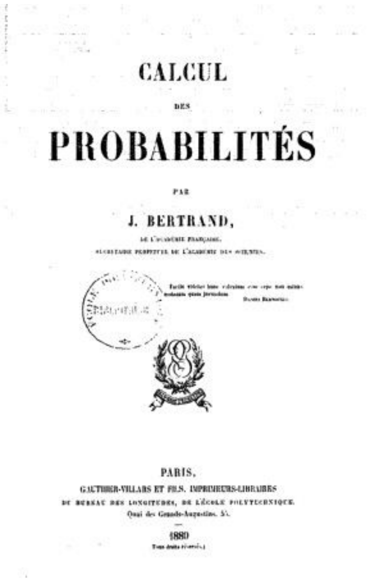
Paradoks Bertranda

Rafał Głodek

Paradoks Bertranda

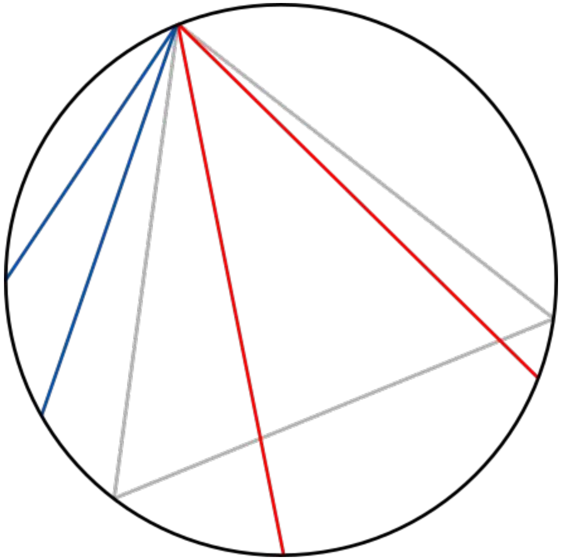
- *Calcul des Probabilities,* 1888 - Joseph Bertrand
- Na ustalonym okręgu skonstruowano losowo cięciwę. Jaka jest szansa, że cięciwa będzie dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?
- Trzy sposoby rozwiązania problemu


CALCUL
DES
PROBABILITÉS
PAR
J. BERTRAND,
PARIS,

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque de l'Ecole polytechnique

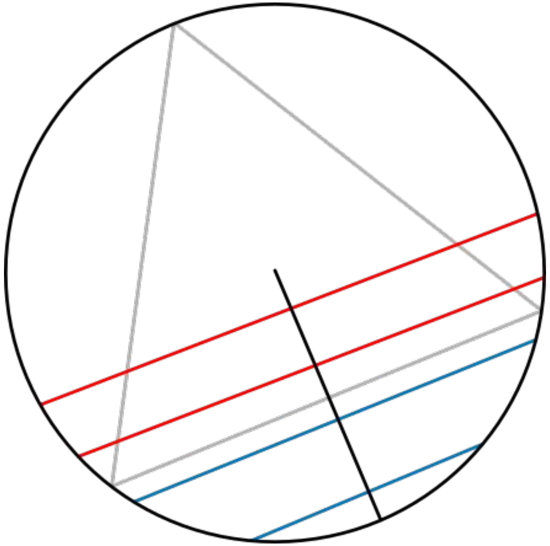
Podejście pierwsze

- ➔ Zdarzenie elementarne: wybór początku i końca cięciwy ↔ wybór kąta wpisanego
- ➔ Zdarzenie sprzyjające: cięciwa znajduje się między ramionami trójkąta
- ➔ Ustalamy:
  - ◆ przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = [0, \pi]$
  - ◆ zdarzenie sprzyjające $A = \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$
  - ◆ obliczone prawdopodobieństwo wynosi $P(A) = \frac{1}{3}$



Podejście drugie

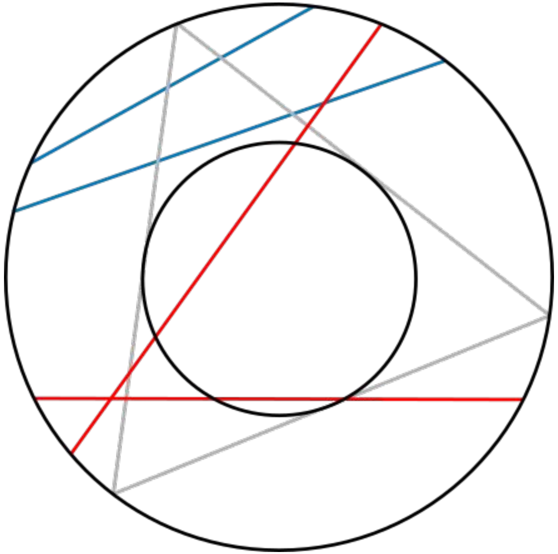
- Zdarzenie elementarne: wybór odległości między środkami poprowadzonej cięciwy a okręgu o promieniu jednostkowym
- Zdarzenie sprzyjające: cięciwa jest bliżej środka niż środek podstawy trójkata
- Ustalamy:
  - przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = [0, 1]$
  - zdarzenie sprzyjające $B = \left[0, \frac{1}{2}\right)$
  - obliczone prawdopodobieństwo wynosi $P(B) = \frac{1}{2}$



Podejście trzecie

- ➔ Jako zdarzenie elementarne przyjmujemy wybór punktu wewnątrz koła jednostkowego $\leftrightarrow$ wybór cięciwy o środku w tym punkcie
- ➔ Zdarzenie sprzyjające: wybrany punkt należy do koła wpisanego w rozważany trójkąt równoboczny
- ➔ Ustalamy:
  - ◆ przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = K(0,1)$
  - ◆ zdarzenie sprzyjające $C = K\left(0, \frac{1}{2}\right)$
  - ◆ obliczone prawdopodobieństwo wynosi

$$P(C) = \frac{S_C}{S_\Omega} = \frac{\pi}{4\pi} = \frac{1}{4}$$



Skąd wynika rozbieżność wyników?

- ➔ Każde podejście daje nam inny wynik (w ogólności możemy otrzymać dowolne prawdopodobieństwo między 0 a 1)
- ➔ Istnieje nieskończenie wiele sposobów wyboru cięciw
- ➔ Klasyczna (jedyna wówczas znana) definicja prawdopodobieństwa jako ilorazu liczności zbioru zdarzeń sprzyjających i elementarnych nie może być stosowana do zbiorów nieskończonych

Rozwiązanie paradoksu Bertranda

- ➔ Rozważając zbiory nieskończone, konieczne jest zdefiniowanie funkcji, która w jednoznaczny sposób określa procedurę losowania elementów z tego zbioru
- ➔ Każdy problem wymaga uprzedniego zdefiniowania przestrzeni probabilistycznej
- ➔ Problem stał się trywialny dopiero po 1933 roku, gdy Kołmogorow sformułował aksjomatykę rachunku prawdopodobieństwa

Dziękuję za uwagę