

Analisis Solusi Numerik Model Predator-Prey Dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Empat dan Runge-Kutta Fehlberg

Tugas Akhir

Kelas TA 2

**Rafdy Harry
NIM: 1107130130**



**Program Studi Sarjana Ilmu Komputasi
Fakultas Informatika
Universitas Telkom
Bandung
2019**

Lembar Persetujuan

Analisis Solusi Numerik Model Predator-Prey Dengan
Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Empat dan Runge-Kutta
Fehlberg

*Numerical Solution Analysis of Predator-Prey Model Using by
Runge Kutta Order Four and Runge Kutta Fehlberg Method*

Rafdy Harry
NIM: 1107130130

Proposal ini diajukan sebagai usulan pembuatan tugas akhir pada
Program Studi Sarjana Ilmu Komputasi
Fakultas Informatika Universitas Telkom

Bandung, 24 Mei 2019
Menyetujui

Dr. Putu Harry Gunawan, S.Si., M.Si., M.Sc.
NIP: 16860043

Abstrak

Model *Predator-Prey* merupakan interaksi dua populasi, yaitu populasi mangsa dan pemangsa. Tujuan yang pertama dari penelitian ini adalah menyelesaikan solusi numerik dari model *Predator-Prey* dengan menggunakan persamaan diferensial biasa yaitu, metode Runge-Kutta orde empat dan Runge-kutta Fehlberg. Tujuan yang kedua adalah mengetahui profil model *Predator-Prey* yang diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan Runge-kutta Fehlberg.

Kata Kunci: Persamaan Diferensial Biasa, Metode Runge-Kutta orde empat, Metode Runge-Kutta Fehlberg, Model *Predator-Prey*.

Daftar Isi

Abstrak	i
Daftar Isi	ii
I Pendahuluan	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	1
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan	2
II Kajian Pustaka	3
2.1 Persamaan Beda Biasa Dengan Satu Peubah	3
2.2 Sistem Persamaan Beda	3
2.3 Metode Numerik	4
2.4 Metode Runge-Kutta Orde Empat	4
2.5 Metode Runge-Kutta Fehlberg	5
2.6 Model <i>Predator-Prey</i>	5
2.7 Model Populasi Predator dengan Epidemi	6
III Metodologi dan Desain Sistem	7
3.1 Flowchart Sistem Tugas Akhir	7
3.2 Algoritma	8
3.2.1 Algoritma Metode Runge-Kutta orde empat	8
3.2.2 Algoritma Metode Runge-Kutta Fehlberg	8
IV Hasil dan Pembahasan	10
4.1 Akurasi Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Metode Runge Kutta Fehlberg	10
4.1.1 Contoh Masalah	10
4.1.2 Solusi Runge-Kutta Orde Empat dan Runge-Kutta Fehlberg	10
4.1.3 Hasil Akurasi	13
4.2 Simulasi Model Predator-Prey	14
4.2.1 Penyelesaian Simulasi Model Predator-Prey	14

4.3	Simulasi Model Populasi dengan Predator epidemi	18
4.3.1	Penyelesaian Model predator dengan Epidemi	18
V	Penutup	23
5.0.1	kesimpulan	23
	Daftar Pustaka	25
	Lampiran	26

Bab I

Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Perubahan dalam populasi dalam makhluk hidup salah satunya disebabkan oleh interaksi antar spesies. Interaksi tersebut adalah predasi, yaitu hubungan makan dan memakan antara mangsa (*prey*) dan pemangsa (*predator*). Dalam pembahasan ilmu ekologi, dalam interaksi makan memakan di antara dua populasi ini menjadi sangat penting untuk kelangsungan kehidupan manusia karena manusia juga tergantung dengan kelangsungan hidup lingkungan sekitar. Keseimbangan itu bisa tercapai jika jumlah populasi pemangsa dan mangsa yang berinteraksi sesuai dengan proposinya. Model *Predator-Prey* ini di perkenalkan oleh Alfred J. Lotka dan Vito Volterra di sekitar tahun 1920, yang memformulasikan model matematika tersebut dalam sistem persamaan differensial[1].

Solusi eksak dari sistem persamaan diferensial Lokta-Volterra secara eksplisit atau analitik tidak mudah diselesaikan, akan tetapi dengan metode numerik sistem persamaan tersebut dapat di selesaikan dan menghasilkan hasil numerik. Metode numerik sendiri adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecah dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa. Metode numerik disebut juga sebagai alternatif dari metode analitik, yang merupakan metode penyelesaian persoalan matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku atau lazim[2].

Penelitian yang di angkat dalam tugas akhir ini adalah melakukan analisis numerik dari model *Predator-Prey* dengan menggunakan metode numerik yaitu metode Runge-Kutta orde empat dan metode Runge-Kutta Fehlberg. Dikarenakan Metode Runge-Kutta fehlberg masih memiliki keterkaitan dengan Runge-Kutta orde empat, maka akan diteliti ketelitian atau akurasi dari kedua metode tersebut.

1.2 Perumusan Masalah

Berikut rumusan masalah yang ingin saya angkat adalah

1. Bagaimana menyelesaikan model *Predarot-Prey* secara numerik menggu-

nakan metode *Runge-Kutta* orde 4 dan *Runge-Kutta Fehlberg*.

2. Bagaimana analisis solusi numerik dari model Predator-Prey yang diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dan Runge-Kutta Fehlberg.

1.3 Batasan Masalah

Berikut batasan masalah yaitu

1. Hanya membahas Runge-Kutta Fehlberg

1.4 Tujuan

Berikut adalah tujuan yang ingin dicapai pada penulisan proposal/TA.

1. Untuk menyelesaikan solusi numerik dari model *Predator-Prey* menggunakan metode *Runge-Kutta* orde empat dan metode *Runge-Kutta Fehlberg*
2. Untuk membuat Profil model *Predator-Prey* yang diselesaikan secara numerik menggunakan Metode *Runge-Kutta* orde empat dan *Runge-Kutta Fehlberg*

Bab II

Kajian Pustaka

2.1 Persamaan Beda Biasa Dengan Satu Peubah

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat fungsi yang tak diketahui dan satu atau beberapa turunan dari fungsi tersebut, dengan satu atau lebih peubah yang tak diketahui. Apabila fungsi yang tak diketahui itu hanya bergantung pada satu peubah saja, maka persamaan diferensial tersebut dinamakan persamaan diferensial biasa [8], ini adalah salah satu contoh sederhana dari persamaan differensial biasa sebagai berikut :

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} \quad (2.1)$$

Dengan , y adalah waktu yang sama dengan populasi $x(y)$ yang ada, maka model populasinya merupakan suatu persamaan diferensial, yaitu $x' = x$, dengan $x(y) = ce^y$ merupakan solusi dari persamaan diferensial tersebut.

2.2 Sistem Persamaan Beda

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat buah persamaan diferensial, dengan buah fungsi yang tidak diketahui, dimana merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling keterkaitan dan konsisten. Bentuk umum dari suatu sistem persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut [4] :

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dy} &= f_1(y, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dw_2}{dy} &= f_2(y, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dw_n}{dy} &= f_n(y, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

dengan x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel bebas dan y adalah variabel terkait, sehingga x_1 adalah $x_1(y)$, x_2 adalah $x_2(y)$, \dots, x_n adalah $x_n(y)$, dimana dx_n/dy

merupakan derivatif fungsi x_n terhadap y , dan f_i adalah fungsi yang tergantung pada variabel x_1, x_2, \dots, x_n dan y [4].

2.3 Metode Numerik

Metode numerik adalah cara yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali dan bagi). Metode numerik disebut juga sebagai alternatif dari metode analitik, yang merupakan metode penyelesaian persoalan matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku atau lazim. Disebut demikian, karena adakalanya persoalan matematika sulit diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik sehingga dapat dikatakan bahwa persoalan matematik tersebut tidak mempunyai solusi analitik. Sehingga sebagai alternatifnya, persoalan matematik tersebut diselesaikan dengan metode numerik [2].

Perbedaan antara metode analitik dan metode numerik adalah metode analitik hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sederhana dan menghasilkan solusi yang sebenarnya atau solusi sejati. Sedangkan metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sangat kompleks dan nonlinier. Solusi yang dihasilkan dari penyelesaian secara numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan yang mendekati solusi eksak atau solusi sebenarnya. Hasil penyelesaian yang didapatkan dari metode numerik dan metode analitik memiliki selisih, dimana selisih tersebut dinamakan kesalahan (error) [2].

2.4 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta orde empat merupakan metode yang paling teliti dibandingkan dengan metode Runge-Kutta yang lainnya [2]. Oleh karena itu, metode Runge-Kutta orde empat sering digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial. Metode Runge-Kutta orde empat diturunkan dengan cara yang sama seperti metode Runge-Kutta orde dua untuk nilai. Metode Runge-Kutta orde empat untuk menyelesaikan (2.2):

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (2.3)$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_i, x_i) \\ k_2 &= f(y_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= f(y_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= f(y_i + h, x_i + k_3) \end{aligned}$$

untuk $y \in [0, 1, ..T]$

Metode Runge-Kutta orde empat ini mempunyai tingkat ketelitian solusi yang lebih tinggi daripada metode Runge-Kutta orde sebelumnya. Metode Runge-Kutta orde empat juga mudah diprogram, stabil, kecil kesalahan pemotongan dan juga kecil kesalahan pembulatan [2].

2.5 Metode Runge-Kutta Fehlberg

Metode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) juga tergolong dalam keluarga Runge-Kutta orde-empat, namun memiliki ketelitian hingga orde-lima. Ketelitian yang tinggi ini dimungkinkan karena metode RKF45 memiliki enam buah konstanta perhitungan yang berperan untuk memperbaharui solusi hingga orde ke lima [3]. Formulasi ringkas dari metode RKF45 sebagai berikut :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \quad (2.4)$$

dengan:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(y_i, x_i) \\ k_2 &= hf(y_i + \frac{1}{4}h, x_i + \frac{1}{4}k_1) \\ k_3 &= hf(y_i + \frac{3}{8}h, x_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2) \\ k_4 &= hf(y_i + \frac{12}{13}h, x_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3) \\ k_5 &= hf(y_i + h, x_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4) \end{aligned}$$

untuk : $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ [3].

2.6 Model *Predator-Prey*

Model sederhana *Predator-Prey* didefinisikan sebagai konsumsi *predator* terhadap *prey*. Model *Predator-Prey* yang paling sederhana didasarkan pada model Lotka-Volterra. Model Lotka-Volterra tersusun dari pasangan persamaan diferensial yang mendeskripsikan Predator-Prey dalam kasus yang paling sederhana. Berdasarkan model tersebut, dapat diketahui bahwa kedua spesies saling mempengaruhi secara signifikan. Khususnya apabila terdapat spesies mangsa yang berlimpah, maka populasi pemangsa juga terus meningkat. Namun sebaliknya, apabila pertumbuhan spesies mangsa lambat maka akan terjadi penurunan pada populasi pemangsa. Untuk memodelkan interaksi antara kedua spesies, pertama kali akan diperhatikan tingkat pertumbuhan pemangsa dan mangsa jika tidak ada interaksi. Suatu spesies mangsa dapat tumbuh mengikuti pola eksponensial apabila diasumsikan tidak ada sekelompok pemangsa. Dalam hal ini, pertumbuhan spesies mangsa dinotasikan dengan ,yaitu :

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (2.5)$$

dimana x menyatakan jumlah populasi mangsa, $a < y$ adalah konstanta pertumbuhan, dan y adalah waktu .Pada dasarnya, populasi mangsa akan tum-

buh terus tanpa batas dengan asumsi bahwa persediaan makanannya cukup tak terbatas. Sedangkan pada pemangsa apabila diasumsikan tidak terdapat persediaan makanan, maka populasinya akan mati dalam angka yang sebanding dengan jumlahnya. Seperti halnya pada mangsa, pertumbuhan spesies pemangsa dinotasikan dengan $x(t)$, yaitu :

$$\frac{dy}{dt} = -by \quad (2.6)$$

dimana x merupakan jumlah populasi pemangsa serta b adalah konstanta penurunan. Alasan terjadi penurunan dalam hal ini karena pada dasarnya pemangsa akan mati kelaparan karena tidak ada makanan. Selanjutnya akan disusun suatu model yang membahas kaitan antara spesies pemangsa dan mangsa. Hubungan interaksi keduanya diperhitungkan dengan fakta bahwa spesies pemangsa akan memakan spesies mangsa. Pada akhirnya akan diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \quad (2.7)$$

$$\frac{dy}{dt} = -by + \beta xy \quad (2.8)$$

dengan a adalah koefisien laju kelahiran mangsa, b adalah koefisien laju kematian pemangsa sedangkan α dan β merupakan konstanta interaksi dan t adalah waktu. Dalam hal ini, α memberikan penurunan dalam jumlah populasi mangsa karena spesies pemangsa akan memakannya, sedangkan β memberikan peningkatan pada jumlah populasi pemangsa[1].

2.7 Model Populasi Predator dengan Epidemi

Model populasi mangsa epidemi akan mensimulasikan pertumbuhan penyebaran penyakit pada mangsa yang memiliki persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = P \left(1 - \frac{P^2}{a^2KT^2} \right) - \frac{1}{2r}PI \quad (2.9)$$

$$\frac{dI}{dt} = 2I \left(\frac{\lambda}{2a^2rT^2}P^2 - \mu \right) \quad (2.10)$$

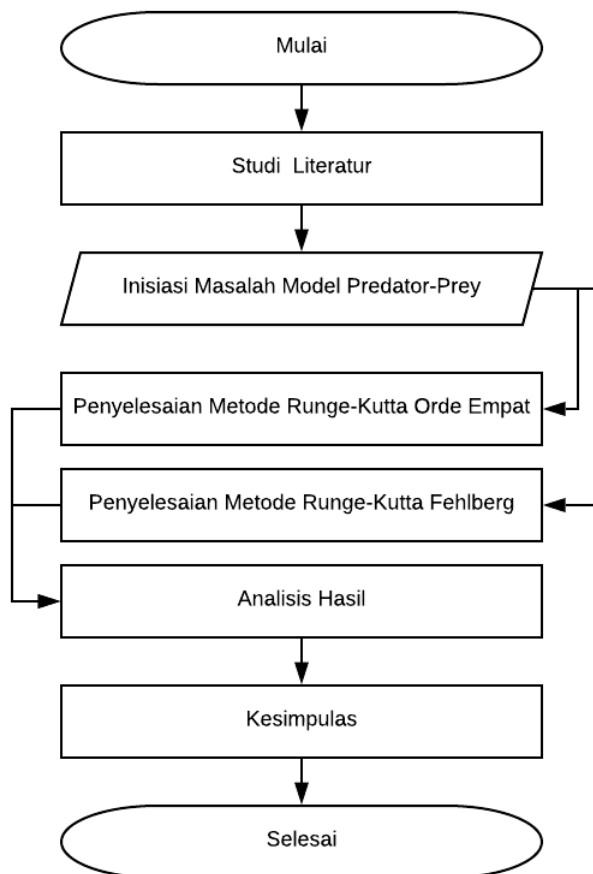
Dimana P adalah mewakili mangsa yang sehat atau dapat diterima, I adalah ukuran populasi mangsa yang sakit atau terinfeksi, a adalah tingkat perburuan predator pada mangsa sehat, k adalah daya angkut, r adalah tingkat pertumbuhan intrinsik dari mangsa sehat, T adalah waktu rata-rata untuk menangkap mangsa yang sehat, λ adalah kontak atau tingkat infeksi untuk penyakit mangsa, μ adalah kematian alami ditambah terkait penyakit dari mangsa yang terinfeksi dan t adalah waktu. Variabel-variabel berikut yang akan berpengaruh pada perkembangan penyakit epidemi pada mangsa[6].

Bab III

Metodologi dan Desain Sistem

3.1 Flowchart Sistem Tugas Akhir

Skema dan langkah-langkah pembuatan skripsi ini dijabarkan dengan *flowchart* sebagai berikut:



Setelah memulai lakukan studi literatur dan mendapatkan inisiasi masalah model Predator-Prey setelah itu mengerjakan penyelesaian dengan menggunakan masing masing metode yang akan di gunakan, setelah mendapatkan ha-

sil lalu menyelesaikan analisis hasil dan membuat kesimpulan dan skripsi ini selesai.

3.2 Algoritma

Pada proposal ini menggunakan dua metode yaitu metode Runge-Kutta orde empat dan metode Runge-Kutta Fehlberg.

3.2.1 Algoritma Metode Runge-Kutta orde empat

Pada algoritma Runge kutta orde empat jika sudah diketahui nilai y_i, x_i di cari terlebih dahulu nilai k_1, k_2, k_3, k_4 untuk mengetahui nilai $y_{i+1}[2]$.

Algorithm 1 Algoritma Runge-Kutta orde empat

procedure RUNGE-KUTTA(orde empat)

Start

For $x[i] = m, y[i] = n, h = o$ **do** ▷ Pemberian nilai awal

Input nilai $y[i]$

Input nilai $x[i]$

Input nilai h

$k_1 = f(y_i, x_i)$ ▷ Pencarian nilai k_1, k_2, k_3, k_4

$k_2 = f(y_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hk_1)$

$k_3 = f(y_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hk_2)$

$k_4 = f(y_i + h, x_i + \frac{1}{2}hk_3)$

$w_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$ ▷ Memasukan nilai k pada

formula Runge-Kutta orde empat

End for

end procedure

Cara menggunakan metode ini, pada poin ketujuh, dengan mendapatkan nilai k_1 dengan nilai y dan x dengan tanpa perubahan dan mencari nilai k_2, k_3 dan k_4 dengan nilai x dan y yang telah diperbaharui seperti pada poin kedelapan sampai poin kesepuluh. Setelah itu detelah itu baru mendapatkan nilai x_{i+1} .

3.2.2 Algoritma Metode Runge-Kutta Fehlberg

Pada algoritma Rungekutt Fehlberg memiliki pembaharuan pada orde empat dan menggunakan enam buah konstanta yang berperan memperbaharui solusi hingga orde ke lima[3].

Algorithm 2 Algoritma Runge-Kutta Fehlberg

procedure RUNGE-KUTTA(Fehlberg)

Start

For $y[i] = n, w[i] = m, h[i] = o$ **do**

▷ Pemberian nilai awal

Input nilai $y[i]$

Input nilai $w[i]$

Input nilai $h[i]$

$k_1 = hf(y_i, w_i)$

▷ Pencarian nilai k_1, k_2, k_3, k_4, k_5

$k_2 = hf(y_i + \frac{1}{4}h, w_i + \frac{1}{4}k_1)$

$k_3 = hf(y_i + \frac{3}{8}h, w_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2)$

$k_4 = hf(y_i + \frac{12}{13}h, w_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3)$

$k_5 = hf(y_i + h, w_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4)$

$w_{i+1} = w_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$ ▷ Memasukan nilai k pada

pembaharuan formula orde empat pada Runge-Kutta Fehlberg

End for

end procedure

Cara menggunakan metode ini, pada poin ketujuh, dengan mendapatkan nilai k_1 dengan nilai y dan x dengan tanpa perubahan, dan mencari nilai k_2, k_3, k_4 dan k_5 dengan nilai x dan y yang telah diperbaharui seperti pada poin kedelapan sampai poin kesepuluh. Setelah itu setelah itu baru mendapatkan nilai x_{i+1} .

Bab IV

Hasil dan Pembahasan

Pada bab ini akan dipaparkan penyelesaian secara numerik model Predator-prey. Model Predator-Prey ini merupakan sistem persamaan differensial non linear orde satu. Kemudian Sistem persamaan differensial orde tersebut diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan Runge-kutta Fehlberg. Pada bagian akhir akan dibahas tentang simulasi dan analisis simulasi menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan Runge-Kutta Fehlberg.

4.1 Akurasi Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Metode Runge Kutta Fehlberg

Untuk menghitung akurasi pada metode Runge-Kutta orde empat dan Runge-Kutta Fehlberg akan menggunakan masalah dengan masalah sistem sebagai berikut[5].

4.1.1 Contoh Masalah

$$x'(y) = y(y) \quad (4.1)$$

$$y'(y) = e^{2t} \sin t - 2x(t) + 2y(t) \quad (4.2)$$

Diberikan kondisi kendala dengan, $0 \leq t \leq 1$ dengan nilai awal $x(0) = -0,4$, $y(0) = -0,6$ dan $h = 0,1$ untuk mendekati solusi[5].

4.1.2 Solusi Runge-Kutta Orde Empat dan Runge-Kutta Fehlberg

1. Runge-Kutta Orde empat

Ubah masalah sistem (4.1) dan (4.2) dengan menggunakan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk mendapatkan solusi dengan menggunakan rumus pada (2.3), dengan cara mendapatkan nilai $k_{1,1}$, $k_{1,2}$, $k_{1,3}$, $k_{1,4}$ dan $k_{2,1}$, $k_{2,2}$, $k_{2,3}$, $k_{2,4}$ untuk memenuhi syarat pencarian pada rumus (2.3), dengan penjabaran sebagai berikut:

$$k_{1,1} = f(t_i, x_i, y_i)$$

$$\begin{aligned}
k_{1,1} &= (y_i) \\
k_{2,1} &= f(t_i, x_i, y_i) \\
k_{2,1} &= e^{2(t_i)} \sin(t_i) - 2(x_i) + 2(y_i) \\
k_{1,2} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_{1,1}, y_i + \frac{1}{2}k_{2,1}) \\
k_{1,2} &= (y_i) + \frac{1}{2}k_{2,1}) \\
k_{2,2} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_{1,1}, y_i + \frac{1}{2}k_{2,1}) \\
k_{2,2} &= e^{2(t_i + \frac{1}{2}h)} \sin(t_i + \frac{1}{2}h) - 2(x_i + \frac{1}{2}k_{1,1}) + 2(y_i + \frac{1}{2}k_{2,1})) \\
k_{1,3} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_{1,2}, y_i + \frac{1}{2}k_{2,2}) \\
k_{1,3} &= (y_i + \frac{1}{2}k_{2,2}) \\
k_{2,3} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_{1,2}, y_i + \frac{1}{2}k_{2,2}) \\
k_{2,3} &= e^{2(t_i + \frac{1}{2}h)} \sin(t_i + \frac{1}{2}h) - 2(x_i + \frac{1}{2}k_{1,1}) + 2(y_i + \frac{1}{2}k_{2,2}) \\
k_{1,4} &= f(t_i + h, x_i + k_{1,3}, y_i + k_{2,3}) \\
k_{1,4} &= (y_i + k_{2,3}) \\
k_{2,4} &= f(t_i + h, x_i + k_{1,3}, y_i + k_{2,3}) \\
k_{2,4} &= e^{2(t_i + h)} \sin(t_i + h) - 2(x_i + k_{1,3}) + 2(y_i + k_{2,3})
\end{aligned}$$

dan setelah mendapat nilai masing masing $k_{1,1}, k_{1,2}, k_{1,3}, k_{1,4}$ dan $k_{2,1}, k_{2,2}, k_{2,3}, k_{2,4}$ lalu mencari nilai x_{i+1} dan y_{i+1} menggunakan 2.3 sebagai berikut:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4})h \quad (4.3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4})h \quad (4.4)$$

dan cari nilai pembaharuan x_{i+1} dan y_{i+1} hingga memenuhi nilai t yang diminta yaitu $0 \leq t \leq 1$.

2. Solusi Runge-Kutta Fehlberg Ubah masalah sistem (4.1) dan (4.2) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk mendapatkan solusi dengan menggunakan rumus pada (2.4), dengan cara mendapatkan nilai $k_{1,1}, k_{1,2}, k_{1,3}, k_{1,4}, k_{1,5}$ dan $k_{2,1}, k_{2,2}, k_{2,3}, k_{2,4}, k_{2,5}$ untuk memenuhi syarat pencarian pada rumus 2.4, dengan penjabaran sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
k_{1,1} &= hf(t_i, x_i, y_i) \\
k_{1,1} &= h(y_i) \\
k_{2,1} &= hf(t_i, x_i, y_i) \\
k_{2,1} &= h(e^{2(t_i)} \sin(t_i) - 2(x_i) + 2(y_i))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{1,2} &= hf(t_i + \frac{1}{4}h, x_i + \frac{1}{4}k_{1,1}, y_i + \frac{1}{4}k_{2,1}) \\
k_{1,2} &= h(y_i + \frac{1}{4}k_{2,1}) \\
k_{2,2} &= hf(t_i + \frac{1}{4}h, x_i + \frac{1}{4}k_{1,1}, y_i + \frac{1}{4}k_{2,1}) \\
k_{2,2} &= h(e^{2(t_i + \frac{1}{4}h)} \sin(t_i + \frac{1}{4}h) - 2(x_i + \frac{1}{4}k_{1,1}) + 2(y_i + \frac{1}{4}k_{2,1})) \\
k_{1,3} &= hf(t_i + \frac{3}{8}h, x_i + \frac{3}{32}k_{1,1} + \frac{9}{32}k_{1,2}, y_i + \frac{3}{32}k_{2,1} + \frac{9}{32}k_{2,2}) \\
k_{1,3} &= h(y_i + \frac{3}{32}k_{2,1} + \frac{9}{32}k_{2,2}) \\
k_{2,3} &= hf(t_i + \frac{3}{8}h, x_i + \frac{3}{32}k_{1,1} + \frac{9}{32}k_{1,2}, y_i + \frac{3}{32}k_{2,1} + \frac{9}{32}k_{2,2}) \\
k_{2,3} &= h(e^{2(t_i + \frac{3}{8}h)} \sin(t_i + \frac{3}{8}h) - 2(x_i + \frac{3}{32}k_{1,1} + \frac{9}{32}k_{1,2}) + 2(y_i + \frac{3}{32}k_{2,1} + \frac{9}{32}k_{2,2})) \\
k_{1,4} &= hf(t_i + \frac{12}{13}h, x_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3}, y_i + \frac{1932}{2197}k_{2,1} - \frac{7200}{2197}k_{2,2} + \frac{7296}{2197}k_{2,3}) \\
k_{1,4} &= h(y_i + \frac{1932}{2197}k_{2,1} - \frac{7200}{2197}k_{2,2} + \frac{7296}{2197}k_{2,3}) \\
k_{2,4} &= hf(t_i + \frac{12}{13}h, x_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3}, y_i + \frac{1932}{2197}k_{2,1} - \frac{7200}{2197}k_{2,2} + \frac{7296}{2197}k_{2,3}) \\
k_{2,4} &= h(e^{2(t_i)} \sin(t_i + \frac{12}{13}h) - 2(x_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3}) + 2(y_i + \frac{1932}{2197}k_{2,1} - \frac{7200}{2197}k_{2,2} + \frac{7296}{2197}k_{2,3})) \\
k_{1,5} &= hf(t_i + h, x_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4}, y_i + \frac{439}{216}k_{2,1} - 8k_{2,2} + \frac{3680}{513}k_{2,3} - \frac{845}{4104}k_{2,4}) \\
k_{1,5} &= h(y_i + \frac{439}{216}k_{2,1} - 8k_{2,2} + \frac{3680}{513}k_{2,3} - \frac{845}{4104}k_{2,4}) \\
k_{2,5} &= hf(t_i + h, x_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4}, y_i + \frac{439}{216}k_{2,1} - 8k_{2,2} + \frac{3680}{513}k_{2,3} - \frac{845}{4104}k_{2,4}) \\
k_{2,5} &= h(e^{2(t_i+h)} \sin(t_i + h) - 2(x_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4}) + 2(y_i + \frac{439}{216}k_{2,1} - 8k_{2,2} + \frac{3680}{513}k_{2,3} - \frac{845}{4104}k_{2,4}))
\end{aligned}$$

dan setelah mendapat nilai masing masing $k_{1,1}, k_{1,2}, k_{1,3}, k_{1,4}, k_{1,5}$ dan mendapatkan $k_{2,1}, k_{2,2}, k_{2,3}, k_{2,4}, k_{2,5}$ lalu mencari nilai $w_{i+1,1}$ dan $w_{i+1,2}$ menggunakan 2.4 sebagai berikut:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{25}{216}k_{1,1} + \frac{1408}{2565}k_{1,3} + \frac{2197}{4104}k_{1,4} - \frac{1}{5}k_{1,5} \quad (4.5)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}k_{2,1} + \frac{1408}{2565}k_{2,3} + \frac{2197}{4104}k_{2,4} - \frac{1}{5}k_{2,5} \quad (4.6)$$

dan cari nilai pembaharuan x_{i+1} dan y_{i+1} hingga memenuhi nilai t yang diminta yaitu $0 \leq t \leq 1$.

4.1.3 Hasil Akurasi

Tabel 4.1: Tabel akurasi nilai x pada Runge kutta orde empat dan Runge-Kutta Fehlberg

t_i	$x(t_i)$	x_i		Error	
		Runge-Kutta orde empat	Runge-Kutta Fehlberg	Runge-Kutta orde empat	Runge-Kutta Fehlberg
0	-0.4	-0.4	-0.4	0	0
0.1	-0.46173297	-0.46173334	-0.46173290	37×10^{-8}	7×10^{-9}
0.2	-0.52555905	-0.52555988	-0.52555890	83×10^{-8}	15×10^{-8}
0.3	-0.58860005	-0.58860144	-0.58859978	13.9×10^{-7}	27×10^{-8}
0.4	-0.64661028	-0.64661231	-0.64660989	20.3×10^{-7}	39×10^{-8}
0.5	-0.69356395	-0.69356666	-0.69356338	27.1×10^{-7}	57×10^{-8}
0.6	-0.72114849	-0.72115190	-0.72114773	34.1×10^{-7}	76×10^{-8}
0.7	-0.71814890	-0.71815295	-0.71814792	40.5×10^{-7}	98×10^{-8}
0.8	-0.66970677	-0.66971133	-0.66970556	45.6×10^{-7}	12.1×10^{-7}
0.9	-0.55643814	-0.55644290	-0.55643667	47.6×10^{-7}	14.7×10^{-7}
1	-0.35339436	-0.35339886	-0.35339265	45×10^{-8}	17.1×10^{-7}
Total Error				28.61×10^{-6}	75.8×10^{-7}

Tabel 4.2: Tabel akurasi nilai y pada Runge kutta orde empat dan Runge-Kutta Fehlberg

t_i	$y(t_i)$	y_i		Error	
		Runge-Kutta orde empat	Runge-Kutta Fehlberg	Runge-Kutta orde empat	Runge-Kutta Fehlberg
0	-0.6	-0.6	-0.6	0	0
0.1	-0.63163040	-0.63163124	-0.63163100	84×10^{-8}	6×10^{-8}
0.2	-0.64014780	-0.64014895	-0.64014857	11.5×10^{-7}	77×10^{-8}
0.3	-0.61366300	-0.61366381	-0.61366348	81×10^{-8}	48×10^{-8}
0.4	-0.53658210	-0.53658203	-0.53658207	7×10^{-9}	3×10^{-9}
0.5	-0.38873950	-0.38873810	-0.38873896	14×10^{-8}	54×10^{-8}
0.6	-0.14438340	-0.14438087	-0.14438321	25.3×10^{-7}	19×10^{-8}
0.7	0.22899170	0.22899702	0.22899225	53.2×10^{-7}	55×10^{-8}
0.8	0.77198150	0.77199180	0.77198330	10.3×10^{-7}	18×10^{-8}
0.9	1.53476400	1.53478150	1.53476760	17.5×10^{-7}	36×10^{-8}
1	2.57874100	2.57876630	2.57874490	25.3×10^{-7}	39×10^{-8}
Total error				65.22×10^{-7}	12.46×10^{-7}

Dengan menggunakan matlab mendapatkan hasil nilai $x(t_i)$ dan $y(t_i)$ [5] dan nilai x dan y dengan metode yang telah di gunakan, dan mendapatkan

nilai error untuk perbandingan pada setiap metode yang digunakan dari nilai error yang didapat dari nilai baris $x(t_i)$ dikurang dari hasil baris x_i dan juga pada baris $y(t_i)$ dikurang dari hasil nilai y_i . Dari Tabel (4.1) dan Tabel (4.2) bisa di lihat dari nilai errornya dari metode Runge-Kutta orde empat dan Runge-Kutta Fehlberg, yang memiliki nilai error yang paling kecil adalah nilai error dari metode Runge-Kutta Fehlberg.

4.2 Simulasi Model Predator-Prey

Dalam subbab ini, disimulasikan model Predator-Prey dengan metode Runge-Kutta orde empat dan Runge-Kutta Fehlberg. Simulasi interaksi Predator-Prey yang diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan Runge-Kutta Fehlberg dilakukan dengan memvariasikan parameter-parameter yang mempengaruhi interaksi Predator-Prey (2.7) dan (2.8). Beberapa parameter yang akan divariasikan yaitu laju kelahiran mangsa (a), laju kematian pemangsa (b), penurunan pada jumlah populasi mangsa (α) dan peningkatan pada jumlah populasi pemangsa (β). Untuk menganalisis pengaruh parameter-parameter tersebut terhadap interaksi Predator-Prey, maka variasi parameter akan dilakukan dengan cara merubah nilai empat parameter, yaitu yaitu laju kelahiran mangsa (a), laju kematian pemangsa (b), penurunan pada jumlah populasi mangsa (α) dan peningkatan pada jumlah populasi pemangsa (β) yang diperoleh dari perhitungan tabel kehidupan dan pada variabel (x) adalah jumlah populasi mangsa, (y) adalah Jumlah populasi pemangsa dan (t) adalah waktu.

4.2.1 Penyelesaian Simulasi Model Predator-Prey

Dengan kasus yang diberikan $a = 3$, $\alpha = 0,002$, $b = 0,0006$ dan $\beta = 0,5$ dengan nilai $h = 0,1$ dan t berada pada $0 \leq t \leq 10$ dan nilai awal $x(0) = 1000$ dan $y(0) = 500$ [7]. Simulasi model Predator-Prey akan di selesaikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan Runge-Kutta Fehlberg.

1. Penyelesaian Model Predator-prey Dengan Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat.

Persamaan model Predator-Prey (2.7) dan (2.8) akan diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat (2.3) sebagai berikut.

$$k_{1,1} = f(t_i, x_i, y_i)$$

$$k_{1,1} = a(x_i) - \alpha(x_i)(y_i)$$

$$k_{2,1} = f(t_i, x_i, y_i)$$

$$k_{2,1} = -b(y_i) + \beta(x_i)(y_i)$$

$$k_{1,2} = f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_{1,1}, y_i + \frac{1}{2}k_{2,1})$$

$$k_{1,2} = a(x_i + \frac{1}{2}k_{1,1}) - \alpha(x_i + \frac{1}{2}k_{1,1})(y_i + \frac{1}{2}k_{2,1})$$

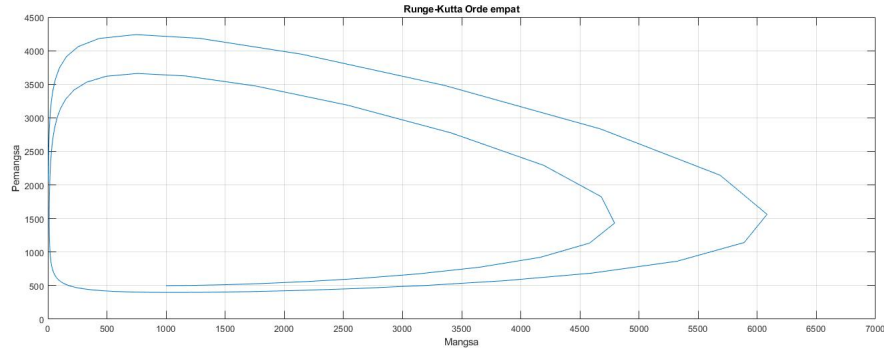
$$\begin{aligned}
k_{2,2} &= f(y_i + \frac{1}{2}h, w_{i,1} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{i,2} + \frac{1}{2}k_{2,1}) \\
k_{2,2} &= -b(y_i + \frac{1}{2}k_{1,2}) + \beta(x_i + \frac{1}{2}k_{1,1})(y_i + \frac{1}{2}k_{1,2}) \\
k_{1,3} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_{1,2}, y_i + \frac{1}{2}k_{2,2}) \\
k_{1,3} &= a(x_i + \frac{1}{2}k_{1,2}) - \alpha(x_i + \frac{1}{2}k_{1,2})(y_i + \frac{1}{2}k_{2,2}) \\
k_{2,3} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_{1,2}, y_i + \frac{1}{2}k_{2,2}) \\
k_{2,3} &= -b(y_i + \frac{1}{2}k_{2,2}) + \beta(x_i + \frac{1}{2}k_{1,2})(y_i + \frac{1}{2}k_{2,2}) \\
k_{1,4} &= f(t_i + h, x_i + k_{1,3}, y_i + k_{2,3}) \\
k_{1,4} &= a(x_i + k_{1,3}) - \alpha(x_i + k_{1,3})(y_i + k_{2,3}) \\
k_{2,4} &= f(t_i + h, x_i + k_{1,3}, y_i + k_{2,3}) \\
k_{2,4} &= -b(y_i + k_{2,3}) + \beta(x_i + k_{1,3})(y_i + k_{2,3})
\end{aligned}$$

dan setelah mendapat nilai masing masing $k_{1,1}, k_{1,2}, k_{1,3}, k_{1,4}$ dan $k_{2,1}, k_{2,2}, k_{2,3}, k_{2,4}$ lalu mencari nilai x_{i+1} dan y_{i+1} menggunakan 2.3 sebagai berikut:

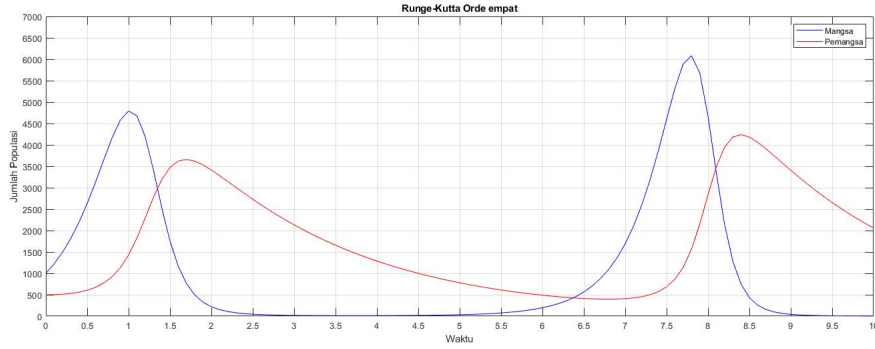
$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4})h \quad (4.7)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4})h \quad (4.8)$$

dan cari nilai pembaharuan x_{i+1} dan y_{i+1} hingga nilai t yang di minta dan mendapatkan hasil sebagai berikut.



Gambar 4.1: Grafik hasil simulasi model, antara mangsa dan pemangsa.



Gambar 4.2: Grafik hasil simulasi model, antara jumlah populasi dan waktu

Dari hasil metode Runge-Kutta orde empat dapat dilihat dari Gambar (4.1), bahwa jumlah mangsa terbanyak di pada angka di sekitaran 6100 dan jumlah pemangsa terbanyak sekitaran 4300. Pada Gambar (4.2) jumlah mangsa terbanyak 7,8 sedangkan pemangsa berada di waktu 8,3. Jumlah populasi mangsa dan pemangsanya memiliki jumlah yang sama berada pada waktu 1,4, 6,4 dan berada di waktu 8,1.

2. Hasil dengan menggunakan Metode Runge-Kutta Fehlberg. Penyelesaian Model Predator-prey Dengan Menggunakan Metode Runge-Kutta fehlberg.

Persamaan model Predator-Prey (2.7) dan (2.8) akan diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat (2.4) dengan penjabaran sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 k_{1,1} &= hf(t_i, x_i, y_i) \\
 k_{1,1} &= h(a(x_i) - \alpha(x_i)(y_i)) \\
 k_{2,1} &= hf(t_i, x_{i,1}, y_{i,2}) \\
 k_{2,1} &= h(-b(y_i) + \beta(x_i)(y_i)) \\
 k_{1,2} &= hf(t_i + \frac{1}{4}h, x_i + \frac{1}{4}k_{1,1}, y_i + \frac{1}{4}k_{2,1}) \\
 k_{1,2} &= h(a(x_i + \frac{1}{4}k_{1,1}) - \alpha(x_i + \frac{1}{4}k_{1,1})(y_i + \frac{1}{4}k_{2,1})) \\
 k_{2,2} &= hf(t_i + \frac{1}{4}h, x_i + \frac{1}{4}k_{1,1}, y_i + \frac{1}{4}k_{2,1}) \\
 k_{2,2} &= h(-b(y_i + \frac{1}{4}k_{2,1}) + \beta(x_i + \frac{1}{4}k_{1,1})(y_i + \frac{1}{4}k_{2,1})) \\
 k_{1,3} &= hf(t_i + \frac{3}{8}h, x_i + \frac{3}{32}k_{1,1} + \frac{9}{32}k_{1,2}, y_i + \frac{3}{32}k_{2,1} + \frac{9}{32}k_{2,2}) \\
 k_{1,3} &= h(a(x_i + \frac{3}{32}k_{1,1} + \frac{9}{32}k_{1,2}) - \alpha(x_i + \frac{3}{32}k_{1,1} + \frac{9}{32}k_{1,2})(y_i + \frac{3}{32}k_{2,1} + \frac{9}{32}k_{2,2})) \\
 k_{2,3} &= hf(t_i + \frac{3}{8}h, x_{i,1} + \frac{3}{32}k_{1,1} + \frac{9}{32}k_{1,2}, y_i + \frac{3}{32}k_{2,1} + \frac{9}{32}k_{2,2}) \\
 k_{2,3} &= h(-b(y_i + \frac{3}{32}k_{2,1} + \frac{9}{32}k_{2,2}) + \beta(x_i + \frac{3}{32}k_{1,1} + \frac{9}{32}k_{1,2})(y_i + \frac{3}{32}k_{2,1} + \frac{9}{32}k_{2,2}))
 \end{aligned}$$

$$k_{1,4} = hf(t_i + \frac{12}{13}h, x_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3}, y_i + \frac{1932}{2197}k_{2,1} - \frac{7200}{2197}k_{2,2} + \frac{7296}{2197}k_{2,3})$$

$$k_{1,4} = h(a(x_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3}) - \alpha(x_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3})(y_i + \frac{1932}{2197}k_{2,1} - \frac{7200}{2197}k_{2,2} + \frac{7296}{2197}k_{2,3}))$$

$$k_{2,4} = hf(t_i + \frac{12}{13}h, x_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3}, y_i + \frac{1932}{2197}k_{2,1} - \frac{7200}{2197}k_{2,2} + \frac{7296}{2197}k_{2,3})$$

$$k_{2,4} = h(-b(y_i + \frac{1932}{2197}k_{2,1} - \frac{7200}{2197}k_{2,2} + \frac{7296}{2197}k_{2,3}) + \beta(x_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3})(y_i + \frac{1932}{2197}k_{2,1} - \frac{7200}{2197}k_{2,2} + \frac{7296}{2197}k_{2,3}))$$

$$k_{1,5} = hf(t_i + h, x_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4}, y_i + \frac{439}{216}k_{2,1} - 8k_{2,2} + \frac{3680}{513}k_{2,3} - \frac{845}{4104}k_{2,4})$$

$$k_{1,5} = h(a(x_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4}) - \alpha(x_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4})(y_i + \frac{439}{216}k_{2,1} - 8k_{2,2} + \frac{3680}{513}k_{2,3} - \frac{845}{4104}k_{2,4}))$$

$$k_{2,5} = hf(y_i + h, x_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4}, y_i + \frac{439}{216}k_{2,1} - 8k_{2,2} + \frac{3680}{513}k_{2,3} - \frac{845}{4104}k_{2,4})$$

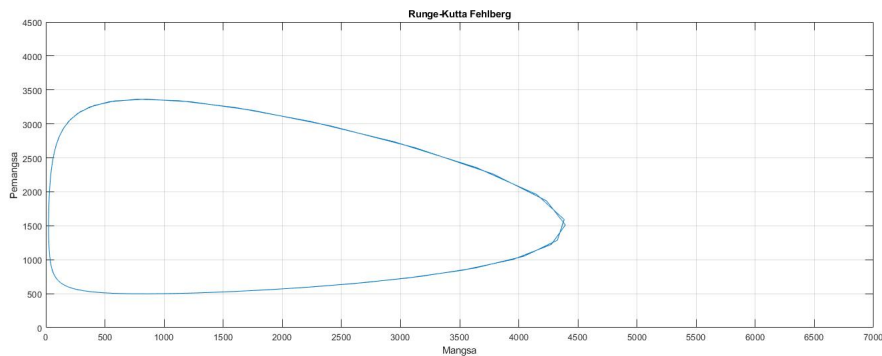
$$k_{2,5} = h(-b(y_i + \frac{439}{216}k_{2,1} - 8k_{2,2} + \frac{3680}{513}k_{2,3} - \frac{845}{4104}k_{2,4}) + \beta(x_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4})(y_i + \frac{439}{216}k_{2,1} - 8k_{2,2} + \frac{3680}{513}k_{2,3} - \frac{845}{4104}k_{2,4}))$$

dan setelah mendapat nilai masing masing $k_{1,1}, k_{1,2}, k_{1,3}, k_{1,4}, k_{1,5}$ dan $k_{2,1}, k_{2,2}, k_{2,3}, k_{2,4}, k_{1,5}$ lalu mencari nilai x_{i+1} dan y_{i+1} menggunakan 2.4 sebagai berikut:

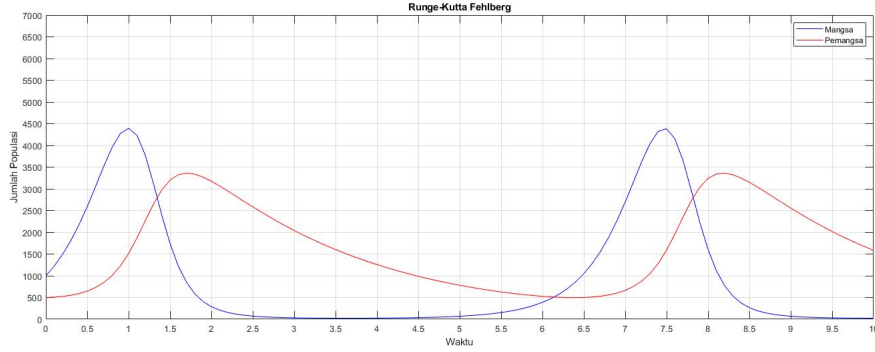
$$x_{i+1} = x_i + \frac{25}{216}k_{1,1} + \frac{1408}{2565}k_{1,3} + \frac{2197}{4104}k_{1,4} - \frac{1}{5}k_{1,5} \quad (4.9)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}k_{2,1} + \frac{1408}{2565}k_{2,3} + \frac{2197}{4104}k_{2,4} - \frac{1}{5}k_{2,5} \quad (4.10)$$

dan cari nilai pembaharuan x_{i+1} dan y_{i+1} hingga nilai memenuhi nilai t yang di minta dan mendapatkan hasil sebagai berikut.



Gambar 4.3: Grafik hasil simulasi model, antara mangsa dan pemangsa.



Gambar 4.4: Grafik hasil simulasi model, antara jumlah populasi dan waktu

Dari hasil metode Runge-Kutta Fehlberg dapat dilihat dari Gambar (4.3), bahwa jumlah mangsa terbanyak di pada angka di sekitaran 4400 dan jumlah pemangsa terbanyak sekitaran 3400. Pada Gambar (4.4), jumlah mangsa terbanyak pada waktu 1 dan 7,5 sedangkan pemangsa berada di waktu 1,7 dan 8,2. Jumlah populasi mangsa dan pemangsa memiliki jumlah yang sama berada pada waktu 1,4, 6,2 dan berada di waktu 7,9.

4.3 Simulasi Model Populasi dengan Predator epidemi

Dalam subbab ini, dengan pengantar dari paper [6] akan disimulasikan model populasi mangsa epidemi (2.9) dan (2.10) dengan metode Runge-Kutta orde empat dan Runge-Kutta Fehlberg.

4.3.1 Penyelesaian Model predator dengan Epidemi

Menyimulasikan model dengan kasus yang di berikan $a = 0,5$, $K = 20$, $T = 0,8$, $r = 0,7$, $\lambda = 0,7$ dan $m = 0,5$ dengan nilai $h = 0,1$ dan t berada pada $0 \leq t \leq 10$ dengan nilai awal $P = 1$ dan $I = 0,01$ [6]. Simulasi model populasi mangsa epidemi dapat dilihat pada grafik berikut ini, untuk mengetahui besaran jumlah populasi mangsa yang terkena penyakit atau populasi mangsa yang sehat.

1. Persamaan model mangsa epidemi (2.9) dan (2.10) akan di selesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat (2.3) dengan mencari nilai setiap k -nya terlebih dahulu dengan cara sebagai berikut:

$$k_{1,1} = f(t_i, P_i, I_i)$$

$$k_{1,1} = P_i(1 - \frac{P_i^2}{a^2 K T^2}) - \frac{1}{2r} P_i I_i$$

$$k_{2,1} = f(t_i, P_{i,1}, I_{i,2})$$

$$k_{2,1} = 2I_i(\frac{\lambda}{2a^2 r T^2} P_i^2 - \mu)$$

$$k_{1,2} = f(t_i + \frac{1}{2}h, P_i + \frac{1}{2}k_{1,1}, I_i + \frac{1}{2}k_{2,1})$$

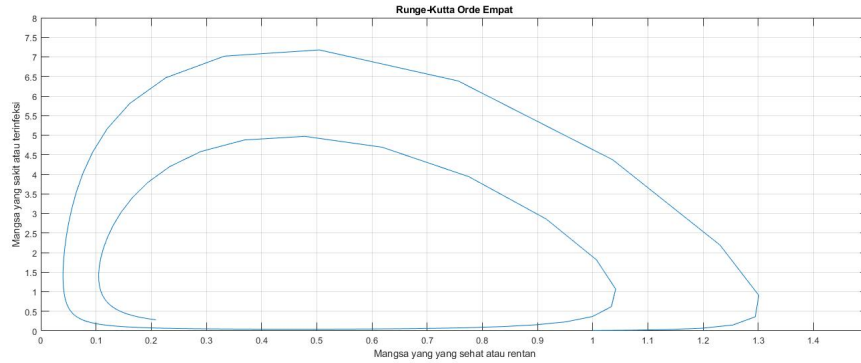
$$\begin{aligned}
k_{1,2} &= (P_i + \frac{1}{2}k_{1,1})(1 - \frac{(P_i + \frac{1}{2}k_{1,1})^2}{a^2KT^2}) - \frac{1}{2r}(P_i + \frac{1}{2}k_{1,1})(I_i + \frac{1}{2}k_{2,1}) \\
k_{2,2} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, P_i + \frac{1}{2}k_{1,1}, I_i + \frac{1}{2}k_{2,1}) \\
k_{2,2} &= 2(I_i + \frac{1}{2}k_{2,1})(\frac{\lambda}{2a^2rT^2}(P_i + \frac{1}{2}k_{1,1})^2 - \mu) \\
k_{1,3} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, P_i + \frac{1}{2}k_{1,2}, I_i + \frac{1}{2}k_{2,2}) \\
k_{1,3} &= ((P_i + \frac{1}{2}k_{1,2}) + \frac{1}{2}k_{1,2})(1 - \frac{(P_i + \frac{1}{2}k_{1,2})^2}{a^2KT^2}) - \frac{1}{2r}(P_i + \frac{1}{2}k_{1,2})(I_i + \frac{1}{2}k_{2,2}) \\
k_{2,3} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, P_i + \frac{1}{2}k_{1,2}, I_i + \frac{1}{2}k_{2,2}) \\
k_{2,3} &= 2(I_i + \frac{1}{2}k_{2,2})(\frac{\lambda}{2a^2rT^2}(P_i + \frac{1}{2}k_{1,2})^2 - \mu) \\
k_{1,4} &= f(t_i + h, P_i + k_{1,3}, I_i + k_{2,3}) \\
k_{1,4} &= (P_i + k_{1,3})(1 - \frac{(P_i + k_{1,3})^2}{a^2KT^2}) - \frac{1}{2r}(P_i + k_{1,3})(I_i + k_{2,3}) \\
k_{2,4} &= f(t_i + h, P_i + k_{1,3}, I_i + k_{2,3}) \\
k_{2,4} &= 2(I_i + k_{2,3})(\frac{\lambda}{2a^2rT^2}(P_i + k_{1,3})^2 - \mu)
\end{aligned}$$

dan setelah mendapat nilai masing masing $k_{1,1}, k_{1,2}, k_{1,3}, k_{1,4}$ dan $k_{2,1}, k_{2,2}, k_{2,3}, k_{2,4}$ lalu mencari nilai P_{i+1} dan I_{i+1} menggunakan (2.3) sebagai berikut:

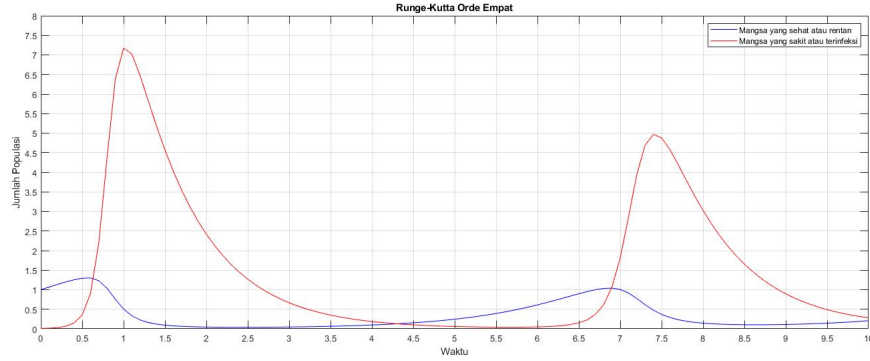
$$P_{i+1} = P_i + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4})h \quad (4.11)$$

$$I_{i+1} = I_i + \frac{1}{6}(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4})h \quad (4.12)$$

dan cari nilai pembaharuan P_{i+1} dan I_{i+1} hingga nilai t yang di minta dan mendapatkan hasil sebagai berikut:



Gambar 4.5: Grafik hasil simulasi model, antara mangsa dan pemangsa.



Gambar 4.6: Grafik hasil simulasi model, antara jumlah populasi dan waktu

Dari hasil metode Runge-Kutta orde empat dapat dilihat dari Gambar (4.5), bahwa jumlah mangsa yang sakit atau terinfeksi terbanyak di pada angka di sekitaran 7,1 dan jumlah mangsa yang sehat atau rentan terbanyak sekitaran 1,3. Pada Gambar (4.6) jumlah mangsa yang sakit atau terinfeksi terbanyak pada waktu 1, sedangkan mangsa yang sehat atau rentan berada di waktu 0,6. Jumlah populasi mangsa yang sakit atau terinfeksi dan mangsa yang sehat atau rentan memiliki jumlah yang sama berada pada waktu 0,6 ,4,3 dan berada di waktu 6,8.

2. Penyelesaian model mangsa epidemi dengan menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg (2.9) dan (2.10) akan di selesaikan menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg (2.4) dengan mencari nilai setiap k -nya terlebih dahulu dengan cara sebagai berikut:

$$k_{1,1} = f(t_i, P_i, I_i)$$

$$k_{1,1} = h(P_i(1 - \frac{P_i^2}{a^2KT^2}) - \frac{1}{2r}P_iI_i)$$

$$k_{2,1} = f(t_i, P_{i,1}, I_{i,2})$$

$$k_{2,1} = h(2I_i(\frac{\lambda}{2a^2rT^2}P_i^2 - \mu))$$

$$k_{1,2} = hf(t_i + \frac{1}{4}h, P_i + \frac{1}{4}k_{1,1}, I_i + \frac{1}{4}k_{2,1})$$

$$k_{1,2} = h((P_i + \frac{1}{4}k_{1,1})(1 - \frac{P_i^2}{a^2KT^2}) - \frac{1}{2r}(P_i + \frac{1}{4}k_{1,1})(I_i + \frac{1}{4}k_{2,1}))$$

$$k_{2,2} = hf(t_i + \frac{1}{4}h, P_i + \frac{1}{4}k_{1,1}, I_i + \frac{1}{4}k_{2,1})$$

$$k_{2,2} = h(2(I_i + \frac{1}{4}k_{2,1})(\frac{\lambda}{2a^2rT^2}(P_i + \frac{1}{4}k_{1,1})^2 - \mu))$$

$$k_{1,3} = hf(t_i + \frac{3}{8}h, P_i + \frac{3}{32}k_{1,1} + \frac{9}{32}k_{1,2}, I_i + \frac{3}{32}k_{2,1} + \frac{9}{32}k_{2,2})$$

$$k_{1,3} = h((P_i + \frac{3}{32}k_{1,1} + \frac{9}{32}k_{1,2})(1 - \frac{(P_i + \frac{3}{32}k_{1,1} + \frac{9}{32}k_{1,2})^2}{a^2KT^2}) - \frac{1}{2r}(P_i + \frac{3}{32}k_{1,1} + \frac{9}{32}k_{1,2})(I_i + \frac{3}{32}k_{2,1} + \frac{9}{32}k_{2,2}))$$

$$k_{2,3} = hf(t_i + \frac{3}{8}h, P_i + \frac{3}{32}k_{1,1} + \frac{9}{32}k_{1,2}, I_i + \frac{3}{32}k_{2,1} + \frac{9}{32}k_{2,2})$$

$$k_{2,3} = h(2(I_i + \frac{3}{32}k_{1,1} + \frac{9}{32}k_{1,2})(\frac{\lambda}{2a^2rT^2}(P_i + \frac{3}{32}k_{1,1} + \frac{9}{32}k_{1,2})^2 - \mu))$$

$$k_{1,4} = hf(t_i + \frac{12}{13}h, P_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3}, I_i + \frac{1932}{2197}k_{2,1} - \frac{7200}{2197}k_{2,2} + \frac{7296}{2197}k_{2,3})$$

$$k_{1,4} = h((P_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3})(1 - \frac{(P_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3})^2}{a^2KT^2}) - \frac{1}{2r}(P_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3})(I_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3}))$$

$$k_{2,4} = hf(t_i + \frac{12}{13}h, P_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3}, I_i + \frac{1932}{2197}k_{2,1} - \frac{7200}{2197}k_{2,2} + \frac{7296}{2197}k_{2,3})$$

$$k_{2,4} = h(2(I_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3})(\frac{\lambda}{2a^2rT^2}(P_i + \frac{1932}{2197}k_{1,1} - \frac{7200}{2197}k_{1,2} + \frac{7296}{2197}k_{1,3})^2 - \mu))$$

$$k_{1,5} = hf(t_i + h, P_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4}, I_i + \frac{439}{216}k_{2,1} - 8k_{2,2} + \frac{3680}{513}k_{2,3} - \frac{845}{4104}k_{2,4})$$

$$k_{1,5} = h((P_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4})(1 - \frac{(P_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4})^2}{a^2KT^2}) - \frac{1}{2r}(P_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4})(I_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4}))$$

$$k_{2,5} = hf(t_i + h, P_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4}, I_i + \frac{439}{216}k_{2,1} - 8k_{2,2} + \frac{3680}{513}k_{2,3} - \frac{845}{4104}k_{2,4})$$

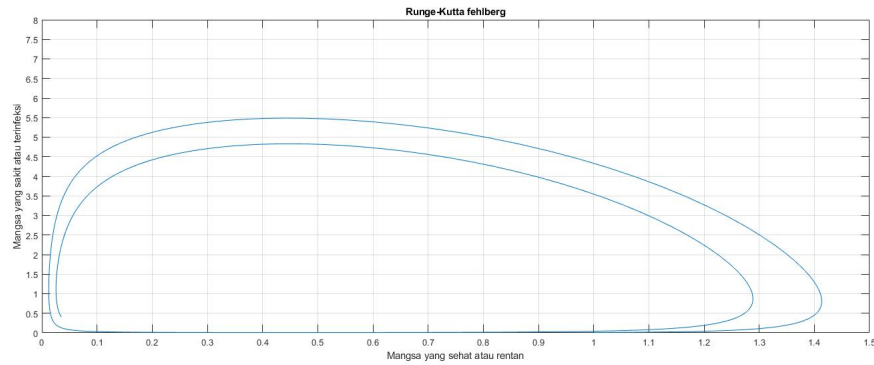
$$k_{2,5} = h(2(I_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4})(\frac{\lambda}{2a^2rT^2}(P_i + \frac{439}{216}k_{1,1} - 8k_{1,2} + \frac{3680}{513}k_{1,3} - \frac{845}{4104}k_{1,4})^2 - \mu))$$

dan setelah mendapat nilai masing masing $k_{1,1}, k_{1,2}, k_{1,3}, k_{1,4}, k_{1,5}$ dan $k_{2,1}, k_{2,2}, k_{2,3}, k_{2,4}, k_{2,5}$ lalu mencari nilai P_{i+1} dan I_{i+1} menggunakan 2.4 sebagai berikut:

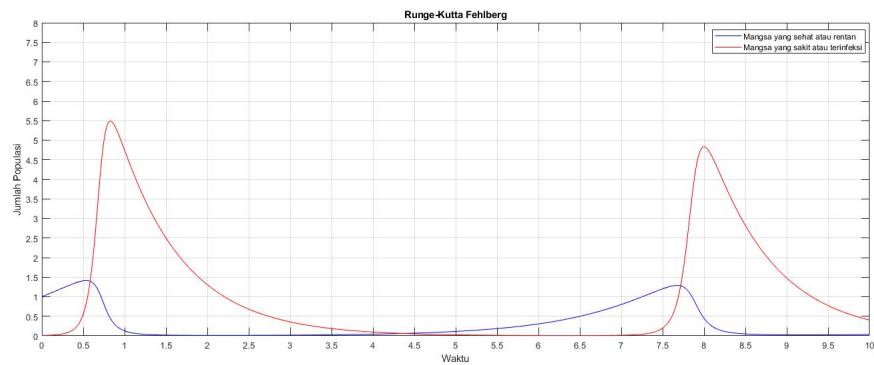
$$P_{i+1} = P_i + \frac{25}{216}k_{1,1} + \frac{1408}{2565}k_{1,3} + \frac{2197}{4104}k_{1,4} - \frac{1}{5}k_{1,5} \quad (4.13)$$

$$I_{i+1} = I_i + \frac{25}{216}k_{2,1} + \frac{1408}{2565}k_{2,3} + \frac{2197}{4104}k_{2,4} - \frac{1}{5}k_{2,5} \quad (4.14)$$

dan cari nilai pembaharuan P_{i+1} dan I_{i+1} hingga nilai memenuhi nilai t yang di mintav dan mendapatkan hasil sebagai berikut:



Gambar 4.7: Grafik hasil simulasi model, antara mangsa dan pemangsa.



Gambar 4.8: Grafik hasil simulasi model, antara jumlah populasi dan waktu

Dari hasil metode Runge-Kutta orde empat dapat dilihat dari Gambar (4.7), bahwa jumlah mangsa yang sakit atau terinfeksi terbanyak di pada angka di sekitaran 5,5 dan jumlah mangsa yang sehat atau rentan terbanyak sekitaran 1,41. Pada Gambar (4.8) jumlah mangsa yang sakit atau terinfeksi terbanyak pada waktu 0,8 sedangkan mangsa yang sehat atau rentan berada di waktu 0,6. Jumlah populasi mangsa yang sakit atau terinfeksi dan mangsa yang sehat atau rentan memiliki jumlah yang sama berada pada waktu 0,6 ,4,3 dan berada di waktu 7,8.

Bab V

Penutup

Pada bab ini diperoleh kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang di peroleh dari penerapan metode Runge-Kutta orde empat dan metode Runge-Kutta fehlberg pada penyelesaian model predator-prey.

5.0.1 kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari penulisan tugas akhir ini adalah:

1. Menyelesaikan model Predator-Prey secara numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan Runge-Kutta Fehlberg, kedua metode ini tidak banyak memiliki cara yang berbeda untuk menyelesaikannya, hanya dengan mencari nilai masing masing dari k nya dan memasukannya pada persamaan x_{i+1} dan y_{i+1} untuk mendapatkan nilai dx/dt dan dy/dy yang baru. Pada model Predator-Prey
2. Metode Runge-Kutta orde empat dan metode Runge-Kutta Fehlberg saat pengujian akurasi dapat di lihat pada hasil Tabel (4.1) dan Tabel (4.2), bahwa Runge-Kutta fehlberg memiliki akurasi yang lebih baik dibandingkan metode Runge-Kutta orde empat karena metode Runge-Kutta fehlberg memiliki jumlah error yang lebih sedikit dibandingkan jumlah error pada Runge-Kutta orde empat.
3. Pada pengujian model Predator-Prey dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat bisa dilihat pada hasil pada Gambar (4.1) dan Gambar (4.2) bahwa nilai tertinggi dari mangsa dan pemangsa akan selalu naik dari nilai tertinggi sebelumnya.
4. Pada pengujian model Predator-Prey dengan menggunakan metode Runge-Kutta fehlberg bisa dilihat pada hasil pada Gambar (4.3) dan Gambar (4.4) bahwa nilai tertinggi dari mangsa dan pemangsa tidak ada kenaikan dari jumlah dua tertingginya.
5. Pada pengujian model populasi mangsa epidemi dengan menggunakan metode Runge-kutta orde empat dan metode Runge-Kutta Fehlberg, pada hasil pengujian Runge-Kutta orde empat pada Gambar (4.5) dan

Gambar (4.6) populasi mangsa yang sehat atau rentan dan populasi mangsa yang sakit atau terinfeksi pada puncak terbanyaknya pertama dan keduanya memiliki selisih yang lebih banyak dari pada selisih populasi mangsa yang sehat atau rentan dan populasi mangsa yang sakit atau terinfeksi dari hasil Runge-Kutta Fehlberg pada Gambar (4.7) dan Gambar (4.8).

Daftar Pustaka

- [1] T. F Angga. *Penerapan Model Mangsa-Pemangsa Lotka- Volterra (Studi Kasus Perkebunan Kopi, Kakao (PTPN X), dan Kelapa Rakyat di Jember)*. FMIPA Universitas Jember, 2010.
- [2] Triatmodjo B. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Beta Offset, 2002.
- [3] Setijo Bismo. *Pemodelan dan matematika terapan*. 2010.
- [4] Vivi Aida Fitria. Analisis sistem persamaan diferensial model predator-prey dengan perlambatan. *ANALISIS SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL MODEL PREDATOR-PREY DENGAN PERLAMBATAN*, 2004.
- [5] S. P. Nörsett Hairer, E. and G. Wanner. Solving ordinary differential equations. vol. 1: Nonstiff equations, (second revised edition). *Solving ordinary differential equations. Vol. 1: Nonstiff equations, (Second revised edition)*, 1993.
- [6] Bob W. Kooi and Ezio Venturino. *Ecoepidemic predator–prey model with feeding satiation, prey herd behavior and abandoned infected prey*. 2016.
- [7] A.J. Lotka. *Relation between birth rates and death rates*. Science, 1907.
- [8] Maya Rippi. *Persamaan Diferensial Biasa*. 2013.

Lampiran