

## 8. Вероятностные классы (и алгоритмы)

1. Докажите, что  $\mathcal{ZPP} = \mathcal{RP} \cap \text{co}\mathcal{RP}$

2. Пусть  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  — целочисленные матрицы  $n \times n$ , элементы которых по абсолютной величине не больше  $h$ . Для проверки равенства  $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$  пользуемся  $\mathbf{x}$  — случайным  $n$ -мерным вектором, состоящим из чисел  $0 \dots N-1$ . Если  $\mathbf{A}(\mathbf{Bx}) = \mathbf{Cx}$ , предполагаем, что равенство верное, иначе неверное. Для решения обратите внимание на лемму Шварца-Зишеля.

- Задаём некоторую вероятность ошибки  $p$ . Как надо выбрать  $N$ , чтобы достичь ошибку, не большую  $p$ ?
- Определите, в каких вероятностных классах ( $\mathcal{BPP}, \mathcal{RP}, \text{co}\mathcal{RP}, \mathcal{ZPP}$ ) лежит такая постановка задачи.
- Выбираем также случайный  $\mathbf{y}$  с теми же параметрами. Равенство проверяем так:  $\mathbf{y}^T \mathbf{ABx} = \mathbf{y}^T \mathbf{Cx}$ . Оцените  $N$  для такого случая.

3. Покажите, что в задаче сравнения больших чисел вероятность ошибки для больших  $n$  меньше  $\frac{3}{4}$ . Будут ли такие  $n$ , для которых вероятность ошибки окажется не больше  $\frac{1}{2}$ . Предложите способ улучшить этот результат: какие параметры задачи можно подкорректировать, чтобы вероятность ошибки была, к примеру, не больше  $\frac{1}{8}$ ?

4. Определите, в каких из вероятностных классов лежит вероятностный алгоритм для поиска выполняющего набора РОВНО2КНФ, разобранный на семинаре.

5. (Доп) Докажите теорему Татта о паросочетаниях.

6. Докажите, что данная КНФ выполнима:

$$\begin{aligned}
& (x_8 \vee x_5 \vee x_{13} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_3} \vee x_{15} \vee x_{12} \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_{17}} \vee x_7 \vee x_{16} \vee x_9) \wedge \\
& (x_8 \vee x_1 \vee x_{14} \vee x_{13} \vee x_{15} \vee x_2 \vee \overline{x_6} \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_{17}} \vee \overline{x_{10}} \vee x_{12} \vee x_{18} \vee x_{16}) \wedge \\
& (\overline{x_{10}} \vee x_9 \vee x_{17} \vee x_{11} \vee x_{13} \vee x_4 \vee x_{14} \vee x_{12} \vee x_1 \vee x_{19} \vee \overline{x_2} \vee x_8 \vee x_7) \wedge \\
& (\overline{x_5} \vee x_4 \vee \overline{x_{17}} \vee x_7 \vee \overline{x_{19}} \vee x_{11} \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_{15}} \vee x_{13} \vee x_{12} \vee \overline{x_2} \vee x_1 \vee x_3) \wedge \\
& (\overline{x_8} \vee \overline{x_{13}} \vee \overline{x_{19}} \vee x_{15} \vee \overline{x_{12}} \vee \overline{x_3} \vee x_{11} \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_{17}} \vee \overline{x_5} \vee x_7 \vee x_{14} \vee \overline{x_{10}}) \wedge \\
& (\overline{x_{14}} \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_5} \vee x_{17} \vee \overline{x_{12}} \vee \overline{x_7} \vee x_3 \vee \overline{x_8} \vee x_{15} \vee x_9 \vee x_{10} \vee \overline{x_1} \vee x_4) \wedge \\
& (x_{10} \vee \overline{x_8} \vee x_{12} \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_{13}} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_6 \vee x_2 \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_1}) \wedge \\
& (\overline{x_{17}} \vee x_3 \vee \overline{x_7} \vee \overline{x_{15}} \vee x_{19} \vee x_{13} \vee \overline{x_8} \vee \overline{x_9} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{10} \vee x_5 \vee x_1 \vee \overline{x_{16}}) \wedge \\
& (\overline{x_{14}} \vee \overline{x_{12}} \vee x_6 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_{16}} \vee x_9 \vee x_2 \vee x_{15} \vee \overline{x_7} \vee x_4 \vee x_{18} \vee x_{11} \vee x_3) \wedge \\
& (\overline{x_3} \vee x_{15} \vee x_4 \vee x_7 \vee \overline{x_{19}} \vee \overline{x_8} \vee x_{13} \vee x_6 \vee x_{14} \vee x_{16} \vee x_{10} \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_1}) \wedge \\
& (\overline{x_{10}} \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_3} \vee x_6 \vee x_9 \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_1} \vee x_4 \vee x_8 \vee x_{12} \vee \overline{x_{14}} \vee x_{13}) \wedge \\
& (\overline{x_5} \vee x_{14} \vee \overline{x_{15}} \vee x_7 \vee \overline{x_{10}} \vee \overline{x_{13}} \vee x_{19} \vee x_{17} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_1 \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_6}) \wedge \\
& (\overline{x_{15}} \vee x_3 \vee x_{16} \vee x_{14} \vee \overline{x_8} \vee x_5 \vee x_9 \vee x_6 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_{13}} \vee x_{19} \vee \overline{x_{18}} \vee x_{11}) \wedge \\
& (\overline{x_2} \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_{19}} \vee \overline{x_8} \vee x_{10} \vee \overline{x_7} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_{12}} \vee x_{14} \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_{13}} \vee x_{17}) \wedge \\
& (\overline{x_1} \vee x_{17} \vee \overline{x_9} \vee \overline{x_{19}} \vee \overline{x_2} \vee x_{12} \vee x_8 \vee \overline{x_{16}} \vee x_{13} \vee x_{15} \vee x_{18} \vee x_{10} \vee x_{11}) \wedge \\
& (x_{15} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_9} \vee \overline{x_{19}} \vee x_{13} \vee x_{12} \vee \overline{x_7} \vee x_6 \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_{11}} \vee x_5 \vee \overline{x_{10}}) \wedge \\
& (x_4 \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_1} \vee x_3 \vee x_{13} \vee \overline{x_{17}} \vee x_{18} \vee x_{14} \vee x_2 \vee x_8 \vee x_5 \vee \overline{x_9} \vee x_{15}) \wedge \\
& (x_{12} \vee x_{19} \vee \overline{x_6} \vee x_3 \vee \overline{x_9} \vee x_{14} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{17} \vee x_{18} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_{10}} \vee \overline{x_7} \vee x_{16}) \wedge \\
& (x_{13} \vee x_{18} \vee \overline{x_9} \vee x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_{19} \vee x_{14} \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_2} \vee x_1 \vee \overline{x_{10}} \vee x_{12} \vee x_8) \wedge \\
& (x_3 \vee \overline{x_{13}} \vee \overline{x_{10}} \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_{15}} \vee x_{12} \vee x_{18} \vee \overline{x_7} \vee x_6 \vee x_{11} \vee x_{19} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_{17}}) \wedge \\
& (\overline{x_9} \vee x_{10} \vee \overline{x_6} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_{16}} \vee x_5 \vee x_{11} \vee x_2 \vee x_7 \vee x_{19} \vee \overline{x_{13}}) \wedge \\
& (x_{13} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_{16}} \vee x_{11} \vee \overline{x_6} \vee \overline{x_3} \vee x_{12} \vee \overline{x_{17}} \vee x_{18} \vee x_5 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_9} \vee x_{14}) \wedge \\
& (\overline{x_{11}} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_7} \vee x_8 \vee \overline{x_5} \vee x_{18} \vee x_{17} \vee \overline{x_3} \vee x_{19} \vee x_{15} \vee x_{14} \vee \overline{x_{12}} \vee x_{16}) \wedge \\
& (\overline{x_{18}} \vee x_5 \vee x_{11} \vee \overline{x_4} \vee x_7 \vee x_{16} \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_{12}} \vee x_8 \vee x_2 \vee x_6 \vee \overline{x_1} \vee x_{13}) \wedge \\
& (x_7 \vee \overline{x_{12}} \vee x_6 \vee x_{13} \vee x_2 \vee \overline{x_9} \vee \overline{x_{19}} \vee x_{15} \vee x_{17} \vee x_5 \vee x_3 \vee x_{16} \vee \overline{x_{18}}) \wedge \\
& (\overline{x_{10}} \vee x_{14} \vee \overline{x_{17}} \vee x_4 \vee \overline{x_{12}} \vee \overline{x_8} \vee x_{15} \vee x_{13} \vee x_2 \vee x_5 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_6} \vee \overline{x_{19}}) \wedge \\
& (x_{18} \vee x_{12} \vee \overline{x_8} \vee \overline{x_{14}} \vee x_2 \vee \overline{x_{13}} \vee \overline{x_{15}} \vee x_9 \vee \overline{x_3} \vee x_{10} \vee x_4 \vee x_6 \vee x_7) \wedge \\
& (x_{11} \vee x_{18} \vee x_8 \vee x_{14} \vee x_{17} \vee \overline{x_{19}} \vee x_{10} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_{13}} \vee x_5 \vee x_6 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge \\
& (\overline{x_9} \vee \overline{x_6} \vee \overline{x_7} \vee \overline{x_{10}} \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_{17}} \vee x_{18} \vee x_8 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_{14}} \vee x_{15} \vee x_2 \vee x_{19}) \wedge \\
& (x_5 \vee x_8 \vee x_{10} \vee x_2 \vee \overline{x_{17}} \vee \overline{x_{13}} \vee x_{18} \vee x_{19} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{14} \vee x_{15} \vee x_3 \vee \overline{x_{16}}) \wedge \\
& (\overline{x_3} \vee \overline{x_{10}} \vee \overline{x_{16}} \vee x_{18} \vee \overline{x_4} \vee x_6 \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_8} \vee \overline{x_7} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_1} \vee x_9 \vee \overline{x_{11}}) \wedge \\
& (\overline{x_{15}} \vee \overline{x_{12}} \vee x_3 \vee x_{13} \vee x_{19} \vee x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_{10}} \vee x_9 \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_{18}} \vee x_{17} \vee \overline{x_{11}}) \wedge \\
& (\overline{x_{17}} \vee x_{12} \vee x_2 \vee x_4 \vee x_7 \vee x_{11} \vee \overline{x_9} \vee x_{19} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_8} \vee x_{14} \vee x_1)
\end{aligned}$$

19 переменных, 33 дизъюнкта.