

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ingeniería

Ingeniería Eléctrica Electrónica

CONTROL AVANZADO

Semestre 2021-2

Proyecto
PÉNDULO DOBLE SUBACTUADO

Cortés García Jaime Rafael
Pérez Garduño David de Jesús
Grupo 1

Profesor: DR. Marcos Ángel González Olvera

12 de marzo de 2023

Índice

1. Descripción del sistema	4
2. Modelado	4
2.1. Modelo no lineal	5
2.2. Modelo lineal	5
3. Análisis	5
3.1. Puntos de equilibrio	5
3.2. Linealización	5
3.3. Condiciones Iniciales	6
3.4. Estabilidad de los puntos de equilibrio	6
4. Diseño del control y observador	7
4.1. Controlabilidad y Observabilidad	7
4.2. Control LQG	8
5. Discretización	9
5.1. Sistema discreto	9
5.2. Control por estados observados discreto	10
6. Discusión y Conclusiones	10
A. Desarrollos	11
A.1. Ecuaciones de movimiento	11
B. Modelo de estados no lineal	11
B.1. Obtención de los puntos de equilibrio	11
C. Gráficas	12
D. Códigos y Diagramas de bloques	12
D.1. Código en MATLAB	12
D.2. Diagrama de bloques	23
E. Bibliografía	23

Índice de figuras

1. Péndulo doble subactuado	4
2. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq_1}	12
3. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq_1}	13
4. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq_1} con Observador discretizado	13
5. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq_1} con Observador discretizado	14
6. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq_2}	14
7. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq_2}	15
8. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq_2} con Observador discretizado	15
9. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq_2} con Observador discretizado	16
10. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq_3}	16
11. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq_3}	17
12. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq_3} con Observador discretizado	17
13. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq_3} con Observador discretizado	18
14. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq_4}	18
15. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq_4}	19
16. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq_4} con Observador discretizado	19
17. Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq_4} con Observador discretizado	20
18. Diagrama de bloques del sistema linealizado	23
19. Diagrama de bloques del sistema NO LINEAL	24
20. Diagrama de bloques del sistema linealizado con Observador discretizado	24
21. Diagrama de bloques del sistema NO LINEAL con Observador discretizado	24
22. Construcción interna del Pendulo NO LINEAL	25
23. Construcción interna del Observador	25
24. Construcción interna del Observador discretizado	26

Índice de tablas

Resumen

En este trabajo se analiza como sistema un péndulo doble subactuado, sistema caótico, para controlarlo con un control LQG, se tienen 4 puntos de equilibrio y se compensan las perturbaciones en el modelo así como el ruido de medición en las salidas y con implementación con un sistema digital. Debido a su comportamiento caótico, presenta dificultad para controlar su comportamiento ya que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales influyen en gran medida.

1. Descripción del sistema

El sistema consiste en un péndulo doble subactuado, esto ultimo implica que se modela con la referencia de 0° como se muestra en la figura 1.

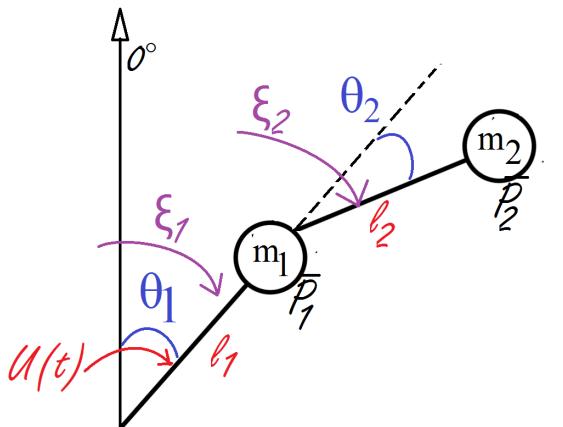


Figura 1: Péndulo doble subactuado

Tal sistema esta conformado por los siguientes parámetros:

- Gravedad: $g = 9,81[m/s^2]$
- Longitud del pendulo 1: $l_1 = 0,5[m]$
- Longitud del pendulo 2: $l_2 = 0,5[m]$
- Masa 1: $m_1 = 0,1kg$
- Masa 2: $m_2 = 0,1[kg]$

Como se puede observar en la figura 1, el primer pendulo tiene como entrada de control $u(t)$. Sin embargo, se considera que existen perturbaciones en el sistema, estas se modelan como entradas. ξ_1 es la perturbación que corresponde al primer péndulo mientras que ξ_2 es la perturbación que corresponde al segundo péndulo.

2. Modelado

El modelo del sistema es obtenido mediante las ecuaciones de Euler Lagrange. El sistema posee 2 grados de libertad: $q_1 = \theta_1$ y $q_2 = \theta_2$, por lo que el sistema posee 2 ecuaciones de movimiento, tales ecuaciones estan dadas por la Ec.1.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\dot{q}_i} = \pm u \quad (1)$$

Donde P es la energía de Rayleigh. Para el modelado de este sistema se desprecia, por lo tanto las ecuaciones de movimiento resultante estan dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \pm u \quad (2)$$

La primera ecuación de movimiento esta dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\dot{\theta}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\theta_1} \right) = u + \xi_1 \quad (3)$$

La segunda ecuación de movimiento esta dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\dot{\theta}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\theta_2} \right) = \xi_2 \quad (4)$$

En donde el Lagrangiano del sistema esta dado por: $L = K - U$ donde K es la energía cinética y U la energía potencial. El modelado es obtenido con la ayuda del software WOLFRAM MATHEMATICA, las ecuaciones de movimiento obtenidas se encuentran en la sección A al final del documento.

2.1. Modelo no lineal

Con las 2 ecuaciones de movimiento obtenidas con Lagrange, se construye el modelo en variables de estado, para que tenga la forma:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (5)$$

$$y = h(x, u) \quad (6)$$

En donde el vector de estados y el vector de salidas se definen como:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Para obtener la forma del modelo en variables de estado se utiliza el software WOLFRAM MATHEMATICA, ya que una vez con las ecuaciones de movimiento, es muy sencillo obtener el modelo con comandos que el software ofrece. La forma del modelo al ser bastante grande se encuentra en la sección B al final del documento. Los parámetros físicos del sistema son los siguientes:

$$m_1 = 0,1[Kg], m_2 = 0,1[Kg], l_1 = 0,5[m], l_2 = 0,5[m],$$

$$\xi_1 = 0,05[Nm], \xi_2 = 0,05[Nm], \eta_1 = 0,01[rad], \eta_2 = 0,01[rad]$$

2.2. Modelo lineal

Una vez que se cuenta con el modelo no lineal del sistema, se puede linealizar el sistema en algún punto, pudiendo representar al sistema en forma matricial:

$$\dot{x} = Ax + Bu + E\xi \quad (8)$$

$$y = Cx + Du \quad (9)$$

En donde las matrices A, B, C, D y E se obtienen de la siguiente forma:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(X_{eq}, U_{eq})} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(X_{eq}, U_{eq})} \quad C = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(X_{eq}, U_{eq})}$$

$$D = \frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{(X_{eq}, U_{eq})} \quad E = \frac{\partial f}{\partial \xi} \Big|_{(X_{eq}, U_{eq})}$$

3. Análisis

3.1. Puntos de equilibrio

Para obtener los puntos de equilibrio del sistema, se igualan las ecuaciones de estado del modelo no lineal a 0, considerando una entrada nula, osea $u = 0$ y se calculan los valores de x_1, x_2, x_3, x_4 que cumplen con el sistema de ecuaciones.

$$\dot{x} = f(x, 0) = 0 \quad (10)$$

El sistema de ecuaciones se compone de 4 ecuaciones, esto por las 4 ecuaciones de estado, y al considerar a $u = 0$, se tienen 4 incógnitas: x_1, x_2, x_3, x_4 . El sistema de ecuaciones se resolvio con ayuda del software MATLAB, el cual arrojo 11 soluciones posibles, sin embargo 8 de ellas tenian componente compleja en el valor de θ_2 , asi que estas 8 soluciones son descartadas como puntos de equilibrio.

Por lo tanto, restan 4 puntos de equilibrio, los cuales son:

$$X_{eq1} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_{eq2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_{eq3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_{eq4} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para los 4 puntos, la entrada de equilibrio calculada es:

$$U_{eq} = (0) \quad (11)$$

Interpretando los puntos de equilibrio resultantes, estos tienen sentido desde el punto de vista físico. En X_{eq1} , $\theta_1 = \pi$, lo que significa que el primer pendulo esta caido hacia abajo, $\theta_2 = 0$, esto significa que el pendulo 2 esta alineado con el pendulo 1, asi que ambos pendulos estan apuntado hacia abajo. Y dado que $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$, esto implica que las velocidades de ambos pendulos son cero, asi que los pendulos no se mueven de esa posición.

En X_{eq2} , $\theta_1 = 0$, lo que significa que el primer pendulo está parado hacia arriba, $\theta_2 = \pi$, esto significa que el pendulo 2 está caido hacia abajo, ocupando por asi decirlo el mismo espacio que el pendulo 1.

En X_{eq3} , $\theta_1 = 0$, lo que significa que el primer pendulo está parado hacia arriba, $\theta_2 = 0$, esto significa que el pendulo 2 está tambien parado hacia arriba, alineado con el pendulo 1.

En X_{eq4} , $\theta_1 = \pi$, lo que significa que el primer pendulo está orientado hacia abajo, $\theta_2 = \pi$, esto significa que el pendulo 2 está parado hacia arriba, alineado con el pendulo 1.

Estos 4 puntos de equilibrio tienen sentido físico, por lo tanto, este resultado es un buen indicio de que el modelo no lineal esta bien hecho. Para estos puntos, se obtiene que la entrada de equilibrio es igual a 0.

3.2. Linealización

Dado que se tienen 4 puntos de equilibrio, se linealiza el modelo no lineal en cada uno de estos puntos, obteniendo 4 linealizaciones. Estas linealizaciones se realizaron tanto con WOLFRAM MATHEMATICA como con MATLAB, y en ambos softwares se llegan a las mismas matrices, por lo que es una buena pauta de que fueron calculadas correctamente.

- Linealización para $X_{eq1} = (\pi 0 0 0)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -19,62 & 0 & 19,62 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19,62 & 0 & -58,86 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \\ -80 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 40 & -80 \\ 0 & 0 \\ -80 & 200 \end{pmatrix}$$

- Linealización para $X_{eq_2} = (0 \ 0 \ \pi \ 0)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 19,62 & 0 & -19,62 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -19,62 & 0 & -19,62 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 40 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}$$

- Linealización para $X_{eq_3} = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 19,62 & 0 & -19,62 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -19,62 & 0 & 58,86 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \\ -80 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 40 & -80 \\ 0 & 0 \\ -80 & 200 \end{pmatrix}$$

- Linealización para $X_{eq_4} = (\pi \ 0 \ \pi \ 0)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -19,62 & 0 & 19,62 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19,62 & 0 & 19,62 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 40 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 80 \end{pmatrix}$$

3.3. Condiciones Iniciales

Para poder simular, así como realizar los calculos en cuanto al control LQG se presentan las condiciones iniciales cercanas a los puntos de equilibrio como se presenta:

- Condición inicial para $X0_{eq_1} = (0 \ 0 \ 179 * pi/180 \ 0)^T$
Observador $Xh0_{eq_1} = (0 \ 0 \ 179 * pi/180 \ 0)^T$
- Condición inicial para $X0_{eq_2} = (0,001 * pi/180 \ 0 \ 179 * pi \ 0)^T$ Observador $Xh0_{eq_2} = (0,001 * pi/180 \ 0 \ 179 * pi \ 0)^T$
- Condición inicial $X0_{eq_3} = (0,001 * pi/180 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ Observador $Xh0_{eq_3} = (0,001 * pi/180 \ 0 \ 0 \ 0)^T$
- Condición inicial $X0_{eq_4} = (179 * pi/180 \ 0 \ 179 * pi/180 \ 0)^T$
Observador $Xh0_{eq_4} = (179 * pi/180 \ 0 \ 179 * pi/180 \ 0)^T$

3.4. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Para estos sistemas linealizados, se puede analizar su estabilidad por medio de métodos rigurosos y por otros métodos no tan rigurosos; para estos sistemas se analizan los valores caracteristicos de la matriz de linealización A de cada punto de equilibrio.

El cálculo de los valores caracteristicos se obtiene a partir del polinomio caracteristico de la matriz:

$$\lambda(A) = |\lambda I - A|$$

Con lo anterior si la parte real de todos los valores caracteristicos $Re(\lambda) < 0$ entonces el punto de equilibrio es estable.

- Análisis de la matriz A para $X_{eq_1} = (\pi \ 0 \ 0 \ 0)^T$

Por lo que sus valores cáracteristicos son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 + j8,1846 \\ \lambda_2 &= 0 - j8,1846 \\ \lambda_3 &= 0 + j3,3902 \\ \lambda_4 &= 0 - j3,3902 \end{aligned}$$

Debido a que la parte positiva de todos los valores propios $Re(\lambda) = 0$ no se puede concluir con respecto a la estabilidad del punto de equilibrio utilizando este criterio. Sin embargo el sistema podría ser o no ser estable.

Analizando este punto de equilibrio, físicamente este consiste en los 2 pendulos caídos hacia abajo, por lo que es fácil intuir que este caso es estable. Se especula que los polos de este sistema están sobre el eje imaginario debido a que el modelado desprecia la fricción de los pendulos. Si estos estuvieran modelados, probablemente los valores característicos de esta linealización se encontrarían en el semiplano izquierdo complejo, indicando así que en efecto este punto de equilibrio es estable.

- Análisis de la matriz A para $X_{eq_2} = (0 \ 0 \ \pi \ 0)^T$ con lo que sus valores cáracteristicos son:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -5,2675 + j0 \\ \lambda_2 &= 5,2675 - j0 \\ \lambda_3 &= 0 + j5,2675 \\ \lambda_4 &= 0 - j5,2675\end{aligned}$$

Debido a que la parte positiva del segundo valor propio $Re(\lambda_2) > 0$ se puede concluir que el punto de equilibrio es inestable.

- Análisis de la matriz A para $X_{eq_3} = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -8,1846 + j0 \\ \lambda_2 &= -3,3902 + j0 \\ \lambda_3 &= 8,1846 + j0 \\ \lambda_4 &= 3,3902 + j0\end{aligned}$$

Debido a que la parte real del tercer y cuarto valor propio $Re(\lambda_3) > 0$ y $Re(\lambda_4) > 0$ se puede concluir que el punto de equilibrio es inestable.

- Análisis de la matriz A para $X_{eq_4} = (\pi \ 0 \ \pi \ 0)^T$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -5,2675 + j0 \\ \lambda_2 &= 0 + j5,2675 \\ \lambda_3 &= 0 - j5,2675 \\ \lambda_4 &= 5,2675 + j0\end{aligned}$$

Debido a que la parte real del cuarto valor propio $Re(\lambda_4) > 0$ se puede concluir que el punto de equilibrio es inestable.

4. Diseño del control y observador

El sistema consiste en un péndulo doble, el objetivo es diseñar un control que haga que los estados del sistema se estabilicen en un punto de equilibrio mediante una entrada de control $u(t)$. Existen varias formas de implementar un control a un sistema, la que se realizará sobre este sistema es un control denominado como *Control Lineal Cuadrático Gaussiano* o *LQG*, en donde se diseña un control por retroalimentación de estados:

$$u = -K\hat{x} + r(t)$$

Donde el estado observado se obtiene a partir del observador:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC - BK)\hat{x} + Br(t) + Ly$$

Esto con el fin de que compense de forma óptima a las perturbaciones y el ruido de medición, a la vez que minimiza la energía del error de regulación.

El primer paso para del diseño es determinar si las linearizaciones resultantes son controlables y observables.

4.1. Controlabilidad y Observabilidad

Para determinar si un sistema es controlable, se deben calcular las matrices de Controlabilidad y Observabilidad, una vez obtenidas, el sistema es controlable y observable si sus respectivas matrices son de rango completo.

Las matrices de controlabilidad y observabilidad de obtienen respectivamente como:

$$C_{(A,B)} = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

$$O_{(A,C)} = [C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T$$

Para cada punto de equilibrio se obtiene la matriz de controlabilidad y observabilidad y se verifica el rango de ambas matrices por medio del software MATLAB:

- Análisis del par de matrices (A,B) y (A,C) para $X_{eq_1} = (\pi \ 0 \ 0 \ 0)^T$

$$C_{(A,B)} = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 0 & -2354,4 \\ 40 & 0 & -2354,4 & 0 \\ 0 & -80 & 0 & 5493,6 \\ -80 & 0 & 5493,6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(C_{(A,B)}) = 4$$

$$O_{(A,C)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -19,62 & 0 & 19,62 & 0 \\ 19,62 & 0 & -58,86 & 0 \\ 0 & -19,62 & 0 & 19,62 \\ 0 & 19,62 & 0 & -58,86 \end{pmatrix}$$

$$\rho(O_{(A,C)}) = 4$$

- Análisis del par de matrices (A,B) y (A,C) para $X_{eq_2} = (0 \ 0 \ \pi \ 0)^T$

$$C_{(A,B)} = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 0 & 784,8 \\ 40 & 0 & 784,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -784,8 \\ 0 & 0 & -784,8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(C_{(A,B)}) = 4$$

$$O_{(A,C)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19,62 & 0 & -19,62 & 0 \\ -19,62 & 0 & -19,62 & 0 \\ 0 & 19,62 & 0 & -19,62 \\ 0 & -19,62 & 0 & -19,62 \end{pmatrix}$$

$$\rho(O_{(A,C)}) = 4$$

- Análisis del par de matrices (A,B) y (A,C) para $X_{eq_3} = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$

$$C_{(A,B)} = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 0 & 2354,4 \\ 40 & 0 & 2354,4 & 0 \\ 0 & -80 & 0 & -5493,6 \\ -80 & 0 & -5493,6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(C_{(A,B)}) = 4$$

$$O_{(A,C)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19,62 & 0 & -19,62 & 0 \\ -19,62 & 0 & 58,66 & 0 \\ 0 & 19,62 & 0 & -19,62 \\ 0 & -19,62 & 0 & 58,66 \end{pmatrix}$$

$$\rho(O_{(A,C)}) = 4$$

- Análisis del par de matrices (A,B) y (A,C) para $X_{eq_4} = (\pi \ 0 \ \pi \ 0)^T$

$$C_{(A,B)} = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 0 & -784,8 \\ 40 & 0 & -784,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 784,8 \\ 0 & 0 & 784 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(C_{(A,B)}) = 4$$

$$O_{(A,C)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -19,62 & 0 & 19,62 & 0 \\ 19,62 & 0 & 19,62 & 0 \\ 0 & -19,62 & 0 & 19,62 \\ 0 & 19,62 & 0 & 19,62 \end{pmatrix}$$

$$\rho(O_{(A,C)}) = 4$$

Los rangos obtenidos de todas las matrices de observabilidad y controlabilidad son:

$$\rho(C_{(A,B)}) = 4$$

$$\rho(O(A, C)) = 4$$

en todos los puntos de equilibrio. El sistema tiene 4 variables de estado, entonces $n = 4$, por lo que se comprueba que todos los puntos de equilibrio son controlables y observables. La condición anterior es necesaria para la implementación de un control LQG.

4.2. Control LQG

El problema de optimización de energía y compensación de perturbaciones por medio de un control LQG , descrito por el control y observador:

$$u = -K\hat{x} + r(t)$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC - BK)\hat{x} + Br(t) + Ly$$

Se resuelve empleando el principio de separación, es decir se diseña la ganancia con un controlador LQR y la ganancia del observador por medio de un *filtro de Kalman*. Para obtener las ganancias específicas se debe de utilizar la ecuación de *Riccati*:

- Ecuación de Riccati para control LQG.

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

$$K = R^{-1}B^T P$$

- Ecuación de Riccati para filtro de Kalman.

$$AP + PA^T + E\Sigma_{\xi\xi}E^T - PC^T\Sigma_{\eta}^{-1}CP = 0$$

$$L = PC^T\Sigma_{\eta\eta}^{-1}$$

El diseño del controlador y observador se realiza para cada punto de equilibrio. La solución de las ecuaciones de Riccati se realizan por medio de MATLAB, a continuación se presentan los resultados.

- Ganancia de controlador K y Observador L para $X_{eq_1} = (\pi \ 0 \ 0 \ 0)^T$

$$K = \begin{pmatrix} 4,4723 & 2,8162 & -8,7228 & 0,8847 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 12,8695 & -14,1031 \\ 182,2608 & -380,3975 \\ -14,1031 & 41,0757 \\ -380,3975 & 943,0559 \end{pmatrix}$$

- Ganancia de controlador K y Observador L para $X_{eq_2} = (0 \ 0 \ \pi \ 0)^T$

$$K = \begin{pmatrix} 13,5806 & 0,8240 & -1,5765 & -2,2470 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 21,0265 & -0,9787 \\ 221,5355 & -19,6200 \\ -0,9787 & 19,0692 \\ -19,6200 & 182,2955 \end{pmatrix}$$

- Ganancia de controlador K y Observador L para

$$X_{eq_3} = (0 \ 0 \ 0)^T$$

$$K = \begin{pmatrix} -58,7157 & -18,5519 & -45,5206 & -9,9116 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 15,6 & -14,1 \\ 221,5 & -419,6 \\ -14,1 & 43,8 \\ -419,6 & 1060,8 \end{pmatrix}$$

- Ganancia de controlador K y Observador L para

$$X_{eq_4} = (\pi \ 0 \ \pi \ 0)^T$$

$$K = \begin{pmatrix} 17,3977 & 0,9327 & 32,5549 & 6,8770 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 19,0692 & 0,9787 \\ 182,2955 & 19,6200 \\ 0,9787 & 21,0265 \\ 19,6200 & 221,5355 \end{pmatrix}$$

$$B_d = \begin{pmatrix} 0,002 \\ 0,3996 \\ -0,004 \\ -0,7991 \end{pmatrix} \quad C_d = C$$

- Discretización de matrices A, B y C para

$$X_{eq_2} = (0 \ 0 \ \pi \ 0)^T$$

$$A_d = \begin{pmatrix} 1,001 & 0,01 & -0,001 & 0 \\ 0,1963 & 1,001 & -0,1962 & -0,001 \\ -0,001 & 0 & 0,999 & 0,01 \\ -0,1962 & -0,0010 & -0,1961 & 0,999 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,002 \\ 0,4001 \\ 0 \\ -0,0001 \end{pmatrix} \quad C_d = C$$

5. Discretización

El sistema analizado es un sistema continuo pero debido a que la obtención de datos se tiene que discretizar para poder implementar el control e instrumentación por medio de un sistema digital.

5.1. Sistema discreto

El sistema discretizado queda descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x[n+1] &= A_d x[n] + B_d u[n] + E_d \xi[n] \\ y[n] &= C_d x[n] + \eta[n] \end{aligned} \quad (12)$$

Las matrices que describen al sistema se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A_d &= e^{At}, \\ B_d &= \int_0^{T_s} e^{At} B dt, \\ C_d &= C, \\ E_d &= \int_0^{T_s} e^{At} E dt \end{aligned}$$

Se obtiene la discretización del sistema para cada punto de equilibrio.

- Discretización de matrices A, B y C para

$$X_{eq_1} = (\pi \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$A_d = \begin{pmatrix} 0,9990 & 0,010 & 0,001 & 0 \\ -0,1961 & 0,999 & 0,1959 & 0,001 \\ 0,001 & 0 & 0,9971 & 0,01 \\ 0,1959 & 0,001 & -0,588 & 0,9971 \end{pmatrix}$$

$$B_d = \begin{pmatrix} 0,002 \\ 0,4004 \\ -0,004 \\ -0,8009 \end{pmatrix} \quad C_d = C$$

- Discretización de matrices A, B y C para

$$X_{eq_4} = (\pi \ 0 \ \pi \ 0)^T$$

$$A_d = \begin{pmatrix} 0,999 & 0,01 & 0,001 & 0 \\ -0,1961 & 0,9990 & 0,1962 & 0,0010 \\ 0,0010 & 0,0000 & 1,0010 & 0,0100 \\ 0,1962 & 0,0010 & 0,1963 & 1,0010 \end{pmatrix}$$

$$B_d = \begin{pmatrix} 0,002 \\ 0,3999 \\ 0 \\ 0,0001 \end{pmatrix} \quad C_d = C$$

5.2. Control por estados observados discreto

El control en el sistema discretizado es un control por estados observados en el que las ganancias del controlador y observador fueron obtenidos de manera optima por medio de la teoría de control LQG en tiempo continuo, el cual es descrito por:

$$\begin{aligned}\hat{x}[n+1] &= (A_d - L_d C_d - B_d K_d) \hat{x}[n] + B_d r[n] + L_d y[n] \\ u[n] &= -K_d \hat{x}[n] + r[n]\end{aligned}\quad (13)$$

Para obtener el control y observador en tiempo discreto se deben mapear los polos obtenidos por control *LQG* en tiempo continuo, es decir:

- Control LQR

$$\begin{aligned}\lambda &= |\lambda I - (A - BK)| \\ \lambda_d &= e^{Ts * \lambda_d}\end{aligned}$$

- Filtro de Kalman

$$\begin{aligned}\lambda &= |\lambda I - (A - LC)| \\ \lambda_d &= e^{Ts * \lambda_d}\end{aligned}$$

Cos polos mapeados, es decir polos discretos λ_d se calculan las ganancias del control discreto y observador discreto como se presenta a continuación para los 4 puntos de equilibrio.

- Ganancia de controlador K y Observador L para $X_{eq_1} = (\pi \ 0 \ 0 \ 0)^T$

$$K_d = \begin{pmatrix} 3,4610 & 2,3033 & -7,0563 & 0,6798 \end{pmatrix}$$

$$L_d = \begin{pmatrix} 0,2754 & 0,1234 \\ 1,8317 & -0,4854 \\ -0,1707 & 0,2549 \\ 0,4150 & 0,8591 \end{pmatrix}$$

- Ganancia de controlador K y Observador L para $X_{eq_2} = (0 \ 0 \ \pi \ 0)^T$

$$K_d = \begin{pmatrix} 11,7891 & 0,7601 & -1,2140 & -1,9124 \end{pmatrix}$$

$$L_d = \begin{pmatrix} 0,2024 & -0,0149 \\ 2,0235 & -0,4579 \\ 0,0123 & 0,1973 \\ 0,0168 & 1,5992 \end{pmatrix}$$

- Ganancia de controlador K y Observador L para $X_{eq_3} = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$

$$K_d = \begin{pmatrix} -46,2487 & -14,6352 & -36,2362 & -7,8796 \end{pmatrix}$$

$$L_d = \begin{pmatrix} 0,2932 & -0,1838 \\ 2,0950 & -0,2417 \\ 0,1177 & 0,2938 \\ -0,09252,3598 \end{pmatrix}$$

- Ganancia de controlador K y Observador L para $X_{eq_4} = (\pi \ 0 \ \pi \ 0)^T$

$$K_d = \begin{pmatrix} 14,9536 & 0,8516 & 27,6984 & 5,8515 \end{pmatrix}$$

$$L_d = \begin{pmatrix} 0,1984 & 0,0113 \\ 1,5993 & 0,4419 \\ -0,0148 & 0,2013 \\ -0,0109 & 2,0256 \end{pmatrix}$$

6. Discusión y Conclusiones

El sistema del pendulo doble es un sistema caotico, lo que implica que a una pequeña variación entre una condición inicial y otra, la respuesta del sistema varia considerablemente a pesar de lo pequeña que pudiera ser esta variación. Tal comportamiento se observo al variar las condiciones iniciales de la simulación. Se tuvo exito de controlar 3 de los 4 puntos de equilibrio, siendo las simulaciones con el pendulo doble no lineal, las cuales, tardaban mas en converger a los valores estables.

En general el control *LQG* funciono bastante bien para 3 de los 4 puntos de equilibrio, como se puede observar en las gráficas de cada caso. En estas gráficas se incluye \hat{x} , que es la señal a partir de la cual el observador genera la entrada $u(t)$ de control, se agrega tambien en estas gráficas la salida y medida, lo que implica que esta variable se ve modificada por el ruido que se incorpora a la señal, al medir esta. Con esta señal tambien trabaja el observador para generar la $u(t)$. Por lo cual le cuesta trabajo al observador generar la $u(t)$, debido a estas consideraciones. Es donde el control *LQG* optimiza y encuentra un punto optimo para disminuir lo mayor posible estas alteraciones, dando lugar asi a las matrices K y L .

El punto $X_{eq_3} = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ se logro controlar con los sistemas linealizados, tanto con el observador normal y el observador discretizado. Sin embargo, al momento de implementar estos observadores al sistema NO LINEAL, no se logra controlar el sistema, de tal foma que se van a infinito los estados. Analizando este punto de equilibrio desde el punto de vista práctico, fisicamente, este punto es donde los 2 pendulos apuntan hacia arriba. El sentido común nos dice que tratar de estabilizar los dos pendulos unicamente aplicando un par al primer pendulo, es bastante complicado, pues resultaria muy dificil poder estabilizar el segundo pendulo que se mueve por la inercia que va ganando.

Otra justificación del porque es razonable que el control en el punto X_{eq_3} no haya funcionado, es que, apesar de que se inicie muy cercano de la condición inicial, la naturaleza del

sistema en este punto de equilibrio es que se aleja de el rápidamente, esto porque la gravedad tira los 2 péndulos, así que se aleja de la zona de linealización, por tanto el control ya no es valido para esas zonas que estan alejadas del punto de equilibrio.

Finalmente la discretización se acoplo bastante bien con su respectivo sistema usando un observador normal. Unicamente en el punto de equilibrio X_{eq_3} es donde tambien falla el controlador, se uso una $T_s = 0,001$, dado que con una $T_s = 0,01$, la simulación arrojaba al gunos errores.

A. Desarrollos

A.1. Ecuaciones de movimiento

Primera ecuación de movimiento:

$$l_1 \left(g(m_1 + m_2) \sin(\theta_1(t)) + l_2 m_2 \theta'_2(t) (2\theta'_1(t) + \theta'_2(t)) \sin(\theta_2(t)) - l_2 m_2 (2\theta''_1(t) + \theta''_2(t)) \cos(\theta_2(t)) \right) + \xi_1(t) + u(t) = \\ l_2 m_2 \left(l_2 (\theta''_1(t) + \theta''_2(t)) - g \sin(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \right) + l_1^2 (m_1 + m_2) \theta''_1(t) \quad (14)$$

Segunda ecuación de movimiento:

$$\xi_2(t) = l_2 m_2 \left(-g \sin(\theta_1(t) + \theta_2(t)) + l_1 \left(\theta'_1(t)^2 \sin(\theta_2(t)) + \theta''_1(t) \cos(\theta_2(t)) \right) + l_2 (\theta''_1(t) + \theta''_2(t)) \right) \quad (15)$$

B. Modelo de estados no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{2l_2\xi_1 - 2(l_2 + l_1\cos(x_3))\xi_2 + 2l_2\tau + l_1l_2(g(2m_1 + m_2)\sin(x_1) - gm_2\sin(x_1 + 2x_3) + l_1m_2\sin(2x_3)x_2^2 + 2l_2m_2\sin(x_3)(x_2 + x_4)^2)}{2l_1^2l_2(m_1 + m_2 - m_2\cos(x_3)^2)} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{-((l_2^2m_2 + l_1^2(m_1 + m_2) + 2l_1l_2m_2\cos(x_3))(-\xi_2 + l_2m_2(-gsin(x_1 + x_3) + l_1sin(x_3)x_2^2)))}{l_1^2l_2^2m_2(m_1 + m_2 - m_2\cos(x_3)^2)} \\ &+ \frac{l_2m_2(l_2 + l_1\cos(x_3))(gl_1(m_1 + m_2)\sin(x_1) + gl_2m_2\sin(x_1 + x_3) + x_3 + \xi_1 + \tau l_1l_2m_2\sin(x_3)x_4(2x_2 + x_4)))}{l_1^2l_2^2m_2(m_1 + m_2 - m_2\cos(x_3)^2)} \end{aligned}$$

B.1. Obtención de los puntos de equilibrio

Para obtener los puntos de equilibrio se hace el sistema igual a cero tanto en sus entradas como en sus perturbaciones, se sabe que:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ \frac{l_1l_2(g(2m_1 + m_2)\sin(x_1) - gm_2\sin(x_1 + 2x_3) + l_1m_2\sin(2x_3)x_2^2 + 2l_2m_2\sin(x_3)(x_2 + x_4)^2)}{2l_1^2l_2(m_1 + m_2 - m_2\cos(x_3)^2)} &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ \frac{-((l_2^2m_2 + l_1^2(m_1 + m_2) + 2l_1l_2m_2\cos(x_3)) + (l_2m_2(-gsin(x_1 + x_3) + l_1sin(x_3)x_2^2)))}{l_1^2l_2^2m_2(m_1 + m_2 - m_2\cos(x_3)^2) + m_2\sin(x_1)} & \\ + \frac{l_2m_2(l_2 + l_1\cos(x_3))(gl_1(m_1 + gl_2m_2\sin(x_1 + x_3) + x_3 + l_1l_2m_2\sin(x_3)x_4(2x_2 + x_4)))}{l_1^2l_2^2m_2(m_1 + m_2 - m_2\cos(x_3)^2) + m_2\sin(x_1)} &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema nos podemos dar cuenta que las posibles soluciones al sistemas son:

$$xeq_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad xeq_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad xeq_3 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad xeq_4 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

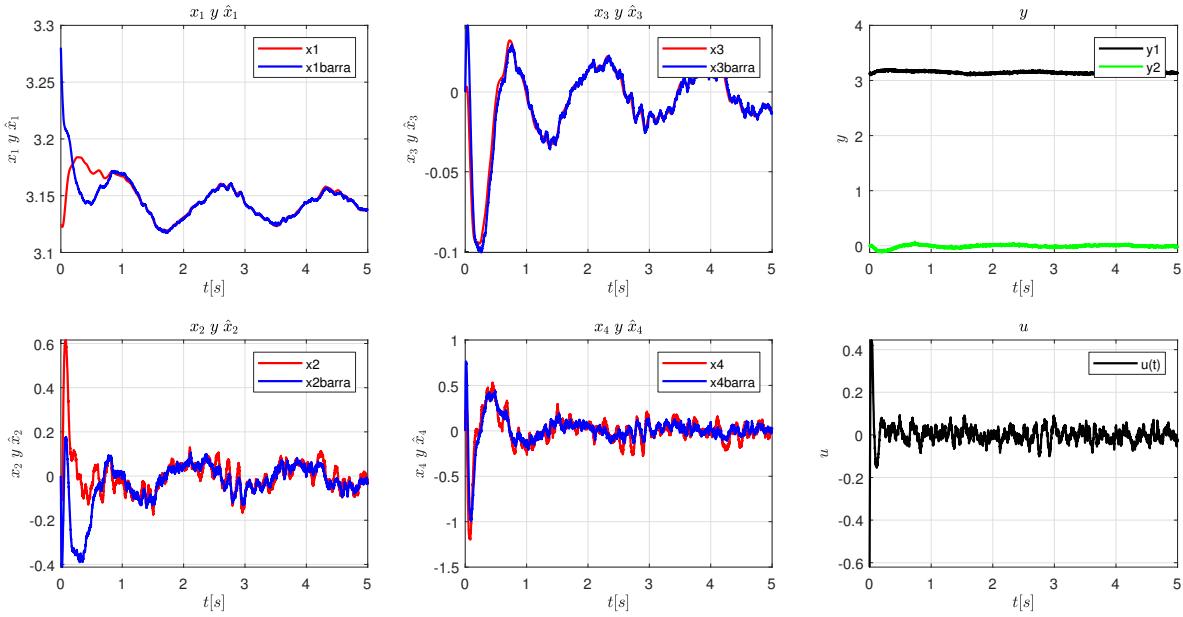


Figura 2: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq_1}

Con la entrada de equilibrio:

$$ueq = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C. Gráficas

D. Códigos y Diagramas de bloques

D.1. Código en MATLAB

Con el siguiente código se realizan los diversos cálculos necesarios para realizar todo el proceso del diseño del control. El código esta creado de tal forma que únicamente se cambian los puntos de equilibrio en este texto, y al compilar, en el archivo de SIMULINK, simplemente se compila este otro archivo y los resultados se mostrarán en los scope, esto sin necesidad de cambiar manualmente en este archivo las condiciones iniciales, entre otras cosas.

```
% %CÓDIGO DE MATLAB PROYECTO
clear all
clc
% Calculo de los puntos de equilibrio
Xi1=0; Xi2=0; m1=0.1; m2=0.1; g=9.81; l1=0.5; l2=0.5;
syms x1 x2 x3 x4
u=0;

% Ecuacion de estado No.2 -> X2p
n1=2*l2*X1-2*(l2+l1*cos(x3))*X2;
n2=2*l2*u;
n3=g*(2*m1+m2)*sin(x1);
n4=-g*m2*sin(x1+2*x3);
n5=l1*m2*sin(2*x3)*x2^2;
n6=2*l2*m2*sin(x3)*(x2+x4)^2;
d=2*l1^2*2*l2*(m1+m2-m2*cos(x3)^2);
X2p=(n1+n2+(l1*l2)*(n3+n4+n5+n6))/d;

% Ecuacion de estado No.4 -> X4p
```

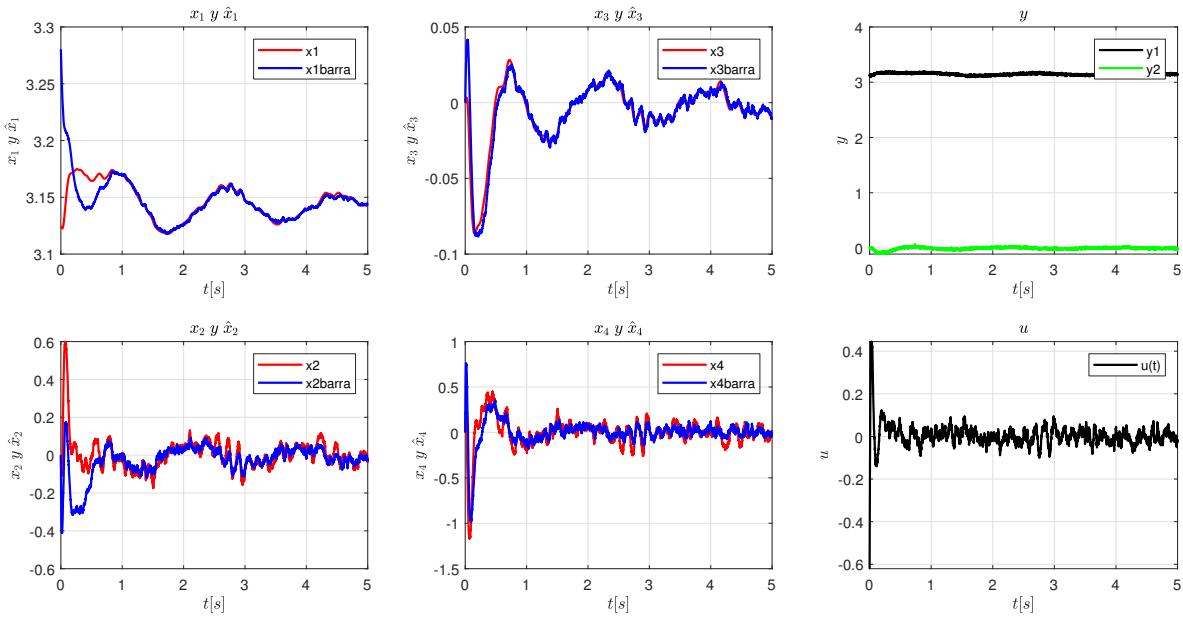


Figura 3: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq1}

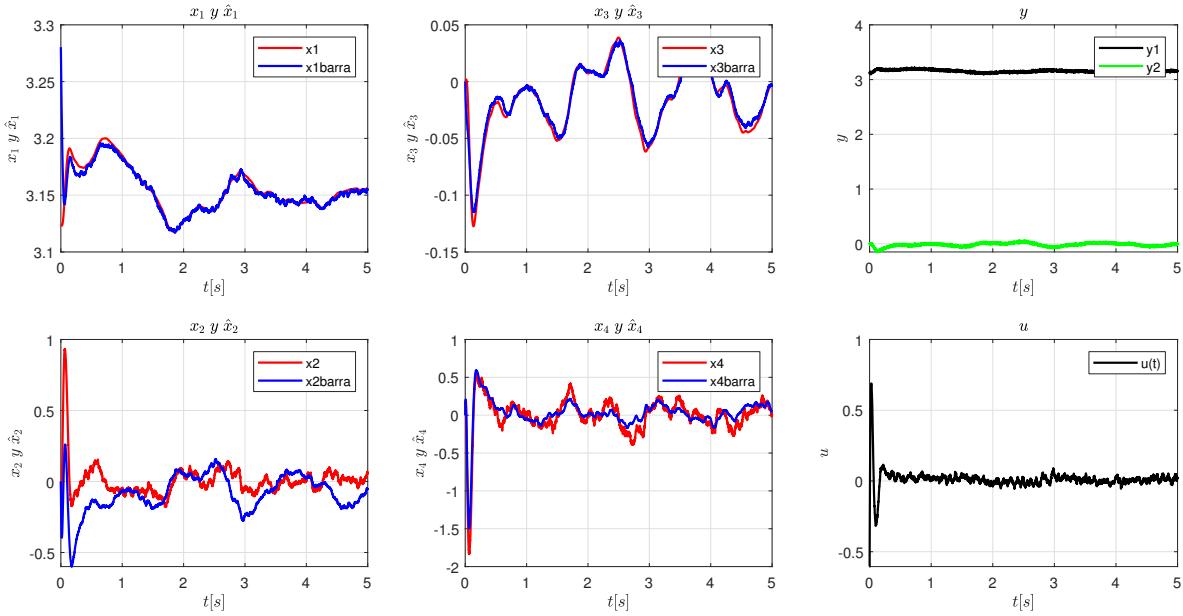


Figura 4: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq1} con Observador discretizado

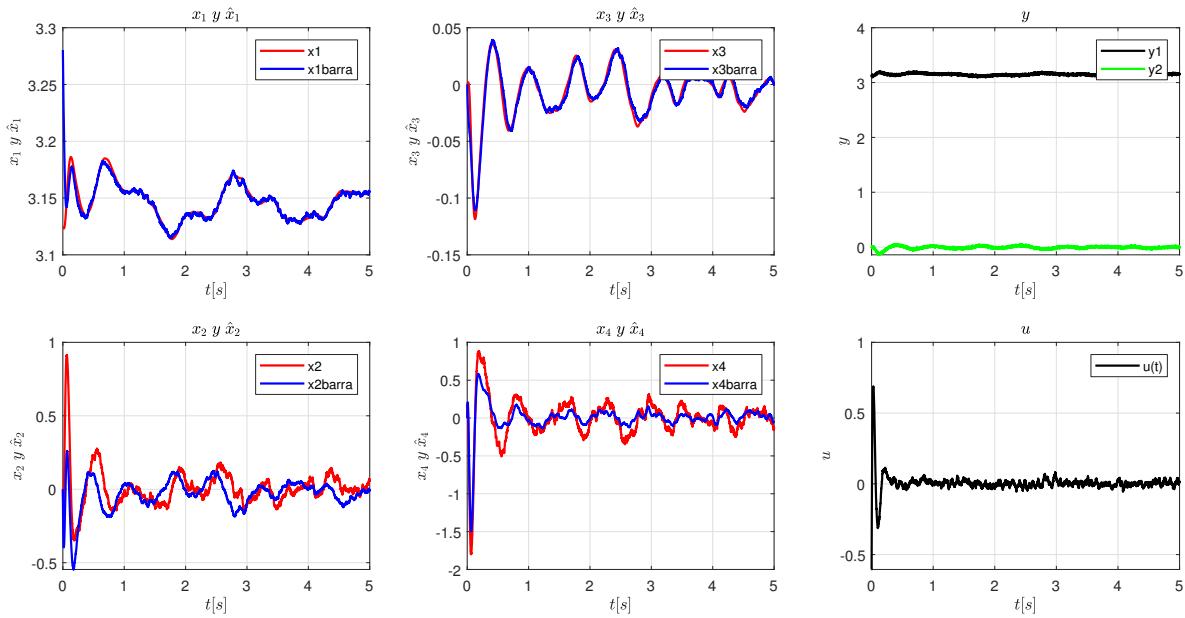


Figura 5: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq_1} con Observador discretizado

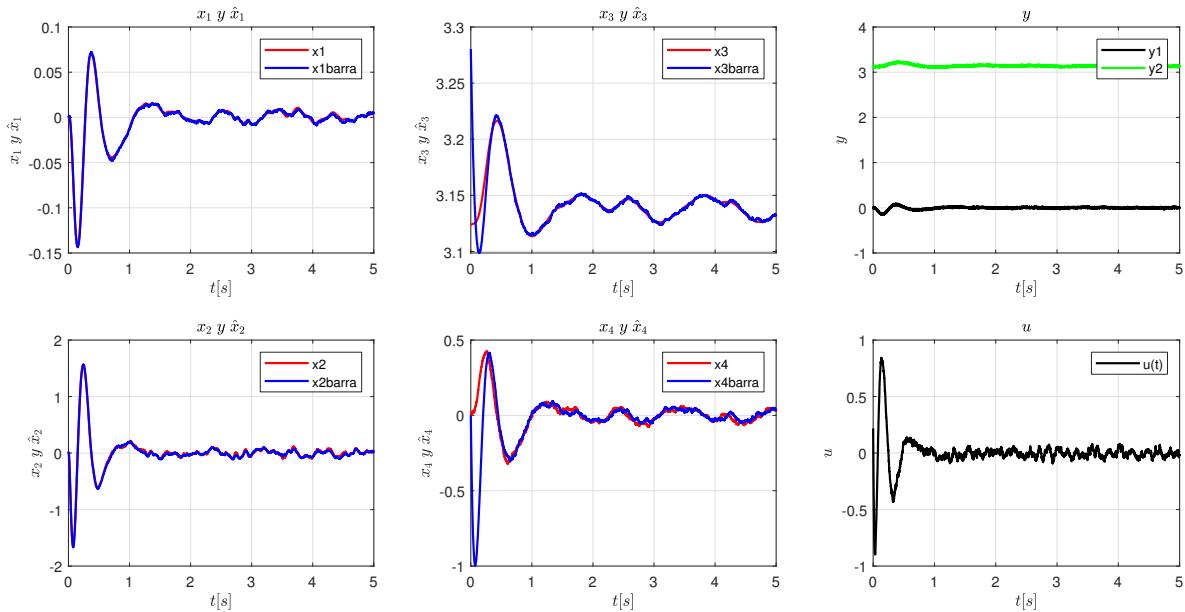


Figura 6: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq_2}

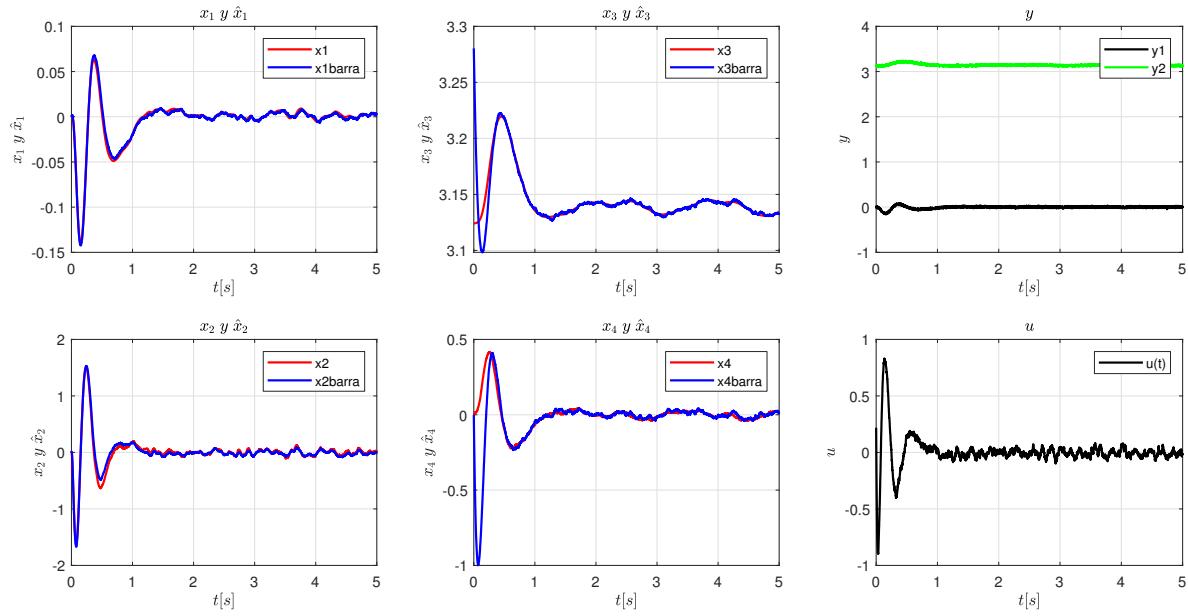


Figura 7: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq_2}

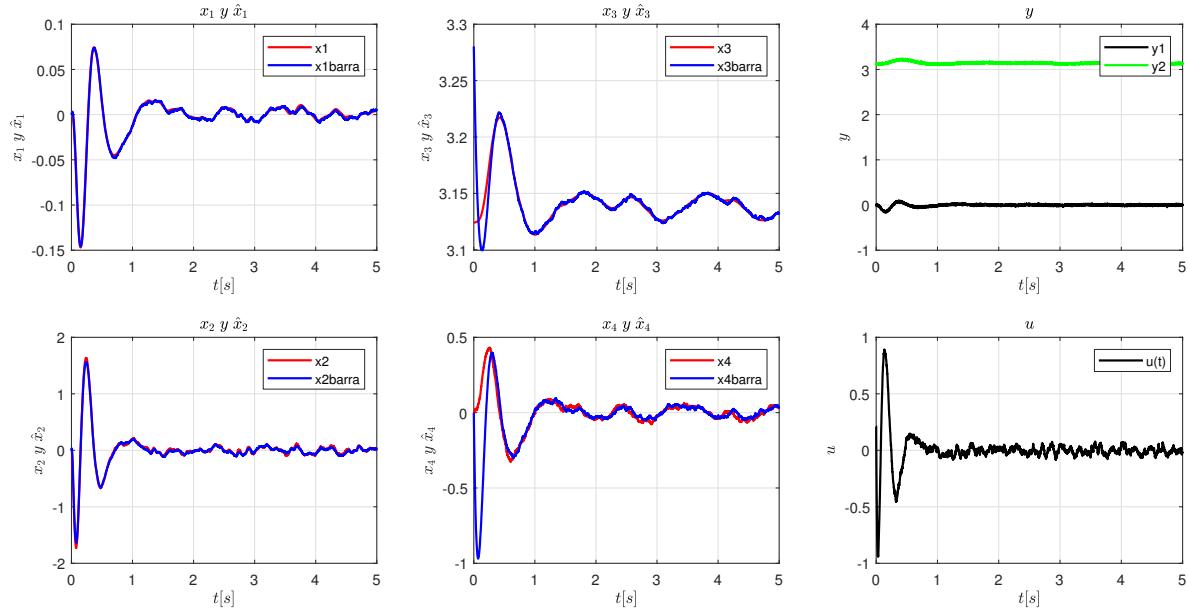


Figura 8: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq_2} con Observador discretizado

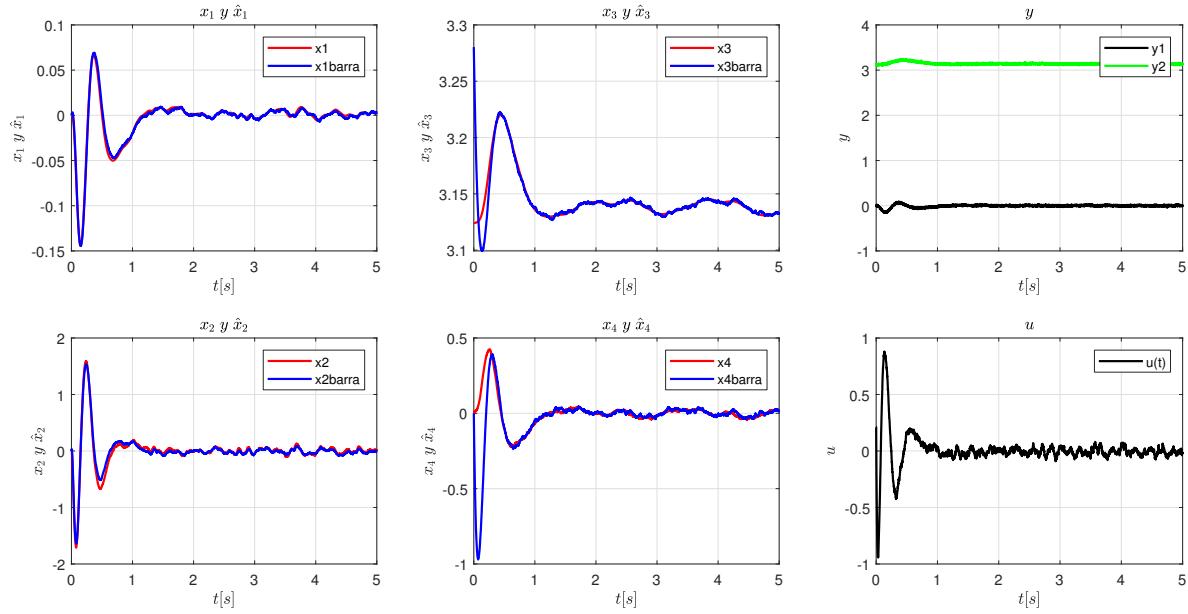


Figura 9: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq_2} con Observador discretizado

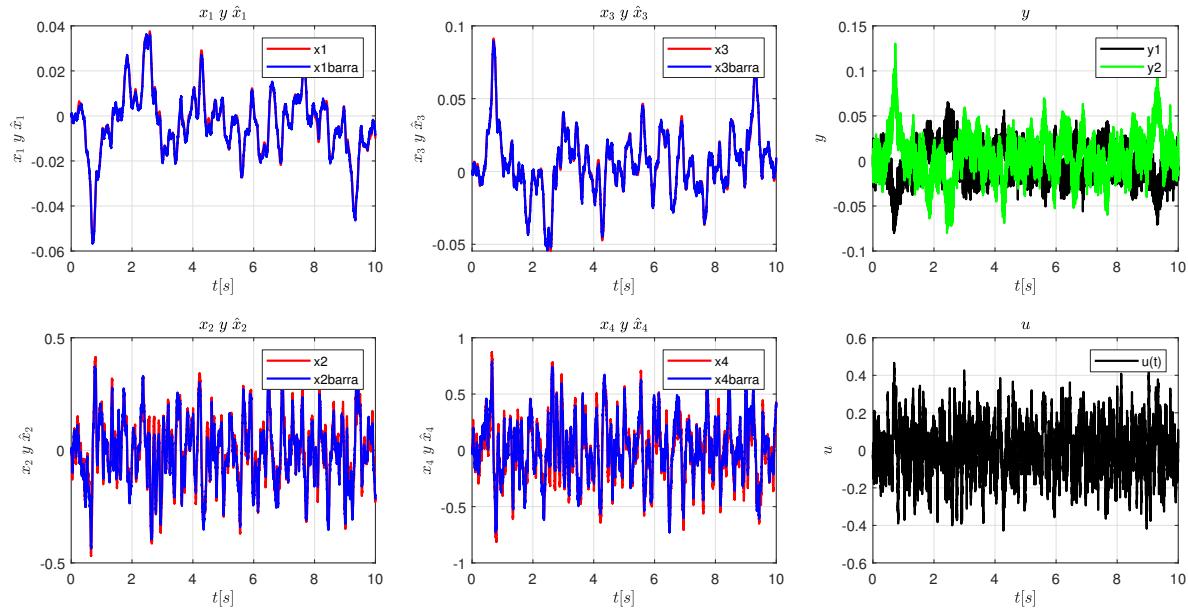


Figura 10: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq_3}

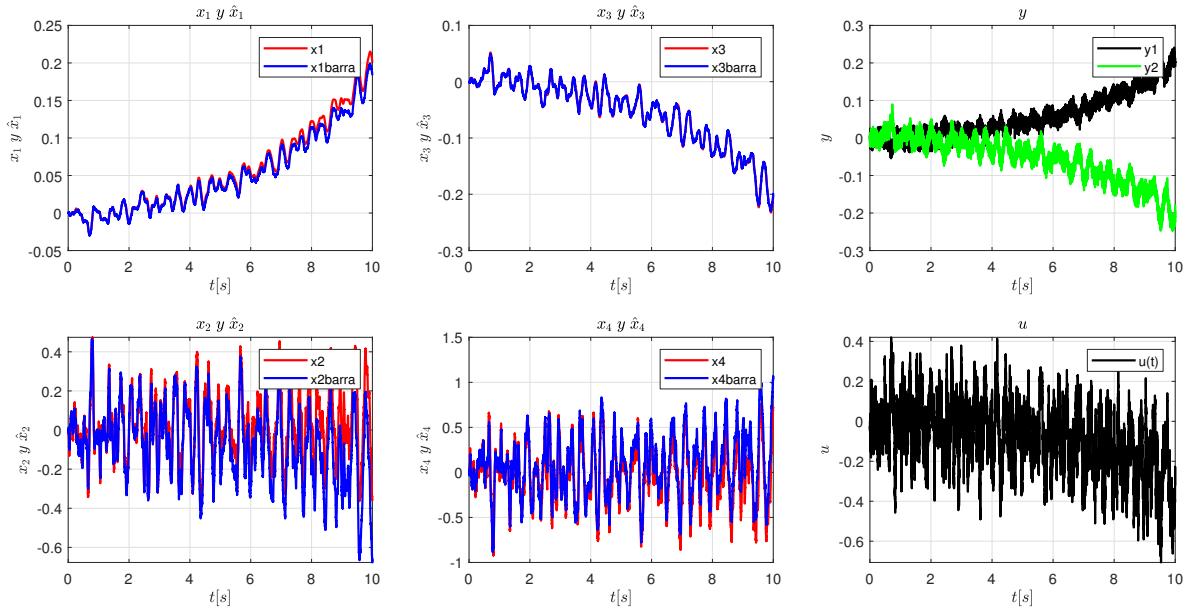


Figura 11: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq_3}

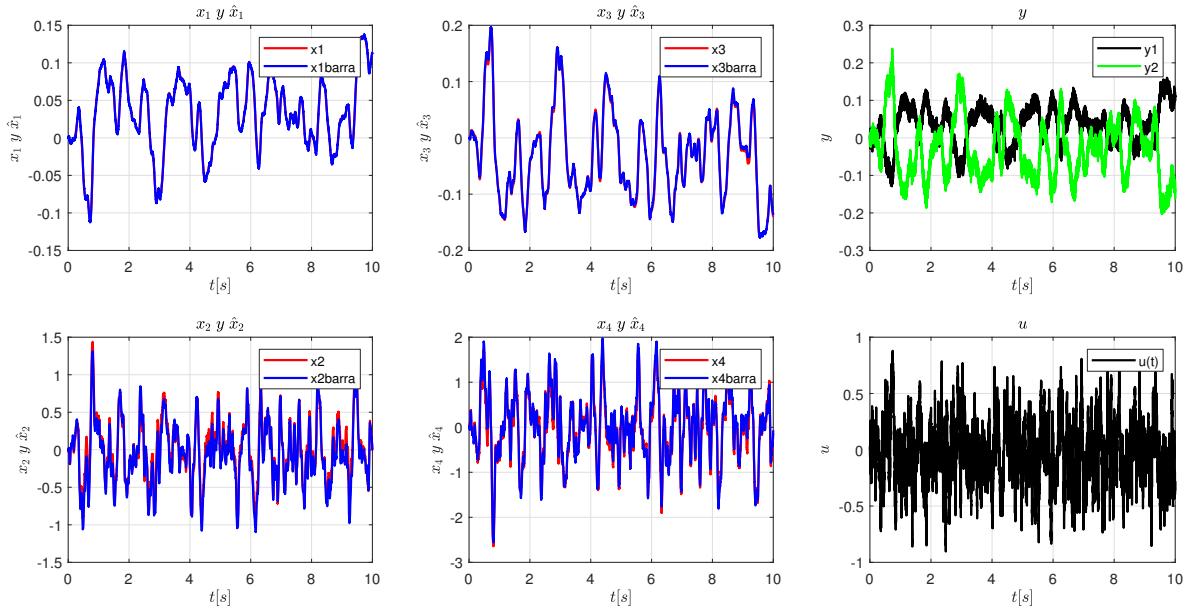


Figura 12: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq_3} con Observador discretizado

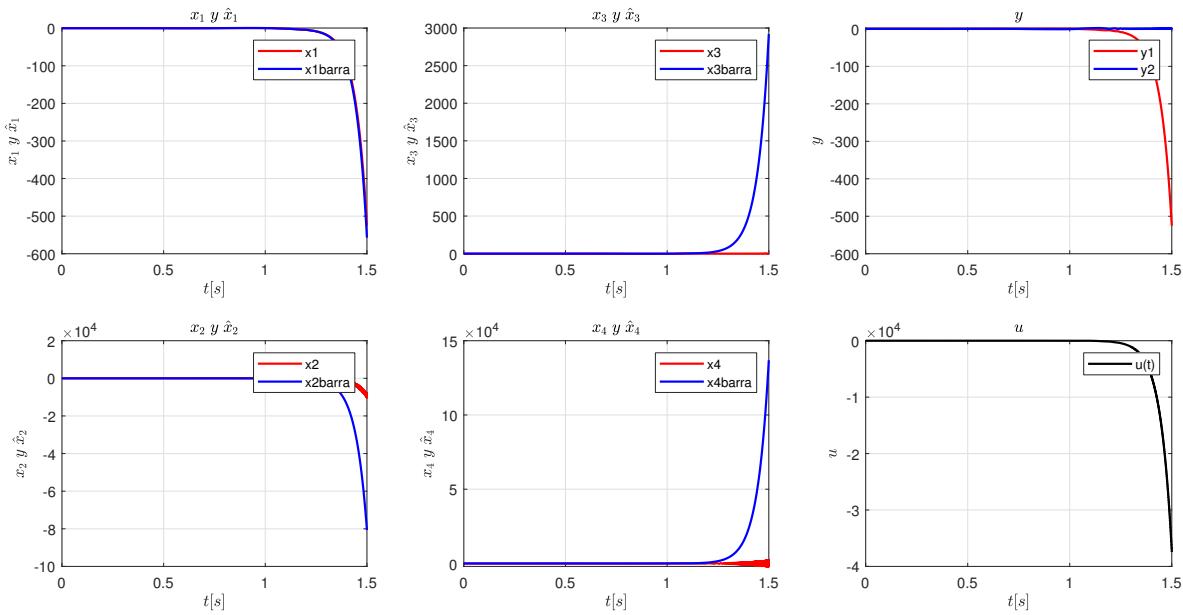


Figura 13: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq_3} con Observador discretizado

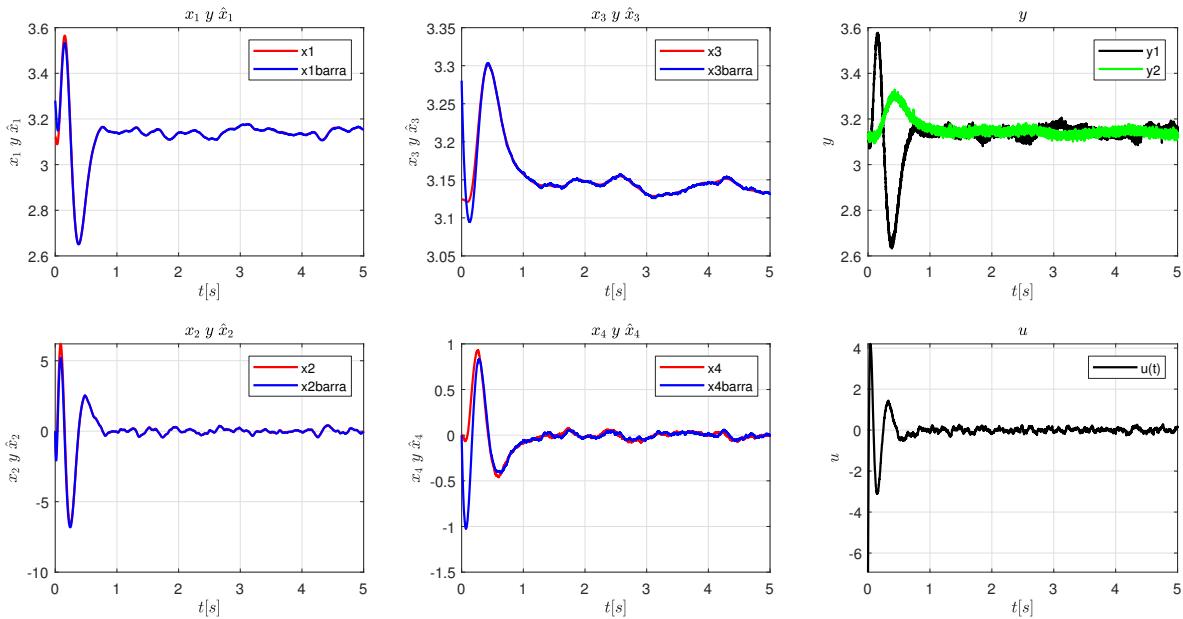


Figura 14: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq_4}

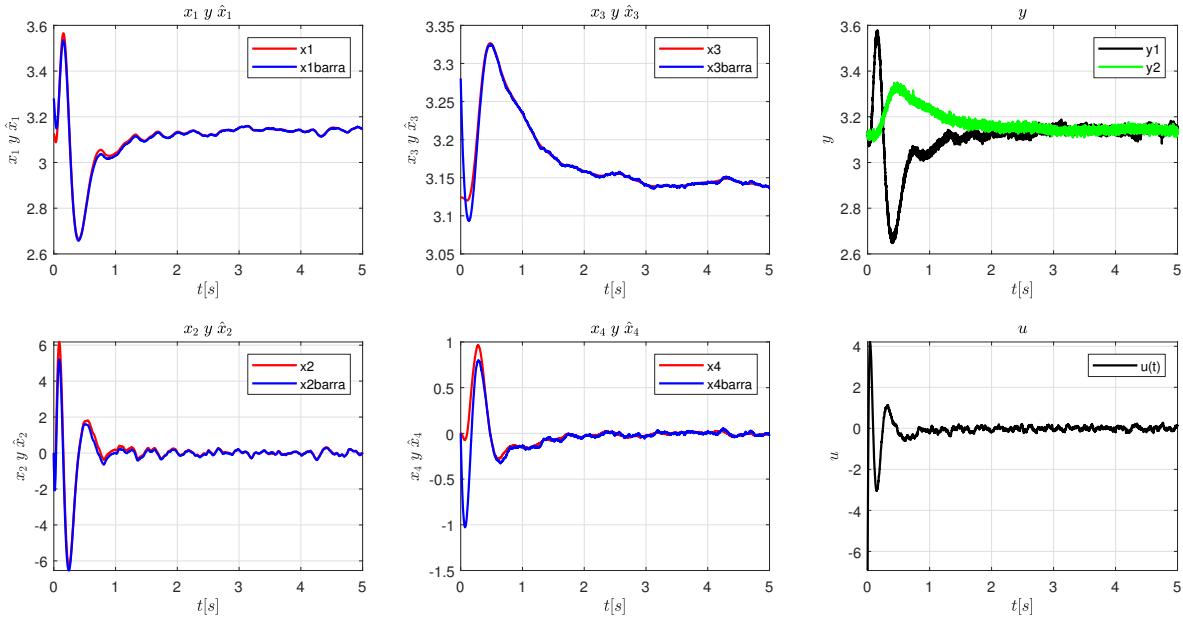


Figura 15: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq4}

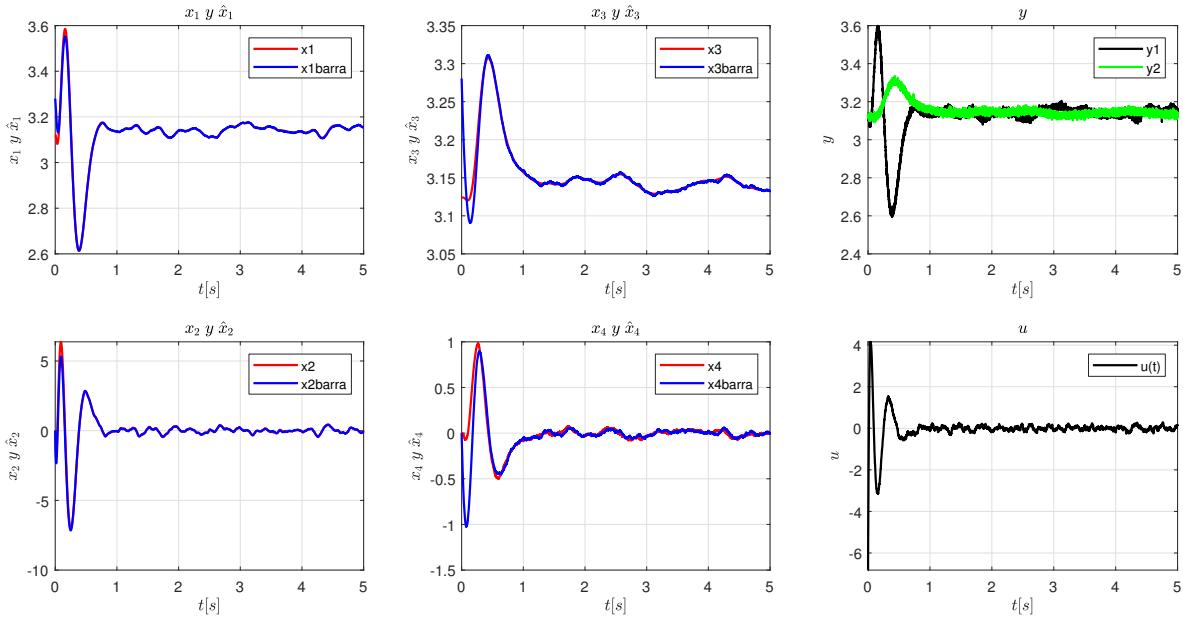


Figura 16: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para Linealizacion del punto X_{eq4} con Observador discretizado

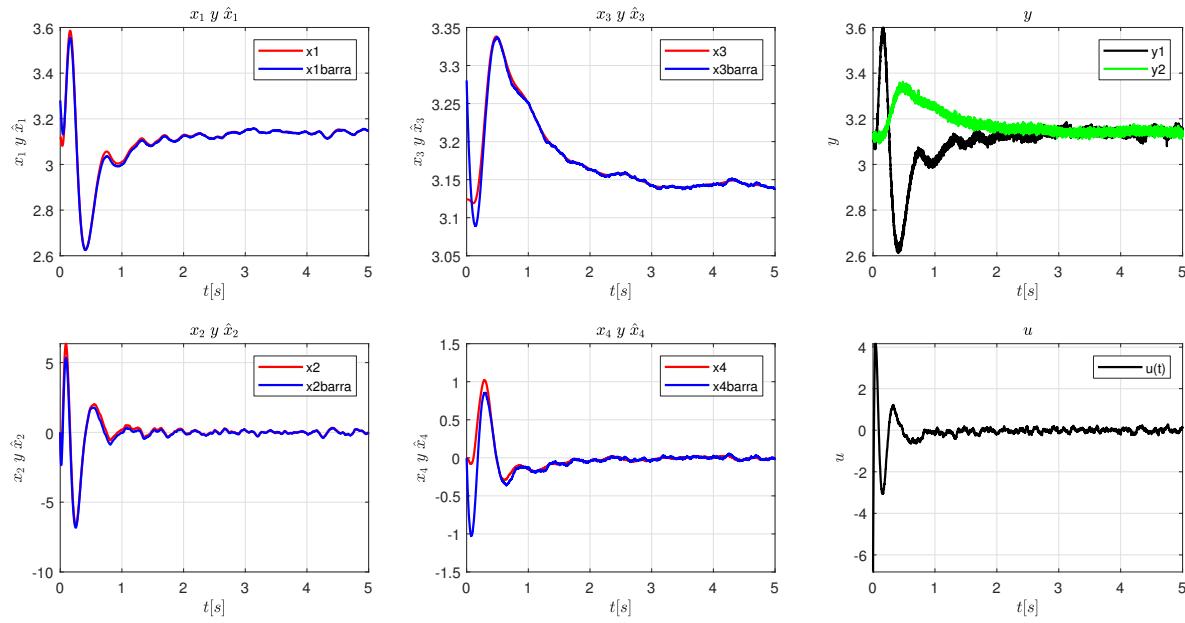


Figura 17: Estados x y \hat{x} , salida y y entrada de control $u(t)$ para el sistema NO LINEAL del punto X_{eq_4} con Observador discretizado

```

DEN=11 ^2*12 ^2*m2*(m1+m2-m2*cos (x3) ^2);
N1= 12 ^2*m2+11 ^2*(m1 + m2)+2*11*12 *m2*cos (x3 );
N2= -Xi2+12 *m2*(-g*sin (x1+x3) +11*sin (x3)*x2 ^2);
N3=12 *m2*(12+11*cos (x3));
N4=g*11 *(m1+m2)*sin (x1);
N5=g*12 *m2*sin (x1+x3);
N6=Xi1+u;
N7=11*12 *m2*sin (x3)*x4*(2*x2+x4);
X4p=(-1/DEN)*(N1*N2 +N3*(N4 +N5+N6+N7));

```

```

%Funcion de Estados
fx=[x2 ;
    X2p ;
    x4 ;
    X4p];
% Calculando los puntos de equilibrio
PEQSOL=solve(fx ,x1 ,x2 ,x3 ,x4);

```

```

%%Definiendo la funcion de estados
clear all
clc

```

```

syms x1 x2 x3 x4 Xi1 Xi2 m1 m2 g 11 12 u

```

```

%Ecuacion de estado No.2 -> X2p
n1=2*12 *Xi1-2*(12+11*cos (x3))*Xi2 ;
n2=2*12 *u;
n3=g*(2*m1+m2)*sin (x1);
n4=-g*m2*sin (x1+2*x3);
n5=11*m2*sin (2*x3)*x2 ^2;
n6=2*12 *m2*sin (x3)*(x2+x4) ^2;

```

```

d=2*11^2*12*(m1+m2-m2*cos(x3)^2);
X2p=(n1+n2+(11*12)*(n3+n4+n5+n6))/d;

%Ecuacion de estado No.4 -> X4p
DEN=11^2*12^2*m2*(m1+m2-m2*cos(x3)^2);
N1= 12^2*m2+11^2*(m1 + m2)+2*11*12*m2*cos(x3);
N2= -Xi2+12*m2*(-g*sin(x1+x3) +11*sin(x3)*x2^2);
N3=12*m2*(12+11*cos(x3));
N4=g*11*(m1+m2)*sin(x1);
N5=g*12*m2*sin(x1+x3);
N6=Xi1+u;
N7=11*12*m2*sin(x3)*x4*(2*x2+x4);
X4p=(-1/DEN)*(N1*N2 +N3*(N4 +N5+N6+N7));

%Funcion de Estados
fx =[x2 ; ...
      X2p ; ...
      x4 ; ...
      X4p ; ];

xv=[x1 ; x2 ; x3 ; x4 ];
Xi=[Xi1 ; Xi2 ];

% Jacobianos
dfdX=simplify(jacobian(fx , xv));
dfdU=simplify(jacobian(fx , u));
dfdXi=simplify(jacobian(fx , Xi));

%%Puntos de equilibrio :

XEQ=[pi ; 0 ; 0 ; 0]; %PUNTO DE EQUILIBRIO: 1
%XEQ=[0;0;pi;0]; %PUNTO DE EQUILIBRIO: 2
%XEQ=[0;0;0;0]; %PUNTO DE EQUILIBRIO: 3
%XEQ=[pi;0;pi;0]; %PUNTO DE EQUILIBRIO: 4

UEQ=0; %ENTRADA DE EQUILIBRIO

%%Sistema linealizado :
A=subs(dfdX , [ xv ; u ] ,[ XEQ;UEQ] );
B=subs(dfdU , [ xv ; u ] ,[ XEQ;UEQ] );
E=subs(dfdXi , [ xv ; u ] ,[ XEQ;UEQ] );

%%Sustituyendo valores de parametros:
A=subs(A,[Xi1 ,Xi2 ,m1,m2,g,11 ,12 ],[0 ,0 ,0.1 ,0.1 ,9.81 ,0.5 ,0.5]);
A=double(A)
B=subs(B,[Xi1 ,Xi2 ,m1,m2,g,11 ,12 ],[0 ,0 ,0.1 ,0.1 ,9.81 ,0.5 ,0.5]);
B=double(B)
E=subs(E,[Xi1 ,Xi2 ,m1,m2,g,11 ,12 ],[0 ,0 ,0.1 ,0.1 ,9.81 ,0.5 ,0.5]);
E=double(E)

%Estabilidad
Estabilidad=eig(A)

%%Matriz de Contrabilidad
C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
CtAB=ctrb(A,B);

```

```

rank(CtAB)
% Matriz de Observabilidad
ObAB=obsv(A,C);
rank(ObAB)

%%Control LQR
Q=[100 0 0 0;0 0 0 0;0 0 100 0;0 0 0 0];
R=1;
K=lqr (A,B,Q,R)
PolosControlador=eig (A-B*K)

%%Filtro de Kalman
Sxi=diag ([0.05^2 ,0.05^2 ]);
Seta=diag ([0.01^2 ,0.01^2 ]);
L=lqr (A' ,C' ,E*Sxi*E' , Seta )'
PolosKalman=eig (A-L*C)

%%Simulando con SIMULINK
r=0; %Referencia
% Condiciones iniciales para ----- Xeq1=[pi ;0 ;0 ;0 ];
x0=[179*pi /180;0;0*pi /180;0];
xh0=[179*pi /180;0;0*pi /180;0]*1.05;
YEQ=[pi ;0 ];

% Condiciones iniciales para ----- Xeq2=[0;0;pi ;0];
% x0=[0*pi /180;0;179*pi /180;0];
% xh0=[0*pi /180;0;179*pi /180;0]*1.05;
% YEQ=[0;pi ];

% Condiciones iniciales para ----- Xeq3=[0;0;0;0];
% x0=[0.001*pi /180;0;0*pi /180;0];
% xh0=[0.001*pi /180;0;0*pi /180;0]*1.05;
% YEQ=[0;0];

% Condiciones iniciales para ----- Xeq4=[pi ;0;pi ;0];
% x0=[179*pi /180;0;179*pi /180;0];
% xh0=[179*pi /180;0;179*pi /180;0]*1.05;
% YEQ=[pi ;pi ];

%%Discretizaci n
syms t
Ts=0.001;
Ad=expm(A*Ts);
Bd=inv (A)*(Ad-eye (4))*B;
Cd=C;
PolosControladorDiscreto=exp (Ts*PolosControlador )
Kd=place(Ad,Bd, PolosControladorDiscreto );
PolosKalmanDiscreto=exp (Ts*PolosKalman )
Ld=place(Ad' ,Cd' , PolosKalmanDiscreto )';

%%Codigo interno del observador
function [ dxhat ,u] = fcn (xhat ,A,B,C,L,K,y ,r )
dxhat = (A-L*C-B*K)*xhat + B*r + L*y ;
u=-K*xhat+r ;

%%Codigo interno del observador discretizado

```

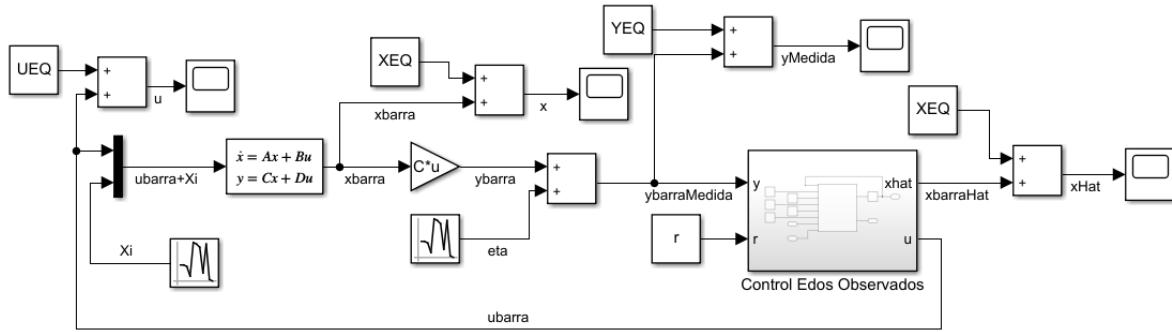


Figura 18: Diagrama de bloques del sistema linealizado

```
function [xn1hat, u] = fcn(xnhat, Ad, Bd, Cd, Kd, Ld, r, y)
```

```
xn1hat = (Ad - Ld * Cd - Bd * Kd) * xnhat + Bd * r + Ld * y;
u = -Kd * xnhat + r;
```

```
% %Codigo interno del Pendulo NO LINEAL
function dx = fcn(x, u, Xi)
x1=x(1); x2=x(2); x3=x(3); x4=x(4);
m1=0.1; m2=0.2; l1=0.5; l2=0.5; g=9.81;
Xi1=Xi(1); Xi2=Xi(2);
```

```
%Ecuacion de estado No.2 -> X2p
n1=2*l2*Xi1-2*(l2+l1*cos(x3))*Xi2;
n2=2*l2*u;
n3=g*(2*m1+m2)*sin(x1);
n4=-g*m2*sin(x1+2*x3);
n5=l1*m2*sin(2*x3)*x2^2;
n6=2*l2*m2*sin(x3)*(x2+x4)^2;
d=2*l1^2*2*l2*(m1+m2-m2*cos(x3)^2);
X2p=(n1+n2+(l1*l2)*(n3+n4+n5+n6))/d;
```

```
%Ecuacion de estado No.4 -> X4p
DEN=l1^2*l2^2*m2*(m1+m2-m2*cos(x3)^2);
N1= l2^2*m2+l1^2*(m1+m2)+2*l1*l2*m2*cos(x3);
N2= -Xi2+l2*m2*(-g*sin(x1+x3)+l1*sin(x3)*x2^2);
N3=l2*m2*(l1+l2*cos(x3));
N4=g*l1*(m1+m2)*sin(x1);
N5=g*l2*m2*sin(x1+x3);
N6=Xi1+u;
N7=l1*l2*m2*sin(x3)*x4*(2*x2+x4);
X4p=(-1/DEN)*(N1*N2+N3*(N4+N5+N6+N7));
```

```
dx = [x2; X2p; x4; X4p];
```

D.2. Diagrama de bloques

E. Bibliografía

Roberto Canales Ruis, Renato Barrera Rivera . (1976). Análisis de sistemas dinámicos y control automático. Mexico,DF: Limusa .

Hebertt Sira-Ramírez, (2004), Control de sistemas no lineales, Mexico DF

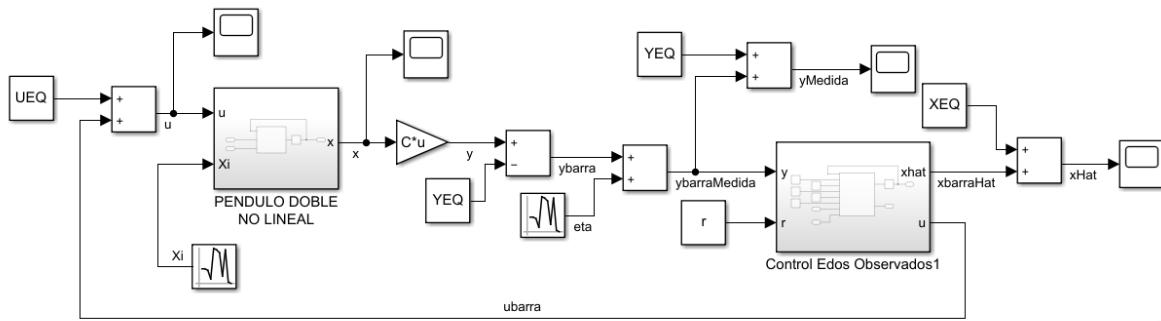


Figura 19: Diagrama de bloques del sistema NO LINEAL

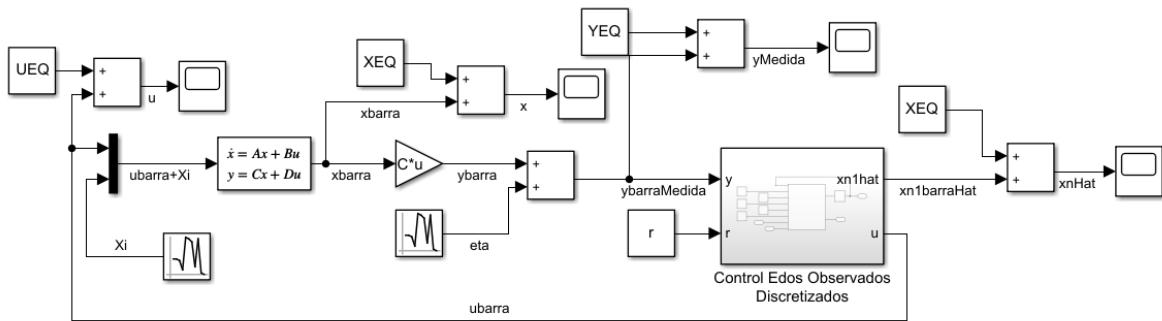


Figura 20: Diagrama de bloques del sistema linealizado con Observador discretizado

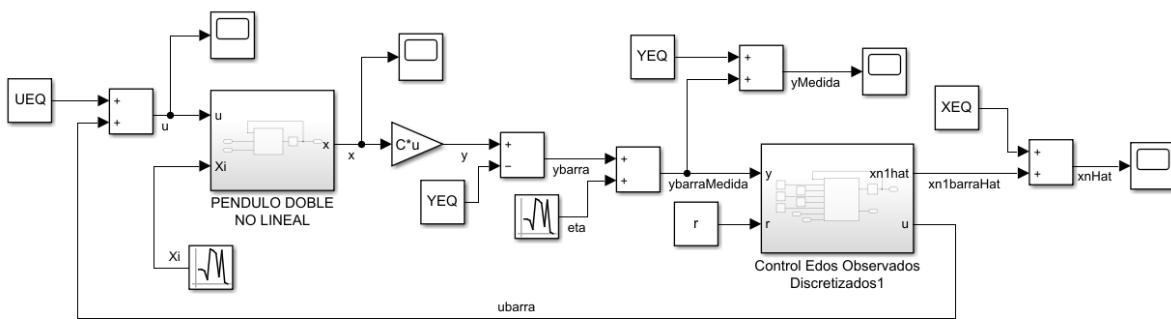


Figura 21: Diagrama de bloques del sistema NO LINEAL con Observador discretizado

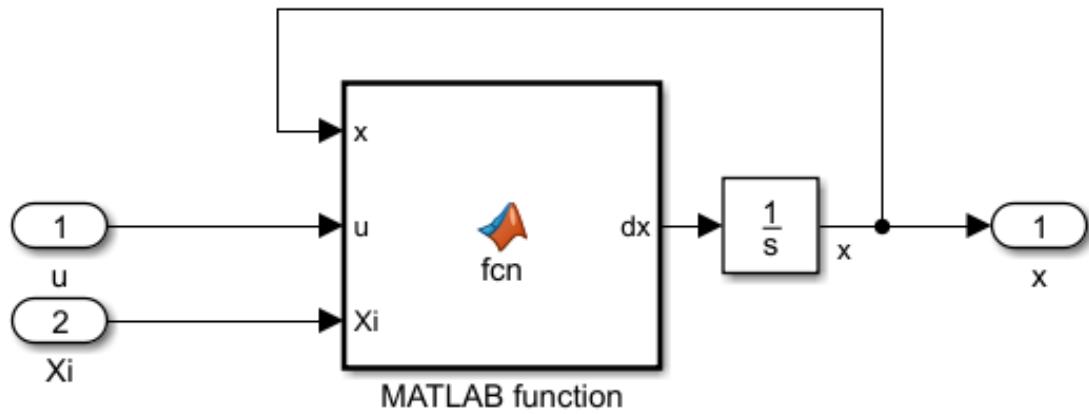


Figura 22: Construcción interna del Pendulo NO LINEAL

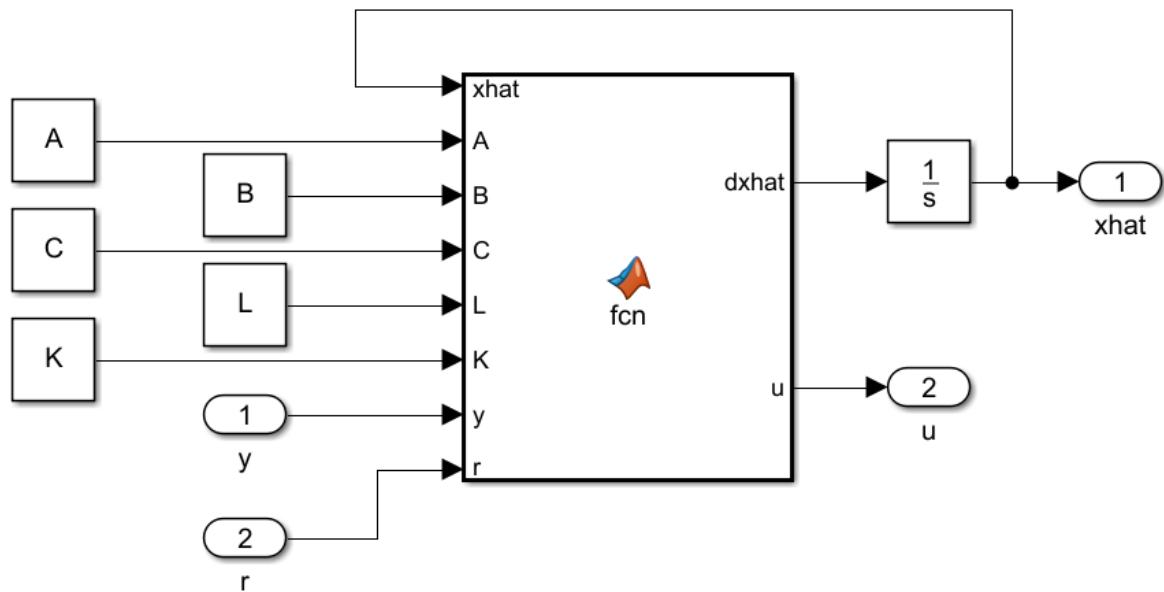


Figura 23: Construcción interna del Observador

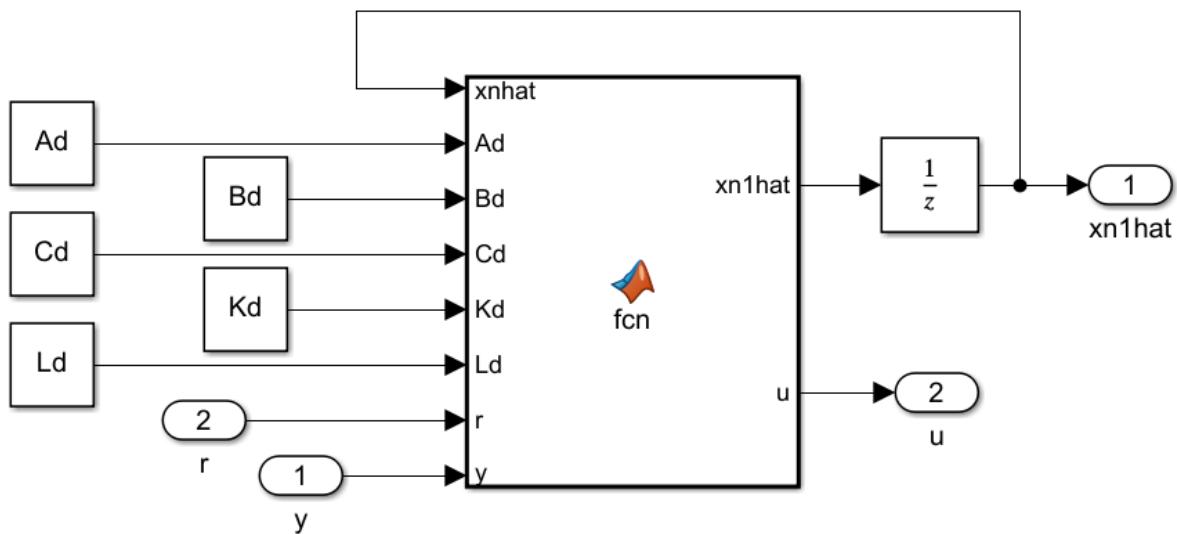


Figura 24: Construcción interna del Observador discretizado