

4. Полиномиальная сводимость, временные классы за \mathcal{P} и \mathcal{NP}

1. Подбрасываем «честную» монету 10 раз. Подсчитайте вероятности следующих событий:

- (i) (1/6 балла) число выпавших «орлов» равно числу «решек»;
- (ii) (1/6 балла) выпало больше «орлов» чем «решек»;
- (iii) (1/6 балла) при $i = 1, \dots, 5$ одинаковы результаты i -го и $11 - i$ -го бросаний;
- (iv) (1/2 балла) «орел» выпал не менее четырех раз подряд.

2.(i) Вычислите условную вероятность, что при бросаний двух игральных костей на первой выпало шесть, если сумма равна семи.

(ii) При двух бросках игральной кости выпало X_1 и X_2 , соответственно. Вычислите $\mathbb{E}\{\max\{X_1, X_2\}\} + \mathbb{E}\{\min\{X_1, X_2\}\}$.

(iii) Покажите, что из попарной независимости случайных величин не следует независимость в совокупности. Приведите контрпример.

(iv) Независимы ли события: «при броске кубика выпало четное число» и «при броске кубика выпало число, кратное трём»?

(v) Найти вероятность, что случайно выбранный граф на n вершинах является простым циклом. Найти предел этой вероятности при $n \rightarrow \infty$.

3. (втф) Две урны содержат одинаковое количество шаров. Шары окрашены в белый и черный цвета. Из каждой урны вынимают по n шаров с возвращением, где $n \geq 3$. Найдите n и «состав» каждой урны, если вероятность того, что все шары, взятые из первой урны, белые, равна вероятности того, что все шары, взятые из второй урны, либо белые, либо черные.

4 (Доп). Симметричную монетку бросают неограниченное число раз. Какая из последовательностей встретится раньше с большей вероятностью: ROR или PPO?

5. (i) Найти мат. ожидание числа простых циклов длины r в случайном графе на n вершинах. Любое из C_n^2 рёбер генерируется независимо от других с вероятностью p .
- (ii) Найти мат. ожидание числа простых циклов длины r в случайной перестановке n элементов в предположении, что все перестановки $\pi \in S_n$ равновероятны.
6. (Доп) (i) Имеется генератор случайных битов, выдающий 0 и 1 с вероятностью $1/2$. Предложите алгоритм, использующий этот генератор и выдающий 0 с вероятностью $1/3$ и 1 с вероятностью $2/3$. Оцените матожидание времени работы алгоритма.
- (ii) Обратно: из генератора $(1/3; 2/3)$ получите $(1/2)$.
7. Найти мат. ожидание количества неподвижных элементов в случайно выбранной из S_n перестановке.
8. В экзаменационной программе обычного экзамена 25 билетов, из которых 5 простые, а вытянув любой из остальных, всякий студент точно завалит экзамен. Подряд заходят два студента. Какой из них с большей вероятностью вытянет простой билет? (используйте для второго студента формулу полной вероятности для двух возможных результатов первого студента).
- 9 (Доп). Найти математическое ожидание числа бросаний кости до первого выпадения двух шестерок подряд.
- 10 (Доп). На окружности случайным образом выбираются две точки. Найдите среднее расстояние между ними.