

1

1	$Ur \cdot (x)[(Ux \cdot x \neq r) \supset Orx]$	
2	Uw	
3	$w \neq r$	/ Orw
4	$(x)[(Ux \cdot x \neq r) \supset Orx] \cdot Ur$	1 Com
5	$(x)[(Ux \cdot x \neq r) \supset Orx]$	4 Simp
6	$Uw \cdot w \neq r$	2,3 Conj
7	$(Uw \cdot w \neq r) \supset Orw$	5 UI
8	Orw	7,6 MP

2

1	$(\exists x)[Ax \cdot Pxm \cdot (y)(Ay \cdot Pym \supset y = x) \cdot Fx]$	
2	$(\exists x)[Ax \cdot Pxm \cdot (y)(Ay \cdot Pym \supset y = x) \cdot x = l]$	/ FI
3	$Aa \cdot Pam \cdot (y)(Ay \cdot Pym \supset y = a) \cdot Fa$	1 EI
4	$(y)(Ay \cdot Pym \supset y = a) \cdot Fa \cdot Aa \cdot Pam$	3 Com
5	$(y)(Ay \cdot Pym \supset y = a) \cdot Fa$	4 Simp
6	$(y)(Ay \cdot Pym \supset y = a)$	5 Simp
7	$An \cdot Pnm \cdot (y)(Ay \cdot Pym \supset y = n) \cdot n = l$	2 UI
8	$(y)(Ay \cdot Pym \supset y = n) \cdot n = l \cdot An \cdot Pnm$	7 Com
9	$(y)(Ay \cdot Pym \supset y = n) \cdot n = l$	8 Simp
10	$n = l \cdot (y)(Ay \cdot Pym \supset y = n)$	9 Com
11	$n = l$	10 Simp
12	$An \cdot Pnm \supset n = a$	6 UI
13	$An \cdot Pnm \cdot (y)(Ay \cdot Pym \supset y = n) \cdot n = l$	8 Com
14	$An \cdot Pnm$	13 Simp
15	$n = a$	12,14 MP
16	$a = n$	15 Id
17	$Fa \cdot (y)(Ay \cdot Pym \supset y = a)$	5 Com
18	Fa	17 Simp
19	$a = l$	16,11 Id
20	Fl	18,19 Id

3

1	$(\exists x)\{Nx \cdot Tx \cdot (y)[(Ny \cdot Ty) \supset y = x] \cdot Wmx\}$	
2	$Ng \cdot Wmg \cdot (x)[(Nx \cdot Wmg) \supset x = g]$	/ $(\exists x)\{Nx \cdot Tx \cdot (y)[(Ny \cdot Ty) \supset y = x] \cdot x = g\}$
3	$(x)[(Nx \cdot Wmg) \supset x = g] \cdot Ng \cdot Wmg$	2 Com
4	$Na \cdot Ta \cdot (y)[(Ny \cdot Ty) \supset y = a] \cdot Wma$	1 EI
5	$(x)[(Nx \cdot Wmg) \supset x = g]$	3 Simp
6	$(Na \cdot Wma) \supset a = g$	5 UI
7	Na	6 Simp
8	$Wma \cdot Na \cdot Ta \cdot (y)[(Ny \cdot Ty) \supset y = a]$	4 Com
9	Wma	8 Simp
10	$Na \cdot Wma$	7,9 Conj
11	$a = g$	6,10 MP
12	$Na \cdot Ta \cdot (y)[(Ny \cdot Ty) \supset y = a]$	4 Simp
13	$Na \cdot Ta \cdot (y)[(Ny \cdot Ty) \supset y = a] \cdot a = g$	12,11 Conj
14	$(\exists x)\{Nx \cdot Tx \cdot (y)[(Ny \cdot Ty) \supset y = x] \cdot x = g\}$	13 EG

4

1	$(\exists x)[Dx \cdot Bx \cdot (y)[(Dy \cdot By) \supset y = x] \cdot Lx \cdot Tx]$		
2	$(\exists x)[Dx \cdot (y)(Dy \supset y = x) \cdot x = a]$	/	Ba
3	$Dn \cdot Bn \cdot (y)[(Dy \cdot By) \supset y = n] \cdot Ln \cdot Tn$	1 EI	
4	$Dn \cdot Bn$	3 Simp	
5	$(y)[(Dy \cdot By) \supset y = n] \cdot Ln \cdot Tn \cdot Dn \cdot Bn$	3 Com	
6	$Dm \cdot (y)[Dy \supset y = m] \cdot m = a$	2 EI	
7	Dm	6 Simp	
8	$(y)[Dy \supset y = m] \cdot m = a \cdot Dm$	6 Com	
9	$(y)[Dy \supset y = m] \cdot m = a$	8 Simp	
10	$m = a \cdot (y)[Dy \supset y = m]$	9 Com	
11	$m = a$	10 Simp	
12	$(y)[Dy \supset y = m]$	9 Simp	
13	$Dn \supset n = m$	12 UI	
14	Dn	4 Simp	
15	$n = m$	13,14 MP	
16	$n = a$	15,11 Id	
17	$Da \cdot Ba$	4,16 Id	
18	$Ba \cdot Da$	17 Com	
19	Ba		

5

1	$Me \cdot \sim Se \cdot (x)[(Mx \cdot x \neq e) \supset Sx]$		
2	$Mn \cdot \sim Gn \cdot (x)[(Mx \cdot x \neq n) \supset Gx]$		
3	$e \neq n$	/	Ge · Sn
4	$(x)[(Mx \cdot x \neq e) \supset Sx] \cdot Me \cdot \sim Se$	1 Com	
5	$(x)[(Mx \cdot x \neq n) \supset Gx] \cdot Mn \cdot \sim Gn$	2 Com	
6	$(x)[(Mx \cdot x \neq e) \supset Sx]$	4 Simp	
7	$(Mn \cdot n \neq e) \supset Sn$	6 UI	
8	Mn	2 Simp	
9	$n \neq e$	3 Id	
10	$Mn \cdot n \neq e$	8,9 Conj	
11	Sn	7,10 MP	
12	$(x)[(Mx \cdot x \neq n) \supset Gx]$	5 Simp	
13	$(Me \cdot e \neq n) \supset Ge]$	12 UI	
14	Me	1 Simp	
15	$Me \cdot e \neq n$	14,3 Conj	
16	Ge	13,15 MP	
17	$Ge \cdot Sn$	16, 11 Conj	

6

1	$Pa \cdot Oa \cdot (x)(Px \cdot Ox \supset x = a)$		
2	$Pw \cdot Sw \cdot (x)(Px \cdot Sx \supset x = w)$		
3	$(\exists x)[Px \cdot Ox \cdot (y)(Py \cdot Oy \supset y = x) \cdot Sx]$	/	a = w
4	$Pn \cdot On \cdot (y)(Py \cdot Oy \supset y = n) \cdot Sn$	3 EI	
5	$(y)(Py \cdot Oy \supset y = n) \cdot Sn \cdot Pn \cdot On$	4 Com	
6	$(y)(Py \cdot Oy \supset y = n) \cdot Sn$	5 Simp	
7	$(y)(Py \cdot Oy \supset y = n)$	6 Simp	
8	$Pa \cdot Oa \supset a = n$	7 UI	
9	$Pa \cdot Oa$	1 Simp	
10	$a = n$	8,9 MP	
11	$(x)(Px \cdot Sx \supset x = w) \cdot Pw \cdot Sw$	2 Com	
12	$(x)(Px \cdot Sx \supset x = w)$	11 Simp	
13	$Pa \cdot Sa \supset a = w$	12 UI	
14	Pa	9 Simp	
15	$Sn \cdot (y)(Py \cdot Oy \supset y = n)$	6 Com	
16	Sn	15 Simp	
17	$n = a$	10 Id	
18	Sa	16,17 Id	
19	$Pa \cdot Sa$	14,18 Conj	
20	$a = w$	13,19 MP	

1	$(\exists x)\{Mx \cdot (y)[(My \cdot y \neq x) \supset Hxy] \cdot Tx\}$	/	$(\exists x)\{Mx \cdot Tx \cdot (y)[(My \cdot \sim Ty \cdot y \neq x) \supset Hxy]\}$
2	$\sim(\exists x)\{Mx \cdot Tx \cdot (y)[(My \cdot \sim Ty \cdot y \neq x) \supset Hxy]\}$	AIP	
3	$(x) \sim\{Mx \cdot Tx \cdot (y)[(My \cdot \sim Ty \cdot y \neq x) \supset Hxy]\}$	2 QN	
4	$(x) \sim\{Mx \cdot Tx \cdot (y)[(My \cdot \sim Ty \cdot y \neq x) \supset Hxy]\}$	3 DM	
5	$Mn \cdot (y)[(My \cdot y \neq n) \supset Hny] \cdot Tn$	1 EI	
6	$Mn \cdot Tn \cdot (y)[(My \cdot \sim Ty \cdot y \neq n) \supset Hny]$	4 UI	
7	$Mn \cdot Tn$	6 Simp	
8	$(y)[(My \cdot y \neq n) \supset Hny] \cdot Tn \cdot Mn$	5 Com	
9	$(y)[(My \cdot y \neq n) \supset Hny]$	8 Simp	
10			
11			
12			
13			
14			
15			

1	$Bo \cdot (x)[(Bx \cdot x \neq o) \supset Tox]$		
2	$(\exists x)\{Bx \cdot (y)[(By \cdot y \neq x) \supset Txy] \cdot Nx\}$		
3	$(x)(y)(Txy \supset \sim Tyx)$	/	No
4	$Ba \cdot (y)[(By \cdot y \neq a) \supset Tay] \cdot Na$	2 EI	
5	$(x)[(Bx \cdot x \neq o) \supset Tox] \cdot Bo$	1 Com	
6	$(x)[(Bx \cdot x \neq o) \supset Tox]$	5 Simp	
7	$(Ba \cdot a \neq o) \supset Toa$	6 UI	
8	$a \neq o$	AIP	
9	Ba	4 Simp	
10	$Ba \cdot a \neq o$	8,9 Conj	
11	Toa	7,10 MP	
12	$(y)[(By \cdot y \neq a) \supset Tay] \cdot Na \cdot Ba$	4 Com	
13	$(y)[(By \cdot y \neq a) \supset Tay]$	12 Simp	
14	$(Bo \cdot o \neq a) \supset Tao$	13 UI	
15	Bo	1 Simp	
16	$o \neq a$	8 Id	
17	$Bo \cdot o \neq a$	15, 16 Conj	
18	Tao	14,17 MP	
19	$(y)(Tay \supset \sim Tya)$	3 UI	
20	$Tao \supset \sim Toa$	19 UI	
21	$\sim Toa$	20,18 MP	
22	$Tao \cdot \sim Tao$	11,21 Conj	
23	$\sim(a \neq o)$	8-22 IP	
24	$a = o$	23 DN	
25	$Na \cdot Ba \cdot (y)[(By \cdot y \neq a) \supset Tay]$	4 Com	
26	Na	25 Simp	
27	No	26,24 Id	

$(\exists x)(\exists y)(Px \cdot Lx \cdot Py \cdot Ly \cdot x \neq y)$
 $Fr \cdot Pr \cdot Lr \cdot (x) [(Fr \cdot Px \cdot Lx) \supset x = r]$

/

$(\exists x)\{Px \cdot Lx \cdot (y)[(Py \cdot Ly) \supset y = x] \cdot \sim Fx\}$

1	$Df \cdot Bf \cdot Dp \cdot Bp \cdot (x)[(Dx \cdot Bx) \supset (x = f \vee x = p)]$	
2	$f \neq p$	
3	$Df \cdot \sim Rf \cdot (x)[(Dx \cdot x \neq f) \supset Rx]$	/ $(\exists x)\{(Dx \cdot Bx) \cdot (y)[(Dy \cdot By) \supset Ry \cdot x = y]\}$
4	$\sim(\exists x)\{(Dx \cdot Bx) \cdot (y)[(Dy \cdot By) \supset Ry \cdot x = y]\}$	AIP
5	$(x) \sim\{(Dx \cdot Bx) \cdot (y)[(Dy \cdot By) \supset Ry \cdot x = y]\}$	4 QN
6	$(x)[\sim(Dx \cdot Bx)] \vee \sim\{y[(Dy \cdot By) \supset Ry \cdot x = y]\}$	5 DM
7	$[\sim(Df \cdot Bf)] \vee \sim\{y[(Dy \cdot By) \supset Ry \cdot f = y]\}$	6 UI
8	$Df \cdot Bf$	1 Simp
9	$\sim\sim(Df \cdot Bf)$	8 DN
10	$\sim\{y[(Dy \cdot By) \supset Ry \cdot f = y]\}$	7,9 DS
11	$(\exists y) \sim[(Dy \cdot By) \supset Ry \cdot f = y]$	10 QN
12	$(\exists y)[\sim(Dy \cdot By) \vee Ry \cdot f = y]$	11 Impl
13	$\sim(Da \cdot Ba) \vee (Ra \cdot f = a)$	12 EI
14	$Df \cdot \sim Rf$	3 Simp
15	$(x)[(Dx \cdot x \neq f) \supset Rx] \cdot Df \cdot \sim Rf$	3 Com
16	$(x)[(Dx \cdot x \neq f) \supset Rx]$	15 Simp
17	$(Df \cdot f \neq f) \supset Rf$	16 UI
18	Df	14 Simp
19	$(Df \cdot f \neq f)$	18 Add
20	Rf	17,19 MP
21	$\sim Rf \cdot Df$	14 Com
22	$\sim Rf$	21 Simp
23	$Rf \cdot \sim Rf$	20,22 Conj
24	$\sim\sim(\exists x)\{(Dx \cdot Bx) \cdot (y)[(Dy \cdot By) \supset Ry \cdot x = y]\}$	4-23 IP
25	$(\exists x)\{(Dx \cdot Bx) \cdot (y)[(Dy \cdot By) \supset Ry \cdot x = y]\}$	24 DN