Exercice 1

Implémenter en R une simulation de l'aiguille de Buffon.
Étudier la qualité de l'estimateur de π obtenu en fonction du rapport entre la longueur L de l'aiguille et la largeur D des lames de parquet. On pourra par exemple estimer l'erreur quadratique moyenne*.
On pourra dans un premier temps implémenter une fonction `estim_pi` prenant comme paramètres le nombre n de lancers d'aiguille et le rapport $r = \frac{L}{D}$, et renvoyant une estimation de π.
Dans un deuxième temps, on pourra implémenter une fonction `mse_pi` prenant comme paramètres le nombre n de lancers d'aiguille, le rapport $r = \frac{L}{D}$ et le nombre d'estimations indépendantes r_{rep}, et renvoyant une estimation du Mean Squared Error de l'estimateur de paramètres (n, r).
On pourra enfin tracer le Mean Squared Error de l'estimateur de paramètres (n, r) en fonction du paramètre r (pour une même valeur de n).

Exercice 2

On désire comparer l'efficacité des méthodes d'intégration MC :

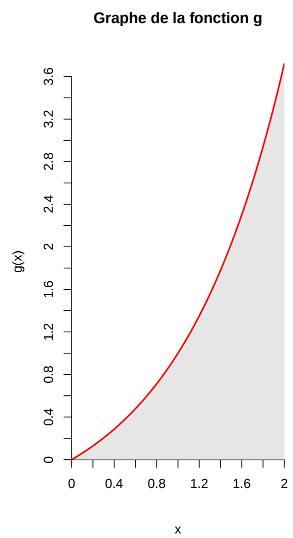
- MC par "tirage noir ou blanc"
- MC simple
- MC suivant l'importance

La fonction que l'on doit intégrer est :

$$g(x) = \frac{\exp(x) - 1}{\exp(1) - 1}$$

On doit calculer :

$$I = \int_0^2 g(u)\, du$$



1. Par intégration analytique, montrer que la valeur de l'intégrale est (facultatif) :

$$I = \frac{\exp(2) - 3}{\exp(1) - 1}$$

   Vous pouvez également vérifier numériquement cette formule en utilisant la fonction `integrate` de R.

2. Implémenter dans R la méthode MC par "tirage blanc ou noir".
3. Implémenter dans R la méthode MC simple (cas particulier de la méthode MC suivant l'importance).
4. Implémenter dans R la méthode MC suivant l'importance en utilisant une loi Bêta de paramètre $(\alpha = 2, \beta = 1)$ comme loi d'échantillonnage. Les lois Bêta ayant comme support $[0, 1]$, il faudra considérer une mise à l'échelle pour s'adapter au support d'intégration $[0, 2]$. Vous pourrez notamment vous appuyer sur le résultat suivant : Si une variable aléatoire X a comme support $X(\Omega) = [0, 1]$, alors la variable $Y = aX$ (avec $a > 0$) a comme support $X(\Omega) = [0, a]$ et la densité f_Y de Y peut s'exprimer en fonction de la densité f_X de X :

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y}{a}\right)$$

*. Mean Squared Error :

$$MSE = \mathbb{E}\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] \qquad \text{et} \qquad MSE \simeq \frac{1}{n_{\text{rep}}} \sum_{i=1}^{n_{\text{rep}}} (\hat{\theta}_i - \theta)^2$$

5. Proposer une autre fonction de densité pour la méthode MC suivant l'importance. Vous pouvez rester dans la famille des lois Bêta et tenter soit d'améliorer soit de dégrader la loi d'échantillonnage.

6. Comparer l'efficacité des quatre méthodes. On pourra utiliser le MSE comme critère de qualité. On utilisera la même taille (petite) n d'échantillon pour toutes les méthodes. On effectuera un grand nombre n_{rep} de répétitions de chaque méthode. Par exemple, on pourra prendre $n = 100$ et $n_{\text{rep}} = 1000000$.