

Exemplos, contra-exemplos e conjecturas

Os exercícios a seguir envolvem problemas que podem ser resolvidos com auxílio de computador. A ideia é criar programas para fazer os cálculos e encontrar os resultados. Então, devem ser entregues os programas feitos e um relatório com as respostas e os resultados encontrados.

1. Em aula vimos que o número 1729 pode ser escrito como a soma de cubos de inteiros positivos de duas maneiras diferentes. No caso, $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$. Procure outros com esta propriedade.
2. Em aula vimos que o número 79 não pode ser escrito como a soma de quartas potências de 18 valores inteiros. Procure outros com esta propriedade.
3. Procure por números de Fibonacci que sejam divisíveis por 5. Escreva uma conjectura¹ sobre o resultado.
4. Procure por números de Fibonacci que sejam divisíveis por 3. Escreva uma conjectura sobre o resultado.
Não é necessário provar essas conjecturas, mas seria interessante propor uma prova.
5. Verifique que $\binom{2n}{n}$ é divisível pelo quadrado de um número primo para quantos n você conseguir².
Obs.: como $n!$ causa overflow até para n pequeno, melhor calcular o resultado usando triângulo de Pascal.
6. Encontre a maior quantidade de inteiros ímpares $n \leq 200$ que você conseguir, tais que $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ não seja divisível pelo quadrado de um número primo. Formula uma conjectura baseada em seus resultados.

¹Algo que é possível inferir ou deduzir com base nos resultados e evidências coletadas, um palpite.

²O fato que $\binom{2n}{n}$ é divisível pelo quadrado de um número primo, para $n \neq 1, 2, 4$, foi provado por Andrew Granville and Olivier Ramaré em 1996, resolvendo uma conjectura proposta em 1980 por Paul Erdős e Ron Graham.