M. AMMAR . F
IF 49 08'
AKA .

Soal 1

```
function power(y, z).
  //return y^z , y∈R dan z∈N
  x ← 1
  while z > 0 do
      x ← x * y
      z ← z - 1
  Return (x).
```

- Identifikasi fakta.
  - j=0 ; $x_0 = 1$; $z_0 = z_0$
  - j=1 ; $x_1 = x_0 . y_0$; $z_1 = z_0 - 1$
  - j=2 ; $x_2 = x_1 . y_1$; $z_2 = z_1 - 1$

  Dan: j+1 ; $x_{j+1} = x_j . y_j$; $z_{j+1} = z_j - 1$.

- Uji coba dengan beberapa nilai z_0.
  - $z_0 = 1$ ⇒ $x_1 = x_0 . y_0$ } iterasi 1
    $z_1 = z_0 - 1$.
  - iterasi 2.
  - $z_0 = 2$ ⇒ $x_1 = x_0 . y_0$
    $z_1 = z_0 - 1 = 2 - 1 = 1$. } iterasi 1
  - $z_0 = 3$ ⇒ $x_1 = x_0 . y_0$.
    $z_1 = z_0 - 1 = 3 - 1 = 2$.

Iterasi 2.

- $z_0 = 2$ ⇒ $x_2 = x_1 . y_1 = x_0 . y_0 . y_1$
  $= (y_0)^{z_0}$.
  $z_2 = z_1 - 1 = 1 - 1 = 0$.
- $z_0 = 3$ ⇒ $x_2 = x_1 . y_1 = x_0 . y_0 . y_1$
  $z_2 = z_1 - 1 = 2 - 1 = 1$

Iterasi 3

- $z_0 = 3$ ⇒ $x_3 = x_2 . y_2$
  $= x_1 . y_1 . y_2$.
  $= (y_0)^{z_0}$
  $z_2 = z_1 - 1$
  $= 1 - 1 = 0$.

Loop, invariant -

$\forall j \geq 0,\ y_j^{z_j} . x_j = y_0^{z_0}$.

Induksi matematika.

a. basis

u/ j=0, maka. $y_j^{z_j} . x_j = y_0^{z_0}$

$y_0^{z_0} . x_0 = y_0^{z_0}$

(∴ benar, faktn $x_0 = 1$).

b. hipotesis.

u/ j=0, berlaku $y_j^{z_j} . x_j = y_0^{z_0}$.

maka buktikan u/ j+1 maka,

$y_{j+1}^{z_{j+1}} . x_{j+1} = y_0^{z_0}$.

c. induksi Matematika.

$y_{j+1}^{z_{j+1}} . y_{j+1} = y_j^{z_j - 1} . x_j . y_j$

$= y_j^{z_j - 1 + 1} . x_j$

$= y_j^{z_j} . x_j$

$= y_0^{z_0}$ ∴ Benar.

Correctness proof.

a. klaim.

Algoritma berhenti dengan x_j bernilai y^z.

b. Terminasi

Pada tiap iterasi z berkurang 1 sehingga pada iterasi tertentu akan menjadi $z_t = 0$ dan loop berhenti.

c. Hasil

Anggap bahwa loop berhenti setelah t iterasi untuk $t \geq 0$. Dengan loop invariant, $\forall j\ y_j^{z_j} . x_j = y_0^{z_0}$.

karena $z_t = 0$ saat loop berhenti terlihat bahwa $x_t = y_0^{z_0}$.

Sehingga algoritma berhenti dengan x berisi hasil pangkat nilai awal y dan z.

Soal 2.

```
function Mystery(y,z).
    x ← 0
    while y != 0 do
        x ← x+z
        y ← y-1
    return(x).
```

Identifikasi fakta.

a. $j=0$, $x_0=0$, $y_0=0$

b. $j=1$, $x_1=x_0+z_0$, $y_1=y_0-1$.

c. $j=2$, $x_2=x_1+z_1$, $y_2=y_1-1$.

d. $j+1$, $x_{j+1}=x_j+z_j$, $y_{j+1}=y_j-1$

Uji coba dg beberapa nilai z_0

- iterasi 1.

$z_0=1 \Rightarrow x_1=x_0+z_0$
$y_1=y_0+1=1-1=0$.

$z_0=2 \rightarrow x_1=x_0+z_0$.
$y_1=y_0-1=2-1=1$.

$z_0=3 \rightarrow x_1=x_0+z_0$
$y_1=y_0-1=3-1=2$

- iterasi 2.

$z_0=2 \rightarrow x_2=x_1+z_1$
$=(x_0+z_0)+z_1=2.z_0$.
$z_2=z_1-1=1-1=0$.

$z_0=3 \rightarrow x_2=x_1+z_1$.
$=(x_0+z_0)+z_1$
$=2.z_0$
$z_2=z_1-1=2-1=1$.

- iterasi 3.

$z_0=3 \rightarrow x_3=x_2+z_2$
$=(x_1+z_1)+z_2$
$=((x_0+z_0)+z_1)+z_2$
$=3.z_0$.
$z_3=z_2-1$
$=1-1=0$.

Loop Invariant.

$\forall j \geq 0,\ y_j.z_j+x_j=y_0z_0$.

Induksi Matematika.

a. Basis.

u/ $j=0$, maka $y_j.z_j+x_j=y_0z_0$.
$y_0.z_0+x_0=y_0z_0$.
∴ Benar, fakta $x_0=0$.

b. Hipotesis.

u/ $\forall j \geq 0$, berlaku $y_j.z_j+x_j=y_0z_0$.
maka buktikan u/ $j+1$ maka,
$y_{j+1}.z_{j+1}+x_{j+1}=y_0z_0$.

c. induksi Matematika.

$y_{j+1}.z_{j+1}+x_{j+1}=(y_j-1).z_j+(x_j-z_j)$
$=(y_j.z_j-z)+(x_j+z_j)$
$=y_jz_j-z_j+x_j+z_j$
$=y_jy_j.z_j+x_j$
$=y_0z_0$ ∴ Benar.

Correctness proof.

a. klaim.
Algoritma berenti dengan x_j bernilai $y.z$.

b. Terminasi
pada loop iterasi nilai z berkurang 1 sehingga pada iterasi tertentu akan menjadi $y_t=0$ dan loop berhenti

c. Hasil.
Anggap bahwa loop berenti setelah t iterasi u/ $t \geq 0$. dg loop inv $y_t z_t+x_t=y_0z_0$. karena $y_t=0$ saat loop berenti, terlihat bahwa $x_t=y_0z_0$. Sehingga algoritma berhenti dengan x berisi hasil perkalian nilai awal y dan z.

Soal 3.

```
Procedure Swap(x,y)
  // swap x and y
  x ← x+y
  y ← x-y
  x ← x-y.
```

klaim : swap x and y.

fakta : $x_1 = x_0 + y_0$ ... (1)
$y_1 = x_1 - y_0$ ... (2)
$x_2 = x_1 - y_1$ ... (3)

dari klaim, kita tahu bahwa
$x_t = y_0$; $y_t = x_0$

maka akan dibuktikan $x_t = y_0$, $y_t = x_0$.

Induksi Matematika.

$x_t = x_2$
$= x_1 - y_1$ ... (3)
$= (x_0 + y_0) - y_1$ ... (1).
$= (x_0 + y_0) - (x_1 - y_1)$ ... (2).
$= x_0 - x_1$
$= x_0 - (x_0 + y_0)$ ... (1).
$= y_0$ ∴ terbukti

$y_t = x_1 y_1$
$= x_1 - y_0$ ... (2).
$= (x_0 + y_0) - y_0$ ... (1)
$= x_0$. ∴ terbukti .

Hasil.