CII2G3 – Teori Peluang

PEUBAH ACAK (UNIVARIAT) DISKRIT

Peubah 'Acak'

- Peubah/ variabel adalah ukuran kuantitas yang memiliki perubahan nilai.
- peubah diskrit adalah peubah yang dihasilkan dari hasil menghitung.
- peubah kontinu adalah peubah yang dihasilkan dari hasil mengukur.
- Peubah acak (p.a) /random variable (r.v) adalah fungsi yang memetakan ruang sampel ke bilangan real.

Peubah acak merupakan nilai numerik dari fenomena acak

Diskrit vs. Kontinu

1. Number of students present
2. Height of students in class
3. Number of red marbles in jar
4. Time it takes to get to school
5. Students' grade level
6. Distance between school and home

Peubah Acak Diskrit

- p.a ditulis dengan huruf kapital
- Distribusi peluang dari peubah acak X merupakan kemungkinan nilai-nilai dari X beserta nilai peluangnya
- p.a terdiri peubah acak diskrit (p.a.d) dan kontinu (p.a.k)

Peubah acak diskrit X merupakan nilai-nilai yang mungkin dari perhitungan suatu observasi/kejadian

Ex. P.A.D

P.A.D: nilai-nilai yang mungkin dari perhitungan suatu kejadian

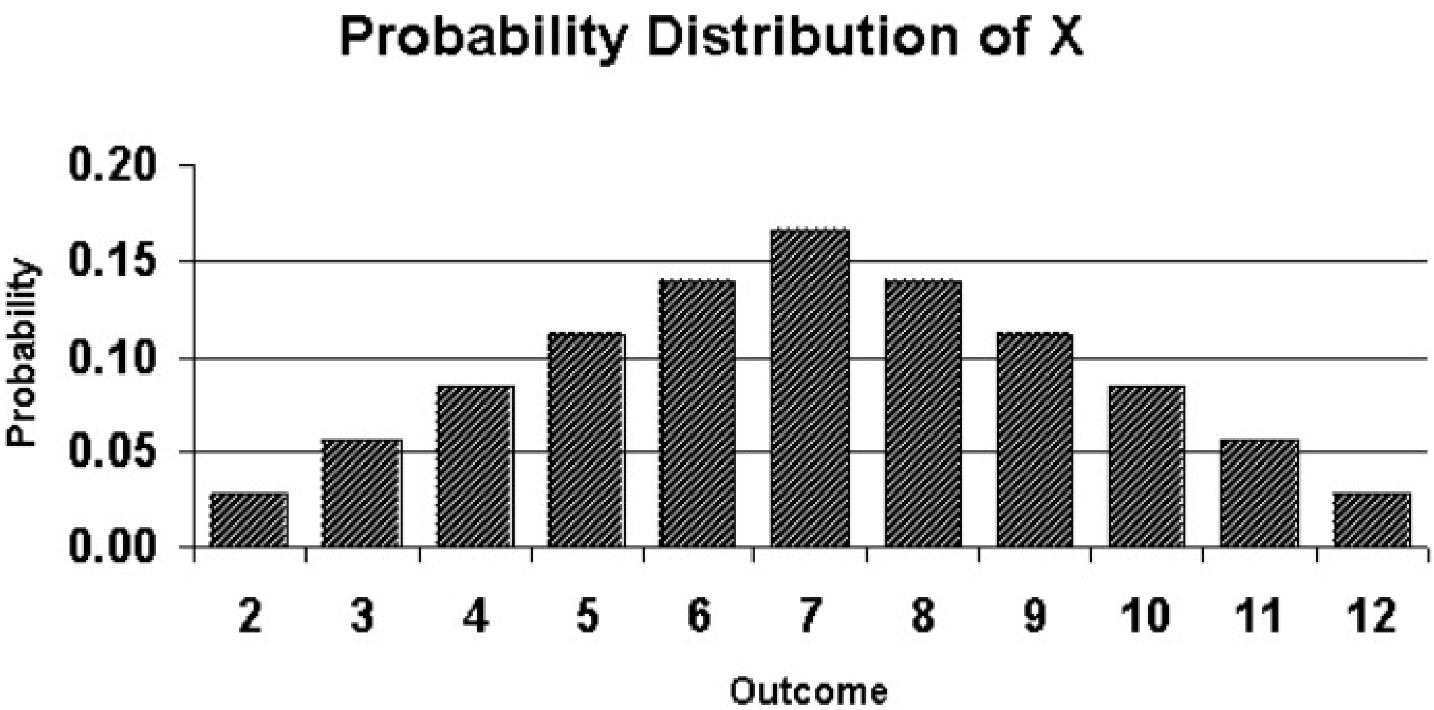
- Misalkan X adalah jumlahan hasil dari melempar dua dadu.

$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

- Distribusi peluang dari X

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$

Histogram Distribusi Peluang



http://www.henry.k12.ga.us

P.A.D: Ekspektasi/Mean

Definisi

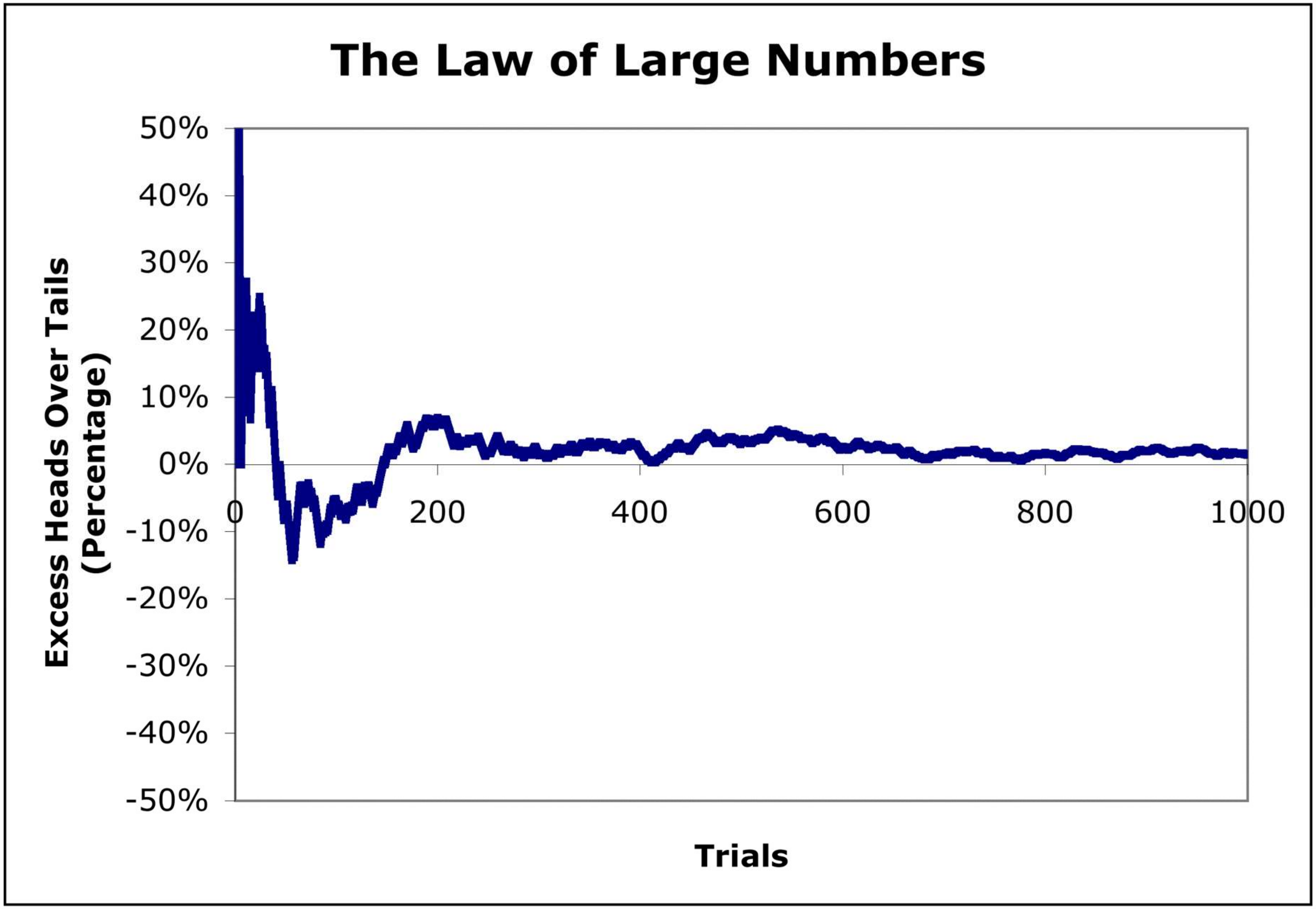
Misalkan X merupakan p.a.d dengan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Nilai ekspektasi dari X, dinotasikan dengan $E(X)$ didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P_X(x_i)$$

Notasi ekspektasi dari X: $EX = \mathrm{E}[X] = E(X) = \mu_X$

Mean: Law of Large Number

- Untuk banyaknya sampel yang signifikan besar, mean dari sampel ($\bar{x}$) dapat didekati dengan mean dari populasi μ_X.
- Agar nilai $\bar{x}$ semakin dekat dengan μ_X, variasi sampel diperbesar dengan melakukan banyak percobaan/ observasi.



http://www.j-bradford-delong.net/movable_type

http://www.blazingcariboustudios.com

Mean: Sifat-sifat

- Jika X adalah p.a dan a, b merupakan konstanta, maka

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

- Jika X dan Y masing-masing merupakan p.a, maka

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

- Bagaimana dengan $E(a) = \cdots$

Ex. Mean P.A.D

- Misalkan X adalah jumlahan hasil dari melempar dua dadu.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i) = 2\left(\frac{1}{36}\right) + 3\left(\frac{1}{36}\right) + \ \dots + 12\left(\frac{1}{36}\right)$$

$$= \frac{1}{36}(2 + 3 + \cdots + 12) = 2.14$$

Ex. Mean P.A.D

- Terdapat formula untuk mengkonversi skor PSAT ke SAT. Misalkan X merupakan skor PSAT dan Y skor SAT.

$$Y = 18 + 98X$$

- Diketahui mean skor PSAT adalah 50. Berapakah mean skor SAT?
- $E(Y) = E(18 + 98X) = 18 + 98E(X) = \cdots$

Forum: Mean P.A.D

- Misalkan X adalah angka-angka numerik penyusun NIM anda.
- Tentukan $E(X)$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i)$$

P.A.D: Variansi

- Variansi dari p.a X ditulis dengan $Var(X)$ atau (σ_X^2), dengan $Var(X) \geq 0$

- Misalkan mean dari p.a X adalah μ_X

$$\boldsymbol{Var(X) = E[X - \mu_X]^2 = E(X^2) - [\mu_X]^2}$$

- INGAT: $E(X) = \mu_X = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i)$, sehingga

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, P(X = x_i)$$

Ex. Variance P.A.D

- Misalkan X adalah jumlahan hasil dari melempar dua dadu dengan $E(X) = 2.14$.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, P(X = x_i) = 2^2\left(\frac{1}{36}\right) + 3^2\left(\frac{1}{36}\right) + \ \ldots + 12^2\left(\frac{1}{36}\right)$$

$$= \frac{1}{36}(2^2 + 3^2 + \cdots + 12^2) = 18.03$$

$$Var(X) = E(X^2) - [\mu_X]^2 = 18.03\text{-}2.14^2 = \mathbf{13.45}$$

Variansi: Sifat-sifat

- Jika X adalah p.a dan a, b merupakan konstanta, maka

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

- Jika X dan Y masing-masing merupakan p.a yang saling bebas, maka

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

- Bagaimana dengan $Var(a) = \cdots$ dan $Var(bX) = \cdots$

Fungsi Peluang P.A.D

- Beberapa nama fungsi peluang p.a.d: fungsi massa peluang (f.m.p), probability mass function (p.m.f).
- f.m.p dari p.a X ditulis sebagai $f_X(x)$ atau $p(x)$ dengan

$$p(x) = P(X = x)$$

- Sifat-sifat f.m.p

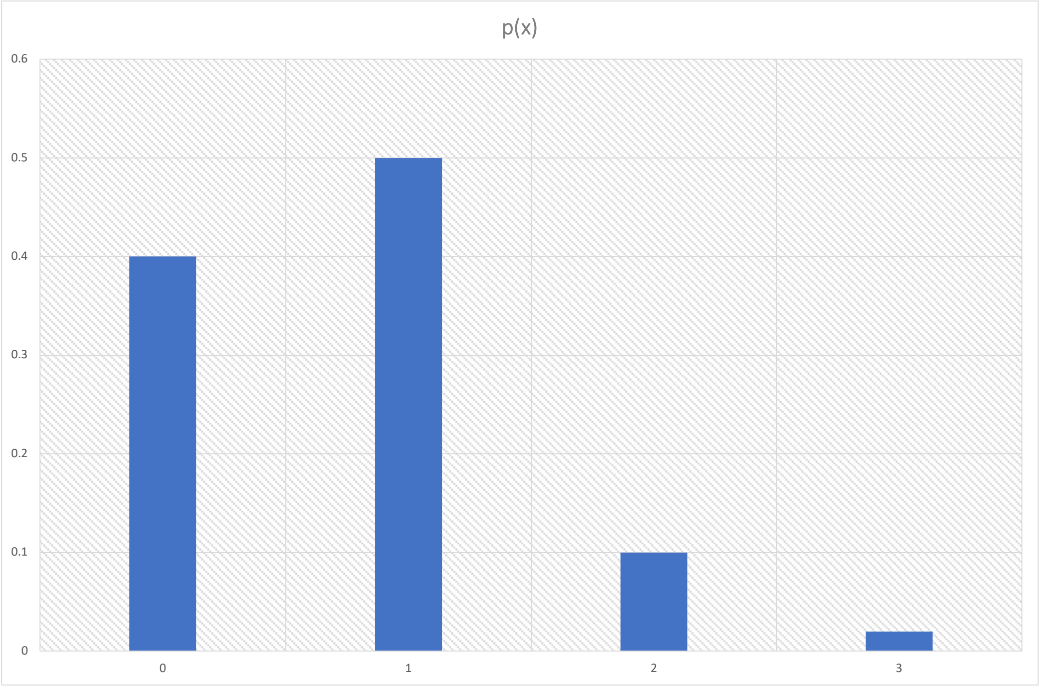
1. $\mathrm{p(x)} > 0$
2. $\sum_{\mathrm{x} \in \mathrm{S}} \mathrm{p(x)} = 1$

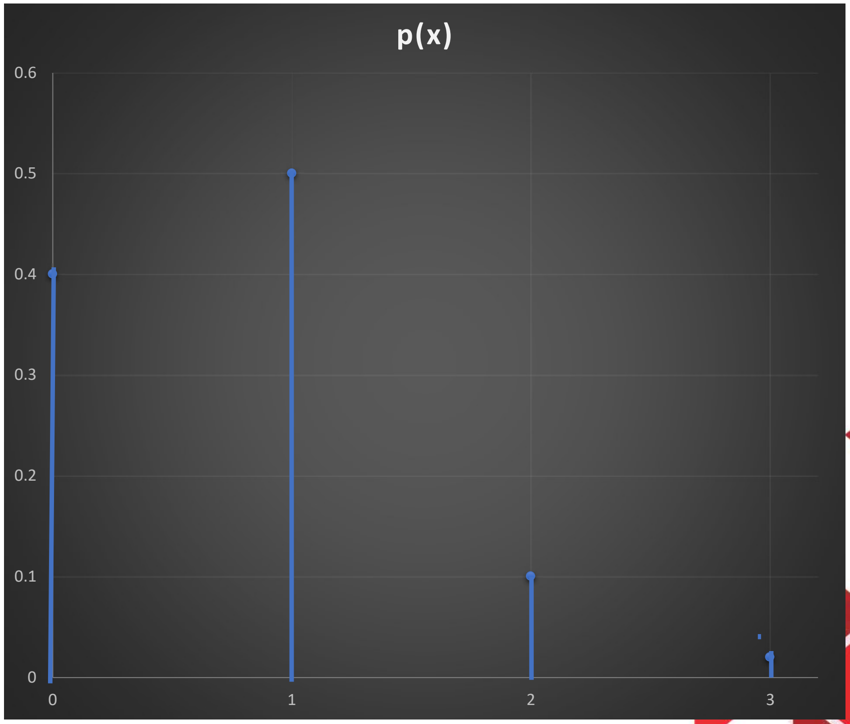
Ex. F.M.P

- Misalkan X adalah banyaknya saudara kandung teman-teman Upin di SMA Tadika Mesra.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0.4	0.5	0.09	0.01

$$p(x) = \begin{cases} 0.40, & x = 0 \\ 0.50, & x = 1 \\ 0.09, & x = 2 \\ 0.01, & x = 3 \end{cases}$$





Ex. F.M.P

- Dalam sebuah kotak terdapat 4 bola: 2 berwarna merah dan 2 berwarna biru. Diambil 2 bola secara acak. Jika $\boldsymbol{X}$ adalah p.a yang menyatakan banyaknya bola merah terambil. Tentukan $\boldsymbol{X}$ dan f.m.p.

  INGAT: X adalah p.a yang menyatakan banyaknya bola merah terambil, sehingga daerah hasil (range): $X = \{0,1,2\}$, dimana

  $x = 0$ menyatakan terambil 0 merah dan 2 biru, $x = 1$ menyatakan terambil 1 merah dan 1 biru

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 0, 2 \\ \frac{4}{6}, & x = 1 \end{cases}$$

x	0	1	2	$\sum p(x)$
$P(X = x)$	$\frac{C_0^2 C_2^2}{C_2^4} = \frac{1}{6}$	$\frac{C_1^2 C_1^2}{C_2^4} = \frac{4}{6}$	$\frac{C_2^2 C_0^2}{C_2^4} = \frac{1}{6}$	1

Ex. F.M.P

- Dalam acara ulang tahun Trend TV, pemilik stasiun TV tersebut menyediakan hadiah 2 batang emas 20K dan 3 batang emas 10K. Salah satu penonton setia Trend TV diminta mengambil 3 batang emas. Misalkan K adalah peubah acak yang menyatakan jumlah karat yang terambil. Tentukan fungsi peluang K.

INGAT: K adalah p.a yang menyatakan jumlah karat yang terambil, sehingga daerah hasil (range), $K = \{30,40,50\}$

3 Batang Emas			
20K	0	1	2
10K	3	2	1
K	**30**	**40**	**50**

$$p(k) = \begin{cases} \frac{1}{10}, k = 30 \\ \frac{6}{10}, k = 40 \\ \frac{3}{10}, k = 50 \end{cases}$$

k	**30**	**40**	**50**	$\sum p(k)$
$P(K = k)$	$\frac{C_0^2 C_3^3}{C_3^5} = \frac{1}{10}$	$\frac{C_1^2 C_2^3}{C_3^5} = \frac{6}{10}$	$\frac{C_2^2 C_1^3}{C_3^5} = \frac{3}{10}$	1

Ex. F.M.P

- Misalkan X p.a.d yang menyatakan banyaknya barang cacat dalam proses produksi

x	0	1	2	3	4
p(x)	0.4	0.3	0.2	4c	c

Tentukan

1. Nilai c
2. $\mathrm{P}(\mathrm{X} > 1)$
3. $\mathrm{P}(1 < \mathrm{X} \leq 3)$

x	0	1	2	3	4
p(x)	0.4	0.3	0.2	4c	c

- Ingat bahwa sifat f.m.p adalah $\sum p(x) = 1$, sehingga
$$0.4 + 0.3 + 0.2 + 4c + c = 1$$
diperoleh $c = 0.02$

x	0	1	2	3	4
p(x)	0.4	0.3	0.2	0.08	0.02

- $\mathrm{P}(\mathrm{X} > 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 1) = 1 - [p(0) + p(1)] = 0.3$
- $\mathrm{P}(1 < \mathrm{X} \leq 3) = \mathrm{p}(2) + \mathrm{p}(3) = 0.28$

Forum: Ex. F.M.P

- Misalkan X p.a.d yang menyatakan banyaknya barang cacat dalam proses produksi

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
p(x)	0.4	0.3	0.2	0.08	0.02

Tentukan

1. $\mathrm{E(X)}$ dan $\mathrm{E(2X)}$
2. $\mathrm{Var(X)}$ dan $\mathrm{Var(X+2)}$

Fungsi Distribusi Kumulatif

- Fungsi Distribusi Kumulatif (fungsi distribusi) atau *Cumulative Distribution Function* (CDF) erat kaitannya dengan fungsi peluang
- Fungsi Distribusi Kumulatif dari p.a.d X dinotasikan dengan $F_X(x)$, dimana

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

dengan $p(x_i)$ adalah p.m.f

CDF: Sifat-Sifat

- $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ dan $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $0 \leq F(x) \leq 1$
- Jika $x \leq y$, maka $F(x) \leq F(y)$
- CDF merupakan fungsi yang tak turun

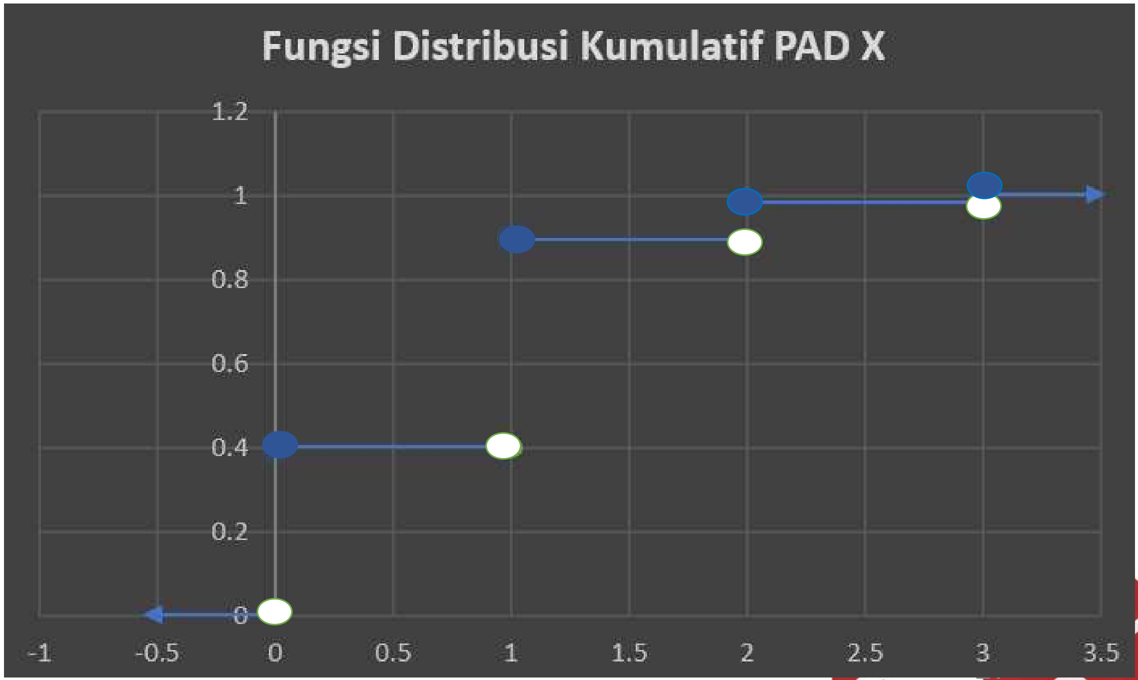
Ex. Fungsi Distribusi

Misalkan X adalah banyaknya saudara kandung teman-teman Ipin di SMA Tadika Mesra. Tentukan fungsi distribusi p.a X, dengan f.m.p sebagai berikut

$$p(x) = \begin{cases} 0.40, & x = 0 \\ 0.50, & x = 1 \\ 0.09, & x = 2 \\ 0.01, & x = 3 \end{cases}$$

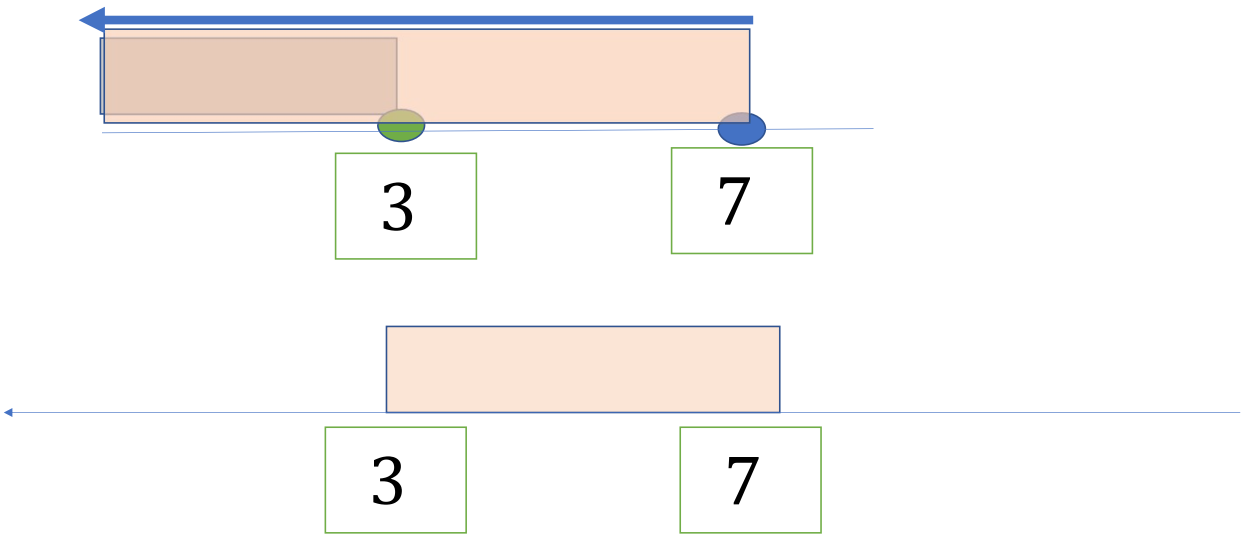
- $F(0) = P(X \leq 0) = \sum_{x_i \leq 0} p(x_i) = p(0) = 0.4$
- $F(1) = P(X \leq 1) = p(0) + p(1) = 0.9$
- $F(2) = P(X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = 0.99$
- $F(3) = P(X \leq 3) = 0.99 + 0.01 = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.4, & 0 \leq x < 1 \\ 0.9, & 1 \leq x < 2 \\ 0.99, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$



Berdamai dengan Fungsi Dist. Kumulatif

$$
\begin{aligned}
P(4 \leq x < 8) &= P(3 < x \leq 7) \\
&= P(x \leq 7) - P(x \leq 3) \\
&= F(7) - F(3)
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
P(a\ \boxed{\ ?\ }\ x\ \boxed{\ ?\ }\ b) &= P(a^{*} < x \leq b^{*}) \\
&= F(b^{*}) - F(a^{*})
\end{aligned}
$$

HANYA UNTUK P.A.D

Misalkan X adalah banyaknya saudara kandung murid SMA Tadika Mesra, dengan fungsi distribusi kumulatif sebagai berikut.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.4, & 0 \le x < 1 \\ 0.9, & 1 \le x < 2 \\ 0.99, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

Tentukan: $F(2), F(1.5), P(X > 1), P(1 < x < 3)$

- $F(2)\ lihat\ soal$
- $F(1.5) = P(X \le 1.5) = P(X \le 1) = F(1) = 0.9$
- $P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.9 = 0.1$
- *Ingat!* $F(a^* < x \le b^*) = F(b^*) - F(a^*)$

$$P(1 < x < 3) = P(1 < x \le 2) = F(2) - F(1) = 0.99 - 0.9 = 0.09$$