CII2G3 – Teori Peluang

PEUBAH ACAK (BIVARIAT) KONTINU

Peubah Acak Bivariat

- Seringkali fenomena/observasi yang terjadi melibatkan dua peubah acak secara simultan.
- Contoh: pemilihan atlet dilakukan dengan mempertimbangkan tinggi badan (X) dan berat badan (Y). X dan Y masing-masing merupakan p.a.k
- Contoh: dalam suatu kompetesi nasional, seseorang dipilih berdasarkan banyaknya kompetisi yang pernah diikuti (X) dan banyaknya penghargaan yang pernah diperoleh (Y). X dan Y masing-masing merupakan p.a.d

Mostly, X dan Y disini merupakan p.a yang memiliki keterkaitan

P. A. Bivariat Kontinu

- Definisi:

Jika X dan Y masing-masing merupakan p.a.k, maka (X, Y) disebut sebagai p.a. gabungan bivariat kontinu.

Misalkan X adalah durasi erupsi Gunung Anak Krakatau dalam detik, dan Y merupakan waktu yang dibutuhkan sampai erupsi berikutnya terjadi, yang dinyatakan dalam menit.

Menarik, untuk mengetahui hubungan antara X dan Y, serta peluang durasi erupsi pada interval tertentu dan waktu menuju erupsi berikutnya berada diantara b_1 dan b_2,

$$\boldsymbol{P(a_1 < X < a_2, b_1 < Y < b_2)}$$

Fungsi Peluang P.A.K Bivariat

- Beberapa nama fungsi peluang p.a.k: fungsi rapat peluang, fungsi padat peluang (f.p.p), probability density function (p.d.f).
- f.p.p bivariat (X, Y) ditulis sebagai $f(x, y)$

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

dengan $F(x, y)$ adalah fungsi distribusi bersama (X, Y)

- Sifat-sifat f.p.p bivariat (X, Y)
  1. $\mathrm{f(x, y)} \geq 0$
  2. $\int_{\mathrm{x} \in \mathrm{S}_1} \int_{\mathrm{y} \in \mathrm{S}_2} \mathrm{f(x, y)\, dy\, dx} = 1$
  3. $\mathrm{A} \subseteq \Re^2 \Rightarrow \mathrm{P[(X, Y) \in A]} = \int \int_{(x,y) \in A} f(x, y) dx\, dy$

F.P.P Marjinal (Marginal)

Diberikan f.p.p bivariat $f(x, y)$

- f.p.p marjinal p.a X

$$f(x) = \int_y f(x, y)\, dy$$

- f.p.p marjinal p.a Y

$$f(y) = \int_x f(x, y)\, dx$$

Highlight

$$\int_0^1 2\,dx = \cdots$$

$$\int_0^1 (2+x)\,dx = \cdots$$

$$\int_0^1 (y+x)\,dx = \cdots$$

Highlight

$$\int_0^1 2\,dx = 2$$

$$\int_0^1 (2+x)dx = \frac{5}{2}$$

$$\int_0^1 (y+x)dx = y + \frac{1}{2}$$

Fungsi Peluang P.A.K Bivariat

Misalkan p.a X dan Y memiliki fungsi peluang bivariat/gabungan,

$$f(x,y) = 4xy$$

untuk $0 < x, y < 1$. Apakah $f(x,y)$ merupakan f.p.p yang valid?

Berdasarkan sifat f.p.p bivariat bahwa $\int_y \int_x f(x,y)\,dx\,dy = 1$, sehingga

$$\int_0^1 \int_0^1 4xy\,dxdy = \int_0^1 [2x^2y]_0^1\,dy = \int_0^1 2y\,dy = [y^2]_0^1 = 1$$

diperoleh $\int_0^1 \int_0^1 4xy\,dx\,dy = 1$, sehingga f.p.p diatas valid.

F.P.P Marjinal

- Misalkan p.a X dan Y memiliki fungsi peluang bivariat/gabungan,

$$f(x, y) = 4xy$$

untuk $0 < x, y < 1$. Tentukan $f(x)$ dan $f(y)$.

$$f(x) = \int_y f(x, y)\, dy = \int_0^1 4xy \ dy = [2xy^2]_0^1 = 2x$$

$$f(y) = \int_x f(x, y)\, dx = \int_0^1 4xy \ dx = [2x^2y]_0^1 = 2y$$

Contoh

Diberikan fungsi peluang bivariat,

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+3y), 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0, \qquad lainnya \end{cases}$$

1. Ditanya: tentukan nilai c?

Berdasarkan sifan f.p.p bivariat $\int_y \int_x f(x,y)\,dx\,dy = 1$, sehingga

$$\int_0^1 \int_0^1 c(x+3y)\,dx\,dy = 1 \leftrightarrow \int_0^1 \left[c\left(\frac{1}{2}x^2 + 3xy\right)\Big|_0^1 \right] dy = 1$$

$$\leftrightarrow \int_0^1 c\left(\frac{1}{2} + 3y\right) dy = 1$$

$$\leftrightarrow c\left(\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}y^2\right)\Big|_0^1 = 1 \leftrightarrow 2c = 1$$

diperoleh $\boldsymbol{c = \frac{1}{2}}$, sehingga

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+3y), 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0, \qquad lainnya \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+3y), 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0, \qquad lainnya \end{cases}$$

2. Ditanya: fungsi marginal dari X?

$$f(x) = \int_y f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}(x+3y)\ dy$$
$$= \left[\frac{1}{2}\left(xy + \frac{3}{2}y^2\right)_0^1\right] = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

diperoleh $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)$.

3. Ditanya: $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$? peluang X maka gunakan f.p.p marginal X

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)dx = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right)_{1/2}^{1}\right]$$
$$= \left[\frac{1}{2}\left(2 - \frac{7}{8}\right)\right] = \frac{9}{16}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+3y), 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0, \qquad lainnya \end{cases}$$

4. Ditanya: $P\left(X > 0, Y > \frac{1}{2}\right)$? peluang X dan Y maka gunakan f.p.p bivariat

$$\int_{1/2}^{1}\int_{0}^{1}\frac{1}{2}(x+3y)\,dx\,dy = \int_{1/2}^{1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 + 3yx\right)_0^1 dy$$

$$= \int_{1/2}^{1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 3y\right)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}y^2\right)_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{5}{8}\right)_0^1 = \frac{11}{16}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+3y), 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0, \qquad lainnya \end{cases}$$

5. Ditanya: $P(X < Y)$? peluang X dan Y maka gunakan f.p.p bivariat

$$\int_0^1 \int_0^y \frac{1}{2}(x+3y)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 + 3yx\right)_0^y\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y^2 + 3y^2\right)\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{7}{4}y^2\,dy$$

$$= \left(\frac{7}{4}\frac{1}{3}y^3\right)_0^1 = \frac{7}{12}$$

Contoh

Diberikan fungsi distribusi bersama

$$F(x,y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{3y^2 x}{2}$$

dengan $0 < x < 1$ dan $0 < y < 1$. Tentukan fungsi peluang bersamanya.

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{3y^2 x}{2} \right)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left(xy + \frac{3y^2}{2} \right)}{\partial y} = x + 3y$$

diperoleh fungsi peluang bersamanya adalah

$$f(x,y) = x + 3y$$

dengan $0 < x < 1$ dan $0 < y < 1$

F.P.P Bersyarat (Conditional)

Diberikan f.p.p bivariat $f(x, y)$

- f.p.p marjinal p.a X

$$f(x) = \int_y f(x, y)\, dy$$

- f.p.p marjinal p.a Y

$$f(y) = \int_x f(x, y)\, dx$$

- f.p.p bersyarat

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)}; \quad f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)}$$

Bivariat: Ekspektasi/Mean

- Misalkan X merupakan p.a.k dengan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Nilai ekspektasi dari X, dinotasikan dengan $E(X)$ didefinisikan sebagai

$$E(X) = \int_a^b xf(x)\,dx$$

- Jika terdapat dua p.a X dan Y,

1. $\mathrm{E(X + Y)}$

   Dapat diselesaikan dengan sifat-sifat mean: $\mathrm{E(X + Y) = E(X) + E(Y)}$ atau menggunakan fungsi peluang bersama, $p(x, y)$

$$\mathrm{E(X + Y)} = \int_y \int_x (x + y) f(x, y)\,dx\,dy$$

2. $\mathrm{E(XY) \neq E(X)E(Y)}$, *untuk X dan Y tidak saling bebas*

$$E(XY) = \int_y \int_x (xy) f(x, y)\,dx\,dy$$

Untuk X dan Y saling bebas maka

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Kovariansi dan Korelasi

- Jika dibandingkan menghitung variansi dua p.a, maka mengobservasi hubungan dua p.a lebih menarik.
- Hubungan dua p.a dihitung menggunakan korelasi.
- Korelasi dua p.a X dan Y, ditulis $corr(X,Y)$ atau $\rho(X,Y)$

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

dengan $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$, dengan $cov(X,Y)$ adalah kovariansi.

$$cov(X,Y) = \sigma(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Untuk X dan Y yang saling bebas diperoleh $cov(X,Y) = 0$ sehingga $\rho(X,Y) = 0$

Ex. Kovariansi dan Korelasi

Dalam rangka berpartisipasi dalam olimpiade Kung Fu 2021, Oogway dan Shifu berlatih setiap hari. Latihan dilakukan di Lembah Damai setiap pagi dan akan berakhir ketika salah satu dari mereka menang. Misalkan X merupakan p.a yang menyatakan peluang Oogway menang dan Y adalah p.a peluang kemenangan untuk Shifu. X dan Y memiliki fungsi peluang bersama sebagi berikut,

$$f(x, y) = x + y$$

untuk $0 < x < 1, 0 < y < 1$. Tentukan $\rho(X, Y)$.

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}; cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$f(x,y) = x + y, \text{dengan } 0 < \mathrm{x} < 1, 0 < \mathrm{y} < 1$$

$$E(XY) = \int_y \int_x (xy) f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y) dx dy \int_0^1 \int_0^1 x^2 y + xy^2 dx dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2\right]_0^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2\right) dy = \frac{2}{6}$$

$$f(x) = \int_0^1 (x+y) dy = x + \frac{1}{2} \Rightarrow E(X) = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{7}{12}$$

$$f(y) = \int_0^1 (x+y) dx = y + \frac{1}{2} \Rightarrow E(Y) = \int_0^1 y\left(y + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{7}{12}$$

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{2}{6} - \frac{7}{12}\left(\frac{7}{12}\right) = \frac{-1}{144}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}; cov(X,Y) = \frac{-1}{144}$$

$$E(X) = \frac{7}{12}; E(X^2) = \int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{5}{12}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \mathbf{\frac{11}{144}}$$

$$E(Y) = \frac{7}{12}; E(Y^2) = \int_0^1 y^2\left(y+\frac{1}{2}\right)dy = \frac{5}{12}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \mathbf{\frac{11}{144}}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{-1/144}{\sqrt{11/144}\sqrt{11/144}} = -\mathbf{0.09}$$

Saling Bebas

X dan Y dikatakan saling bebas apabila
$f(x,y) = f(x)f(y)$

- Diberikan fungsi peluang bersama $p(x,y)$

$$f(x,y) = x + y$$

untuk $0 < x < 1, 0 < y < 1$. Apakah X dan Y saling bebas?

$$f(x) = \int_0^1 x + y \; dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

$$f(y) = \int_0^1 x + y \; dx = \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^1 = y + \frac{1}{2}$$

diperoleh bahwa $f(x,y) \neq f(x)f(y)$ atau

$$x + y \neq \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right)$$

Sehingga, X dan Y tidak saling bebas.

FORUM

Misalkan p.a X dan Y memiliki fungsi peluang bivariat/gabungan,

$$f(x,y) = 4xy$$

untuk $0 < x, y < 1$. Tentukan korelasi X dan Y.