

## 9. Теория чисел и числовые алгоритмы

1. Имеются окрашенные прямоугольные таблички трёх типов: черный квадрат размера  $2 \times 2$ , белый квадрат того же размера и серый прямоугольник  $2 \times 1$  (последний можно поворачивать на  $90^\circ$ ). Нужно подсчитать число способов  $F_n$  замостить полосу размера  $2 \times n$ . Найдите явную аналитическую формулу для  $F_n$  и вычислите  $F_{30000}$  по модулю 31.

2. Решите предыдущую задачу по модулю 29.

**3 (все по 0.5).**

а) Делится ли  $4^{1356} - 9^{4824}$  на 35? Делится ли  $5^{30000} - 6^{123456}$  на 31?

б) Найдите обратные  $20 \pmod{79}$ ,  $3 \pmod{62}$ .

в) Найдите все решения уравнения  $35x = 10 \pmod{50}$ .

г) Имеет ли решение сравнение  $x^2 = 1597 \pmod{2011}$

д) Найдите наименьшее натуральное число, имеющее остатки 2, 3, 1 от деления на 5, 13 и 7 соответственно.

4. Найти все генераторы для  $(\mathbb{Z}/19\mathbb{Z})^\times$ .

5. Предложите полиномиальный алгоритм нахождения количества натуральных решений диофантова уравнения  $ax + by = c$ .

**6 (Доп).** Пусть язык  $L \in \mathcal{NP}$ . Покажите, что он полиномиально сводится (по Карпу) к языку *STOP* описаний пар  $(M, \omega)$  машин Тьюринга и входов таких, что  $M$  останавливается на входе  $\omega$ .

7. Постройте NP-сертификат простоты числа  $p = 3911$ ,  $g = 13$ . Известными простыми считаются только числа 2, 3, 5.