

Intervalos de confiança para o índice C_{pm} usando amostragem por conjuntos ordenados

Rafael Buttini Salviato

Agosto 2019

1 Resumo

Com frequência, os profissionais que lidam com o controle estatístico da qualidade precisam verificar se um determinado processo atende a limites de especificação, estipulados pelas exigências técnicas ou por demanda de mercado. O índice C_{pm} , mede a capacidade de um processo atender a tais limites, e o mesmo é usualmente estimado através de um processo de amostragem. Isso posto, o presente trabalho investigou a possibilidade de se utilizar a amostragem por conjuntos ordenados (ACO) em detrimento da amostragem aleatória simples (AAS) como delineamento amostral para a estimativa de C_{pm} . A ACO é um delineamento amostral, que pode substituir a AAS em situações onde a obtenção da amostra é muito custosa, ou muito demorada. Através de um estudo de simulação, amostras foram geradas e intervalos de confiança foram obtidos para o índice C_{pm} . Os intervalos de confiança foram avaliados com base na taxa de cobertura e na amplitude média, e os resultados mostraram que a ACO é mais eficiente quando comparada com a AAS, e que os intervalos do tipo *bootstrap* e o intervalo proposto por Chan, Xiong e Zhang (1990) demonstraram desempenho superior aos outros utilizados no estudo.

Palavras-chave: delineamentos amostrais, índices de capacidade de produção, *bootstrap*.

2 Introdução

Cada vez mais, consumidores alvitraram níveis mais elevados de qualidade nos produtos adquiridos conforme dito em Gotlieb, Grewal e Brown (1994), Bansal e Taylor (2014) e Namin (2017). E tal fenômeno, traz luz a importância de temas relacionados a qualidade, como por exemplo o controle estatístico da qualidade. De acordo com Montgomery (1997), qualidade é a adequação de um objeto ou item para o uso. Assumindo que um item qualquer é elaborado através de um processo de produção, quando são feitos vários itens através do mesmo processo espera-se que os mesmos apresentem uma certa variação no que diz respeito às suas características. Do ponto de vista estatístico, a qualidade se relaciona de forma indireta com a variação dessas características, ou seja: quanto maior a variabilidade de um processo, menor é a qualidade do mesmo. Essa variação pode ser gerada por causas atribuíveis ou por causas aleatórias. Ainda em Montgomery (1997), as causas atribuíveis são aquelas que podem ser identificadas e devem ser eliminadas para garantir e melhorar a qualidade de um processo. Já as causas aleatórias são aquelas que não podem ser identificadas não sendo portanto possível eliminá-las do processo.

Além do monitoramento da variabilidade de um processo, faz parte do controle estatístico de qualidade verificar a capacidade que um processo tem em atender a limites de especificação. Referenciando Montgomery (1997), os limites de especificação estabelecem o intervalo de valores que determinada variável de um item pode assumir, atende ao nível de qualidade desejado. Geralmente, estes limites de especificação contém um valor denominado alvo da produção (T), que representa o valor ideal que determinada variável deve assumir.

Para verificar se o processo atende a tais limites de especificação, pode-se utilizar índices de capacidade de processo. Esses índices mensuram a capacidade que um processo tem em atender aos limites de especificação, levando em consideração aspectos sobre as características aleatórias de um processo. De acordo com Pearn e Kotz (2006), esses índices vem ganhando notoriedade desde meados da década de 1980. De acordo com Kane (1986), o primeiro índice de capacidade a aparecer na literatura foi o índice C_p . Esse índice não leva em consideração o fato da média do processo estar fora do alvo de produção ou não, e por conta disso Hsiang (1985) desenvolveram o índice C_{pm} .

Uma vez decidido qual índice de capacidade de produção utilizar, resta definir o seu estimador. Dado que na maioria dos casos não é possível coletar informações de todos os itens resultantes de um processo, se faz necessário realizar uma amostragem. Diferentes delineamentos amostrais podem ser utilizados, como por exemplo a amostragem aleatória simples (AAS), e a amostragem por conjuntos ordenados (ACO), proposta por McIntyre (1952). Dado que os pressupostos assumidos para a AAS diferem dos pressupostos assumidos para a ACO, as inferências sobre as estimativas do índice C_{pm} estão sujeitas a desempenhos diferentes. Muitos pressupostos são violados, e um deles pode ser a

não independência entre as observações. Ademais, dado a complexidade que outros delineamentos podem apresentar, Brik et al. (2019) comentam que a AAS continua sendo o delineamento mais utilizado na indústria.

No entanto, delineamentos amostrais simples podem apresentar algumas desvantagens ao ser comparado com outros delineamentos mais complexos. Conforme Muttalak e Al-Sabah (2003), a ACO é mais eficiente que a amostragem aleatória simples por fazer uso de informações adicionais ao ranquear as unidades amostrais. Com isso, a ACO permite, em determinadas ocasiões, gerar informações mais precisas e com economia de recursos.

Uma vez definido qual o delineamento amostral, os resultados amostrais serão usados na estimação dos parâmetros de interesse. Deve-se salientar que qualquer estimativa pontual apresenta incerteza associada a ela mesma. Por conta disso, o intervalo de confiança é tradicionalmente utilizado como uma estimativa que incorpora tal incerteza. Em se tratando do índice C_{pm} , vários trabalhos foram elaborados sobre estimativas intervalares desse índice no contexto de amostragem aleatória simples (Marcucci e Beazley (1988), Chan, Xiong e Zhang (1990), Boyles (1991), Kushler e Hurley (1992), Zimmer e Hubele (1997), Balamurali e Kalyanasundaram (2002), e Alevizakos e Koukouvinos (2018)).

Isso posto, o presente trabalho avaliou o uso da amostragem por conjuntos ordenados na estimação do índice C_{pm} , e para isso foram avaliados intervalos de confiança produzidos por meio de um estudo de simulação. Para avaliar a adequação das estimativas geradas, foram mensuradas as taxas de cobertura e amplitude média dos intervalos calculados.

3 Revisão de literatura

Na Sessão 2 foi mencionado que, de acordo com Kane (1986), o primeiro índice de capacidade de produção que surgiu na literatura foi o índice de capacidade potencial $C_p = (LSE - LIE)/6\sigma$, onde LSE , LIE e σ são respectivamente: o limite superior de especificação, o limite inferior de especificação, e o desvio padrão do processo. O índice C_p contrasta a variação natural do processo com os limites de especificação pré-estabelecidos. Ao analisar a expressão do índice C_p , percebe-se que o mesmo depende diretamente da variabilidade do processo, mas não depende (e nem é afetado) da média do processo (μ). Isso porque sua expressão não contempla μ , e por conta disso ele é tido como um índice que mensura a capacidade potencial que um processo tem em atender os limites de especificação caso a média coincida com o valor alvo da produção (T). Como solução para esse impasse, o índice C_{pm} foi proposto por Hsiang (1985) *apud* Pearn e Kotz (2006), e a sua expressão é dada por:

$$C_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}.$$

Conforme foi dito anteriormente, na prática é feito uma estimativa desse índice (\hat{C}_{pm}), pelo fato de não ser possível coletar informações sobre todos os itens fabricados em um processo produtivo. Por isso o uso e o desenvolvimento de técnicas de amostragem são essenciais para a correta utilização do C_{pm} no controle estatístico da qualidade. De acordo com Cochran (1977) *apud* Bouza e Al-Omari (2014), a AAS é um delineamento amostral cuja seleção dos indivíduos é feita de modo que cada indivíduo da população de interesse tenha a mesma probabilidade de ser escolhido para a amostra. Já a ACO sugerida por McIntyre (1952) é um delineamento amostral alternativo onde a amostra é realizada da forma que segue: n^2 unidades experimentais são selecionadas aleatoriamente de uma população de interesse; essas n^2 unidades são alocadas também aleatoriamente em n conjuntos de tamanho n ; posteriormente, cada conjunto terá suas n observações ordenadas de acordo com algum critério (e.g: uma covariável muito relacionada com a variável de interesse, porém mais fácil de ser obtida no ponto de vista econômico ou operacional) e então a variável de interesse é observada para cada unidade amostral escolhida de acordo com algum critério de ordenamento (e.g: selecionar a unidade amostral ranqueada na primeira posição do primeiro conjunto; a ranqueada na segunda posição do segundo conjunto e assim por diante); repetir esse processo m vezes, correspondente aos ciclos e então obter uma amostra final de tamanho $N = n * m$. Segundo Dell e Clutter (1972), este processo é mais eficiente que a AAS para estimar a média de uma população.

Uma vez estabelecido o delineamento, o próximo passo é a inferência. Considerando um contexto em que o objetivo é realizar estimativas intervalares para o índice C_{pm} em um contexto de amostragem aleatória simples, esta pode ser feita com base em resultados analíticos e assintóticos (Marcucci e Beazley (1988), Chan, Xiong e Zhang (1990), Boyles (1991) e Zimmer e Hubele (1997)) ou pode ser feita com base em resultados de métodos computacionais intensivos tais como o *bootstrap* (Franklin e Wasserman (1992), Balamurali e Kalyanasundaram (2002) e Tong, Chen e Tai (2008)). A próxima sessão é incumbida de apresentar as construções de intervalos de confiança para o C_{pm} utilizadas no presente estudo.

3.1 Intervalos de confiança para o índice C_{pm}

Os quatro primeiros métodos para calcular intervalos de confiança descritos a seguir, foram extraídos de Pearn e Kotz (2006) e os dois últimos de Davison e Hinkley (1997). Eles possuem expressões matemáticas baseadas em resultados analíticos e assintóticos para calcular os limites do intervalo, com exceção dos dois últimos onde os limites do intervalo de confiança são obtidos por meio de métodos computacionalmente intensivos (no caso, o método *bootstrap*). Aqui, a notação

utilizada para o C_{pm} estimado é (\hat{C}_{pm}). O estimador pontual de Cpm é definido por:

$$\hat{C}_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{\hat{\sigma}^2 + (\hat{\mu} - T)^2}},$$

onde $\hat{\sigma}$ e $\hat{\mu}$ são respectivamente o desvio padrão e a média amostral. Deve-se dizer que os intervalos de confiança aqui expostos, foram adaptados de modo que todos fizessem uso das mesmas notações. Neste trabalho, decidimos utilizar intervalos de confiança bilaterais.

3.1.1 Marcucci e Beazley (1988)

O intervalo de confiança proposto por Marcucci e Beazley (1988) é definido por:

$$IC_{MB} \cong \left[\hat{C}_{pm} \sqrt{\frac{\chi^2_{n(\gamma/2)}}{n}} ; \hat{C}_{pm} \sqrt{\frac{\chi^2_{n(1-\gamma/2)}}{n}} \right],$$

onde $\chi^2_{n(\gamma/2)}$ e $\chi^2_{n(1-\gamma/2)}$ são respectivamente os percentis $(\gamma/2)$ e $(1 - \gamma/2)$ da distribuição chi-quadrado centrada com n graus de liberdade e $0 \leq \gamma \leq 1$. Quando $\mu = T$, o intervalo de confiança é exato.

3.1.2 Chan, Xiong e Zhang (1990)

O intervalo de confiança proposto por Chan, Xiong e Zhang (1990) é:

$$IC_{CZX} = \left[\hat{C}_{pm} - z_{(1-\gamma/2)} \hat{\sigma}_m ; \hat{C}_{pm} + z_{(1-\gamma/2)} \hat{\sigma}_m \right],$$

onde $z_{(1-\gamma/2)}$ é o quantil da normal padronizada a um nível $(1 - \gamma/2)$ de significância, e o $\hat{\sigma}_m$ é calculado da seguinte forma:

$$\hat{\sigma}_m = \left(\frac{T}{3} \right)^2 \frac{s^2(\bar{x} - T)^2 + (s^4/2)}{[s^2 + (\bar{x} - T)^2]^3}.$$

Este método é derivado de uma aproximação pela distribuição normal, para grandes amostras.

3.1.3 Boyles (1991)

Boyles (1991) propôs um intervalo de confiança para o índice C_{pm} baseado em uma distribuição chi-quadrado não centrada. Como:

$$\frac{S_n^2 + (\bar{x} - T)^2}{\sigma^2 + (\mu - T)^2} = \frac{\hat{\tau}_B^2}{\tau^2} = \frac{C_{pm}}{\hat{C}_{pm}} \quad \text{tem distribuição aproximada} \quad \frac{\chi_v^2}{v},$$

em que $v = n(1 + \xi^2)^2/(1 + 2\xi^2)$ e $\xi = (\mu - T)/\sigma$. A estimativa para v é dada por $\hat{v} = n(1 + \hat{\xi}^2)^2/(1 + 2\hat{\xi}^2)$, onde $\hat{\xi} = (\bar{x} - T)/s_n$. Com isso, tem-se que o intervalo de confiança proposto por Boyles (1991) para o índice C_{pm} com $100(1 - \gamma)\%$ de confiança é:

$$IC_{Bo} \cong \left[\hat{C}_{pm} \sqrt{\frac{\chi^2_{\hat{v}}(\gamma/2)}{\hat{v}}} ; \hat{C}_{pm} \sqrt{\frac{\chi^2_{\hat{v}}(1 - \gamma/2)}{\hat{v}}} \right]$$

3.1.4 Zimmer e Hubele (1997)

Um outro método para obter intervalo de confiança para o índice C_{pm} proposto por Zimmer e Hubele (1997) é definido por:

$$IC_{ZH} = \left[\hat{C}_{pm} \sqrt{\frac{\chi^2_{n,\lambda}(\gamma/2)}{n + \lambda}} ; \hat{C}_{pm} \sqrt{\frac{\chi^2_{n,\lambda}(1 - \gamma/2)}{n + \lambda}} \right] .$$

Esta proposta, considera que a estimativa do índice C_{pm} é baseada na seguinte aproximação assintótica:

$$\widehat{C}_{pm} \sim C_{pm} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{n}} \sqrt{\frac{n}{\chi^2_{n,\lambda}}}$$

3.1.5 Intervalo *Bootstrap* percentil

O método *bootstrap* é um procedimento onde B reamostras de uma distribuição de probabilidades com parâmetros estimados com base nos dados amostrais (*bootstrap* paramétrico), ou selecionadas com reposição da própria amostra (*bootstrap* não paramétrico). De acordo com Davison e Hinkley (1997), dado um estimador qualquer, o intervalo de confiança *bootstrap* paramétrico percentil (IC_{bP}) com nível de confiança $(1 - \gamma)$ é composto pelos quantis $(\gamma/2)$ e $(1 - \gamma/2)$ da distribuição empírica gerada pelas B estimativas obtidas a partir das reamostras simuladas.

$$IC_{bP} = [C_{pm,\gamma/2}^* ; C_{pm,1-\gamma/2}^*]$$

onde cada limite representa os percentis $\gamma/2$ e $1 - \gamma/2$ das estimativas geradas via método *bootstrap*.

3.1.6 Intervalo *Bootstrap* padrão

Ainda em Davison e Hinkley (1997), o Intervalo de confiança *bootstrap* paramétrico feito considerando a aproximação pela normal (IC_{bW}), resulta em um intervalo feito pela aproximação quadrática da função de verossimilhança (também conhecido como intervalo do tipo Wald):

$$IC_{bW} = \left[t - \nu^{1/2} z_{1-\gamma/2} ; t + \nu^{1/2} z_{1-\gamma/2} \right]$$

onde t é a média de todas as estimativas feitas para cada reamostra bootstrap, $\nu^{1/2}$ é o desvio padrão de todas as estimativas feitas para cada reamostra bootstrap, e $z_{1-\gamma/2}$ é o quantil da distribuição normal padrão.

4 Metodologia

Neste estudo consideramos um processo em que determinada característica de interesse segue uma distribuição normal e o T sendo 1000, com LSE e LIE de especificação sendo 1008 e 992, respectivamente. Também, consideramos que a média do processo coincide com o alvo da produção ($\mu = T$) e o seu desvio padrão (σ) é 1. A simulação realizada no presente trabalho foi feita por meio do *software* estatístico *R*, e se deu da seguinte forma: foram estabelecidos cenários de simulação, onde cada cenário é definido por um conjunto de parâmetros para geração de amostras (i.e: variância do processo, tamanho da amostra, entre outros parâmetros).

Para cada cenário de simulação, foram geradas 10000 amostras diferentes, onde em cada uma delas foi calculado intervalos de confianças (IC) conforme descritos na Sessão 3. No entanto deve-se dizer que para os intervalos *bootstrap* não foi possível utilizar todas as 10000 amostras de cada cenário. No lugar, foram utilizadas apenas 3000 das 10000 geradas, e o número de reamostras *bootstrap* (B) foi de 1000. Para avaliar a qualidade de cada intervalo de confiança, foram auferidos a acurácia e precisão de cada um. Para medir a acurácia, foi utilizada a taxa de cobertura (i.e: proporção de vezes em que o verdadeiro valor para o C_{pm} estava contemplado no IC gerado) e para medir a precisão foi utilizada a amplitude média (i.e: média da amplitude de cada IC gerado) para cada cenário e para cada método de se calcular o IC. Todos os dados simulados seguem uma distribuição normal bivariada onde as duas variáveis possuem a mesma média e variância. Abaixo, tem-se os parâmetros utilizados para gerar os cenários de simulação:

- **Delineamentos amostrais:** ACO e AAS
- **Níveis de confiança:** 95%
- **Coeficiente de correlação:** 0,0.5, 0.8 e 1
- **n:** 3 e 5
- **m:** 5 e 10
- **Valor para o Cpm:** 2, 1.33 e 0.67

Os coeficientes de correlação dizem respeito a forma como foi realizado a ACO. Dado que os dados gerados seguem uma distribuição normal bivariada, uma das variáveis foi utilizada de fato

no estudo, enquanto que a outra serviu de critério para fazer o ranqueamento. No caso em que a correlação é 0, temos a AAS e no caso em que a correlação é 1, temos a ACO com ordenação perfeita. O valor n diz respeito ao tamanho de cada amostra, e m ao número de ciclos, e por conta disso, cada amostra de cada cenário terá um tamanho de mn . Para se obter os valores de C_{pm} supracitados, os parâmetros para a média e variância foram fixados da seguinte forma:

C_{pm}	Média	Variância
2	1000	1,778
1.33	1000	4,020
0.67	1000	15,841
2	1000,882	1
1.33	1001,738	1
0.67	1003,852	1

Tabela 1: parâmetros para média e variância para cada C_{pm}

Como pode ser visto na Tabela 1, cada valor de C_{pm} é gerado de duas formas diferentes: uma, é desviando a média do processo e outra é desviando a variância do processo. Esses desvios (aqui chamados de *shifts*) e o impacto que eles trazem para os estimadores também foram avaliados no presente estudo. Neste estudo, as mesmas construções de intervalos de confiança utilizadas para AAS foram utilizadas para ACO.

5 Resultados e discussão

O gráfico ilustrado na Figura 1 mostra como a amplitude média se distribuiu para cada tipo de intervalo de confiança, considerando todos os cenários simulados, e a Figura 2 refere-se às taxas de cobertura. De fato, cada observação contemplada em cada diagrama de caixa representado tanto na figura 1 quanto da figura 2 não fazem parte da mesma população e por isso não podemos esperar *a priori* que o diagrama assuma alguma forma regular, seja ela simétrica ou não. Ou seja, trata-se apenas de uma avaliação marginal dos intervalos. Dito isso, nota-se na Figura 1 que todos os gráficos possuem uma distribuição assimétrica, e que os intervalos do tipo *bootstrap* apresentaram uma menor dispersão quando comparado com os outros intervalos.

Sobre as taxas de cobertura, é notável a baixa dispersão dos intervalos *bootstrap* frente aos outros intervalos. Com exceção ao intervalo de Marcucci e Beazley (1988) que no geral apresentou uma supercobertura, todos os outros ficaram muito próximos do nível de confiança pré-estabelecido.

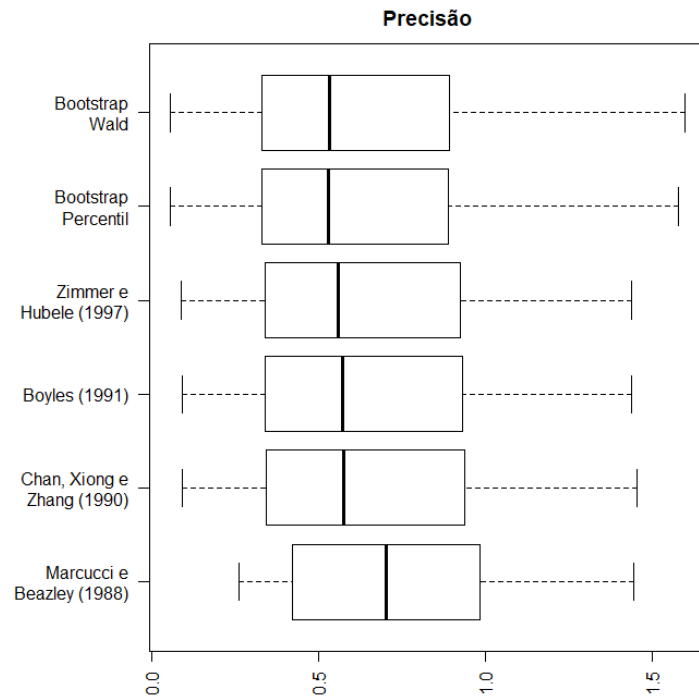


Figura 1: Distribuição das amplitudes médias em todos os cenários por tipos de intervalos

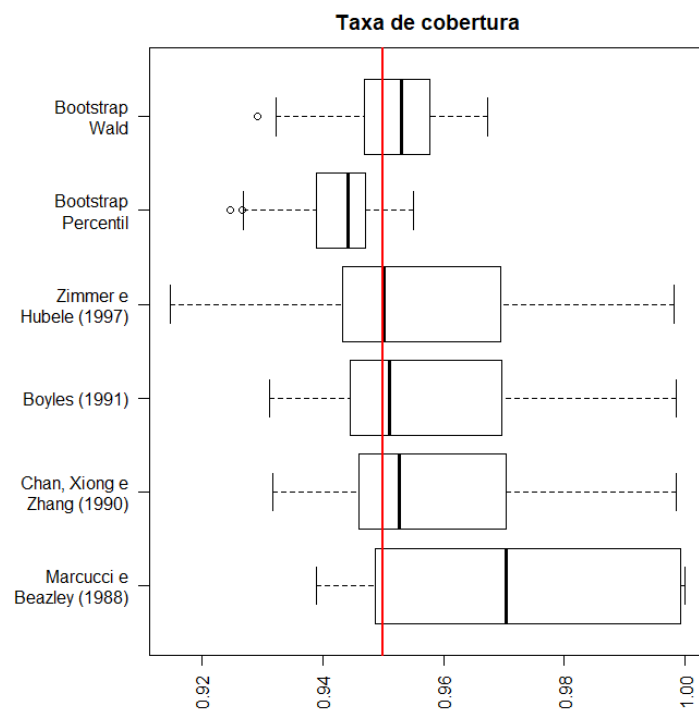


Figura 2: Distribuição das taxas de cobertura em todos os cenários por tipos de intervalos

As Figuras 3 e 4 ilustram o desempenho destes intervalos de confiança *bootstrap* (em vermelho temos o *bootstrap* percentil e em azul o *bootstrap* padrão) no que diz respeito a amplitude média e taxa de cobertura respectivamente. Para esta representação selecionamos apenas os intervalos de

confiança do tipo *bootstrap* dado o seu ótimo desempenho frente aos demais. No gráfico, a letra "V" diz respeito aos cenários gerados com o *shift* na variância, e a letra "M" diz respeito aos cenários gerados com o *shift* na média. Tanto na Figura 3 quanto na Figura 4, em geral os cenários com o *shift* provocado na média gerou valores de amplitude média e taxa de cobertura numericamente inferiores às medidas feitas para os cenários com o *shift* provocado na variância.

Sobre a amplitude média, na Figura 4 tanto o intervalo *bootstrap* percentil quanto o intervalo *bootstrap* padrão se comportaram de forma similar, e todos eles diminuíram numericamente, na medida em que o tamanho de amostra aumentava. Sobre a taxa de cobertura, na medida em que o tamanho da amostra aumenta, maior é a convergência para o nível de confiança nominal de 95%. Ademais, no caso da AAS, foi observado uma convergência (na medida em que o tamanho da amostra aumenta) de ambos os tipos de intervalos para um nível de confiança superior ao que foi estipulado.

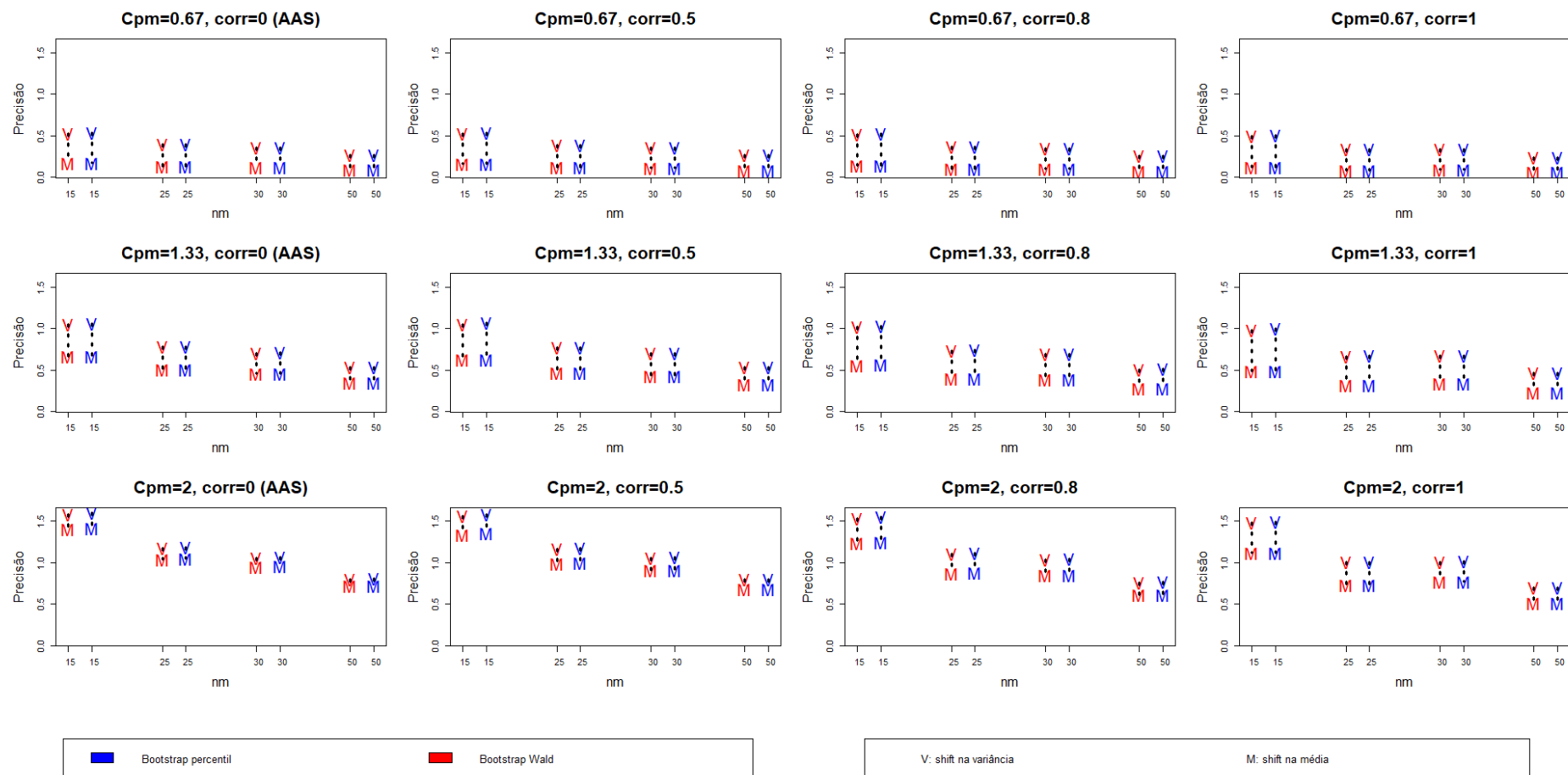


Figura 3: Performance das amplitudes médias dos intervalos *bootstrap* considerando todos os cenários simulados

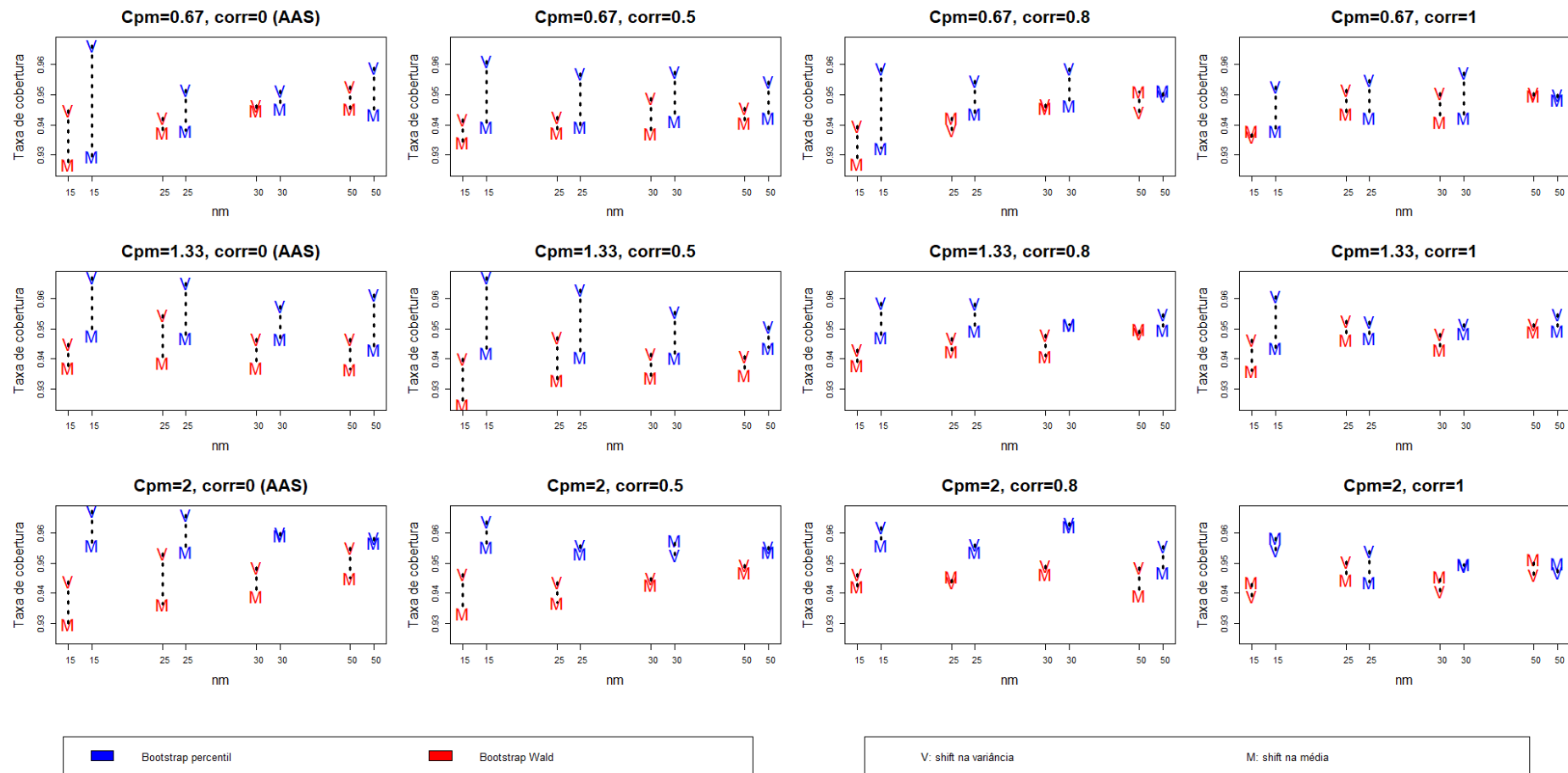


Figura 4: Performance das das taxas de cobertura dos intervalos *bootstrap* considerando todos os cenários simulados

Com relação às Tabelas 3 e 4, é exposto o resultado das taxas de cobertura e amplitudes médias (entre parênteses) para cada cenário, onde na Tabela 3 tem-se os resultados para $n = 3$ e $m = 5$. Já na Tabela 4, tem-se os resultados para $n = 5$ e $m = 10$. Os asteriscos que aparecem na tabela dizem respeito ao teste de hipótese para a taxa de cobertura igual a 0.95, e devem ser interpretados de acordo com a Tabela 2:

Nível de significância (%)	Símbolos	Taxa de cobertura	Taxa de cobertura
		$IC_{MB}, IC_{CXZ}, IC_{Bo}$ e IC_{ZH}	IC_{bP} e IC_{bW}
10%	*	Entre 0.9443 e 0.9556	Entre 0.9397 e 0.9602
5%	**	Entre 0.9457 e 0.9542	Entre 0.9422 e 0.9577
1%	***	Entre 0.9464 e 0.9535	Entre 0.9434 e 0.9565

Tabela 2: Valores de referência para a região de não rejeição do teste de hipótese nas Tabelas 3 e 4

De fato, ao observar as Tabelas 3 e 4, pode-se facilmente verificar que o número de intervalos que não rejeitou a hipótese nula de que a taxa de cobertura é 0.95, é maior na Tabela 4 quando comparado com a tabela 3. Isso mostra que o tamanho da amostra influencia na convergência entre a taxa de cobertura e o nível de confiança pré-estabelecido para o intervalo. Na Tabela 4, merece destaque o fato de que os intervalos *bootstrap*, no geral, apresentaram um desempenho superior comparado aos demais em todos os cenários. Outro intervalo que merece destaque para ambos os cenários é o intervalo IC_{CXZ} proposto por Chan, Xiong e Zhang (1990) onde a taxa de cobertura se manteve muito próxima da taxa de cobertura nominal em praticamente todos os cenários da Tabela 3 e 4. Também deve-se ressaltar que, os cenários onde a ACO foi contemplada, teve uma frequência maior de intervalos com taxas de cobertura próximos do nível de confiança de 95% previamente estabelecido. Já no que diz respeito à amplitude média, nenhuma diferença notável entre a AAS e ACO,

C_{pm}	ρ	σ^2	μ	IC_{MB}	IC_{CZX}	IC_{Bo}	IC_{ZH}	IC_{bP}	IC_{bW}
2.00	1.00	1.78	1000.00	0.9477(1.4337)***	0.9491(1.4476)***	0.9472(1.4315)***	0.9471(1.4307)***	0.939(1.4801)	0.9543(1.4984)**
2.00	0.50	1.78	1000.00	0.944(1.4439)	0.9447(1.4534)***	0.9428(1.4377)	0.9422(1.4356)	0.9463(1.5667)**	0.964(1.5856)
2.00	0.80	1.78	1000.00	0.9455(1.4429)***	0.9473(1.4549)***	0.9451(1.4389)***	0.9447(1.4375)***	0.9463(1.5381)**	0.962(1.5575)
2.00	0.00	1.78	1000.00	0.9408(1.4432)	0.9419(1.4517)	0.9398(1.436)	0.9392(1.4337)	0.944(1.5789)	0.9673(1.5993)
1.33	1.00	4.02	1000.00	0.9503(0.9536)***	0.9522(0.9628)***	0.9498(0.9521)***	0.9497(0.9515)***	0.9463(0.9853)**	0.961(0.9981)
1.33	0.50	4.02	1000.00	0.945(0.9608)***	0.9462(0.9673)***	0.9444(0.9568)***	0.9441(0.9554)	0.94(1.0492)	0.9673(1.0656)
1.33	0.80	4.02	1000.00	0.939(0.9561)	0.9405(0.9642)	0.938(0.9536)	0.9379(0.9527)	0.943(1.0171)	0.9587(1.0314)
1.33	0.00	4.02	1000.00	0.9403(0.958)	0.9412(0.9633)	0.939(0.9529)	0.9381(0.9513)	0.945(1.0491)**	0.9673(1.0623)
0.67	1.00	15.84	1000.00	0.9442(0.4792)	0.9468(0.4838)***	0.9438(0.4784)	0.9436(0.4782)	0.936(0.4958)	0.9527(0.5021)***
0.67	0.50	15.84	1000.00	0.9422(0.4851)	0.944(0.4884)	0.9409(0.4831)	0.9407(0.4825)	0.9417(0.5257)	0.9613(0.5322)
0.67	0.80	15.84	1000.00	0.9443(0.4829)	0.9467(0.4869)***	0.9437(0.4815)	0.9432(0.481)	0.9397(0.5156)	0.9587(0.5224)
0.67	0.00	15.84	1000.00	0.9407(0.4821)	0.9423(0.4849)	0.9392(0.4797)	0.9385(0.4789)	0.9447(0.5285)**	0.9663(0.5358)
2.00	1.00	1.00	1000.88	0.9884(1.4309)	0.975(1.2812)	0.9735(1.2759)	0.9708(1.2453)	0.9437(1.1133)	0.9583(1.1206)
2.00	0.50	1.00	1000.88	0.9715(1.4425)	0.9455(1.288)***	0.9432(1.2824)	0.9383(1.2524)	0.9333(1.3384)	0.9553(1.3523)**
2.00	0.80	1.00	1000.88	0.9823(1.4358)	0.9624(1.285)	0.9607(1.2795)	0.9567(1.2494)	0.9423(1.2373)	0.956(1.2461)
2.00	0.00	1.00	1000.88	0.969(1.4454)	0.9407(1.2879)	0.9379(1.2823)	0.9326(1.2521)	0.9297(1.4015)	0.956(1.4163)
1.33	1.00	1.00	1001.74	0.9998(0.9459)	0.9826(0.6253)	0.9822(0.626)	0.9762(0.5954)	0.936(0.4877)	0.9437(0.4889)
1.33	0.50	1.00	1001.74	0.9983(0.9529)	0.9495(0.6294)***	0.9483(0.6299)***	0.9363(0.5994)	0.9247(0.6203)	0.942(0.6246)
1.33	0.80	1.00	1001.74	0.9995(0.9476)	0.9682(0.6259)	0.9675(0.6265)	0.9611(0.596)	0.938(0.5573)	0.9473(0.5604)***
1.33	0.00	1.00	1001.74	0.9967(0.9516)	0.9347(0.6255)	0.9351(0.6261)	0.9232(0.5957)	0.937(0.6616)	0.9477(0.6655)***
0.67	1.00	1.00	1003.85	1(0.4746)	0.9862(0.1676)	0.9861(0.1677)	0.9805(0.1572)	0.938(0.1233)	0.938(0.1234)
0.67	0.50	1.00	1003.85	1(0.4754)	0.9462(0.1661)***	0.9459(0.1662)***	0.9319(0.1558)	0.934(0.1576)	0.9393(0.158)
0.67	0.80	1.00	1003.85	1(0.4752)	0.9658(0.167)	0.9656(0.1671)	0.9541(0.1567)***	0.927(0.1413)	0.9323(0.1414)
0.67	0.00	1.00	1003.85	1(0.4758)	0.9318(0.166)	0.9313(0.1661)	0.9148(0.1557)	0.9267(0.1688)	0.9293(0.1692)

Tabela 3: Valores de precisão para cada um dos intervalos, considerando $n = 3$ e $m = 5$

C_{pm}	ρ	σ^2	μ	IC_{MB}	IC_{CZX}	IC_{Bo}	IC_{ZH}	IC_{bP}	IC_{bW}
2.00	1.00	1.78	1000.00	0.9712(0.782)	0.9715(0.7845)	0.9712(0.782)	0.9712(0.782)	0.946(0.7024)**	0.947(0.704)***
2.00	0.50	1.78	1000.00	0.9503(0.7848)***	0.9511(0.787)***	0.9503(0.7845)***	0.9503(0.7844)***	0.9493(0.7993)***	0.9553(0.8029)**
2.00	0.80	1.78	1000.00	0.9569(0.7849)	0.9571(0.7873)	0.9569(0.7847)	0.9569(0.7847)	0.9487(0.7652)***	0.9557(0.7688)
2.00	0.00	1.78	1000.00	0.9459(0.7845)***	0.9466(0.7866)***	0.9458(0.7841)***	0.9459(0.784)***	0.955(0.8057)**	0.9583(0.8089)
1.33	1.00	4.02	1000.00	0.9713(0.5208)	0.9717(0.5225)	0.9713(0.5208)	0.9713(0.5207)	0.9517(0.4653)***	0.955(0.4668)**
1.33	0.50	4.02	1000.00	0.9484(0.5222)***	0.9489(0.5237)***	0.9484(0.522)***	0.9484(0.522)***	0.941(0.532)	0.9507(0.5345)***
1.33	0.80	4.02	1000.00	0.9568(0.5226)	0.958(0.5242)	0.9568(0.5225)	0.9568(0.5225)	0.9487(0.51)***	0.955(0.512)**
1.33	0.00	4.02	1000.00	0.9533(0.5212)***	0.9534(0.5226)***	0.953(0.5209)***	0.953(0.5209)***	0.9467(0.535)***	0.9613(0.5379)
0.67	1.00	15.84	1000.00	0.9692(0.2622)	0.9702(0.2631)	0.9692(0.2622)	0.9692(0.2622)	0.9507(0.2353)***	0.95(0.236)***
0.67	0.50	15.84	1000.00	0.9455(0.263)***	0.9459(0.2638)***	0.9454(0.2629)***	0.9454(0.2629)***	0.9457(0.2683)**	0.9543(0.2691)**
0.67	0.80	15.84	1000.00	0.959(0.2628)	0.9596(0.2636)	0.959(0.2628)	0.959(0.2628)	0.9443(0.2556)	0.9497(0.2566)***
0.67	0.00	15.84	1000.00	0.95(0.2631)***	0.9506(0.2639)***	0.9499(0.263)***	0.9499(0.263)***	0.9527(0.2708)***	0.959(0.2716)
2.00	1.00	1.00	1000.88	0.9971(0.7826)	0.992(0.7042)	0.9917(0.7035)	0.9913(0.6986)	0.9513(0.5151)***	0.95(0.5157)***
2.00	0.50	1.00	1000.88	0.9797(0.7857)	0.9595(0.7051)	0.9593(0.7043)	0.9579(0.6994)	0.947(0.6837)***	0.9537(0.6846)**
2.00	0.80	1.00	1000.88	0.9885(0.7837)	0.9755(0.7043)	0.9755(0.7035)	0.9745(0.6986)	0.9393(0.6088)	0.947(0.6093)***
2.00	0.00	1.00	1000.88	0.9679(0.7862)	0.9441(0.705)	0.9434(0.7043)	0.9416(0.6994)	0.945(0.7225)**	0.9567(0.7251)
1.33	1.00	1.00	1001.74	1(0.5195)	0.9968(0.3441)	0.9965(0.3442)	0.9961(0.3391)	0.949(0.2244)***	0.9493(0.2247)***
1.33	0.50	1.00	1001.74	0.9989(0.5212)	0.9624(0.3434)	0.9615(0.3436)	0.9588(0.3385)	0.9347(0.3234)	0.9437(0.3238)
1.33	0.80	1.00	1001.74	0.9997(0.5206)	0.9846(0.3439)	0.9843(0.344)	0.9831(0.339)	0.95(0.276)***	0.9497(0.2763)***
1.33	0.00	1.00	1001.74	0.9969(0.5219)	0.9432(0.3447)	0.9422(0.3449)	0.9395(0.3398)	0.9367(0.3508)	0.943(0.3517)
0.67	1.00	1.00	1003.85	1(0.2619)	0.9985(0.092)	0.9984(0.092)	0.9982(0.0903)	0.9497(0.0563)***	0.9483(0.0564)***
0.67	0.50	1.00	1003.85	1(0.2621)	0.9599(0.0915)	0.9598(0.0915)	0.9557(0.0898)	0.9407(0.0843)	0.9423(0.0843)
0.67	0.80	1.00	1003.85	1(0.2619)	0.9868(0.0919)	0.9868(0.0919)	0.9849(0.0902)	0.951(0.0712)***	0.9513(0.0713)***
0.67	0.00	1.00	1003.85	1(0.2623)	0.945(0.0916)***	0.9455(0.0916)***	0.9398(0.0899)	0.9453(0.0918)**	0.9433(0.0918)

Tabela 4: Valores de precisão para cada um dos intervalos, considerando $n = 5$ e $m = 10$

E por último, para comparar a taxa de precisão e cobertura entre os delineamentos (AAS e ACO), os diagramas de caixa das Figura 5 e 6 ilustram como eles se modificam conforme aumenta a correlação entre as variáveis utilizadas para gerar as amostras. O índice de precisão diminui em média, enquanto a taxa de cobertura aumenta em média na medida em que a ACO se aproxima de uma ordenação perfeita. O que vai de encontro, com o que McIntyre (1952) comentou em relação ao aumento da precisão para estimativa de média.

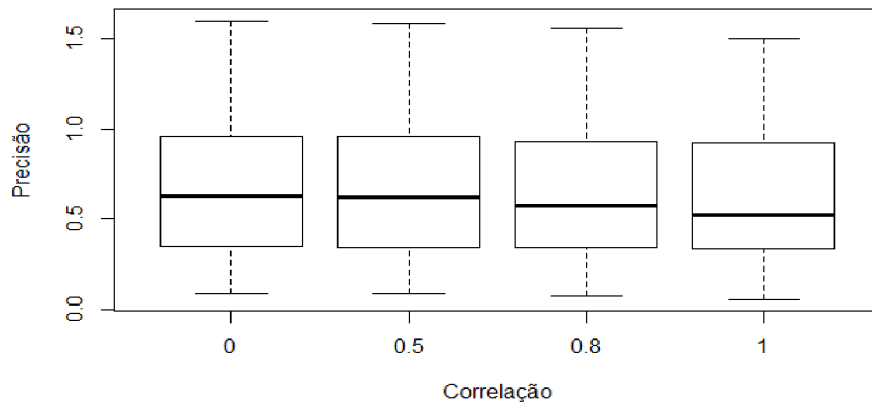


Figura 5: Precisão dos intervalos considerando a correlação utilizada no ordenamento das variáveis

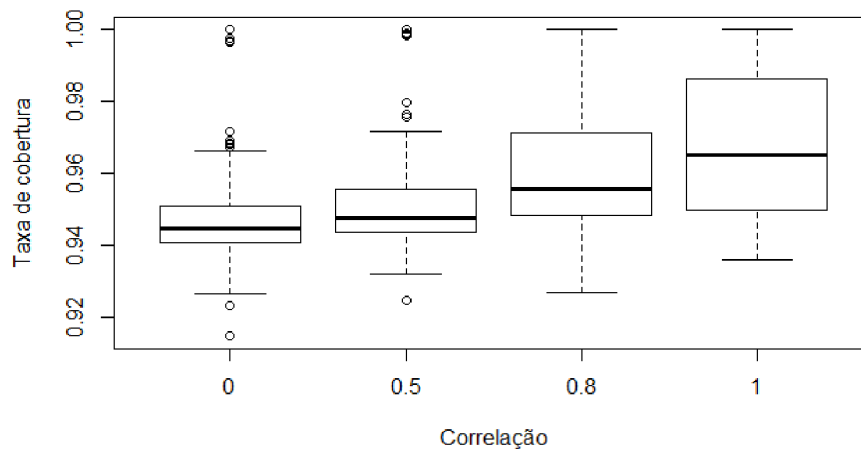


Figura 6: Acurácia dos intervalos considerando a correlação utilizada no ordenamento das variáveis

6 Conclusão

No presente trabalho investigamos a possibilidade de se utilizar a amostragem por conjuntos ordenados (ACO) em detrimento da amostragem aleatória simples (AAS) como delineamento amostral para a estimativa intervalar de C_{pm} . Os resultados mostram que de fato, a ACO mostrou-se mais

eficiente quando comparada com a AAS, principalmente quanto mais o cenário se aproxima de uma ordenação perfeita. Ou seja, a ACO produziu resultados mais precisos e mais acurados quando se trata de estimativas intervalares para o índice C_{pm} . Ademais, sobre os tipos de intervalos utilizados, merecem destaque os intervalos do tipo *bootstrap* e o intervalo proposto por Chan, Xiong e Zhang (1990).

Ainda em Chan, Xiong e Zhang (1990), os autores afirmam que em condições gerais, o índice C_{pm} possui uma distribuição aproximadamente normal, considerando a AAS. Por conta da construção feita no presente estudo, os dados utilizados seguem uma distribuição normal, o que indaga se em outros contextos, considerando processos com outros tipos de comportamento, os resultados continuariam sendo favoráveis aos intervalos de confiança *bootstrap* e ao intervalo proposto por Chan, Xiong e Zhang (1990). Para futuros estudos, é recomendável reproduzir o estudo de simulação para os mesmos cenários de simulação em processos onde a variável de interesse não segue uma distribuição normal.

Referências

- ALEVIZAKOS, V.; KOUKOUVINOS, C. An asymptotic confidence interval for the process capability index cpm. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, p. 1–7, 2018.
- BALAMURALI, S.; KALYANASUNDARAM, M. Bootstrap lower confidence limits for the process capability indices cp, cpk and cpm. *International Journal of Quality & Reliability Management*, MCB UP Ltd, v. 19, n. 8/9, p. 1088–1097, 2002.
- BANSAL, H. S.; TAYLOR, S. Investigating the relationship between service quality, satisfaction and switching intentions. *Journal of Retailing and Consumer Services*, p. 304–313, 2014.
- BOUZA, C.; AL-OMARI, A. Review of ranked set sampling: Modifications and applications. *REVISTA INVESTIGACIÓN OPERACIONAL*, v. 35, p. 215–235, 09 2014.
- BOYLES, R. A. The taguchi capability index. *Journal of Quality Technology*, Taylor & Francis, v. 23, n. 1, p. 17–26, 1991.
- BRIK, A. et al. Assessing process capability index using sampling plan in the presence of measurement system errors. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2019.
- CHAN, L. K.; XIONG, Z.; ZHANG, D. On the asymptotic distributions of some process capability indices. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 19, n. 1, p. 11–18, 1990.
- DAVISON, A. C.; HINKLEY, D. V. *Bootstrap Methods and Their Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- DELL, T.; CLUTTER, J. Ranked set sampling theory with order statistics background. *Biometrics*, JSTOR, p. 545–555, 1972.
- FRANKLIN, L. A.; WASSERMAN, G. S. Bootstrap lower confidence limits for capability indices. *Journal of Quality Technology*, Taylor & Francis, v. 24, n. 4, p. 196–210, 1992.
- GOTLIEB, J. B.; GREWAL, D.; BROWN, S. W. Consumer satisfaction and perceived quality: Complementary or divergent constructs? *Journal of Applied Psychology*, v. 79, n. 6, p. 875–885, 1994.
- HSIANG, T. C. A tutorial on quality control and assurance-the taguchi methods. In: *ASA Annual Meeting LA, 1985*. [S.l.: s.n.], 1985.
- KANE, V. E. Process capability indices. *Journal of quality technology*, Taylor & Francis, v. 18, n. 1, p. 41–52, 1986.
- KUSHLER, R. H.; HURLEY, P. Confidence bounds for capability indices. *Journal of Quality Technology*, Taylor & Francis, v. 24, n. 4, p. 188–195, 1992.
- MARCUCCI, M.; BEAZLEY, C. Capability indices: process performance measures. In: *ASQC Quality Congress Transactions–Dallas*. [S.l.: s.n.], 1988. v. 42, p. 516–523.

MCINTYRE, G. A method for unbiased selective sampling, using ranked sets. *The American Statistician*, v. 59, p. 230–232, 1952.

MONTGOMERY, D. *Introduction to statistical quality control*. 3. ed. ed. New York, NY [u.a.]: Wiley, 1997. ISBN 0471303534. Disponível em: <http://gso.gbv.de/DB=2.1/CMD?ACT=SRCHA&SRT=YOP&IKT=1016&TRM=ppn+192972065&sourceid=fbw_bibsonomy>.

MUTTLAK, H.; AL-SABAH, W. Statistical quality control based on ranked set sampling. *Journal of Applied Statistics*, v. 30, p. 1055–1078, 2003.

NAMIN, A. Revisiting customers' perception of service quality in fast food restaurants. *Journal of Retailing and Consumer Services*, v. 34, p. 70–81, 2017.

PEARN, W.; KOTZ, S. *Encyclopedia and Handbook of Process Capability Indices: A Comprehensive Exposition of Quality Control Measures*. World Scientific, 2006. (Series on quality, reliability & engineering statistics). ISBN 9789812567598. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=KMJTAAAAMAAJ>>.

TONG, L.-I.; CHEN, H.-T.; TAI, Y.-F. Constructing bca bootstrap confidence interval for the difference between two non-normal process capability indices c_{npmk} . *Quality Engineering*, Taylor & Francis, v. 20, n. 2, p. 209–220, 2008.

ZIMMER, L. S.; HUBELE, N. F. Quantiles of the sampling distribution of c . *Quality Engineering*, Taylor & Francis, v. 10, n. 2, p. 309–329, 1997.