8. Вероятностные классы (и алгоритмы)

1. Докажите, что $\mathcal{ZPP} = \mathcal{RP} \cap co\mathcal{RP}$

2. Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — целочисленные матрицы $n \times n$, элементы которых по абсолютной величине не больше h. Для проверки равенства $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ пользуемся $\mathbf{x}$ — случайным n-мерным вектором, состоящим из чисел $0 \dots N-1$. Если $\mathbf{A}(\mathbf{Bx}) = \mathbf{Cx}$, предполагаем, что равенство верное, иначе неверное. Для решения обратите внимание на лемму Шварца-Зиппеля.

- Задаём некоторую вероятность ошибки p. Как надо выбрать N, чтобы достичь ошибку, не большую p?

- Определите, в каких вероятностных классах ($\mathcal{BPP}, \mathcal{RP}, co\mathcal{RP}, \mathcal{ZPP}$) лежит такая постановка задачи.

- Выбираем также случайный $\mathbf{y}$ с теми же параметрами. Равенство проверяем так: $\mathbf{y}^T\mathbf{ABx} = \mathbf{y}^T\mathbf{Cx}$. Оцените N для такого случая.

3. Покажите, что в задаче сравнения больших чисел вероятность ошибки для больших n меньше $\frac{3}{4}$. Будут ли такие n, для которых вероятность ошибки окажется не больше $\frac{1}{2}$. Предложите способ улучшить этот результат: какие параметры задачи можно подкорректировать, чтобы вероятность ошибки была, к примеру, не больше $\frac{1}{8}$?

4. Определите, в каких из вероятностных классов лежит вероятностный алгоритм для поиска выполняющего набора РОВНО2КНФ, разобранный на семинаре.

5. (Доп) Докажите теорему Татта о паросочетаниях.

6. Докажите, что данная КНФ выполнима:

$(\overline{x_{16}} \vee \overline{x_{9}} \vee \overline{x_{5}} \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_{19}} \vee \overline{x_{12}} \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_{6}} \vee \overline{x_{8}} \vee \overline{x_{10}} \vee \overline{x_{4}} \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_{7}})\wedge$
$(x_{13} \vee \overline{x_{5}} \vee x_{19} \vee \overline{x_{3}} \vee x_{7} \vee \overline{x_{2}} \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_{10}} \vee x_{8} \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_{6}} \vee x_{16} \vee \overline{x_{1}})\wedge$
$(\overline{x_{8}} \vee \overline{x_{1}} \vee \overline{x_{3}} \vee x_{2} \vee x_{10} \vee \overline{x_{4}} \vee x_{5} \vee x_{17} \vee x_{7} \vee x_{15} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{19} \vee x_{18})\wedge$
$(x_{17} \vee x_{12} \vee \overline{x_{13}} \vee x_{3} \vee x_{4} \vee x_{9} \vee x_{16} \vee x_{15} \vee x_{7} \vee x_{8} \vee x_{18} \vee x_{11} \vee x_{19})\wedge$
$(x_{3} \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_{2}} \vee x_{8} \vee x_{10} \vee \overline{x_{17}} \vee \overline{x_{7}} \vee x_{6} \vee \overline{x_{19}} \vee \overline{x_{4}} \vee \overline{x_{16}} \vee x_{1} \vee x_{9})\wedge$
$(\overline{x_{8}} \vee x_{5} \vee x_{9} \vee x_{6} \vee x_{14} \vee \overline{x_{10}} \vee \overline{x_{12}} \vee \overline{x_{4}} \vee x_{17} \vee x_{18} \vee \overline{x_{1}} \vee x_{13} \vee \overline{x_{2}})\wedge$
$(\overline{x_{2}} \vee \overline{x_{7}} \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_{13}} \vee x_{4} \vee x_{1} \vee x_{17} \vee x_{11} \vee x_{3} \vee \overline{x_{12}} \vee x_{16} \vee x_{8})\wedge$
$(x_{11} \vee \overline{x_{8}} \vee \overline{x_{7}} \vee \overline{x_{14}} \vee x_{3} \vee \overline{x_{5}} \vee x_{16} \vee \overline{x_{13}} \vee \overline{x_{1}} \vee x_{9} \vee x_{4} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_{2}})\wedge$
$(x_{18} \vee \overline{x_{2}} \vee x_{19} \vee x_{17} \vee \overline{x_{1}} \vee x_{14} \vee \overline{x_{3}} \vee x_{7} \vee \overline{x_{9}} \vee \overline{x_{12}} \vee x_{10} \vee x_{11} \vee x_{15})\wedge$
$(\overline{x_{13}} \vee x_{2} \vee x_{7} \vee x_{16} \vee x_{18} \vee x_{14} \vee \overline{x_{12}} \vee x_{9} \vee \overline{x_{1}} \vee \overline{x_{5}} \vee \overline{x_{4}} \vee \overline{x_{10}} \vee \overline{x_{11}})\wedge$
$(\overline{x_{17}} \vee \overline{x_{10}} \vee \overline{x_{6}} \vee \overline{x_{2}} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{12} \vee \overline{x_{16}} \vee x_{5} \vee x_{13} \vee x_{15} \vee x_{1} \vee x_{14} \vee \overline{x_{4}})\wedge$
$(x_{5} \vee \overline{x_{9}} \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_{1}} \vee x_{12} \vee \overline{x_{3}} \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_{4}} \vee \overline{x_{2}} \vee x_{13} \vee x_{6} \vee \overline{x_{14}})\wedge$
$(\overline{x_{2}} \vee \overline{x_{19}} \vee \overline{x_{9}} \vee x_{1} \vee \overline{x_{5}} \vee \overline{x_{4}} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_{10}} \vee x_{17} \vee x_{6} \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_{14}})\wedge$
$(x_{3} \vee \overline{x_{9}} \vee x_{5} \vee x_{6} \vee x_{14} \vee x_{13} \vee \overline{x_{15}} \vee x_{18} \vee \overline{x_{8}} \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_{4}} \vee x_{19} \vee \overline{x_{17}})\wedge$
$(\overline{x_{15}} \vee x_{8} \vee \overline{x_{17}} \vee \overline{x_{13}} \vee x_{10} \vee \overline{x_{9}} \vee \overline{x_{18}} \vee x_{14} \vee \overline{x_{4}} \vee x_{11} \vee \overline{x_{2}} \vee \overline{x_{12}} \vee \overline{x_{6}})\wedge$
$(\overline{x_{14}} \vee \overline{x_{19}} \vee x_{1} \vee x_{2} \vee \overline{x_{7}} \vee x_{10} \vee \overline{x_{17}} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{16} \vee x_{5} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_{8}} \vee x_{6})\wedge$
$(x_{8} \vee x_{18} \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_{1}} \vee x_{15} \vee x_{3} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{10} \vee \overline{x_{9}} \vee x_{19} \vee \overline{x_{4}} \vee x_{13} \vee \overline{x_{5}})\wedge$
$(\overline{x_{18}} \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_{9}} \vee x_{14} \vee \overline{x_{17}} \vee x_{5} \vee \overline{x_{4}} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_{10}} \vee \overline{x_{7}} \vee \overline{x_{3}} \vee x_{6} \vee x_{12})\wedge$
$(x_{4} \vee x_{8} \vee \overline{x_{12}} \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_{5}} \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_{19}} \vee x_{13} \vee \overline{x_{9}} \vee \overline{x_{7}} \vee x_{1} \vee x_{14})\wedge$
$(\overline{x_{15}} \vee \overline{x_{3}} \vee x_{9} \vee \overline{x_{7}} \vee \overline{x_{16}} \vee x_{11} \vee x_{1} \vee \overline{x_{8}} \vee \overline{x_{2}} \vee \overline{x_{17}} \vee \overline{x_{19}} \vee \overline{x_{14}} \vee x_{4})\wedge$
$(\overline{x_{3}} \vee x_{5} \vee \overline{x_{10}} \vee x_{17} \vee x_{4} \vee \overline{x_{1}} \vee \overline{x_{18}} \vee x_{13} \vee x_{8} \vee \overline{x_{15}} \vee x_{2} \vee x_{6} \vee x_{16})\wedge$
$(\overline{x_{5}} \vee x_{16} \vee x_{8} \vee \overline{x_{9}} \vee \overline{x_{14}} \vee x_{6} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{10} \vee \overline{x_{2}} \vee \overline{x_{7}} \vee \overline{x_{4}} \vee x_{18} \vee \overline{x_{15}})\wedge$
$(x_{10} \vee \overline{x_{7}} \vee x_{3} \vee x_{2} \vee x_{18} \vee x_{6} \vee x_{8} \vee x_{19} \vee x_{14} \vee x_{17} \vee \overline{x_{9}} \vee x_{13} \vee x_{5})\wedge$
$(x_{7} \vee x_{4} \vee x_{12} \vee \overline{x_{6}} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{10} \vee x_{3} \vee x_{17} \vee x_{14} \vee \overline{x_{5}} \vee x_{1} \vee x_{19} \vee x_{9})\wedge$
$(\overline{x_{4}} \vee x_{19} \vee \overline{x_{18}} \vee x_{3} \vee \overline{x_{5}} \vee x_{2} \vee x_{9} \vee x_{8} \vee \overline{x_{14}} \vee x_{17} \vee \overline{x_{6}} \vee \overline{x_{1}} \vee \overline{x_{16}})\wedge$
$(x_{14} \vee x_{9} \vee x_{8} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{2} \vee \overline{x_{10}} \vee x_{6} \vee x_{4} \vee x_{12} \vee \overline{x_{1}} \vee x_{13} \vee \overline{x_{17}} \vee \overline{x_{18}})\wedge$
$(\overline{x_{3}} \vee \overline{x_{5}} \vee x_{10} \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_{1}} \vee x_{7} \vee \overline{x_{17}} \vee x_{8} \vee x_{6} \vee \overline{x_{11}} \vee \overline{x_{2}} \vee \overline{x_{12}} \vee \overline{x_{15}})\wedge$
$(\overline{x_{10}} \vee \overline{x_{8}} \vee \overline{x_{4}} \vee x_{3} \vee x_{19} \vee x_{9} \vee x_{11} \vee x_{17} \vee \overline{x_{5}} \vee x_{14} \vee x_{16} \vee \overline{x_{18}} \vee \overline{x_{6}})\wedge$
$(\overline{x_{2}} \vee x_{5} \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_{4}} \vee x_{18} \vee \overline{x_{8}} \vee \overline{x_{17}} \vee x_{3} \vee x_{7} \vee \overline{x_{6}} \vee x_{14} \vee x_{9} \vee \overline{x_{11}})\wedge$
$(\overline{x_{14}} \vee \overline{x_{18}} \vee x_{19} \vee x_{13} \vee \overline{x_{4}} \vee \overline{x_{1}} \vee \overline{x_{3}} \vee x_{16} \vee \overline{x_{15}} \vee \overline{x_{2}} \vee \overline{x_{10}} \vee x_{8} \vee x_{6})\wedge$
$(\overline{x_{8}} \vee x_{14} \vee \overline{x_{5}} \vee \overline{x_{4}} \vee x_{12} \vee \overline{x_{16}} \vee \overline{x_{9}} \vee x_{13} \vee x_{17} \vee x_{2} \vee \overline{x_{7}} \vee x_{6} \vee x_{18})\wedge$
$(x_{1} \vee \overline{x_{5}} \vee x_{10} \vee x_{8} \vee \overline{x_{4}} \vee \overline{x_{6}} \vee \overline{x_{12}} \vee \overline{x_{14}} \vee \overline{x_{11}} \vee x_{18} \vee \overline{x_{15}} \vee x_{7} \vee \overline{x_{3}})\wedge$
$(x_{16} \vee x_{5} \vee x_{3} \vee x_{14} \vee x_{18} \vee x_{13} \vee x_{6} \vee x_{7} \vee x_{11} \vee x_{1} \vee x_{12} \vee x_{8} \vee x_{19})$

19 переменных, 33 дизъюнкта.