

## 7. Элементы теории вероятности

**1.** Подбрасываем «честную» монету 10 раз. Подсчитайте вероятности следующих событий:

- (i) (1/6 балла) число выпавших «орлов» равно числу «решек»;
- (ii) (1/6 балла) выпало больше «орлов» чем «решек»;
- (iii) (1/6 балла) при  $i = 1, \dots, 5$  одинаковы результаты  $i$ -го и  $11 - i$ -го бросаний;
- (iv) (1/2 балла) «орел» выпал не менее четырех раз подряд.

**2.(i)** Вычислите условную вероятность, что при бросаний двух игральные костей на первой выпало шесть, если сумма равна семи.

(ii) При двух бросках игральной кости выпало  $X_1$  и  $X_2$ , соответственно. Вычислите  $\mathbb{E}\{\max\{X_1, X_2\}\} + \mathbb{E}\{\min\{X_1, X_2\}\}$ .

(iii) Покажите, что из попарной независимости случайных величин не следует независимость в совокупности. Приведите контрпример.

(iv) Независимы ли события: «при броске кубика выпало четное число» и «при броске кубика выпало число, кратное трём»?

(v) Найти вероятность, что случайно выбранный граф на  $n$  вершинах является простым циклом. Найти предел этой вероятности при  $n \rightarrow \infty$ .

**3. (втф)** Две урны содержат одинаковое количество шаров. Шары окрашены в белый и черный цвета. Из каждой урны вынимают по  $n$  шаров с возвращением, где  $n \geq 3$ . Найдите  $n$  и «состав» каждой урны, если вероятность того, что все шары, взятые из первой урны, белые, равна вероятности того, что все шары, взятые из второй урны, либо белые, либо черные.

**4 (Доп).** Симметричную монетку бросают неограниченное число раз. Какая из последовательностей встретится раньше с большей вероятностью: ROR или PPO?

- 5.** (i) Найти мат. ожидание числа простых циклов длины  $r$  в случайном графе на  $n$  вершинах. Любое из  $C_n^2$  рёбер генерируется независимо от других с вероятностью  $p$ .
- (ii) Найти мат. ожидание числа простых циклов длины  $r$  в случайной перестановке  $n$  элементов в предположении, что все перестановки  $\pi \in S_n$  равновероятны.
- 6. (Доп)** (i) Имеется генератор случайных битов, выдающий 0 и 1 с вероятностью  $1/2$ . Предложите алгоритм, использующий этот генератор и выдающий 0 с вероятностью  $1/3$  и 1 с вероятностью  $2/3$ . Оцените матожидание времени работы алгоритма.
- (ii) Обратно: из генератора  $(1/3; 2/3)$  получите  $(1/2)$ .
- 7.** Найти мат. ожидание количества неподвижных элементов в случайно выбранной из  $S_n$  перестановке.
- 8.** В экзаменационной программе обычного экзамена 25 билетов, из которых 5 простые, а вытянув любой из остальных, всякий студент точно завалит экзамен. Подряд заходят два студента. Какой из них с большей вероятностью вытянет простой билет? (используйте для второго студента формулу полной вероятности для двух возможных результатов первого студента).
- 9 (Доп).** Найти математическое ожидание числа бросаний кости до первого выпадения двух шестерок подряд.
- 10 (Доп).** На окружности случайным образом выбираются две точки. Найдите среднее расстояние между ними.