DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB
DOM LUN MAR MIÉ JUE VIE SÁB

___/___/___

Lista 4

1- Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 4)$, calcular:

a) $2\vec{u} \cdot (-\vec{v}) = (4, -6, -2) \cdot (-1, 1, -4) = -4 - 6 + 8 = 2$

b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) =$

$\Rightarrow ((2, -3, -1) + (1, -1, 4))$

$|\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 14 - 18 = -4$

$|\vec{u}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$; $|v| = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18}$

2- Determine o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$ tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -42$

$v \cdot u = -42$ $\Rightarrow$ $k\, u \cdot u = -42$

$v = k u$

$k\, |u|^2 = -42$

$k\, 14 = -42$

$k = \frac{-42}{14} = -3$

$V = -3\,(2, -1, 3) = (-6, 3, -9)$

3- Dado que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$, calcule:

a) $(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot \vec{u}$

$|u|^2 - 3\, u \cdot v = 4 - 3\,(-1) = 7$

b) $(2\vec{v} - \vec{u}) \cdot (2\vec{v})$

$4\,|v|^2 - 2\, u \cdot v = 36 - 2\,(-1) = 38$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - 4\vec{u})$

$\Rightarrow uv - 4|u|^2 + |v|^2 - 4^3 u.v = -16 + 9 + 3 = -4$

4 - Qual o valor de α para que os vetores $\vec{v_1} = \vec{\alpha i} + \vec{2j} - \vec{4k}$ e $\vec{v_2} = \vec{2i} + (1 - 2\alpha)\vec{j} + \vec{3K}$ sejam ortogonais?

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \iff ?$

$V_1(\alpha, 2, -4)$, $V_2(2, (1-2\alpha), 3)$

$V1 \cdot V2 = 2\alpha + 2 - 4\alpha - 12$

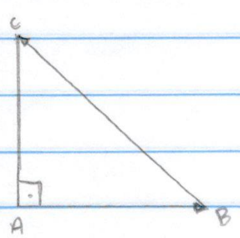
$0 = 2\alpha + 10$

$2\alpha = 10 =$

$\rightarrow 2$

$\alpha = 5$ //

5 - Dados os pontos $A(m, 1, 0)$, $B(m-1, 2m, 2)$ e $C(1, 3, -1)$, determinar m de modo que o triangulo seja retangulo em A, calcule o triangulo.



$(-1, 2m-1, 2) \cdot (1-m, 2, -1) = 0$

$-1 + m + 4m - 2 - 2 = 0$

$5m = 5$

$\rightarrow 5$

$m = 1$ //

$\vec{AB} = (-1, 2m-1, 2) = (-1, 1, 2) \Rightarrow ||\vec{AB}|| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

$\vec{AC} = (1-m, 2, -1) = (0, 2, -1) \Rightarrow ||\vec{AC}|| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

Agora vamos descobrir o triangulo em A.

$A = \dfrac{b.h}{2} = \dfrac{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}{2} = \dfrac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$ //

6 - O quadrilátero ABCD é um losango de lado 2. Calcule.

a) $\vec{AC} \cdot \vec{BD} \Rightarrow 0$

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AD} \cdot \cos 60$

$2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

c) $\vec{BA} \cdot \vec{BC} \cdot \cos 60$

$2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

d) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} \cdot \cos 60$

$2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

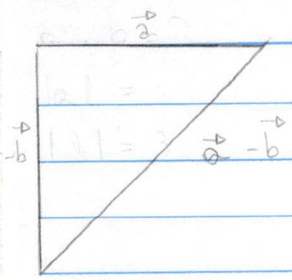
e) $\vec{AB} \cdot \vec{DC} \cdot \cos(0)$

$2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ //

f) $\vec{BC} \cdot \vec{DA} \cdot \cos(0)$

$2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$ //

7 - Considere os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tal que $\vec{u} \perp \vec{v}$, $|\vec{u}| = 6$ e $|\vec{v}| = 8$.
Calcule $|\vec{u} + \vec{v}|$ e $|\vec{u} - \vec{v}|$.



$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |-\vec{b}|^2$

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 6^2 + 8^2$

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 10$

8- Determine o ângulo entre os valores

a) $\vec{u} = (2, -1, -1)$ e $\vec{v} = (-1, -1, 2)$

$u \cdot v = -2 + 1 - 2 = -3$

$|u| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$

$|v| = \sqrt{6}$

$\Rightarrow -3 = 6 \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 120°$

b) $\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$

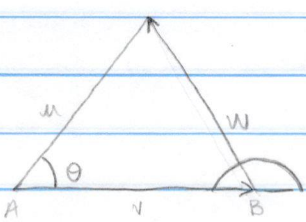
$u \cdot v = -1 - 2 = -3$

$|u| = \sqrt{6}$

$|v| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow -3 = \sqrt{12} \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 150$

9- Considere o triangulo de vertices $A(3, 4, 4)$, $B(2, -3, 4)$ e $C(6, 0, 4)$. Determine o ângulo interno ao vertice B. Qual o ângulo externo no vertice B?



$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos\theta$

$u = BA = (1, 7, 0) \Rightarrow |u| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$v = BC = (4, 3, 0) \Rightarrow |v| = \sqrt{25} = 5$

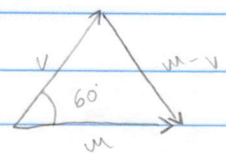
$u \cdot v = 4 + 21 = 25$

$\Rightarrow -17 = 5\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \cos\theta$

$\frac{25}{25\sqrt{2}} = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \Rightarrow \theta_3 = 45$

$\alpha = 135$

10 - Calcule $|\vec{u} + \vec{v}|$, $|\vec{u} - \vec{v}|$ e $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$, sabendo que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de $60°$.



$(u + v) \cdot (u - v) = 7$

$|u| = 4$

$|v| = 3$

$|u|^2 - |v|^2 = 16 - 9 = 7$

$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos 60 = 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

* Lei dos cossenos

$$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2\,|u| \cdot |v| \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$|u - v|^2 = 13 \Rightarrow |u - v| \pm \sqrt{13}$$

11 - Determinar o vetor $\vec{u}$ tal que $|\vec{u}| = 2$, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v} = (1, -1, 0)$ é $45°$ e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{w} = (1, 1, 0)$.