PERTEMUAN 16

(Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Invers Matriks)

A. CAPAIAN PEMBELAJARAN

Sesudah penyelesaian materi pada pertemuan ini, mahasiswa diharapkan bisa mengerti serta mendeskripsikan Penyelesaian Sistem Linier dengan Invers Matriks.

B. URAIAN MATERI

1. Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear ialah sebuah persamaan dalam n variabel x1 , x2 , …, x n bisa ditulis menjadi sebuah persamaan linier dengan bentuk

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots. + \ldots. \alpha_n x_n$

Dengan a_1 , a_2 , …, a_n serta b konstanta real.

Sebuah himpunan terhingga m buah persamaan linier dengan variabel x_1 , x_2 , …, x_n yakni sistem persamaan linier dengan n variabel ditulis menjadi

$\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots. + \alpha_{1n} x_n = b_1$

$\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots. + \alpha_{2n} x_n = b_2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$\alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \ldots. + \alpha_{mn} x_n = b_m$

Sebuah kumpulan bilangan-bilangan berurutan s_1 , s_2 , …, s_n dikatakan **himpunan penyelesaian sistem** apabila $s_1 = x_1$, $s_2 = x_2$, …, $s_n = x_n$ memenuhi masing-masing persamaan pada sebuah sistem.

Suatu sistem persamaan tanpa solusi disebut sistem yang tidak konsisten, tetapi dikatakan konsisten apabila memiliki setidaknya satu solusi. Masing-masing sistem persamaan linier tidak dapat memiliki solusi, tepat satu solusi, atau jumlah solusi yang tak terbatas.

2. Definisi Matriks

Matriks diartikan menjadikan susunan bilangan persegi empat yang disusun pada baris serta kolom. Penulisan matriks ialah:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Susunan berikut dikatakan suatu matriks kali (ditulis) sebab mempunyai baris serta kolom.

Matriks adalah susunan bilangan yang memiliki bentuk persegi. Angka-angka pada array disebut elemen matriks. Ukuran matriks ditentukan oleh total baris maupun kolom yang ada di dalamnya.

3. Jenis-jenis matriks

a) Vektor baris : Ukuran matriks 1xn

b) Vektor kolom : Ukuran matriks mx1

c) Matriks persegiempat: matriks orde n apabila total baris maupun kolom matriks sama, yakni n bagian.

d) Matriks diagonal : matriks persegi sama sisi yang terdiri dari seluruh elemen yang terletak di luar diagonal utama matriks A = 0, aij = 0, i≠j

e) Matriks Skalar : matriks bujur sangkar yang mana elemennya aii = α , dalam masing-masing i = 1, 2, …, n, sementara seluruh elemen diluar diagonal A aij = 0, i≠j

f) Matriks Identitas : matriks skalar yang mana elemen aii=1, dalam masing-masing i = 1, 2, …, n, dinotasikan matriks I.

g) Matriks null : matriks yang mana seluruh elemen mempunyai nilai 0.

h) Matriks segitiga bawah : matriks yang mana seluruh elemennya diatas diagonal utama ialah nol

i) Matriks segitiga atas : matriks yang mana seluruh elemennya dibawah diagonal utama ialah nol

4. Karakteristik Matriks

Dengan asumsi bahwa A, B, dan C ialah matriks-matriks dengan ukuran yang sama serta real invers, operasi matriks memenuhi kriteria berikut:

i. A+B=B+A

ii. (A+B)+C=A+(B+C)

iii. (AB)C=A(BC)

iv. A(B+C)=AB+AC

v. (A+B)C=AC+BC

vi. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$
vii. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$
viii. $(\alpha+\beta)A= \alpha A+ \beta A$
ix. $\alpha(A+B)= \alpha A+ \alpha B$

5. **Definisi Invers Matriks**

Berdasarkan Howard Anton & Chris Rorres (2004), matriks ialah susunan bilangan persegi panjang. Adapun bentuk matriks yakni matriks Toeplitz. Berdasarkan asumsi Robert (2005), matriks Toeplitz ialah yang mana semua elemen dalam diagonal utama sama serta semua elemen dalam sub-diagonal yang bersesuaian juga sama atau dikenal dengan matriks simetri sirkular. Bentuk umum dari matriks Toeplitz ialah.

$$T_n = (t_{ij}) \begin{bmatrix} t_1 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-2)} & t_{-(n-1)} \\ t_{-1} & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-3)} & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-4)} & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{-(n-2)} & t_{-(n-3)} & t_{-(n-4)} & \cdots & t_0 & t_{-1} \\ t_{-(n-1)} & t_{-(n-2)} & t_{-(n-3)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

dimana t_{ij} ialah entry yang berda di posisi baris ke-*i* serta kolom ke-*j*.

Pembahasan yang menarik pada teori matriks ialah mencari invers matriks. Suatu matriks memiliki invers apabila determinannya bukan nol. Metode yang dipakai pada perhitungan inversi matriks meliputi permutasi, partisi matriks, matriks adjacency, eliminasi Gaussian, eliminasi Gaussian-Jordan, perkalian inversi matriks elementer, serta faktorisasi matriks LU. Masalah untuk pencarian invers suatu matriks umumnya berkaitan dengan ukuran sebuah matriks tersebut. Kian besarnya ukuran sebuah matriks, maka kian sukar pula dalam penentuan invers suatu matriks, sehingga menentukan invers suatu invers memerlukan rumus yang benar.

Salah satu manfaat inversi matriks ialah bisa menyelesaikan sistem persamaan linear. Sistem persamaan linear ini memiliki sejumlah aplikasi untuk mempermudah untuk mengambil sebuah putusan di sejumlah bidang contohnya pendidikan, kimia ekonomi, dan manajemen. Pada tahun 1991, Kouachi mengkaji nilai eigen maupun vektor eigen dari matriks tridiagonal yang elemen diagonalnya tidak konstan. Selain itu, Gray & Robert juga menjalankan studi teori matriks pada tahun 2005 berjudul “Toeplitz and Circulant Matrices”.

Lebih lanjut, Bhakti Siregar et al mengkaji sebuah matriks Toeplitz dalam artikel 2014 mereka “Reciprocals of Toeplitz matrix using the adjoint method”. Dalam karya ini, mereka merumuskan rumus invers untuk matriks Toeplitz dengan bentuk khusus:

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix} \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Adapun hasil yang diperoleh yaitu bentuk umum dari determinan, matriks kofaktor serta invers dari matriks Toeplitz ber-orde *n* dalam Persamaan (2).

1. Bentuk Umum determinan matriks Toeplitz ber-orde *n* dalam Persamaan (1) ialah

$$\det(T_n) = (-1x)^n (n-1) x^n$$

2. Bentuk Umum sejumlah kofaktor yang ada di baris ke-*i* serta kolom ke-*j* dari matriks Toeplitz ber-orde *n* dalam Persamaan (1.2) ialah

$$K_{ij}T_n \begin{cases} \det(T_n) & ; untuk\ i = j \\ (-1)^{n+1} & ; untuk\ i \neq j \end{cases}$$

3. Bentuk Umum invers dari matriks Toeplitz ber-orde *n* dalam Persamaan (1) ialah

$$T_n^{-1} = T_{ij} = \begin{cases} \frac{-n-2}{(n-1)x} & ; untuk\ i = j \\ \frac{1}{(n-1)x} & ; untuk\ i \neq j \end{cases}$$

Dari hasil di atas kita bisa melihat jika terdapat formula khusus dalam mencari invers dari matriks Toeplitz yang memiliki bentuk sendiri, contohnya Persamaan (2). Jadi dalam perhitungan invers kita tidak membutuhkan proses yang rumit serta panjang dengan memakai cara yang umum, tetapi sudah cukup untuk mensubstitusi nilai n serta x dari matriks ke dalam rumus di atas.

Pada tahun 2015, peneliti juga sudah melakukan penelitian mengenai invers matriks Toeplitz tridiagonal. Berdasarkan pendapat Salkuyeh (2006), sebuah matriks Toeplitz tridiagonal ber-orde ialah sebuah matriks dengan bentuk :

$$A = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \text{dengan } a, c \neq 0 \in \mathbb{R}$$

Pada penelitian tersebut, penulis telah mendapatkan bentuk umum dari determinan, matriks kofaktor, serta invers dari matriks Toeplitz tridiagonal dalam

Persamaan (3).

Selanjutnya pada tahun 2018, penulis telah melakukan penelitian mengenai determinan mariks Toeplitz berbentuk khusus seperti berikut:

$$|A^3| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{dengan } \alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$$

Hasil yang diperoleh pada makalah tersebut adalah mendapatkan bentuk umum determinan matriks Toeplitz berbentuk khusus tersebut, yaitu:

$$|A_n| = \begin{cases} 0, jika\ n\ \equiv 6\ (mod\ 2)\ atau\ n\ \equiv 6\ (mod\ 5) \\ 1\ jika\ n\ \equiv 6\ (mod\ 0)\ atau\ n\ \equiv 6\ (mod\ 1) \\ -1\ jika\ n\ \equiv 6\ (mod\ 3)\ atau\ n\ \equiv (mod\ 4) \end{cases}$$

Dengan demikian, penulis tertarik untuk meneruskan studi tahun 2018 tersebut yaitu mendapatkan formulasi/bentuk umum matriks kofaktor invers pada sebuah matriks Toeplitz bentuk tersendiri dalam Persamaan (4) memakai metode adjoin. Mengingat bentuk matriks Toeplitz yang unik, peneliti memprediksi bahwa terdapat karakteristik khusus dalam matriks ini sehingga matriks kofaktor serta matriks invers lebih sederhana daripada matriks umum. Dengan formula tersebut harapannya akan lebih mudah untuk menentukan kofaktor invers dari matriks Toeplitz bentuk khusus persamaan (4). Oleh karena itu, hal ini akan mempermudah sejumlah pihak, seperti pada bidang pendidikan, ekonomi, manajemen, kimia, serta lainnya, yang memerlukan penerapan kebalikan dari matriks tersebut.

6. Penyelesaian Persamaan Linier memakai Invers Matriks

Bentuk umum SPLDV (menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel memakai invers matriks di bawah):

a× + by = p

cx + dy = q

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Penyelesaian persamaan matriks tersebut bisa memakai sifat matriks, yakni:

1. Apabila Ax = B, sehingga x = $A^{-1}B$ menggunakan det A ≠ 0
2. Apabila xA = B, sehingga x = BA^{-1} menggunakan det A ≠ 0

Dengan demikian sistem persamaan linier di atas diselesaikan dengan cara :

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

A X B

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

Dari uraian tersebut dapat kita simpulkan bahwa :

Penyelesaian dari SPLDV

Ax+ by = p

Cx + dy = q

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ dengan ad – bc ≠ 0

CONTOH SOAL 1

Gunakan invers matriks dalam penentuan himpunan solusi dari sistem persamaan linier ini.

3x – 2y = 52

X + y = 8

Jawaban :

Pertama, mengubah sistem persamaan linier menjadi persamaan matriks.

$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

Selanjutnya cari solusi invers matriks sebagai berikut:

$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$-1 $\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3.1-(-2.2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 21 \\ 14 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{3}{2}$

Sehingga, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linier tersebut ialah{3,2}.

CONTOH SOAL 2

Selesaikan suatu persamaan linier ini :

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$

$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$

$x_1 + 8x_3 = 17$

Jawab

Pada bentuk matriks sehingga sistem ini bisa ditulis menjadi Ax = B dimana :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

Menurut teorema diatas solusi untuk x adalah :

$x = A^{-1}B$

Dengan melakukan operasi operasi baris elementer kita bisa mereduksi elemen elemen dari matriks A menjadi A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Menurut teorema diatas , maka pemecahan SPL tersebut adalah

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapat $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$

Pecahkan SPL dibawah ini :

$x_1\ 2x_2 = 7$

$2x_1\ 5x_2 = -3$

Jawab :

Pada bentuk matriks sehingga sistem tersebut bisa ditulis AX = B , dimana :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Kita lakukan operasi baris elementer untuk mencari A^{-1}

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{matrix}$

Maka didapat :

$A^{-1} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \\ -17 \end{bmatrix}$

Sehingga di dapat ,

$x_1 = 41$, $x_2 = -17$

Latihan Soal

Selesaikan persamaan linear dibawah ini menggunakan invers matriks

1. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8$
2. $4x_1 + 5x_2 + 3x_2 = 7$
3. $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4$
4. $8x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 9$
5. $2x_1 + 2x_2 = 7$

DAFTAR PUSTAKA

Ashadi, R. F. (2019, November Senin). *Course Hero.* Retrieved Februari Sabtu, 2022, from Mercu Buana University: https://www.coursehero.com/file/39366273/Modul-1-Sistem-Persamaan-Liniear-dan-Matrikspdf/

Darmawan, R. N., & Cahyani, L. (2017). Pengembangan Perangkat Pembelajaran Berbasis VB dalam Materi Invers Matriks. *Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Univ. Muhammadiyah Metro*, 9.

Kamaluddin, K. (2017, Juli Senin). *Analisa Metode Eliminasi Gauss serta Aturan Cramer untuk Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Serta Aplikasinya .* Retrieved Januari Selasa, 2022, from Repository UIN Alauddin Makassar: http://repositori.uin-alauddin.ac.id/id/eprint/2533

Marzuki, C. C., & Aryani, F. (2019). Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus memakai Metode Adjoin. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, 9.