# 1NumerosComplejos

September 22, 2017

```
In [1]: from Numeros_Complejos import *
```

# 1 1. Números complejos y el plano complejo

### 1.0.1 Introducción

El objetivo principal es tomar un conjunto de parejas ordenadas de números reales $\mathbb{R}^2$ y definir dos operaciones en este conjunto, a una de estas operaciones la llamaremos suma $(+)$ y a la otra multiplicación $(*)$. La estructura $(\mathbb{R}^2, +, *)$ recibirá el nombre de campo de los números complejos. El campo de los numeros complejos tiene propiedades similares a los numeros reales $\mathbb{R}$ además presenta nuevas porpiedades que presisamente lo hacen importante.

### 1.0.2 Números complejos

Tomemos el producto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, un elemento que pertenezca a este conjunto podría ser $z \in \mathbb{R}^2$ con $z = (6.6, -8.6)$.

Se puede asignar una representación geometrica en un plano al conjunto antes definido, la convención es asociar la primer componente (de izquierda a derecha) al eje horizontal y la segunda componente al eje vertical y dibujar en la intersección dada, ya sea un punto, un segmento de linea recta desde el origen, o ambos; depende a que se quiera hacer referencia.

**Visualización** Para obervar la representación gráfica ejecute la siguiente celda con la instrucción

```
nc(6.6,-8.6)
```

Se gráfica el elemento correspondiente y se puede modificar al interactuar con la interfaz,

```
In [3]: nc(6.6,-8.6)
```

```
A Jupyter Widget
```

```
A Jupyter Widget
```

Se definirán dos operaciones unitarias, en este caso $f$ será una operación unitaria si es una función de tal manera que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

### 1.0.3 Conjugación

Definición 1.1 Conjugación

Sea $z = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ la operación conjugación $f_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se define como

$$f_c(z) = (a, -b)$$

o utilizando una notación abreviada,

$$\bar{z} = (a, -b)$$

Tenemos dos notaciones para referirnos a la operación conjugación que usaremos de manera insdistinta, aunque la mayor parte de las veces usaremos la notación simplificada. Cabe mencionar que algunos autores utilizan un asterisco para la notación simplificada, esto es, $\bar{z} \equiv z^*$. Podría parecer un poco rebuscado definir la notación de $f_c$ si contamos con la simplificada, pero para algunos conceptos es importante.

Observemos que la operación conjugación toma una pareja de números reales y la Transforma en una nueva pareja donde la segunda componente cambia de signo.

Por ejemplo:
Si $z = (3, 0)$ entonces $\bar{z} = (3, 0)$,
Si $z = (-2.4, -9.8)$ entonces $f_c(z) = (-2.4, 9.8)$,
Si $z = (0, 5.7)$ entonces $\bar{z} = (0, -5.7)$,
Si $z = (0, 0)$ entonces $\bar{z} = (0, 0)$,

**Visualización** Para obervar la representación gráfica ejecute la siguiente celda con la instrucción

```
ncconjugado(6.6,-8.6)
```

Se gráfica el elemento correspondiente y se puede modificar al interactuar con la interfaz,

```
In [ ]: ncconjugado(6.6,-8.6)
```

Observamos que la geometría del elemento conjugado es un reflexión sobre el eje horizontal del elemento "original", es decir, $z$ y $\bar{z}$ son simétricos respecto al eje horizontal, si un elemento esta por arriba del eje horizontal su conjugado estará por debajo, de forma similar si esta por abajo su conjugado estará por arriba del eje horizontal, ¿Qué sucede con la geometria del conjugado de un elemento, si dicho elemento tiene gráfica sobre el eje horizontal?

### 1.0.4 Inverso aditivo

Ahora definimos la operación unitaria inverso aditivo y al igual que la operación conjugado representa una transformación cuyo resultado es cambiar de signo ambos elementos de la pareja, ademas el inverso aditivo resulta ser simetrico respecto al origen con la pareja original, en otras palabras, las ubicaciones geometricas de una pareja y de su inverso aditivo estarán en cuadrantes opuestos por el vertice

Definición 1.2 Inverso aditivo

Sea $z = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ la operación inverso aditivo $f_{ia} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se define como

$$f_{ia}(z) = (-a, -b)$$

o utilizando una notación abreviada,

$$-z = (-a, -b)$$

De igual manera tenemos dos notaciones para la operación inverso aditivo, la mayor parte de las veces utilizaremos la notación abreviada.

Por ejemplo:

Si $z = (7, 0)$ entonces $-z = (-7, 0)$,
Si $z = (-6.4, -1.8)$ entonces $f_{ia}(z) = (6.4, 1.8)$,
Si $z = (0, 2.7)$ entonces $-z = (0, -2.7)$,
Si $z = (0, 0)$ entonces $-z = (0, 0)$,
Si $z = (1, 2.1)$ entonces $-z = (-1, -2.1)$,

**Visualización** Para obervar la representación gráfica ejecute la siguiente celda con la instrucción

```
ncia(1,2.1)
```

Se gráfica el elemento correspondiente y se puede modificar al interactuar con la interfaz,

```
In [ ]: ncinversoadi(1,2.1)
```

Ahora se definirán dos operaciones binarias, en este caso $f$ será una operación binaria si es una función de tal manera que $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

### 1.0.5 Suma

Recordemos que nuestro objetivo es definir el campo de los números complejos, las operaciones de conjugación e inverso aditivo jugaran un papel importante al momento de hacer operaciones aritmeticas entre numeros complejós; pero la suma es una de las dos operaciones que definene la estructura algebraica a la cual queremos llegar.

Definición 1.3 Suma

Sean $z_1 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ y $z_2 = (c, d) \in \mathbb{R}^2$ la operación suma $f_s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se define como

$$f_s(z_1, z_2) = (a + c, b + d)$$

o utilizando una notación abreviada,

$$z_1 + z_2 = (a + c, b + d)$$

Estrictamente hablando cuando se utiliza la notación simplificada se tendría que especificar $z_1 +_c z_2 = (a + c, b + d)$ donde $+_c$ es el simbolo que se esta definiendo y $+$ es la suma que sabemos realizar de números relaes, para no cargar la notación preferimos escribir esta aclaración. Nuevamente tenemos dos notaciones, usualmente se estará trabajando con la notación simplificada. La operación suma toma dos parejas de números reales y las transforma en una solo pareja de números reales, donde cada componente es la suma posición a posición de las parejas iniciales.

Por ejemplo:

Si $z_1 = (1, 0)$ y $z_2 = (6.8, 0)$ entonces $z_1 + z_2 = (7.8, 0)$,
Si $z_1 = (-6.4, -1.8)$ y $z_2 = (1, -2)$ entonces $f_s(z_1, z_2) = (-5.4, -3.8)$,
Si $z_1 = (0, 3.7)$ y $z_2 = (0, 2.3)$ entonces $z_1 + z_2 = (0, 6)$,
Si $z_1 = (0, 0)$ y $z_2 = (0, 0)$ entonces $z_1 + z_2 = (0, 0)$,

Si $z_1 = (1, -2.1)$ y $z_2 = (-1, 3)$ entonces $z_1 + z_2 = (0, 0.9)$,

La suma tiene una interpretación interesante cuando se realiza de forma geometrica, se puede observar en la siguitente visualización que los sumandos son los lados de un paralelogramo y el resultado de la suma es es la diagonal de dicho paralelogramo

**Visualización** Para obervar la representación gráfica ejecute la siguiente celda con la instrucción

```
ncsuma(1,2.1)
```

Se gráfica el elemento correspondiente y se puede modificar al interactuar con la interfaz,

```
In [ ]: ncsuma(1,2,-3,5)
```

### 1.0.6 Producto

Ahora se definirá la operación producto y posteriormente podremos definir al campo de los números compejos

Definición 1.3 Producto

Sean $z_1 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ y $z_2 = (c, d) \in \mathbb{R}^2$ la operación producto $f_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se define como

$$f_p\,(z_1, z_2) = (ac - bd, ad + bc)$$

o utilizando una notación abreviada,

$$z_1 z_2 = (ac - bd, ad + bc)$$

Las operaciones realizadas dentro de las componentes son las operaciones que ya conocemos de los numeros reales. Nuevamente tenemos dos notaciones, usualmente se estará trabajando con la notación simplificada y dependiendo de las circunstancias se podría escribir cualquiera de las siguientes notaciones $z_1 z_2$, $(z_1)(z_2)$, $z_1 * z_2$ . La operación multiplicación toma dos parejas de números reales y las transforma en una solo pareja de números reales. El resultado de la multiplicación tiene una interpretación geometrica que se discutira más adelante.

Por ejemplo:

Si $z_1 = (1, 0)$ y $z_2 = (6.8, 0)$ entonces $z_1 + z_2 = (7.8, 0)$,

Si $z_1 = (-6.4, -1.8)$ y $z_2 = (1, -2)$ entonces $f_s(z_1, z_2) = (-5.4, -3.8)$,

Si $z_1 = (0, 3.7)$ y $z_2 = (0, 2.3)$ entonces $z_1 + z_2 = (0, 6)$,

Si $z_1 = (0, 0)$ y $z_2 = (0, 0)$ entonces $z_1 + z_2 = (0, 0)$,

Si $z_1 = (1, -2.1)$ y $z_2 = (-1, 3)$ entonces $z_1 + z_2 = (0, 0.9)$,

La suma tiene una interpretación interesante cuando se realiza de forma geometrica, se puede observar en la siguitente visualización que los sumandos son los lados de un paralelogramo y el resultado de la suma es es la diagonal de dicho paralelogramo

**Visualización** Para obervar la representación gráfica ejecute la siguiente celda con la instrucción

```
ncproducto(1,2.1,-1,3)
```

Se gráfica el elemento correspondiente y se puede modificar al interactuar con la interfaz,

```
In [ ]:  ncproducto(1,2.1,-1,3)
```

### Funciones Complejas y mapeos

### Funciones analíticas

### Funciones Elementales

### Integración en el plano complejo

### Series y residuos

### Mapeos Conformes

```
In [1]: from IPython.core.display import HTML
        css_file = 'Varios/estilo1.css'
        HTML(open(css_file, "r").read())

Out[1]: <IPython.core.display.HTML object>
```