

8. Вероятностные классы (и алгоритмы)

1. Докажите, что $\mathcal{ZPP} = \mathcal{RP} \cap \text{co}\mathcal{RP}$

2. Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — целочисленные матрицы $n \times n$, элементы которых по абсолютной величине не больше h . Для проверки равенства $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ пользуемся \mathbf{x} — случайным n -мерным вектором, состоящим из чисел $0 \dots N-1$. Если $\mathbf{A}(\mathbf{Bx}) = \mathbf{Cx}$, предполагаем, что равенство верное, иначе неверное. Для решения обратите внимание на лемму Шварца-Зишпеля.

- Задаём некоторую вероятность ошибки p . Как надо выбрать N , чтобы достичь ошибку, не большую p ?
- Определите, в каких вероятностных классах ($\mathcal{BPP}, \mathcal{RP}, \text{co}\mathcal{RP}, \mathcal{ZPP}$) лежит такая постановка задачи.
- Выбираем также случайный \mathbf{y} с теми же параметрами. Равенство проверяем так: $\mathbf{y}^T \mathbf{ABx} = \mathbf{y}^T \mathbf{Cx}$. Оцените N для такого случая.

3. Покажите, что в задаче сравнения больших чисел вероятность ошибки для больших n меньше $\frac{3}{4}$. Будут ли такие n , для которых вероятность ошибки окажется не больше $\frac{1}{2}$. Предложите способ улучшить этот результат: какие параметры задачи можно подкорректировать, чтобы вероятность ошибки была, к примеру, не больше $\frac{1}{8}$?

4. Определите, в каких из вероятностных классов лежит вероятностный алгоритм для поиска выполняющего набора РОВНО2КНФ, разобранный на семинаре.

5. (Доп) Докажите теорему Татта о паросочетаниях.

6. Докажите, что данная КНФ выполнима:

$$\begin{aligned}
& (\overline{x_{16}} \vee \overline{x_9} \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_{19}} \vee \overline{x_{12}} \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_6} \vee \overline{x_8} \vee \overline{x_{10}} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_7}) \wedge \\
& (x_{13} \vee \overline{x_5} \vee x_{19} \vee \overline{x_3} \vee x_7 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_{10}} \vee x_8 \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_6} \vee x_{16} \vee \overline{x_1}) \wedge \\
& (\overline{x_8} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_2 \vee x_{10} \vee \overline{x_4} \vee x_5 \vee x_{17} \vee x_7 \vee x_{15} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{19} \vee x_{18}) \wedge \\
& (x_{17} \vee x_{12} \vee \overline{x_{13}} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_9 \vee x_{16} \vee x_{15} \vee x_7 \vee x_8 \vee x_{18} \vee x_{11} \vee x_{19}) \wedge \\
& (x_3 \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_2} \vee x_8 \vee x_{10} \vee \overline{x_{17}} \vee \overline{x_7} \vee x_6 \vee \overline{x_{19}} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_{16}} \vee x_1 \vee x_9) \wedge \\
& (\overline{x_8} \vee x_5 \vee x_9 \vee x_6 \vee x_{14} \vee \overline{x_{10}} \vee \overline{x_{12}} \vee \overline{x_4} \vee x_{17} \vee x_{18} \vee \overline{x_1} \vee x_{13} \vee \overline{x_2}) \wedge \\
& (\overline{x_2} \vee \overline{x_7} \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_{13}} \vee x_4 \vee x_1 \vee x_{17} \vee x_{11} \vee x_3 \vee \overline{x_{12}} \vee x_{16} \vee x_8) \wedge \\
& (x_{11} \vee \overline{x_8} \vee \overline{x_7} \vee \overline{x_{14}} \vee x_3 \vee \overline{x_5} \vee x_{16} \vee \overline{x_{13}} \vee \overline{x_1} \vee x_9 \vee x_4 \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_2}) \wedge \\
& (x_{18} \vee \overline{x_2} \vee x_{19} \vee x_{17} \vee \overline{x_1} \vee x_{14} \vee \overline{x_3} \vee x_7 \vee \overline{x_9} \vee \overline{x_{12}} \vee x_{10} \vee x_{11} \vee x_{15}) \wedge \\
& (\overline{x_{13}} \vee x_2 \vee x_7 \vee x_{16} \vee x_{18} \vee x_{14} \vee \overline{x_{12}} \vee x_9 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_{10}} \vee \overline{x_{11}}) \wedge \\
& (\overline{x_{17}} \vee \overline{x_{10}} \vee \overline{x_6} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{12} \vee \overline{x_{16}} \vee x_5 \vee x_{13} \vee x_{15} \vee x_1 \vee x_{14} \vee \overline{x_4}) \wedge \\
& (x_5 \vee \overline{x_9} \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_1} \vee x_{12} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_2} \vee x_{13} \vee x_6 \vee \overline{x_{14}}) \wedge \\
& (\overline{x_2} \vee \overline{x_{19}} \vee \overline{x_9} \vee x_1 \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_{10}} \vee x_{17} \vee x_6 \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_{14}}) \wedge \\
& (x_3 \vee \overline{x_9} \vee x_5 \vee x_6 \vee x_{14} \vee x_{13} \vee \overline{x_{15}} \vee x_{18} \vee \overline{x_8} \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_4} \vee x_{19} \vee \overline{x_{17}}) \wedge \\
& (\overline{x_{15}} \vee x_8 \vee \overline{x_{17}} \vee \overline{x_{13}} \vee x_{10} \vee \overline{x_9} \vee \overline{x_{18}} \vee x_{14} \vee \overline{x_4} \vee x_{11} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_{12}} \vee \overline{x_6}) \wedge \\
& (\overline{x_{14}} \vee \overline{x_{19}} \vee x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_7} \vee x_{10} \vee \overline{x_{17}} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{16} \vee x_5 \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_8} \vee x_6) \wedge \\
& (x_8 \vee x_{18} \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_1} \vee x_{15} \vee x_3 \vee \overline{x_{11}} \vee x_{10} \vee \overline{x_9} \vee x_{19} \vee \overline{x_4} \vee x_{13} \vee \overline{x_5}) \wedge \\
& (\overline{x_{18}} \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_9} \vee x_{14} \vee \overline{x_{17}} \vee x_5 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_{10}} \vee \overline{x_7} \vee \overline{x_3} \vee x_6 \vee x_{12}) \wedge \\
& (x_4 \vee x_8 \vee \overline{x_{12}} \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_{19}} \vee x_{13} \vee \overline{x_9} \vee \overline{x_7} \vee x_1 \vee x_{14}) \wedge \\
& (\overline{x_{15}} \vee \overline{x_3} \vee x_9 \vee \overline{x_7} \vee \overline{x_{16}} \vee x_{11} \vee x_1 \vee \overline{x_8} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_{17}} \vee \overline{x_{19}} \vee \overline{x_{14}} \vee x_4) \wedge \\
& (\overline{x_3} \vee x_5 \vee \overline{x_{10}} \vee x_{17} \vee x_4 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_{18}} \vee x_{13} \vee x_8 \vee \overline{x_{15}} \vee x_2 \vee x_6 \vee x_{16}) \wedge \\
& (\overline{x_5} \vee x_{16} \vee x_8 \vee \overline{x_9} \vee \overline{x_{14}} \vee x_6 \vee \overline{x_{11}} \vee x_{10} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_7} \vee \overline{x_4} \vee x_{18} \vee \overline{x_{15}}) \wedge \\
& (x_{10} \vee \overline{x_7} \vee x_3 \vee x_2 \vee x_{18} \vee x_6 \vee x_8 \vee x_{19} \vee x_{14} \vee x_{17} \vee \overline{x_9} \vee x_{13} \vee x_5) \wedge \\
& (x_7 \vee x_4 \vee x_{12} \vee \overline{x_6} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{10} \vee x_3 \vee x_{17} \vee x_{14} \vee \overline{x_5} \vee x_1 \vee x_{19} \vee x_9) \wedge \\
& (\overline{x_4} \vee x_{19} \vee \overline{x_{18}} \vee x_3 \vee \overline{x_5} \vee x_2 \vee x_9 \vee x_8 \vee \overline{x_{14}} \vee x_{17} \vee \overline{x_6} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_{16}}) \wedge \\
& (x_{14} \vee x_9 \vee x_8 \vee \overline{x_{11}} \vee x_2 \vee \overline{x_{10}} \vee x_6 \vee x_4 \vee x_{12} \vee \overline{x_1} \vee x_{13} \vee \overline{x_{17}} \vee \overline{x_{18}}) \wedge \\
& (\overline{x_3} \vee \overline{x_5} \vee x_{10} \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_1} \vee x_7 \vee \overline{x_{17}} \vee x_8 \vee x_6 \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_{12}} \vee \overline{x_{15}}) \wedge \\
& (\overline{x_{10}} \vee \overline{x_8} \vee \overline{x_4} \vee x_3 \vee x_{19} \vee x_9 \vee x_{11} \vee x_{17} \vee \overline{x_5} \vee x_{14} \vee x_{16} \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_6}) \wedge \\
& (\overline{x_2} \vee x_5 \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_4} \vee x_{18} \vee \overline{x_8} \vee \overline{x_{17}} \vee x_3 \vee x_7 \vee \overline{x_6} \vee x_{14} \vee x_9 \vee \overline{x_{11}}) \wedge \\
& (\overline{x_{14}} \vee \overline{x_{18}} \vee x_{19} \vee x_{13} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_{16} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_{10}} \vee x_8 \vee x_6) \wedge \\
& (\overline{x_8} \vee x_{14} \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_4} \vee x_{12} \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_9} \vee x_{13} \vee x_{17} \vee x_2 \vee \overline{x_7} \vee x_6 \vee x_{18}) \wedge \\
& (x_1 \vee \overline{x_5} \vee x_{10} \vee x_8 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_6} \vee \overline{x_{12}} \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{18} \vee \overline{x_{15}} \vee x_7 \vee \overline{x_3}) \wedge \\
& (x_{16} \vee x_5 \vee x_3 \vee x_{14} \vee x_{18} \vee x_{13} \vee x_6 \vee x_7 \vee x_{11} \vee x_1 \vee x_{12} \vee x_8 \vee x_{19})
\end{aligned}$$

19 переменных, 33 дизъюнкта.