

9. Теория чисел и числовые алгоритмы

1. Имеются окрашенные прямоугольные таблички трёх типов: черный квадрат размера 2×2 , белый квадрат того же размера и серый прямоугольник 2×1 (последний можно поворачивать на 90°). Нужно подсчитать число способов F_n замостить полосу размера $2 \times n$. Найдите явную аналитическую формулу для F_n и вычислите F_{30000} по модулю 31.

2. Решите предыдущую задачу по модулю 29. **3 (все по 0.5).**

а) Делится ли $4^{1356} - 9^{4824}$ на 35? Делится ли $5^{30000} - 6^{123456}$ на 31?

б) Найдите обратные $20 \pmod{79}$, $3 \pmod{62}$.

в) Найдите все решения уравнения $35x = 10 \pmod{50}$.

г) Имеет ли решение сравнение $x^2 = 1597 \pmod{2011}$

д) Найдите наименьшее натуральное число, имеющее остатки 2, 3, 1 от деления на 5, 13 и 7 соответственно.

4. Найти все генераторы для $(\mathbb{Z}/19\mathbb{Z})^\times$.

5. Предложите полиномиальный алгоритм нахождения количества натуральных решений диофантова уравнения $ax + by = c$.

6 (Доп). Пусть язык $L \in \mathcal{NP}$. Покажите, что он полиномиально сводится (по Карпу) к языку *STOP* описаний пар (M, ω) машин Тьюринга и входов таких, что M останавливается на входе ω .

7. Постройте NP-сертификат простоты числа $p = 3911$, $g = 13$. Известными простыми считаются только числа 2, 3, 5.