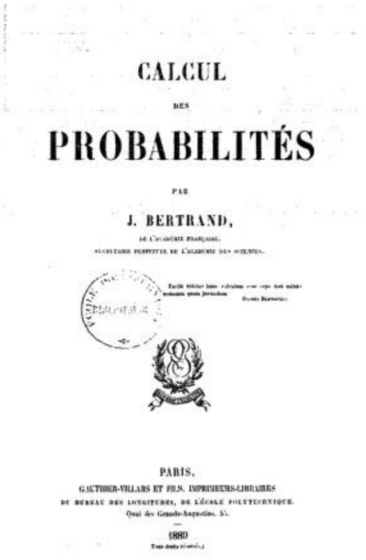
Paradoks Bertranda

Rafał Głodek

Paradoks Bertranda

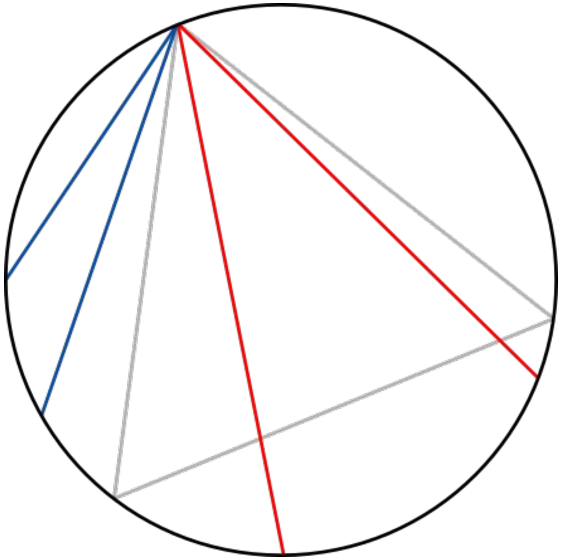
- *Calcul des Probabilities,* 1888 - Joseph Bertrand
- W okrąg o promieniu *R* wpisano trójkąt równoboczny. Jaka jest szansa, że **losowo** wybrana cięciwa będzie dłuższa niż bok tego trójkąta?
- Trzy sposoby rozwiązania problemu



Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque de l'Ecole polytechnique

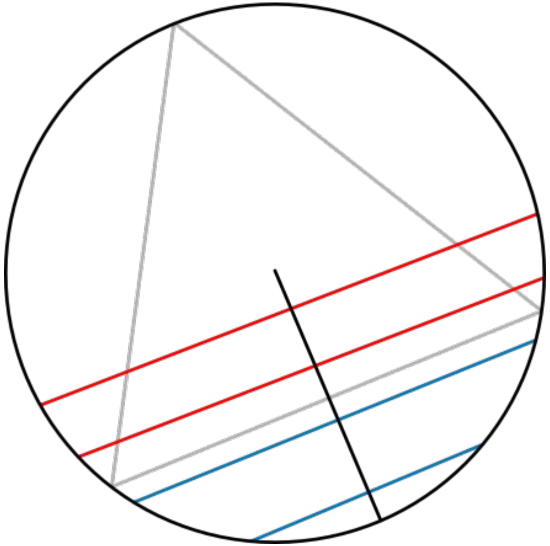
Podejście pierwsze

- ➔ Zdarzenie elementarne: wybór początku i końca cięciwy ↔ wybór kąta wpisanego
- ➔ Zdarzenie sprzyjające: cięciwa znajduje się między ramionami trójkąta
- ➔ Ustalamy:
  - ◆ przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = [0, \pi]$
  - ◆ zdarzenie sprzyjające $A = \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$
  - ◆ obliczone prawdopodobieństwo wynosi $P(A) = \frac{1}{3}$



Podejście drugie

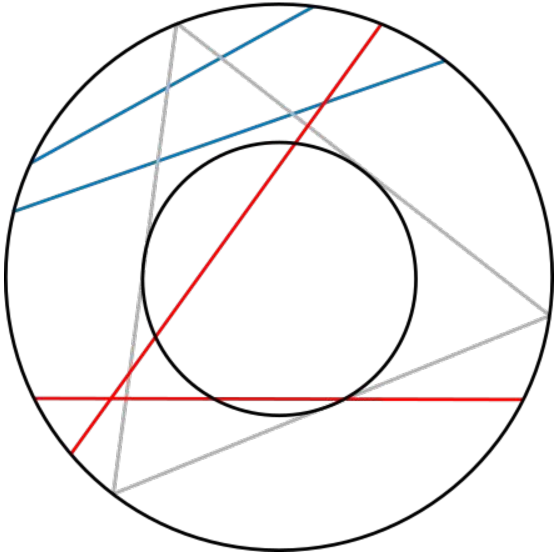
- ➔ Zdarzenie elementarne: wybór odległości między środkami poprowadzonej cięciwy i okręgu
- ➔ Zdarzenie sprzyjające: cięciwa jest bliżej środka niż środek podstawy trójkąta
- ➔ Ustalamy:
  - ◆ przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = [0, 1]$
  - ◆ zdarzenie sprzyjające $B = \left[0, \frac{1}{2}\right)$
  - ◆ obliczone prawdopodobieństwo wynosi $P(B) = \frac{1}{2}$



Podejście trzecie

- ➔ Zdarzenie elementarne: wybór punktu wewnątrz koła jednostkowego ↔ wybór cięciwy o środku w tym punkcie
- ➔ Zdarzenie sprzyjające: wybrany punkt należy do koła wpisanego w rozważany trójkąt równoboczny
- ➔ Ustalamy:
  - ◆ przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = K(0, 1)$
  - ◆ zdarzenie sprzyjające $C = K\left(0, \frac{1}{2}\right)$
  - ◆ obliczone prawdopodobieństwo wynosi

$$P(C) = \frac{S_C}{S_\Omega} = \frac{\pi}{4\pi} = \frac{1}{4}$$



Skąd wynika rozbieżność wyników?

- Każde podejście daje nam inny wynik (w ogólności możemy otrzymać dowolne prawdopodobieństwo między 0 a 1)
- Istnieje nieskończenie wiele sposobów wyboru cięciw
- “Losowość” nie jest jednoznaczna
- Klasyczna (jedyna wówczas znana) definicja prawdopodobieństwa Laplace’a, rozumiana jako ilorazu liczności zbioru zdarzeń sprzyjających, może przysporzyć problemów, gdy pojawiają się nieskończoności

Rozwiązanie paradoksu Bertranda

- ➔ Rozważając zbiory nieskończone, konieczne jest zdefiniowanie funkcji, która w jednoznaczny sposób określa procedurę losowania elementów z tego zbioru
- ➔ Każdy problem wymaga uprzedniego zdefiniowania przestrzeni probabilistycznej
- ➔ *Aksjomatyka rachunku prawdopodobieństwa*, Kołmogorow (1933)

Źródła

1. https://pl.wikipedia.org/wiki/Paradoks_Bertranda
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_paradox_(probability)
3. https://www.deltami.edu.pl/media/articles/1992/04/delta-1992-04-paradoksy-w-rachunku-prawdopodobienstwa.pdf
4. https://www.youtube.com/watch?v=mZBwsm6B280&ab_channel=Numberphile

Dziękuję za uwagę