por 3, de 1 a 50, são: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45 e 48.

Letra B) Para começar, para encontrar um número X divisível por 5, basta dividir X por 5, caso o resto da equação seja 0, podemos concluir que X é divisível por 5. Desse modo, os números divisíveis por 5, de 1 a 50, são: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 e 50.

Letra C) Conforme a questão A e B do exercício 3, a qual foi definido como encontrar um número divisível por 3 e por 5, podemos concluir que os números divisíveis por 3 E 5, de 1 a 50, são: 15, 30 e 45.

Letra D) Conforme a questão A e B do exercício 3, a qual foi definido como encontrar um número divisível por 3 e por 5, podemos concluir que os números divisíveis por 3 OU 5, de 1 a 50, são: 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 30, 33, 35, 36, 39, 40, 42, 45, 48 e 50.

Letra E) Conforme a questão A e B do exercício 3, a qual foi definido como encontrar um número divisível por 3 e por 5, podemos concluir que os números divisíveis por 3, MAS NÃO POR 5, de 1 a 50, são: 3, 6, 9, 12, 18, 21, 24, 27, 33, 36, 39, 42 e 48.

Exercício 4:

Letra A) Para começar, para encontrar um número X divisível por 7, basta dividir X por 7, caso o resto da equação seja 0, podemos concluir que X é divisível por 7. Desse modo, a quantidade de números divisíveis por 7, de 1 a 1000, é 142.

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;

int main() {

    int a; //Valor inicial da sequencia de termos
    int b; //Valor final da sequencia de termos
    int valor; //Primeiro valor que deve ser encontrado os divisiveis
    int valor2; //Segundo valor que deve ser encontrado os divisiveis
    int qntdElementos = 0; //Quantidade de elementos divisiveis

    cout << "De A a B: & Valor" << endl;
    cin >> a >> b >> valor >> valor2;

    cout << "Lista de valores divisiveis por " << valor << ": ";

    for (int i = a; i <= b; i++) {
        if (i%valor == 0) { //Condicao proposta pelo exercicio
            cout << i << ", "; //Apresenta os elementos divisiveis
            qntdElementos++; //Quantidade de elementos
        }
    }

    cout << "Qntd de Numeros: " << qntdElementos << endl;
}
```

(Código em C++ auxiliar para resolução do exercício)

Letra B) Para começar, para encontrar um número X divisível por 11, basta dividir X por 11, caso o resto da equação seja 0, podemos concluir que X é divisível por 11. Desse modo, a quantidade de números divisíveis por 11, de 1 a 1000, é 90.

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;

int main() {

    int a; //Valor inicial da sequencia de termos
    int b; //Valor final da sequencia de termos
    int valor; //Primeiro valor que deve ser encontrado os divisiveis
    int valor2; //Segundo valor que deve ser encontrado os divisiveis
    int qntdElementos = 0; //Quantidade de elementos divisiveis

    cout << "De A a B: & Valor" << endl;
    cin >> a >> b >> valor >> valor2;

    cout << "Lista de valores divisiveis por " << valor << ": ";

    for (int i = a; i <= b; i++) {
        if (i%valor == 0) { //Condicao proposta pelo exercicio
            cout << i << ", "; //Apresenta os elementos divisiveis
            qntdElementos++; //Quantidade de elementos
        }
    }

    cout << "Qntd de Numeros: " << qntdElementos << endl;
}
```

(Código em C++ auxiliar para resolução do exercício)

Letra C) Conforme a questão A e B do exercício 4, a qual foi definido como encontrar um número divisível por 7 e por 11, podemos concluir que a quantidade de números divisíveis por 7 E 11, de 1 a 1000, é 12.

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;

int main() {

    int a; //Valor inicial da sequencia de termos
    int b; //Valor final da sequencia de termos
    int valor; //Primeiro valor que deve ser encontrado os divisiveis
    int valor2; //Segundo valor que deve ser encontrado os divisiveis
    int qntdElementos = 0; //Quantidade de elementos divisiveis

    cout << "De A a B: & Valor" << endl;
    cin >> a >> b >> valor >> valor2;

    cout << "Lista de valores divisiveis por " << valor << ": ";

    for (int i = a; i <= b; i++) {
        if (i%valor == 0 && i%valor2 == 0) { //Condicao proposta pelo exercicio
            cout << i << ", "; //Apresenta os elementos divisiveis
            qntdElementos++; //Quantidade de elementos
        }
    }

    cout << "Qntd de Numeros: " << qntdElementos << endl;
}
```
(Código em C++ auxiliar para resolução do exercício)

Letra D) Conforme a questão A e B do exercício 4, a qual foi definido como encontrar um número divisível por 7 e por 11, podemos concluir que a quantidade de números divisíveis por 7 OU 11, de 1 a 1000, é 220.

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;

int main() {

    int a; //Valor inicial da sequencia de termos
    int b; //Valor final da sequencia de termos
    int valor; //Primeiro valor que deve ser encontrado os divisiveis
    int valor2; //Segundo valor que deve ser encontrado os divisiveis
    int qntdElementos = 0; //Quantidade de elementos divisiveis

    cout << "De A a B: & Valor" << endl;
    cin >> a >> b >> valor >> valor2;

    cout << "Lista de valores divisiveis por " << valor << ": ";

    for (int i = a; i <= b; i++) {
        if (i%valor == 0 || i%valor2 == 0) { //Condicao proposta pelo exercicio
            cout << i << ", "; //Apresenta os elementos divisiveis
            qntdElementos++; //Quantidade de elementos
        }
    }

    cout << "Qntd de Numeros: " << qntdElementos << endl;
}
```
(Código em C++ auxiliar para resolução do exercício)

Letra E) Conforme a questão A e B do exercício 4, a qual foi definido como encontrar um número divisível por 7 e por 11, podemos concluir que a quantidade de números divisíveis por 7, MAS NÃO POR 11, de 1 a 1000, é 130.

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;

int main() {

    int a; //Valor inicial da sequencia de termos
    int b; //Valor final da sequencia de termos
    int valor; //Primeiro valor que deve ser encontrado os divisiveis
    int valor2; //Segundo valor que deve ser encontrado os divisiveis
    int qntdElementos = 0; //Quantidade de elementos divisiveis

    cout << "De A a B: & Valor" << endl;
    cin >> a >> b >> valor >> valor2;

    cout << "Lista de valores divisiveis por " << valor << ": ";

    for (int i = a; i <= b; i++) {
        if (i%valor == 0 && i%valor2 != 0) { //Condicao proposta pelo exercicio
            cout << i << ", "; //Apresenta os elementos divisiveis
            qntdElementos++; //Quantidade de elementos
        }
    }

    cout << "Qntd de Numeros: " << qntdElementos << endl;
}
```
(Código em C++ auxiliar para resolução do exercício)

Exercício 5:

Para começar, devemos analisar a tabela, visualizando o aumento da quantidade de números de jogadas e o aumento do valor da aposta, com o fim de encontrar um padrão.

Número de Jogadas	Valor da Aposta	Aumento	Aumento em Quantidade de Vezes
6	R$ 4,50		
7	R$ 31,50	R$ 27,00	O valor é 7 vezes maior que o valor de 6 jogadas
8	R$ 126,00	R$ 94,50	O valor é 4 vezes maior que o valor de 7 jogadas
9	R$ 378,00	R$ 252,00	O valor é 3 vezes maior que o valor de 8 jogadas
10	R$ 945,00	R$ 567,00	O valor é 2,5 vezes maior que o valor de 9 jogadas
11	R$ 2.079,00	R$ 1.134,00	O valor é 2,2 vezes maior que o valor de 10 jogadas
12	R$ 4.158,00	R$ 2.079,00	O valor é 2 vezes maior que o valor de 11 jogadas
13	R$ 7.722,00	R$ 3.564,00	O valor é 1,8 vezes maior que o valor de 12 jogadas
14	R$ 13.513,50	R$ 5.791,50	O valor é 1,75 vezes maior que o valor de 13 jogadas
15	R$ 22.522,50	R$ 9.009,00	O valor é 1,66 vezes maior que o valor de 14 jogadas

Baseado na tabela apresentada, vamos analisar o aumento (1):
Podemos perceber que ao aumentar o número de jogadas, o valor do aumento não segue um padrão de aumento, com isso não conseguimos obter nenhuma progressão geométrica ou aritmética com esses valores. Desse modo, é certo que esse os valores de aumento (1) não são coerentes.

Agora analisando o aumento (2):
Podemos perceber que ao aumentar o número de jogadas, a quantidade de vezes que o valor da aposta é aumentado em relação ao anterior não segue um padrão de aumento, com isso não conseguimos obter nenhuma progressão geométrica ou aritmética com esses valores. Desse modo, não, é certo que esse os valores de aumento (2) não são coerentes.

Desse modo, baseado na análise da tabela criada e nos aumentos (1) e (2), é evidente que o aumento da quantidade de números de jogadas e o aumento do valor da aposta não são coerentes.

Exercício 6:

Letra A) Para começar, devemos analisar a formação das placas de identificação. Sabendo que as placas são da forma ABC1D23, podemos dividir cada elemento das placas. Baseado nisso, temos que o 1°(A), 2°(B), 3°(C) e 5° (D) elemento pode ser formado por qualquer uma das 26 letras do alfabeto, sem nenhuma restrição. Além disso, temos que o 4°(1), 6°(2) e 7°(3) elemento pode ser formado por qualquer um dos dígitos de 0 a 9, sem nenhuma restrição. Diante disso, temos 26 opções para o 1°, 2°, 3° e 5° elemento e 10 opções para o 4°, 6° e 7° elemento. Assim, podemos perceber etapas sucessivas, logo pela regra do produto, $26 * 26 * 26 * 10 * 26 * 10 * 10 = 26^4 * 10^3 = 456976000$. Portanto, temos 456976000 configurações de placas diferentes disponíveis.

Letra B) Para descobrir quantas dessas placas possuem o digito zero, precisamos dividir o problema em 3 situações.

1° Situação: Um dos elementos 4°, 6° e 7° deve ser igual a zero. Dessa forma, o elemento escolhido terá 1 opção (o próprio 0) e os dois que sobraram terão 9 opcoes, ou seja, os dígitos de 1 a 9. Assim, podemos perceber etapas sucessivas, logo pela regra do produto, $26 * 26 * 26 * 1 * 26 * 9 * 9 = 26^4 * 1 * 9^2 = 37015056$. Como o valor 0 pode estar em três elementos diferentes (0,1,1 ou 1,0,1 ou 1,1,0), devemos multiplicar esse valor por 3, 3 x 37015056 = 111045168. Portanto, temos 111045168 configurações de placas diferentes com apenas um zero em algum dos dígitos 4°, 6° e 7°.

2° Situação: Dois dos elementos 4°, 6° e 7° deve ser igual a zero. Dessa forma, o primeiro elemento escolhido terá 1 opção (o próprio 0), o segundo elemento escolhido terá 1 opção (o próprio 0) e o último que sobrou terá 9 opcoes, ou seja, os dígitos de 1 a 9. Assim, podemos perceber etapas sucessivas, logo pela regra do produto, 26 * 26 * 26 * 1 * 26 * 1 * 9 = 26^4 * 1^2 * 9 = 4112784. Como o valor 0 pode estar em três configurações de elementos diferentes (0,1,0 ou 0,0,1 ou 1,0,0), devemos multiplicar esse valor por 3, 3 x 4112784 = 12338352. Portanto, temos 12338352 configurações de placas diferentes com apenas dois zeros em algum dos dígitos 4°, 6° e 7°.

3° Situação: Todos os elementos 4°, 6° e 7° devem ser iguais a zero. Dessa forma, o primeiro elemento escolhido terá 1 opção (o próprio 0), o segundo elemento escolhido terá 1 opção (o próprio 0) e o último elemento escolhido terá 1 opção (o próprio 0). Assim, podemos perceber etapas sucessivas, logo pela regra do produto, 26 * 26 * 26 * 1 * 26 * 1 * 1 = 26^4 * 1^3 = 456976. Portanto, temos 456976 configurações de placas diferentes com apenas dois zeros em algum dos dígitos 4°, 6° e 7°.

Assim, para descobrir quantas dessas placas possuem o digito zero basta somar os valores obtidos em cada situação, as quais abordam todas as possibilidades de possuir 0 em uma placa. Sendo assim, temos 111045168 + 12338352 + 456976 = 123840496. Desse modo, podemos concluir que existem 123840496 configurações de placas com o número 0.

Letra C) Para descobrir se existem mais possibilidades sem repetição de caractere ou com algum repetido, devemos calcular quantas possibilidades existem em cada situação.

1° Situação (com repetição): Esta situação já foi calculada no item A do exercício 6, logo sabemos que temos 456976000 configurações de placas diferentes disponíveis com repetição.

2° Situação (sem repetição): Para começar, devemos analisar a formação das placas de identificação. Sabendo que as placas são da forma ABC1D23, podemos dividir cada elemento das placas. Baseado nisso, temos que o 1°(A), 2°(B), 3°(C) e 5° (D) elemento pode ser formado por qualquer uma das 26 letras do alfabeto, de modo que não haja repetição. Além disso, temos que o 4°(1), 6°(2) e 7°(3) elemento pode ser formado por qualquer um dos dígitos de 0 a 9, de modo que não haja repetição. Diante disso, temos 26 opções para o 1°, 25 opções para o 2°, 24 opções para o 3° e 23 opções para o 5° elemento e 10 opções para o 4°, 9 opções para o 6° e 8 opções para o 7° elemento. Assim, podemos perceber etapas sucessivas, logo pela regra do produto, 26 * 25 * 24 * 10 * 23 * 9 * 8 = 258336000. Portanto, temos 258336000 configurações de placas diferentes disponíveis sem repetição.

Com isso, podemos concluir que a existem mais possibilidades de placas com repetição, uma vez que 456976000 é maior que 258336000.

Exercício 7:

Letra A) Sabendo que existem 10 pessoas no casamento, incluindo a noiva e noivo. Queremos arranjar uma fila com seis pessoas incluindo a noiva. Sabendo disso, vamos dividir a fila em seis posições 1°, 2°, 3°, 4°, 5° e 6°. Com isso, podemos ter 1 pessoa na primeira posição (a noiva), 9 pessoas na segunda, 8 pessoas na terceira, 7 pessoas na quarta, 6 pessoas na quinta e 5 pessoas na sexta. Assim, podemos perceber etapas sucessivas, logo pela regra do produto, 1 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 = 15120. Além disso, como a noiva pode estar em qualquer lugar das 6 posições, uma vez que a ordem não importa, devemos multiplicar esse valor por 6, então 6 * 15120 = 90720. Portanto podemos arranjar a fila de 90720 formas diferentes incluindo a noiva.

Letra B) Sabendo que existem 10 pessoas no casamento, incluindo a noiva e noivo. Queremos arranjar uma fila com seis pessoas incluindo a noiva e o noivo. Sabendo disso, vamos dividir a fila em seis posições 1°, 2°, 3°, 4°, 5° e 6°. Com isso, podemos ter 1 pessoa na primeira posição (a noiva), 1 pessoa na segunda (o noivo), 8 pessoas na terceira, 7 pessoas na quarta, 6 pessoas na quinta e 5 pessoas na sexta. Assim, podemos perceber etapas sucessivas, logo pela regra do produto, 1 * 1 * 8 * 7 * 6 * 5 = 1680. Além disso, como a noiva e o noivo pode estar em qualquer lugar das 6 posições, uma vez que a ordem não importa, devemos saber quantas combinações de posições possíveis o noivo e a noiva podem estar, desse modo temos $C_{6,2}$ = 6! / (2! * 4!) = 15, com isso devemos multiplicar 1680 por 15, que resulta em 25200. Por fim, tais combinações do noivo e noiva, podem ser invertidas, logo devemos multiplicar 25200 por 2, que resulta em 50400. Portanto podemos arranjar a fila de 50400 formas diferentes incluindo a noiva e o noivo.

Letra C) Sabendo que existem 10 pessoas no casamento, incluindo a noiva e noivo. Queremos arranjar uma fila com seis pessoas incluindo a noiva ou o noivo. Sabendo disso, vamos dividir a fila em seis posições 1°, 2°, 3°, 4°, 5° e 6°. Com isso, podemos ter 2 pessoas na primeira posição (a noiva ou o noivo), 9 pessoas na segunda, 8 pessoas na terceira, 7 pessoas na quarta, 6 pessoas na quinta e 5 pessoas na sexta. Assim, podemos perceber etapas sucessivas, logo pela regra do produto, 2 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 = 30240. Além disso, como a noiva e o noivo podem estar em qualquer lugar das 6 posições, uma vez que a ordem não importa, devemos multiplicar esse valor por 6, então 6 * 30240 = 181440. Portanto podemos arranjar a fila de 181440 formas diferentes incluindo a noiva ou noivo.

Exercício 8:

Sabendo que existem 10 pessoas e queremos agrupar essas pessoas em grupos de 4, podemos saber quantos grupos serão gerados através da combinação $C_{10,4}$ = 10! / (4! * 6!) = 210. Desse modo, temos 210 grupos. Como queremos colocar esses grupos em uma mesa circular que cabe 4 pessoas, temos uma permutação circular, que é definida pela formula P_n^C = (N - 1)! onde N a quantidade de elementos que formam o círculo da permutação circular. Sendo assim, como temos 4 pessoas em uma mesa, substituindo na formula P_4^C = (4 – 1)! = 6. Desse modo, podemos configurar de 6 formas os círculos de 4 pessoas, e como são 210 grupos possíveis, podemos multiplicar esses valores pela regra do produto, assim 210 * 6 = 1260. Logo, temos 1260 formas diferentes podemos acomodar 4 de um grupo de 10 pessoas em uma mesa circular.

Exercício 9:

Para encontrar quantas variáveis diferentes poderiam ser nomeadas em C devemos dividir este problema em 8 situações.

Notação:
Letra Maiúsculas = LA - Letra Minúsculas = LI - Dígitos = DG - Underscore = U;

1° Situação: Considerando uma variável com 1 elemento, podemos dividir a variável em 1° elemento. Sabendo disso, temos 53 opções para o primeiro elemento (26LA + 26LI + 1U). Com isso, com variável de um elemento podemos escrever 53 variáveis diferentes.

2° Situação: Considerando uma variável com 2 elementos, podemos dividir a variável em 1° e 2° elementos. Sabendo disso, temos 53 opções para o primeiro elemento (26LA + 26LI + 1U) e 63 opções para o segundo elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG). Com isso, pela regra do produto, temos que 53 * 63 corresponde ao total de variáveis que podem ser escritos com uma variável de dois elementos.

3° Situação: Considerando uma variável com 3 elementos, podemos dividir a variável em 1°, 2° e 3° elementos. Sabendo disso, temos 53 opções para o primeiro elemento (26LA + 26LI + 1U), 63 opções para o segundo elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG) e 63 opções para o terceiro elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG). Com isso, pela regra do produto, temos que 53 * 63^2 corresponde ao total de variáveis que podem ser escritos com uma variável de três elementos.

4° Situação: Considerando uma variável com 4 elementos, podemos dividir a variável em 1°, 2°, 3° e 4° elementos. Sabendo disso, temos 53 opções para o primeiro elemento (26LA + 26LI + 1U), 63 opções para o segundo elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG), 63 opções para o terceiro elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG) e 63 opções para o quarto elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG). Com isso, pela regra do produto, temos que 53 * 63^3 corresponde ao total de variáveis que podem ser escritos com uma variável de quatro elementos.

5° Situação: Considerando uma variável com 5 elementos, podemos dividir a variável em 1°, 2°, 3°, 4° e 5° elementos. Sabendo disso, temos 53 opções para o primeiro elemento (26LA + 26LI + 1U), 63 opções para o segundo elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG), 63 opções para o terceiro elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG), 63 opções para o quarto elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG) e 63 opções para o quinto elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG). Com isso, pela regra do produto, temos que 53 * 63^4 corresponde ao total de variáveis que podem ser escritos com uma variável de cinco elementos.

6° Situação: Considerando uma variável com 6 elementos, podemos dividir a variável em 1°, 2°, 3°, 4°, 5° e 6° elementos. Sabendo disso, temos 53 opções para o primeiro elemento (26LA + 26LI + 1U), 63 opções para o segundo elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG), 63 opções para o terceiro elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG), 63 opções para o quarto elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG), 63 opções para o quinto elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG) e 63 opções para o sexto elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG). Com isso, pela regra do produto, temos que 53 * 63^5 corresponde ao total de variáveis que podem ser escritos com uma variável de seis elementos.

7° Situação: Considerando uma variável com 7 elementos, podemos dividir a variável em 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6° e 7° elementos. Sabendo disso, temos 53 opções para o primeiro elemento (26LA + 26LI + 1U), 63 opções para o segundo elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG), 63 opções para o terceiro elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG), 63 opções para o quarto elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG), 63 opções para o quinto elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG), 63 opções para o sexto elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG) e 63 opções para o sétimo elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG). Com isso, pela regra do produto, temos que 53 * 63^6 corresponde ao total de variáveis que podem ser escritos com uma variável de sete elementos.

8° Situação: Considerando uma variável com 8 elementos, podemos dividir a variável em 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, 7° e 8° elementos. Sabendo disso, temos 53 opções para o primeiro elemento (26LA + 26LI + 1U), 63 opções para o segundo elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG), 63 opções para o terceiro elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG), 63 opções para o quarto elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG), 63 opções para o quinto elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG), 63 opções para o sexto elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG), 63 opções para o sétimo elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG) e 63 opções para o oitavo elemento (26LA + 26LI + 1U + 10DG). Com isso, pela regra do produto, temos que 53 * 63^7 corresponde ao total de variáveis que podem ser escritos com uma variável de oito elementos.

Dessa forma, encontramos todas as situações para uma variável de tamanho menor ou igual a 8 elementos e maior ou igual a 1 elemento. Com isso, a soma dos valores encontrados em cada situação corresponde quantas variáveis diferentes poderiam ser nomeadas em C. Assim, pela regra da soma, temos que 53 + 53 * 63 + 53 * 63^2 + 53 * 63^3 + 53 * 63^4 + 53 * 63^5 + 53 * 63^6 + 53 * 63^7 corresponde ao valor de quantas variáveis diferentes poderiam ser nomeadas em C.

Exercício 10:

Letra A) Considerando as permutações de ABCDEFGH, queremos que suas permutações contenham a string CD. Sabendo disso, podemos dividir os elementos de ABCDEFGH em primeiro, em segundo, em terceiro e até o oitavo elemento. Como queremos que as permutações de ABCDEFGH contenham a string CD, devemos considerar CD como um único elemento (bloco único). Desse modo, temos 7 opções para o primeiro elemento, 6 opções para o segundo elemento, 5 opções para o terceiro elemento, 4 opções para o quarto elemento, 3 opções para o quinto elemento, 2 opções para o sexto elemento e por fim 1 opção para o 7 elemento. Com isso, podemos perceber uma permutação de 7! = 5040. Com isso, temos 5040 permutações de ABCDEFGH que contêm a string CD.

Letra B) Considerando as permutações de ABCDEFGH, queremos que suas permutações contenham a string CD e FGH. Sabendo disso, podemos dividir os elementos de ABCDEFGH em primeiro, em segundo, em terceiro e até o oitavo elemento. Como queremos que as permutações de ABCDEFGH contenham a string CD e FGH, devemos considerar CD e FGH como um único elemento (bloco único). Desse modo, temos 5 opções para o primeiro elemento, 4 opções para o segundo elemento, 3 opções para o terceiro elemento, 2 opções para o quarto elemento e 1 opções para o quinto elemento. Com isso, podemos perceber uma permutação de 5! = 120. Com isso, temos 120 permutações de ABCDEFGH que contêm a string CD e FGH.

Letra C) Considerando as permutações de ABCDEFGH, queremos que suas permutações contenham a string AB, CD e GH. Sabendo disso, podemos dividir os elementos de ABCDEFGH em primeiro, em segundo, em terceiro e até o oitavo elemento. Como queremos que as permutações de ABCDEFGH contenham a string AB, CD e GH, devemos considerar AB, CD e GH como um único elemento (bloco único). Desse modo, temos 5 opções para o primeiro elemento, 4 opções para o segundo elemento, 3 opções para o terceiro elemento, 2 opções para o quarto elemento e 1 opções para o quinto elemento. Com isso, podemos perceber uma permutação de 5! = 120. Com isso, temos 120 permutações de ABCDEFGH que contêm a string AB, CD e GH.

Letra D) Considerando as permutações de ABCDEFGH, queremos que suas permutações contenham a string ABC e CDE. Sabendo disso, podemos dividir os elementos de ABCDEFGH em primeiro, em segundo, em terceiro e até o oitavo elemento. Como queremos que as permutações de ABCDEFGH contenham a string ABC e CDE, devemos considerar somente uma string ABCDE pois as strings ABC e CDE compartilham uma mesma letra (letra C), logo devemos considerar ABCDE como um único elemento (bloco único). Desse modo, temos 4 opções para o primeiro elemento, 3 opções para o segundo elemento, 2 opções para o terceiro elemento e 1 opcao para o quarto elemento. Com isso, podemos perceber uma permutação de 4! = 24. Com isso, temos 24 permutações de ABCDEFGH que contêm a string ABC e CDE.

Letra E) Considerando as permutações de ABCDEFGH, queremos que suas permutações contenham a string ABC e HCB. Sabendo disso, podemos dividir os elementos de ABCDEFGH em primeiro, em segundo, em terceiro e até o oitavo elemento. Contudo, devido a disposição dos elementos B e C em ambos as strings é impossível que eles coexistam em uma mesma sequência, uma vez que na string ABC, a ordem dessas duas letras esta invertida em relação à string HCB. Ademais, a letra A e a letra H competem pelo mesmo espaço nas strings, portanto o número de permutações que contêm as strings ABC e HCB é igual a 0.

Exercício 11:

Letra A) Sabendo que existem uma string de 16 bits, queremos encontrar quantos existem contento exatamente 5 bits 1. Diante disso, sabemos que os bits não preenchidos por 1, serão preenchidos por 0. Baseado nisso, podemos calcular através da permutação simples. Com isso, temos $C_{16,5}$ = 16! / (5! * 11!) = 4368. Logos, temos 4368 strings possíveis.

Letra B) Sabendo que existem uma string de 16 bits, queremos saber em quantos desses 5 bits 1 não existem 1's consecutivos. Para isso, precisamos encontrar o total de strings possíveis de se formar com 5 bits e subtrair as strings que possuem pelo menos dois 1's consecutivos, assim teremos o total de strings que não contam com 1's consecutivos. Para isso, devemos dividir esse problema em 6 situações:

1° Situação (5 bits 1's consecutivos): Devemos calcular quantas formas existem da string com 5 bits consecutivos

Casos																	**Formas**
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

3	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
																	Total = 12

2° Situação (4 bits 1's consecutivos): Devemos calcular quantas formas existem da string com 4 bits consecutivos.

Casos																	**Formas**
1	1	1	1	1	0												11! / (10! * 1!) = 11
2		0	1	1	1	1	0										10! / (9! * 1!) = 10
3			0	1	1	1	1	0									10! / (9! * 1!) = 10
4				0	1	1	1	1	0								10! / (9! * 1!) = 10
5					0	1	1	1	1	0							10! / (9! * 1!) = 10
6						0	1	1	1	1	0						10! / (9! * 1!) = 10
7							0	1	1	1	1	0					10! / (9! * 1!) = 10
8								0	1	1	1	1	0				10! / (9! * 1!) = 10
9									0	1	1	1	1	0			10! / (9! * 1!) = 10
10										0	1	1	1	1	0		10! / (9! * 1!) = 10
11											0	1	1	1	1	0	10! / (9! * 1!) = 10
12												0	1	1	1	1	11! / (10! * 1!) = 11
																	Total = 122

3° Situação (3 bits 1's consecutivos): Devemos calcular quantas formas existem da string com 3 bits consecutivos.

Casos																	**Formas**
1	1	1	1	0													12! / (10! * 2!) = 66
2		0	1	1	1	0											11! / (10! * 2!) = 55
3			0	1	1	1	0										11! / (10! * 2!) = 55
4					0	1	1	1	0								11! / (10! * 2!) = 55
5						0	1	1	1	0							11! / (10! * 2!) = 55
6							0	1	1	1	0						11! / (10! * 2!) = 55
7								0	1	1	1	0					11! / (10! * 2!) = 55
8									0	1	1	1	0				11! / (10! * 2!) = 55
9										0	1	1	1	0			11! / (10! * 2!) = 55
10											0	1	1	1	0		11! / (10! * 2!) = 55
11												0	1	1	1	0	11! / (10! * 2!) = 55
12													0	1	1	1	12! / (10! * 2!) = 66

	Total = 682

4° Situação (2 bits 1’s consecutivos): Devemos calcular quantas formas existem da string com 2 bits consecutivos.

Casos																	**Formas**
1	1	1	0														13! / (10! * 3!) = 286
2		0	1	1	0												12! / (9! * 3!) = 220
3			0	1	1	0											12! / (9! * 3!) = 220
4				0	1	1	0										12! / (9! * 3!) = 220
5					0	1	1	0									12! / (9! * 3!) = 220
6						0	1	1	0								12! / (9! * 3!) = 220
7							0	1	1	0							12! / (9! * 3!) = 220
8								0	1	1	0						12! / (9! * 3!) = 220
9									0	1	1	0					12! / (9! * 3!) = 220
10										0	1	1	0				12! / (9! * 3!) = 220
11											0	1	1	0			12! / (9! * 3!) = 220
12												0	1	1	0		12! / (9! * 3!) = 220
13													0	1	1	0	12! / (9! * 3!) = 220
14														0	1	1	13! / (10! * 3!) = 286
																	Total = 3212

5° Situação (2 bits 1’s e 3 bits 1’s consecutivos): Precisamos remover esses elementos da contagem pois estão já foram contabilizados:

Casos																	**Consecutivos com 3 bits 1**
1	1	1	0														11
2		0	1	1	0												9
3			0	1	1	0											8
4				0	1	1	0										8
5					0	1	1	0									8
6						0	1	1	0								8
7							0	1	1	0							8
8								0	1	1	0						8
9									0	1	1	0					8
10										0	1	1	0				8
11											0	1	1	0			8
12												0	1	1	0		9
13													0	1	1	0	10
14														0	1	1	11
																	Total = 122

6° Situação (2 bits 1’s e 2 bits 1’s consecutivos): Precisamos remover esses elementos da contagem pois estão já foram contabilizados:

Casos		**Sobrepostos com 2 bits 1**

1	1	1	0														11
2		0	1	1	0												10
3			0	1	1	0											10
4				0	1	1	0										10
5					0	1	1	0									10
6						0	1	1	0								10
7							0	1	1	0							10
8								0	1	1	0						10
9									0	1	1	0					10
10										0	1	1	0				10
11											0	1	1	0			10
12												0	1	1	0		10
13													0	1	1	0	11
14														0	1	1	11
																	Total = 143

Logo, a quantidade de formas possíveis de formar as strings com pelo menos 2 bits 1's consecutivos é de 12 + 122 + 682 + 3212 – 122 – 143 = 3763 formas. Desse modo, temos que 4368 - 3763 = 605. Logo, existem 792 formas sem bits 1 's consecutivos

Exercício 12:

Letra A) Sabendo que existem 9 homens e 7 mulheres, temos um total de 16 pessoas para formar uma comissão de 5 membros. Além disso, deve haver pelo menos 1 mulher no comitê, podemos escolher 1 das 7 mulheres e 4 dos 15 membros restantes para complementar o comitê. Com isso, temos 7 * $C_{15,4}$ = 7 * 15! / (4! * 11!) = 9555 formas. Contudo, como a mulher pode estar em qualquer uma das 5 posições, pela regra da divisão, devemos dividir esse valor por 5 para remover os valores com repetições, com isso temos 9555 / 5 = 1911. Logo, temos 1911 formas de criar uma comissão com 5 membros com pelo menos uma mulher.

Letra B) Sabendo que existem 9 homens e 6 mulheres, temos um total de 16 pessoas para formar uma comissão de 5 membros. Além disso, deve haver pelo menos 1 mulher e pelo menos 1 homem no comitê. Diante disso, para encontrarmos quantas comissões são possíveis com essa condição, devemos dividir o problema em 3 situações:

1° Situação (Comitês formados independente do sexo): Sabendo que existem 9 homens e 7 mulheres, temos um total de 16 pessoas para formar uma comissão de 5 membros. Como não há restrições no problema, podemos utilizar a fórmula de combinação. Com isso, temos $C_{16,5}$ = 16! / (5! * 11!) = 4368. Logo, temos 4368 formas de criar uma comissão com 5 membros independente do sexo.

2° Situação (Comitês formados somente por mulheres): Sabendo que existem 9 homens e 7 mulheres, temos um total de 16 pessoas para formar uma comissão de 5 membros. Como não há restrições no problema, podemos utilizar a fórmula de combinação. Com isso, temos $C_{7,5}$ = 7! / (5! * 2!) = 21. Logo, temos 21 formas de criar uma comissão com 5 membros somente com mulheres.

3° Situação (Comitês formados somente por homens): Sabendo que existem 9 homens e 7 mulheres, temos um total de 16 pessoas para formar uma comissão de 5 membros. Como não há restrições no problema, podemos utilizar a fórmula de combinação. Com isso, temos $C_{9,5}$ = 9! / (5! * 4!) = 126. Logo, temos 126 formas de criar uma comissão com 5 membros somente com homens.

Desse modo, para saber quantas comissões de 5 pessoas são possíveis com pelo menos 1 homem e pelo menos 1 mulher, basta subtrair o número de comitês formados somente por homens (3° Situação) e subtrair o número de comitês formados somente por mulheres (2° Situação) do número de comitês formados independente do sexo (1° Situação). Com isso temos, 4368 - 21 - 126 = 4221. Logo, temos 4221 formas de criar uma comissão de 5 membros com pelo menos um homem e pelo menos uma mulher.

Exercício 13:

Letra A) Supondo que 6 computadores sejam colocados em 3 laboratórios, queremos saber de quantas formas isso pode ser feito se os computadores e laboratórios são considerados idênticos. Sabendo que os computadores e laboratórios são iguais, desse modo não importa em qual laboratório eles estão. Com isso, podemos dividi-los da seguinte forma:
Sendo LB1 o laboratório 1, LB2 o laboratório 2 e LB3 o laboratório 3, temos:

- 2 computadores no LB1, 2 computadores no LB2 e 2 computadores no LB3;
- 3 computadores no LB1, 1 computador no LB2 e 2 computadores no LB3;
- 3 computadores no LB1 e 3 computadores no LB2;
- 4 computadores no LB1 e 2 computadores no LB2;
- 4 computadores no LB1, 1 computador no LB2 e 1 computador no LB3;
- 5 computadores no LB1 e 1 computador no LB2.
- 6 computadores no LB1.

Com isso, podemos concluir que existem 7 casos.

Letra B) Supondo que 6 computadores sejam colocados em 3 laboratórios, queremos saber de quantas formas isso pode ser feito se os computadores são considerados idênticos, mas os laboratórios não. Sabendo que estamos distribuindo 6 objetos iguais em 3 locais diferentes, então temos combinação com repetição. Com isso, temos 8! / (6! * 2!) = 28. Logo, temos 28 formas que isso pode ser feito.

Letra C) Supondo que 6 computadores sejam colocados em 3 laboratórios, queremos saber de quantas formas isso pode ser feito se os laboratórios são considerados idênticos, mas os computadores não. Como os laboratórios são idênticos, podemos fazer as seguintes combinações:

- 2 computadores no LB1, 2 computadores no LB2 e 2 computadores no LB3 – Conseguimos distribuir de 45 formas diferentes;
- 3 computadores no LB1, 1 computador no LB2 e 2 computadores no LB3 – Conseguimos distribuir de 30 formas diferentes;
- 3 computadores no LB1 e 3 computadores no LB2 – Conseguimos distribuir de 20 formas diferentes;
- 4 computadores no LB1 e 2 computadores no LB2 – Conseguimos distribuir de 15 formas diferentes;
- 4 computadores no LB1, 1 computador no LB2 e 1 computador no LB3 – Conseguimos distribuir de 15 formas diferentes;
- 5 computadores no LB1 e 1 computador no LB2 – Conseguimos distribuir de 6 formas diferentes.
- 6 computadores no LB1 – Conseguimos distribuir de 0 formas diferentes

Com isso, existem 131 formas que isso pode ser feito.

Letra D) Supondo que 6 computadores sejam colocados em 3 laboratórios, queremos saber de quantas formas isso pode ser feito se os computadores e os laboratórios são considerados distintos. Sabendo que ambos são considerados distintos, podemos fazer as seguintes combinações:

- 2 computadores no LB1, 2 computadores no LB2 e 2 computadores no LB3:
    - 3 * 2 * (6! / (2! * 4!)) * ((4! / 2! * 2!)) = 540 formas;

- 3 computadores no LB1, 1 computador no LB2 e 2 computadores no LB3;
    - 3 * 2 * (6! / (3! * 3!)) * ((3! / 2! * 1!)) = 360 formas;
- 3 computadores no LB1 e 3 computadores no LB2;
    - 3 * 2 * (6! / (3! * 3!)) = 120 formas;
- 4 computadores no LB1 e 2 computadores no LB2;
    - 3 * 2 * (6! / (2! * 4!)) = 90 formas;
- 4 computadores no LB1, 1 computador no LB2 e 1 computador no LB3;
    - 3 * 2 * (6! / (2! * 4!)) * 2 = 180 formas;
- 5 computadores no LB1 e 1 computador no LB2.
    - 3 * 2 * (6! / (5! * 1!)) = 36 formas;
- 6 computadores no LB1.
    - 3 formas;

Logo, pela regra da soma, temos 540 + 360 + 120 + 90 + 180 + 36 + 3 = 1.326 formas que isso pode ser feito.

Exercício 14:

Sabendo que temos de sair do ponto (0,0,0) e chegar no ponto (2,4,3), em que cada movimento é um passo unitário na direção positiva de X, Y ou Z. Diante disso, é notável que devemos andar 2 unidades para direção de X, 4 unidades para direção de Y e 3 unidades para direção de Z. Com isso, podemos perceber que devemos fazer todos esses momentos, independente da ordem de movimentá-los, com isso podemos concluir que a ordem não importa. Dessa forma, devemos permutar esses movimentos, removendo suas respectivas repetições, uma vez que a ordem não importa. Assim, temos que 9! / (2! * 4! * 3!) = 1260. Logos, podemos concluir que existem 1260 maneiras diferentes de chegar no ponto (2,4,3).

Exercício 15:

Letra A) Sabendo que devemos encontrar diferentes existem para a equação x1 + x2 + x3 + x4 = 16 com $x_i \geq 0$. Percebe-se que podemos selecionar 16 vezes entre 4 opcoes (x1, x2, x3, x4). Diante disso, percebe-se que podemos aplicar a formula de combinação por repetição, em que N = 4 e R = 16. Com isso, temos que 19! / (16! * 3!) = 969. Logo, existem 969 soluções diferentes.

Letra B) Sabendo que devemos encontrar diferentes existem para a equação x1 + x2 + x3 + x4 = 16 com $x_i \geq i$. Diante disso, temos x1 = 1, x2 = 2, x3 = 3, x4 = 4. Percebe-se que já foram feitas 10 seleções, como queremos 16, faltam apenas 6. Diante disso, percebe-se que podemos aplicar a formula de combinação por repetição, em que N = 4 e R = 6. Com isso, temos que 9! / (6! * 3!) = 84. Logo, existem 84 soluções diferentes.