Produtos de vetores

Álgebra Linear e Geometria Analítica – Prof. Aline Paliga

3.1 Produto escalar

Chama-se *produto escalar* (ou produto interno usual) de dois vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, e se representa por $\vec{u}.\vec{v}$, ao número real

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Este produto também é indicado por $<\vec{u},\vec{v}>$

e lê-se "$\vec{u}$ escalar $\vec{v}$"

Exemplo: Se $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, tem-se

$$\vec{u}.\,\vec{v} = 3\times 4 + (-5)\times(-2) + 8\times(-1) = 12 + 10 - 8 = 14$$

3.2 Módulo de um vetor

Módulo de um vetor $\vec{v}$=(x,y,z), representado por $|\vec{v}|$, é o número real não negativo

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}}$$

ou, em coordenadas,

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x,y,z).(x,y,z)} \quad \text{ou} \quad |\vec{v}| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

Exemplo: Se $\vec{v} = (2,1,-2)$, então:

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

Observações:

a) Versor de um vetor

Se o versor do vetor v do exemplo dado for designado por $\vec{u}$, tem-se:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

b) Distância entre dois pontos

A distância d entre os pontos $A(x_1,y_1,z_1)$ e $B(x_2,y_2,z_2)$ é assim definida:

$$d = |\overrightarrow{AB}| = |B - A| \quad \text{e, portanto,}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

3.3 Propriedades do produto escalar

Para quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{v}=(x_2, y_2,z_2)$, $\vec{w}=(x_2, y_2,z_2)$, e $m\in\mathbb{R}$, é fácil verificar que:

I) $\vec{u}.\vec{u}=0$ somente se $\vec{u}=\vec{0}=(0,0,0)$

II) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

III) $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

IV) $m\vec{u}.\left(\vec{v}\right)=m\left(\vec{u}.\vec{v}\right)=\vec{u}.\left(m\vec{v}\right)$

V) $\vec{u}.\vec{u}=\left|\vec{u}\right|^2$

3.4 ÂNGULO DE DOIS VETORES

O produto escalar de dois vetores está relacionado com o ângulo por eles formados. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e se θ é o ângulo formado por eles, então:

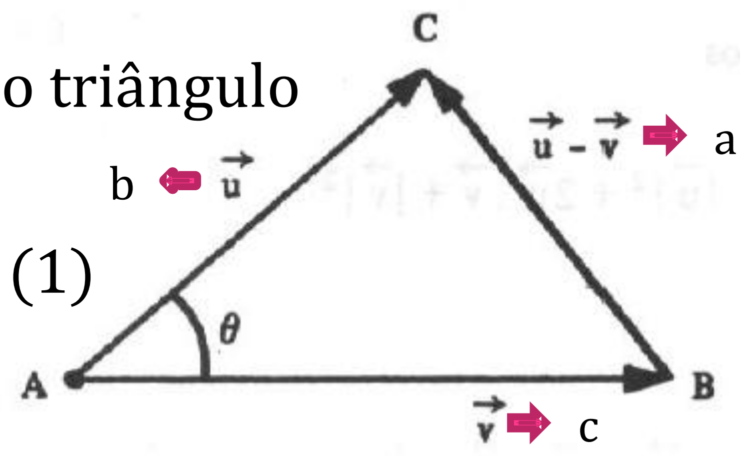
$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

Prova:

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ABC, temos:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \quad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$



Por outro lado, de acordo com as propriedades II, III e V do produto escalar :

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$$

$$\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$$

$$\vec{u}.\vec{u} = \left|\vec{u}\right|^2$$

$$\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} \qquad (2)$$

Comparando as igualdades (2) e (1):

$$\left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - 2\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta$$

logo:

$$\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta$$

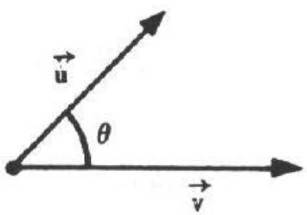
Observações:

$$\vec{u}.\vec{v} > 0$$

$$\cos\theta > 0$$

$$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$$

θ *agudo ou nulo*

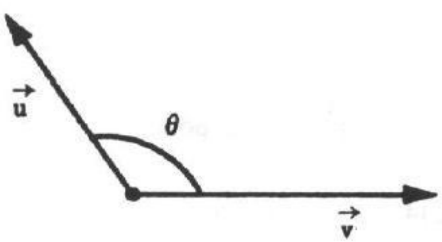


$$\vec{u}.\vec{v} < 0$$

$$\cos\theta < 0$$

$$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$$

θ *obtuso ou raso*

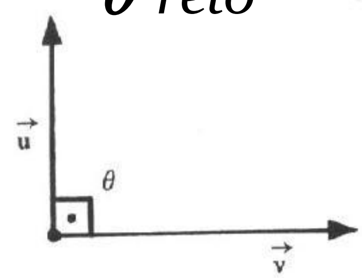


$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

$$\cos\theta = 0$$

$$\theta = 90^\circ$$

θ *reto*



3.4.1 Cálculo do ângulo entre dois vetores

Da fórmula $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ vem:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

3.4.2 Condição de ortogonalidade de dois vetores

Dois vetores são ortogonais quando:

$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

Exemplo:

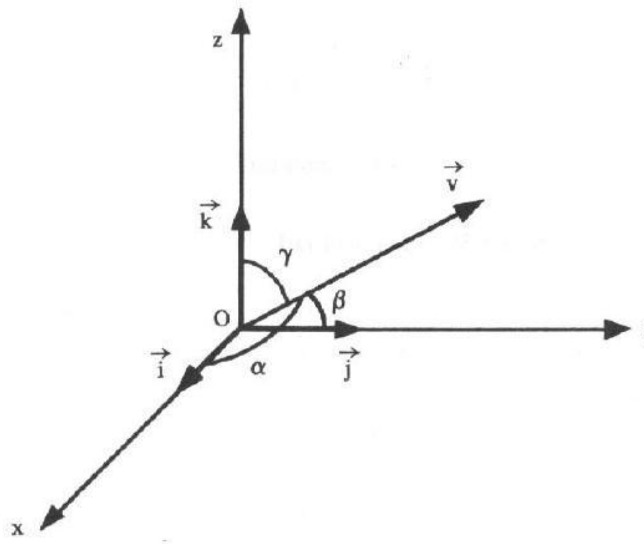
3.5 ÂNGULOS DIRETORES E COSSENOS DIRETORES DE UM VETOR

Ângulos diretores de um vetor $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ são os ângulos α, β e γ que $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente. Os cossenos diretores de seus ângulos diretores são dados por:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}.\vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{(x,y,z).(1,0,0)}{|\vec{v}|1} = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}.\vec{j}}{|\vec{v}||\vec{j}|} = \frac{(x,y,z).(0,1,0)}{|\vec{v}|1} = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{v}.\vec{k}}{|\vec{v}||\vec{k}|} = \frac{(x,y,z).(0,0,1)}{|\vec{v}|1} = \frac{z}{|\vec{v}|}$$



3.5.1 Propriedades

I) O versor $\vec{u}$ do vetor $\vec{v}=(x,y,z)$

$$\vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{(x,y,z)}{|\vec{v}|}=\left(\frac{x}{|\vec{v}|},\frac{y}{|\vec{v}|},\frac{z}{|\vec{v}|}\right)$$ ou

$$\vec{u}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

II) Como o versor de $\vec{v}$ é um vetor unitário, tem-se:

$$|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)|=1$$

mas:

$$|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)|=\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}$$ logo:

$$\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=1$$

e:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

3.6 Produto vetorial

Dados os vetores $\vec{u}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ e $\vec{v}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, tomados nesta ordem chama-se produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e se representa por $\vec{u} \times \vec{v}$ (ou $\vec{u} \wedge \vec{v}$), ao vetor:

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v}=(y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i}-(x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j}+(x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}}$$

cada componente desse vetor pode ainda ser expresso na forma de um determinante de 2º ordem:

$$\vec{u} \times \vec{v}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Lê-se: "$\vec{u}$ vetorial $\vec{v}$"

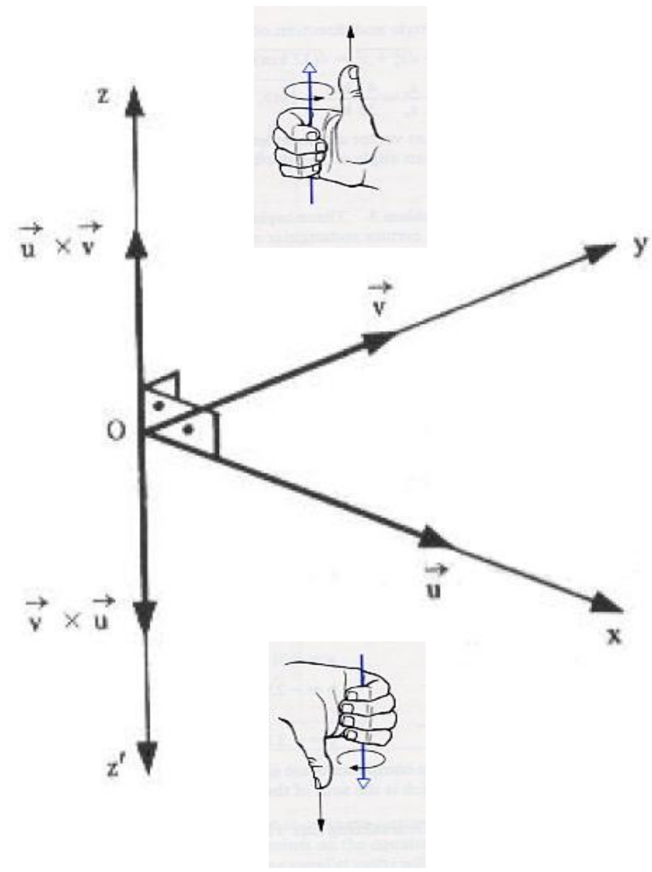
Exemplo:

Cálculo do produto vetorial dos vetores $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$

$\vec{u} \times \vec{v}$

$\vec{v} \times \vec{u}$

$\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal simultaneamente aos vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ e seu sentido é dado pela regra da mão direita



3.7 Propriedades do produto vetorial

I) $\vec{u} \times \vec{u} = 0$, qualquer que seja o $\vec{u}$

$$\vec{u} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

II) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ anticomutativa

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$-\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x_2 & -y_2 & -z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

III) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

$$\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

$$\vec{v} + \vec{w} = (x_2 + x_3)\vec{i} + (y_2 + y_3)\vec{j} + (z_2 + z_3)\vec{k}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 + x_3 & y_2 + y_3 & z_2 + z_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

IV) $\left(m\vec{u}\right) \times \vec{v} = m\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = \vec{u} \times \left(m\vec{v}\right)$

$$m\vec{u} \times \vec{v} = m\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

V) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, um dos vetores é nulo ou se eles forem colineares.

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} = m\vec{v}$$

$$\vec{u} = mx_2\vec{i} + my_2\vec{j} + mz_2\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ mx_2 & my_2 & mz_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

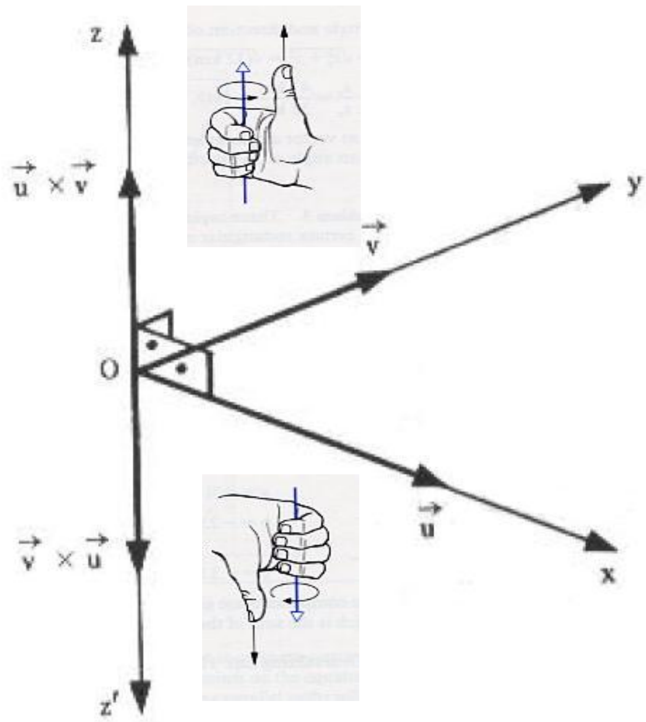
VI) $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| \, sen\theta$

Relações entre os vetores canônicos:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

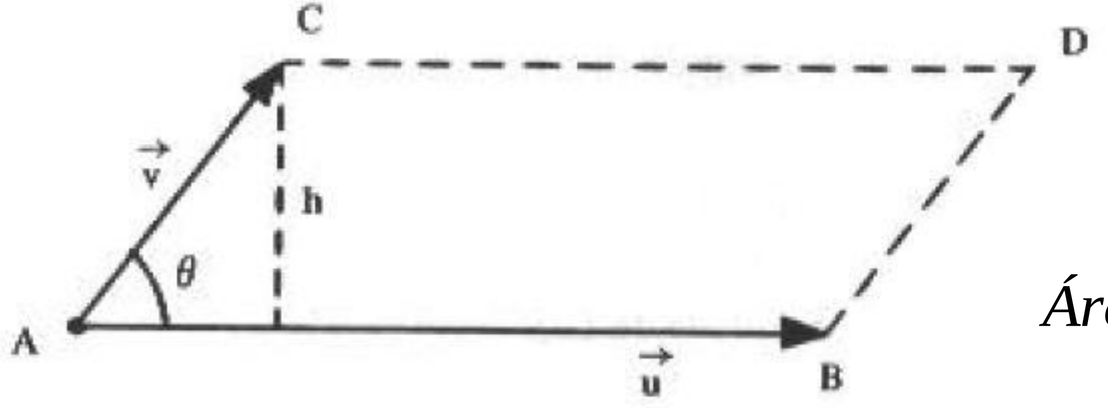
$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}$$



3.8 Interpretação geométrica do módulo do produto vetorial

Geometricamente, o módulo do produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede a área do paralelogramo ABCD determinado pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$



$$Área = |\vec{u}|\, h$$

$$h = |\vec{v}|\, sen\theta$$

$$Área = |\vec{u}||\vec{v}|\, sen\theta$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\ sen\theta$$

$$Área = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

3.9 Produto misto

Chama-se *produto misto* dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, tomados nesta ordem, ao número real $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)$. Indica-se o produto misto por $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w}\right) = \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = x_1 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_1 \left(- \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \right) + z_1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo:

Calcular o produto misto dos vetores:

$\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}, \quad \vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} \;$ e $\; \vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}.$

$$\left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} - \\ \\ + \end{matrix}$$

$$= 2\times 3\times 2 + (-1)\times(-3)\times 5 + 3\times 3\times 4 - \left[5\times 3\times 4 + (-1)\times 3\times 2 + 3\times(-3)\times 2\right]$$

$$= 12 + 15 + 36 - \left[60 + (-6) + (-18)\right]$$

$$= 63 - 60 + 6 + 18$$

$$= 27$$

3.10 Propriedades do produto misto

I) $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = 0$

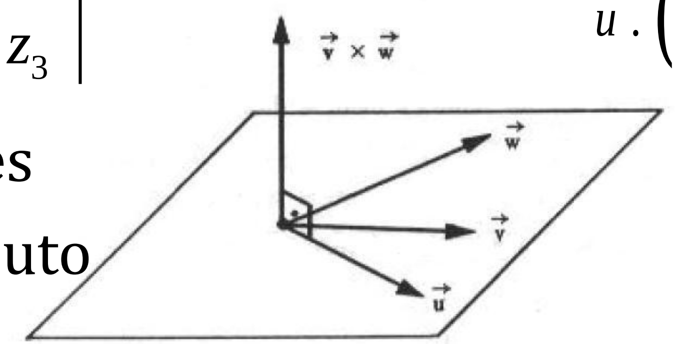
a)se um dos vetores for nulo

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

b)se dois deles são colineares

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} mx_2 & my_2 & mz_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

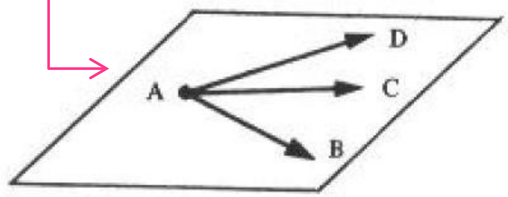
$\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)$

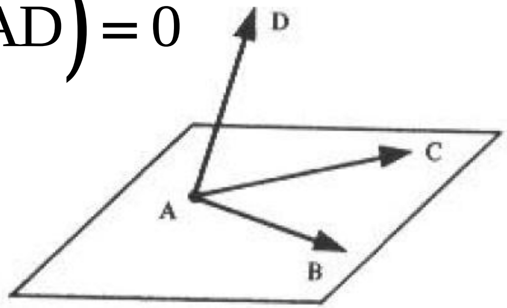


c)se três são coplanares

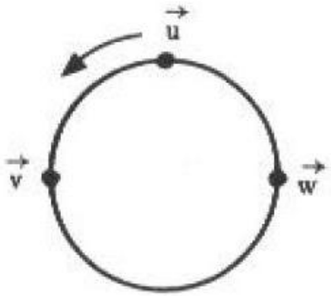
$\vec{u} \perp \vec{v} \times \vec{w}$ então produto escalar é nulo.

Se forma análoga, dizemos que quatro pontos A, B, C e D pertencem a um mesmo plano, se os vetores são coplanares ou $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)=0$





II)O produto misto independe da ordem circula dos vetores: $\left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right)=\left(\vec{v},\ \vec{w},\ \vec{u}\right)=\left(\vec{w},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$



Mas muda de sinal quando trocamos as posições de dois vetores consecutivos:

$$\left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right)=-\left(\vec{v},\ \vec{u},\ \vec{w}\right)$$

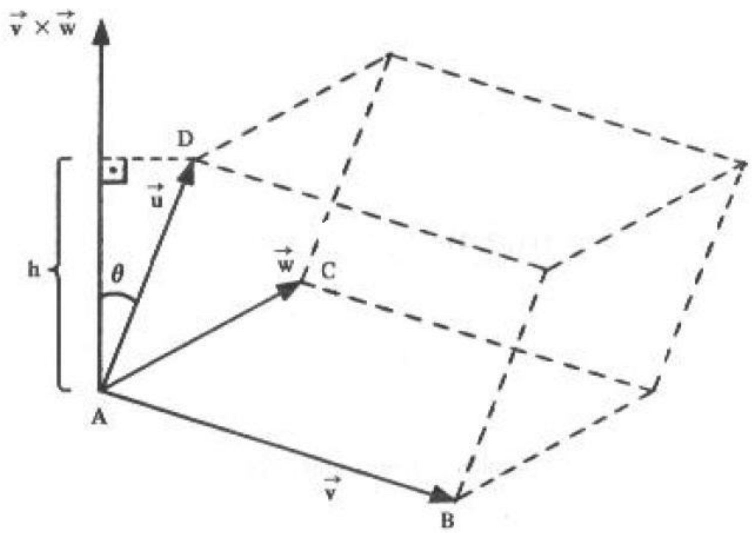
Esta propriedade cíclica, se deve a propriedade dos determinantes referente à troca de duas linhas e circulação de linhas.

$$\text{III)}\ \left(\vec{u},\ \vec{\mathrm{v}},\ \vec{\mathrm{w}}+\vec{r}\right)=\left(\vec{u},\ \vec{\mathrm{v}},\ \vec{\mathrm{w}}\right)+\left(\vec{u},\ \vec{\mathrm{v}},\ \vec{\mathrm{r}}\right)$$

$$\text{IV)}\ \left(\vec{u},\ \vec{\mathrm{v}},\ \mathrm{m}\vec{\mathrm{w}}\right)=\left(\vec{u},\ \mathrm{m}\vec{\mathrm{v}},\ \vec{\mathrm{w}}\right)=\left(m\vec{u},\ \vec{\mathrm{v}},\ \vec{\mathrm{w}}\right)=m\left(\vec{u},\ \vec{\mathrm{v}},\ \vec{\mathrm{w}}\right)$$

3.11 Interpretação geométrica do produto misto

Geometricamente, o produto misto é igual, em módulo, ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$



$$V = \textit{área da base} \times \text{altura}$$

$$V = \mathrm{A_b} \times h$$

$$A_b = |\vec{v} \times \vec{w}|$$

$$h = |\vec{u}||\cos\theta|$$

$$V = |\vec{v} \times \vec{w}||\vec{u}||\cos\theta|$$

$$V = |\vec{u}||\vec{v} \times \vec{w}||\cos\theta|$$

fazendo:

$$\vec{a} = \vec{v} \times \vec{w}$$

$$V = \left|\vec{\mathrm{u}}\right|\left|\vec{a}\right|\left|\cos\theta\right| \qquad (1)$$

$$\vec{u}\ .\ \vec{a} = \left|\vec{\mathrm{u}}\right|\left|\vec{a}\right|\cos\theta$$

$$\left|\vec{u}\ .\ \vec{a}\right| = \left|\vec{\mathrm{u}}\right|\left|\vec{a}\right|\left|\cos\theta\right| \qquad (2)$$

comparando (1) com (2)

$$V = \left|\vec{u}\ .\ \vec{a}\right| = \left|\vec{u}\ .\ \left(\vec{v}\ \times\ \vec{\mathrm{w}}\right)\right| = \left|\left(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{\mathrm{w}}\right)\right|$$