Домашнее задание № 2

Раффаэле Делла Пиетра, 675

Задание 1

Сколько существует различных ожерелий из 18 бусин белого, синего и красного цветов? Ожерелья можно поворачивать и переворачивать. Ответ дать по модулю 1000.

Рассмотрим, какие есть движения, переводящие бусы сами в себя. φ — поворот на 20^o по часовой стрелке, он совмещает каждую бусинку с соседней по часовой, σ — осевая симметрия относительно диагонали 18-угольника, θ — осевая симметрия относительно прямой, проходящей через середины противоположных сторон 18-угольника.
$G = \{e, \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^{17}, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_9, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_9\} \implies |G| = 36.$
Посчитаем, сколько степеней свободы выбора цвета бусин есть у каждого движения:

e	φ	φ^2	φ^3	φ^4	φ^5	φ^6	φ^7	φ^8	φ^9	φ^{10}	φ^{11}	φ^{12}	φ^{13}	φ^{14}	φ^{15}	φ^{16}	φ^{17}	σ_i	θ_i
18	1	2	3	2	1	6	1	2	9	2	1	6	1	2	3	2	1	10	9

Тогда всего различных бус

$$\frac{1}{36}(3^{18} + 6 \cdot 3^1 + 6 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^6 + 10 \cdot 3^9 + 9 \cdot 3^{10}) = 10\,781\,954 \equiv 954 \mod 1000$$

Задание 2

Грани октаэдра красят в 6 цветов. Варианты окраски, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми. Найти остаток от деления количества различных окрасок на 675.

Октаэдр можно получить, соединив середины смежных граней некоторого куба. Грани октаэдра тогда будут соответствовать вершинам куба, а вращения октаэдра вращениям куба. Из предыдущих задач известно, что группа поворотов куба состоит из 24 элементов. Посчитаем, сколько степеней свободы окраски вершин куба даёт каждый поворот.
Поворот относительно оси, проходящей через середины граней на 90^o даёт 2 степени свободы. Таких поворотов 2 для каждой оси, всего осей 3.
Поворот относительно той же оси на 180^o даёт 4 степени свободы. Таких поворотов столько же, сколько и осей, то есть 3.
Поворот относительно диагонали на 120^o даёт 4 степени свободы. Диагоналей 4, для каждой 2 поворота.
Симметрия относительно прямой, проходящей через середины двух противоположных рёбер, даёт 4 степени свободы. Всего таких осей 6.
И наконец тождественное преобразование, 8 степеней свободы.
Тогда всего окрасок вершин куба и соответственно граней октаэдра

$$\frac{1}{24}(6^8 + 6 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6^4 + 8 \cdot 6^4 + 6 \cdot 6^4) = 70911 \equiv 36 \mod 675$$

Задание 3

Решить систему сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{44} \\ x \equiv 10 \pmod{87} \end{cases}$$

$x = 44a + 2 = 87b + 10 \; a, b \in \mathbb{Z}$
$44a - 87b = 8$
$44a' - 87b' = 1$

$$\begin{cases} a' = 2 \\ b' = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 16 + 87t \\ b = 8 + 44t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \implies x = 44 \cdot 16 + 2 + 44 \cdot 87t = 706 + 3828t$$

Задание 4

Решить систему сравнений:

$$\begin{cases} x \ \equiv \ 1 \pmod{1001} \\ x \ \equiv \ -1 \pmod{117} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} x \equiv 1 \mod 1001 \implies x \equiv 1 \mod 13 \text{ т. к. } 13 \mid 1001 \\ x \equiv -1 \mod 117 \implies x \equiv -1 \mod 13 \text{ т. к. } 13 \mid 117 \end{array}\right\} \implies x = 13a + 1 = 13b - 1 \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

$13(b-a) = 2$ решения не имеет, т. к. для $b = a \quad b - a = 0$, а для $b \neq a \quad 13|b-a| \geq 13 \implies$ система не имеет решений.

Задание 5

Решить систему сравнений:

$$\begin{cases} x \ \equiv \ 1 \pmod{75} \\ x \ \equiv \ 4 \pmod{27} \end{cases}$$

$x \equiv 4 \mod 27 \implies x \equiv 1 \mod 3$

$x \equiv 1 \mod 75 \implies x \equiv 1 \mod 25$

$$\begin{cases} x \equiv 1 \mod 25 \\ x \equiv 4 \mod 27 \end{cases} \implies x = 25a + 1 = 27b + 4 \quad a, b \in \mathbb{Z} \qquad 25a - 27b = 3$$

$$\begin{cases} a = 12 + 27t \\ b = 11 + 25t \end{cases} t \in \mathbb{Z} \implies x = 25 \cdot 12 + 1 + 25 \cdot 27t = 301 + 675t$$

Задание 6

Решить линейное диофантово уравнение:

$$144x + 233y = 1.$$

Как известно, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ где F_n — n-е число Фибоначчи.

$\det \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^n = (-1)^n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$

$$\left.\begin{array}{r} 89 = F_{11} \\ 144 = F_{12} \\ 233 = F_{13} \end{array}\right\} \implies (-1)^{12} = 1 = 233 \cdot 89 - 144^2 \implies \begin{cases} x = -144 + 233t \\ y = 89 - 144t \end{cases} t \in \mathbb{Z}$$

Задание 7

Решить линейное диофантово уравнение:

$$610x + 987y = 377.$$

$$987 - 610 = 377 \implies \begin{cases} x = -1 + 987t \\ y = 1 - 610t \end{cases} t \in \mathbb{Z}$$

Задание 8, 9

Найти пару натуральных чисел с наименьшей суммой такую, что нахождение их НОД методом Евклида требует n делений с остатком.

Доп. Найти, используя решение прошлой задачи, O-асимптотику для алгоритма.

Рассмотрим некоторый алгоритм Евклида на числах $B > A > 0$.
Пусть он приводит к результату за k делений.

$$\begin{array}{ccll} B & = & Aq_1 + r_1 & 0 < r_1 < A \\ A & = & r_1 q_2 + r_2 & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 & = & r_2 q_3 + r_3 & 0 < r_3 < r_2 \\ \cdots & & \cdots & \\ r_{k-2} & = & r_{k-1} q_k + r_k & 0 < r_k < r_{k-1} \\ r_{k-1} & = & r_k q_{k+1} & \end{array}$$

$\forall i \leq k \quad q_i \geq 1, \qquad q_{k+1} \geq 2$ т. к. $r_{k-1} > r_k$. $r_{k-1} \geq 2r_k \geq 2$. Для всех остальных $r_{i-2} = r_{i-1} q_i + r_i \geq r_{i-1} + r_i$. $A > r_1 + r_2$. Рассмотрим числа Фибоначчи: $r_k \geq 1 = F_1$, $r_{k-1} \geq 2 = F_2$, далее $r_i \geq F_{k-i+1}, A \geq F_{k+1}$.
Таким образом, для алгоритма Евклида на $B > A > 0$ нужно не больше сравнений по модулю, чем номер наибольшего числа Фибоначчи, меньшего A, без единицы.
Чтобы у двух чисел было как минимум n сравнений по алгоритму Евклида, меньшее из них должно быть не меньше F_{n+1}. На втором шаге, соответственно, нужно, чтобы $B - A$ было не меньше F_n и т. д.
Наименьшие 2 числа, для которых будет n сравнений, это F_{n+1} и F_{n+2}, а их сумма будет F_{n+3}.
В худшем случае алгоритм Евклида на A и B таких, что $A + B \geq F_{n+3}$, сделает n шагов.
$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi^{-n-1})$ по формуле Бине.
Решая обратно уравнение, получим $n + 1 = \log_\varphi \frac{\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2+4}}{2}$
и для нашего случая $N_{eucl}(x) = O\left(\log_\varphi \frac{\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2+4}}{2} - 4\right)$ где $N_{eucl}(x)$ — количество шагов алгоритма Евклида при $A + B = x$