UFV - Universidade Federal de Viçosa
DPI - Departamento de Informática
Prof. André Gustavo dos Santos
INF 230 - Matemática Discreta - 2022/1

Lista de Exercícios 4
Para quinta, 4/ago/2022

Recorrências e funções geradoras

1. Uma máquina de venda automática aceita apenas moedas de \$1 e \$5. O número de maneiras de pagar um valor n, em que a ordem de inserção das moedas importa, pode ser calculado pela relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + a_{n-5}$ para $n \geq 5$ com condições inicias $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$.

A explicação é que, para $n < 5$, só há uma forma, que é inserir moedas de \$1 até completar o valor; já para $n \geq 5$, pode-se inserir uma moeda de \$1, restando $n-1$ a pagar, que pode ser pago de a_{n-1} formas, ou inserir uma moeda de \$5, restando $n-5$, que pode ser pago de a_{n-5} formas.

a) Use a relação de recorrência para encontrar os valores de a_6, a_7, a_8, a_9 e a_{10}
b) Enumere todas as a_{10} formas de pagar \$10

2. No exercício anterior, a ordem de inserção das moedas importava na contagem. Por exemplo, inserir 1+1+5, 1+5+1 e 5+1+1 eram contados como formas diferentes. Se a ordem de inserção não importasse, elas seriam consideradas indistinguíveis e haveria apenas 2 formas de pagar \$7: inserir 7 moedas de \$1 ou inserir uma moeda de \$5 e duas de \$1.

O número de maneiras de pagar um valor n quando a ordem de inserção não importa pode ser calculado utilizando funções geradoras. É o coeficiente de x^n em $(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}\dots)$.

A explicação é que o primeiro fator representa quantas moedas de \$1 foram usadas e o segundo quantas moedas de \$5. O coeficiente de x^n indica o número de maneiras de obter o expoente n escolhendo um termo do primeiro fator e um do segundo, consequentemente o número de maneiras de totalizar n escolhendo-se moedas de \$1 e \$5.

a) Use uma ferramenta matemática[1] para encontrar os coeficientes de x^6, x^7, x^8, x^9 e x^{10}
b) Enumere todas as formas de pagar \$10

3. Uma assistência técnica recebeu 15 smartphones para reparação. De quantas formas ela pode distribuir esses smartphones aos 6 funcionários, de modo que cada um receba pelo menos 1 e no máximo 3?

a) Mostre como usar funções geradores para calcular o resultado e use uma ferramente matemática para encontrar o valor do resultado.
b) Encontre o resultado de outra maneira (por exemplo, por análise combinatória).

4. Certo sistema considera como código válido um string de dígitos que contém exatamente um dígito 0. Por exemplo, `2022` é válido, enquanto `1999` e `2020` não são. Queremos saber quantos códigos válidos de n dígitos existem. Por exemplo, existe apenas um válido de 1 dígito (`0`) e existem 18 válidos de 2 dígitos (`01`, `02`, ..., `09`, `10`, `20`, ..., `90`). Seja c_n o número de códigos válidos de n dígitos, $n \geq 1$.

a) Calcule c_n usando análise combinatória *[Dica: coloque o `0` e depois preencha o restante]*
b) Escreva uma relação de recorrência para c_n *[Dica: há duas formas de produzir código válido a partir de um código de $n-1$ bits, colocar um dígito $\neq$`0` após um código válido ou colocar `0` após um código inválido]*
c) Resolva a relação de recorrência encontrada (mostre os cálculos)

[1]Por exemplo: Solumaths, Symbolab, MathPortal

5. Podemos colocar parênteses no produto $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ para determinar a ordem de multiplicação de diversas formas. Por exemplo $x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4)))$ e $(x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot (x_3 \cdot x_4)$.

a) Liste todas as formas possíveis (considere diferentes se impõem ordens diferentes das multiplicações)
b) Use a recorrência desenvolvida em aula para calcular C_4, o número de formas de colocar parênteses em produto de 5 números para determinar a ordem das multiplicações.*[Verifique sua resposta da letra a]*
c) É possível mostrar que $C_n = \binom{2n}{n}/(n+1)$. Calcule por esta fórmula.*[Verifique sua resposta da letra b]*

6. As permutações de n elementos podem ser geradas colocando-se o n-ésimo (último) elemento em todas as posições de todas as permutações dos $n-1$ elementos restantes. Por exemplo, considere os elementos $\{1,2,3\}$. As permutações sem o último elemento são $(1,2)$ e $(2,1)$. Colocando o último elemento, 3, em todas as posições destas permutações obtemos: $(3,1,2)$, $(1,3,2)$, $(1,2,3)$ e $(3,2,1)$, $(2,3,1)$, $(2,1,3)$, que são todas as permutações dos 3 elementos.

a) Escreva uma relação de recorrência para o número de permutações obtidas desta forma
b) Resolva a relação de recorrência e compare o resultado com o obtido por análise combinatória

7. Como vimos, a função geradora de uma sequência $\{a_n\}$ de elementos $a_0, a_1, a_2, \ldots$ é dada por $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$.

Por exemplo, a função geradora da sequência $1,2,3,4\ldots$ é $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$, que, de acordo com a tabela de funções geradoras úteis mostrada em aula (Tabela 1 da seção 8.4 do livro texto), pode ser escrita como $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Para cada sequência a seguir, escreva sua função geradora na forma expandida e na forma compacta, como feito no exemplo acima (consulte a tabela e faça manipulações e substituições, se necessário).

a) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \cdots$
b) $2, 4, 8, 16, 32, 64, \cdots$
c) $3, 3, 3, 3, 3, \cdots$
d) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots$
e) $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \binom{6}{2}, \cdots, \binom{6}{6}$.
f) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots$