

# Домашнее задание № 1

Раффаэле Делла Пиетра, 675

## Задание 1

Порождают ли циклы длины 12 группу перестановок на 12 элементах?

Используя композиции циклов длиной 12 можно получить любую транспозицию:

$$\begin{aligned}(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, a, b, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10})^2 &\implies \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, a, b, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\} \rightarrow \{i_3, i_4, i_5, a, b, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_1, i_2\} \\(i_1, i_9, i_7, a, i_4, i_2, i_{10}, i_8, i_6, b, i_5, i_3) &\implies \{i_3, i_4, i_5, a, b, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_1, i_2\} \rightarrow \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, b, a, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\} \\(i_1, i_9, i_7, a, i_4, i_2, i_{10}, i_8, i_6, b, i_5, i_3) \circ (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, a, b, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10})^2 &= (a, b)\end{aligned}$$

Любой цикл можно разложить на транспозиции:  $(i_1, \dots, i_k) = (i_1, i_k) \circ (i_1, i_{k-1}) \circ \dots \circ (i_1, i_3) \circ (i_1, i_2)$ .

Это действительно так, потому что сначала  $i_2$  становится на место  $i_1$ , далее  $i_3$  становится на место бывшего  $i_2$ ,  $i_4 \rightarrow i_3, \dots, i_k \rightarrow i_{k-1}$ ,  $i_1$  остаётся на месте  $i_k$ . Цикл делает то же самое, поэтому равенство выполняется. Таким образом, любой цикл можно разложить на транспозиции, любую транспозицию можно разложить на композицию трёх циклов длиной 12  $\implies$  циклы длины 12 порождают  $S_{12}$ .

## Задание 2

Пусть  $G$  — группа вращений куба,  $H_\nu$  — её подгруппа, состоящая из элементов, оставляющих вершину  $\nu$  на месте.

а) Каков индекс подгруппы  $H_\nu$ ?

б) Найдите два поворота (на  $90^\circ$  и на  $180^\circ$ ), которые являются элементами одного левого смежного класса по подгруппе  $H_\nu$ .

в) Подгруппа, левые и правые смежные классы по которой совпадают, называется нормальной (страница 40 книги Вялого). Является ли  $H_\nu$  нормальной подгруппой  $G$ ?

г) Являются ли полученные в пункте (б) повороты сопряжёнными элементами  $G$ ? Подсказка:  $G < S_8$ .

а)  $|G| = 24$ , всего вершин 8  $\implies$  по теореме Лагранжа  $(G : H_\nu) = 3$ .

б) Куб  $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ , рассматриваем подгруппу  $H_{A_1}$  и циклы вершин, порождённые этой подгруппой:  $(A_2B_1D_1)$  и  $(B_2C_1D_2)$ , назовём этот поворот  $p$ . Возьмём левый смежный класс по подгруппе  $H_{A_1}$ , порождённый поворотом вокруг оси, перпендикулярной начальному положению плоскости  $A_1B_1B_2A_2$  от  $A_1$  к  $B_1$ , назовём этот поворот  $t_{90}$ .

Тогда элемент  $(t_{90} \circ p)$  будет поворотом на  $180^\circ$  относительно оси,

проходящей через середины  $A_1B_1$  и  $C_2D_2$ . Сам  $t_{90}$  будет элементом этого же левого смежного класса,

т. к.  $H_{A_1}$  содержит тождественный поворот.

в) Не является. Рассмотрим левый и правый смежные классы по подгруппе  $H_{A_1}$ , порождённые поворотом на  $180^\circ$  как в прошлом пункте, назовём этот поворот  $t_{180}$ .

$t_{180}$  — это 4 транспозиции:  $(A_1B_1) \circ (C_2D_2) \circ (A_2C_1) \circ (B_2D_1)$ . Тогда  $t_{180} \circ p$  будет переводить вершину  $A_1$  в  $D_1$ , а  $p \circ t_{180}$  — в  $B_1$ .

г) Рассмотрим спектры этих поворотов в  $S_8$ :  $t_{90} \rightarrow (4, 4)$ ,  $t_{90} \circ p \rightarrow (2, 2, 2, 2) \implies$  не сопряжённые.

## Задание 3

При каком условии на  $m$  и  $n$   $C_m \times C_n$  является циклической группой? Найти максимальный порядок элемента в этой группе при любых  $m$  и  $n$ .

$m$  и  $n$  должны быть взаимно простыми.  $C_m$  и  $C_n$  — циклические группы  $\implies$  в  $C_m$  есть образующий элемент  $a$ , в  $C_n$  есть образующий элемент  $b$ .  $C_m \times C_n$  — тоже циклическая  $\implies$  в ней есть образующий элемент  $(a^k, b^l)$ .

Допустим,  $\text{НОК}(m, n) \neq mn \implies \exists T = \text{НОК}(m, n) < mn : m, n \mid T$

$(a^k, b^l)^T = (a^{kT}, b^{lT}) = (e, e) \implies |C_m \times C_n| < mn \implies$  это не циклическая группа, т. к. не существует элемента, степени которого порождают все элементы группы (всего различных степеней меньше количества элементов в группе).

Максимальный порядок элемента тоже будет равен  $T$ , потому что равенство  $(a^k, b^l)^T = (e, e)$  не зависит от того, какие  $k$  и  $l$  выбрать, то есть верно для всех элементов  $C_m \times C_n$ .

#### Задание 4

При каком  $a$  отображение  $\sigma(m) = a^m \bmod 17$  является перестановкой на 16 элементах? Достаточно предъявить одно такое  $a$ . Найти спектр этой перестановки.

Для  $a = 5$ :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	15	3	4	11	9	12	16	10	2	14	13	6	8	5	1

Циклы:  $(1\ 7\ 12\ 13\ 6\ 9\ 10\ 2\ 15\ 5\ 11\ 14\ 8\ 16)(3)(4)$ , спектр  $(14, 1, 1)$ .