

# 1. Машина Тьюринга и асимптотическая оценка рекуррент

1. Построить машину Тьюринга с одной или двумя лентами, распознающую палиндромы на алфавите  $A = \{a, b, \Lambda\}$ .

2. Докажите, что следующие определения перечислимого множества  $X \subset \mathbb{N}$  эквивалентны:

- Существует алгоритм, печатающий все элементы множества (в любом порядке и со сколь угодно большими паузами между элементами).
- Множество является областью определения некоторой вычислимой функции.
- Множество является областью значений некоторой вычислимой функции.

3. Дан массив из  $n$  элементов, на которых определено отношение равенства (например, речь может идти о массиве картинок или музыкальных записей). Постройте алгоритм, который в «поточном режиме обработки данных»<sup>1</sup> определяет, есть ли в массиве элемент, повторяющийся больше  $\frac{n}{2}$  раз. Считается, что в вашем распоряжении есть память объемом  $O(\log n)$  битов.

---

<sup>1</sup>Поточный алгоритм (англ. streaming algorithm или on-line algorithm) — алгоритм для обработки последовательности данных в один или малое число проходов. В этой задаче предусматривается ровно два прохода.

4. На вход подается описание  $n$  событий в формате  $(s, f)$  — время начала и время окончания. Требуется составить расписание для человека, который хочет принять участие в максимальном количестве событий. Например, события — это доклады на конференции или киносеансы на фестивале, которые проходят в разных аудиториях. Предположим, что участвовать можно только с начала события и до конца. Рассмотрим три жадных алгоритма.

- Выберем событие кратчайшей длительности, добавим его в расписание, исключим из рассмотрения события, пересекающиеся с выбранным. Продолжим делать то же самое далее.
- Выберем событие, наступающее раньше всех, добавим его в расписание, исключим из рассмотрения события, пересекающиеся с выбранным. Продолжим делать то же самое далее.
- Выберем событие, завершающееся раньше всех, добавим его в расписание, исключим из рассмотрения события, пересекающиеся с выбранным. Продолжим делать то же самое далее.

Какой алгоритм вы выберете? В качестве обоснования для каждой процедуры проверьте, что она является оптимальной (т. е. гарантирует участие в максимальном числе событий) или постройте конкретный контрпример.

**5 (Доп).** Найдите явное аналитическое выражение для производящей функции чисел  $BR_{4n+2}$  правильных скобочных последовательностей длины  $4n + 2$  (ответ в виде суммы ряда не принимается).

**6.** Оцените трудоемкость рекурсивного алгоритма, разбивающего исходную задачу размера  $n$  на три задачи размером  $\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5$ , используя для этого  $10 \frac{n^3}{\log n}$  операций.

**7 (Доп).** Оцените как можно точнее глубину рекурсии для рекуррентности  $T(n) = T(n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor) + T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \Theta(n)$ .