Домашнее задание № 1

Раффаэле Делла Пиетра, 675

Задание 1
Порождают ли циклы длины 12 группу перестановок на 12 элементах?

Используя композиции циклов длиной 12 можно получить любую транспозицию транспозицию:

$$(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, a, b, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10})^2 \implies \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, a, b, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\} \to \{i_3, i_4, i_5, a, b, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_1, i_2\}$$

$$(i_1, i_9, i_7, a, i_4, i_2, i_{10}, i_8, i_6, b, i_5, i_3) \implies \{i_3, i_4, i_5, a, b, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_1, i_2\} \to \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, b, a, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\}$$

$$(i_1, i_9, i_7, a, i_4, i_2, i_{10}, i_8, i_6, b, i_5, i_3) \circ (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, a, b, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10})^2 = (a, b)$$

Любой цикл можно разложить на транспозиции: $(i_1, \ldots, i_k) = (i_1, i_k) \circ (i_1, i_{k-1}) \circ \ldots \circ (i_1, i_3) \circ (i_1, i_2)$.
Это действительно так, потому что сначала i_2 становится на место i_1, далее i_3 становится на место бывшего i_2, $i_4 \to i_3, \ldots, i_k \to i_{k-1}, i_1$ остаётся на месте i_k. Цикл делает то же самое, поэтому равенство выполняется.
Таким образом, любой цикл можно разложить на транспозиции, любую транспозицию можно разложить на композицию трёх циклов длиной 12 $\implies$ циклы длины 12 порождают S_{12}.

Задание 2
Пусть G — группа вращений куба, H_ν — её подгруппа, состоящая из элементов, оставляющих вершину ν на месте.
a) Каков индекс подгруппы H_ν?
b) Найдите два поворота (на 90^o и на 180^o), которые являются элементами одного левого смежного класса по подгрупе H_ν.
c) Подгруппа, левые и правые смежные классы по которой совпадают, называется нормальной (страница 40 книги Вялого). Является ли H_ν нормальной подгруппой G?
d) Являются ли полученные в пункте (б) повороты сопряжёнными элементами G? Подсказка: $G < S_8$.

a) $|G| = 24$, всего вершин 8 $\implies$ по теореме Лагранжа $(G : H_\nu) = 3$.

b) Куб $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$, рассматриваем подгруппу H_{A_1} и циклы вершин,
порождённые этой подгруппой: $(A_2B_1D_1)$ и $(B_2C_1D_2)$, назовём этот поворот p. Возьмём левый смежный класс по подгрупе H_{A_1}, порождённый поворотом вокруг оси, перпендиклярной начальному положению плоскости $A_1B_1C_1D_1$ от A_1 к B_1, назовём этот поворот t_{90}.
Тогда элемент $(t_{90} \circ p)$ будет поворотом на 180^o относительно оси,
проходящей через середины A_1B_1 и C_2D_2. Сам t_{90} будет элемент этого же левого смежного класса,
т. к. H_{A_1} содержит тождественный поворот.

c) Не является. Рассмотрим левый и правый смежные классы по подгрупе H_{A_1}, порождённые поворотом на 180^o как в прошлом пункте, назовём этот поворот t_{180}.
Тогда $t_{180} \circ p$ будет переводить вершину A_1 в B_1, а $p \circ t_{180}$ — в D_1.

d) Рассмотрим спектры этих поворотов в S_8: $t_{90} \to (4, 4)$, $t_{90} \circ p \to (2, 2, 2, 2) \implies$ не сопряжённые.

Задание 3
При каком условии на m и n $C_m \times C_n$ является циклической группой? Найти максимальный порядок элемента в этой группе при любых m и n.

m и n должны быть взаимно простыми. C_m и C_n — циклические группы $\implies$ в C_m есть образующий элемент a, в C_n есть образующий элемент b. $C_m \times C_n$ — тоже циклическая $\implies$ в ней есть образующий элемент (a^k, b^l).
Допустим, НОК$(m, n) \neq mn \implies \exists\, T =$ НОК$(m, n) < mn :\ m, n \mid T$
$(a^k, b^l)^T = (a^{kT}, b^{lT}) = (e, e) \implies |C_m \times C_n| < mn \implies$ это не циклическая группа, т. к не существует элемента, степени которого порождают все элементы группы (всего различных степеней меньше количества элементов в группе).
Максимальный порядок элемента тоже будет равен T, потому что равенство $(a^k, b^l)^T = (e, e)$ не зависит от того, какие k и l выбрать, то есть верно для всех элементов $C_m \times C_n$.

Задание 4

При каком a отображение $\sigma(m) = a^m \mathrm{mod} 17$ является перестановкой на 16 элементах? Достаточно предъявить одно такое a. Найти спектр этой перестановки.

Для $a = 5$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	15	3	4	11	9	12	16	10	2	14	13	6	8	5	1

Циклы: (1 7 12 13 6 9 10 2 15 5 11 14 8 16)(3)(4), спектр $(14, 1, 1)$.