Credibilidade na medida de probabilidade[1]

Ricardo Aguirre Leal[2]

Resumo: Este estudo busca organizar a interpretação e a medida de credibilidade, principalmente no contexto monetário. Propomos um conceito abrangente, baseado na linguagem natural e que aninha diversas interpretações, formalizando-o matematicamente na estrutura da Teoria da Probabilidade, na qual também construiu-se a medida. Então realizamos uma aplicação empírica do conceito e da medida. Utilizando dados de um *survey* de expectativas de inflação (pontuais e probabilísticas) para a economia dos Estados Unidos, estimamos credibilidades para variados horizontes temporais e focos. Métodos não-paramétricos (*spline* e *kernel*), com especificações adaptadas à particularidade dos dados, foram empregados nas estimações. Os resultados são apresentados em gráficos informativos.

Palavras-chave: credibilidade; probabilidade; expectativas; inflação

Abstract: This study seeks to organize the interpretation and measurement of credibility, especially in the monetary context. We propose a comprehensive concept, based on natural language and that nestles diverse interpretations, formalizing it mathematically in the framework of Probability Theory, in which the measure was also constructed. Then, we did an empirical application of the concept and measure. Using data from a survey of inflation expectations (both point and probabilistic) for the US economy, we estimate credibilities for various time horizons and focus. Non-parametric methods (spline and kernel) with specifications adapted to the particularity of the data was employed. The results was presented in informative graphs.

Keywords: credibilit; probability; expectations; inflation

Área ANPEC-Sul: *Área 6* - Macroeconomia

Classificação JEL: D84, E50, C14

1 Introdução

No campo das ciências sociais o conceito de credibilidade recebe grande importância nos estudos atuais — ver *e.g.* Gibbs e Kulish (2017) na política monetária; Lemoine e Lindé (2016) na política fiscal; Herzog (2010) na Ciência Atuarial; Raskin, Honts e Kircher (2014) na Psicologia; Johnson e Kaye (2015) em redes sociais; e Klettke, Hallford e Mellor (2016) no Direito. Particularmente na economia monetária, o termo credibilidade é interpretado com distintos significados (BLINDER, 2000; FORDER, 2004a; FORDER, 2004b) e mensurada com semelhante variedade.

Com esse propósito, fizemos uma revisão da literatura e expomos a divergência de conceito e de medida existente nessa área científica, possibilitando a consolidação de interpretações no abrangente conceito proposto, para o qual fizemos uso das estruturas da lógica proposicional. Conduzimos sua construção em direção à Teoria Axiomática da Probabilidade, tornando a medida de credibilidade também uma medida de probabilidade, facilmente tratável e de amplo desenvolvimento aplicado. Então realizamos uma aplicação do conceito e da medida sobre um alvo importante na área monetária: a taxa de inflação. Como resultado, documentamos a credibilidade referente à inflação dos Estados Unidos (CPCE, de 2007 à 2022, em diversos horizontes), com focos que incluem a meta de inflação implícita daquela economia, e relativa a um grupo de profissionais em previsão da inflação.

Até então, dentre os trabalhos que analisamos, calculou-se medidas de credibilidades para apenas um horizonte temporal, como em: Cecchetti e Krause (2002), Mendonça (2007), Mendonça e Souza (2009),

[1] Artigo apresentado no XXVI Encontro de Economia da Região Sul – ANPEC Sul. Curitiba/PR, ago/2023.
[2] Universidade Federal do Rio Grande (FURG/SVP). Contato: *ricardo.leal@furg.br*

Dogan e Bozdemir (2014). Ou então medidas intertemporais, considerando uma crença para todos os horizontes ou com o horizonte indefinido: por exemplo, Gibbs e Kulish (2017), Debortoli e Lakdawala (2016), Schmidt-Hebbel et al. (2002), Malikane e Mokoka (2012), N'Diaye e Laxton (2002). A exceção foi o de Svensson (1993), que calculou para os horizontes de um e cinco anos. Diferentemente, nós interpretamos o conceito de credibilidade de forma mais rica nas dimensões: ilimitada. Na aplicação empírica, exemplificamos uma credibilidade com cinco horizontes trimestrais, outros três horizontes anuais e mais dois plurianuais (5 e 10 anos) calculada a cada trimestre. Distingue a credibilidade relativamente aos agentes, mas pode ser agregada para um agente médio representativo. Quanto ao foco da credibilidade, também é flexível, aninhando infinitas possibilidades.

Nossa metodologia calcula as credibilidades tanto com dados de expectativas probabilísticas quanto de expectativas pontuais. Para os primeiros, muito mais ricos informacionalmente, construímos fdps individuais e do agente médio, no formato uniforme por intervalos e no formato suave (para o agente médio), todas empregando *splines*. Para o formato suave, dada a peculiaridade dos dados, utilizamos um modelo diferenciado para a estimação, minimizando a soma do quadrado dos erros de probabilidade (SSPE); este, também usado em uma *generalized cross validation* adaptada. Os dados de expectativas pontuais proporcionaram a construção de fdps para o agente médio, na qual fizemos uso da *kernel density estimation* supondo uma mesma distribuição de probabilidade entre os agentes.

Neste contexto, este trabalho objetiva unir algumas interpretações e medidas de credibilidade na área monetária, propondo um conceito abrangente com uma medida de credibilidade facilmente tratável, bem como apresentar duas estratégias empíricas, realizando uma aplicação para a meta de inflação da economia dos Estados Unidos. Cremos que essa nova formalização do conceito, junto com o exemplo aplicado, possa contribuir para o avanço das teorias macroeconômicas relacionadas e para o estudo empírico principalmente das crenças que envolvem políticas econômicas, não apenas da área monetária.

Começamos expondo na seção 2 a problemática do conceito e as armadilhas da linguagem, fazendo a revisão de literatura das principais interpretações na teoria monetária e de algumas das medidas empíricas já utilizadas (subseção 2.1). Na seção 3 organizamos o conceito, construindo um único sentido e unidade de medida (subseção 3.1), e procedendo à estrutura formal da credibilidade (subseção 3.2). Na seção 4 expomos duas estratégias empíricas para a aplicação do conceito, usando expectativas probabilísticas (subseção 4.1) e expectativas pontuais (subseção 4.2). Aplicamos essas duas estratégias com os dados de expectativa de inflação nos EUA, cujos resultados são apresentados na subseção 4.3 com gráficos informativos. As considerações finais estão na seção 5.

2 Interpretações e medidas de credibilidade

Nas pesquisas de opinião realizadas por Blinder (2000) e Haan, Eijffinger e Waller (2005), sobre as fontes e importância da credibilidade para um banco central, identifica-se as distintas interpretações de credibilidade entre pesquisadores e praticantes da teoria e política monetária, e também intragrupos. Forder (2004a) critica o trabalho de Blinder sugerindo que há sérias dúvidas sobre o valor da sua pequisa, que pergunta a importância e os meios para adquirir uma coisa sem especificar que coisa é essa. E comenta que as diferenças de opiniões entre os dois grupos de respondentes é devido aos diferentes entendimentos sobre o que é credibilidade.

Além do desentendimento sobre o que é a credibilidade, há falta de consistência sobre o seu objeto. A primeira pergunta dos pesquisadores nestes dois trabalhos foi idêntica: *"How important is credibility to a central bank?"*, sem menção ao objeto da credibilidade, *i.e.* a credibilidade do quê? Na pesquisa de Hayo e Neuenkirch (2015), perguntou-se *"how well do you think the BoE/BoJ/ECB/Fed [central banks] performs on credibility?"*. Dessa forma parece que o conceito já tem um objeto implícito ou subjetivo nesta área científica e profissional, amplamente aceito. Em outras perguntas Blinder (2000) e Haan, Eijffinger e Waller (2005) explicitam o objeto com os termos *"central bank credibility"*, *"credible central bank"* etc, mas se referem a essa mesma credibilidade, em outras partes do texto, como *"the credibility of monetary-policy pronouncements"* (BLINDER, 2000, p. 1421) e *"credibility of monetary policy"* (idem, p. 1423); ou como *"credibility of a decision"* (HAAN; EIJFFINGER; WALLER, 2005, p. 91) e *"credibility of monetary policy"* (idem, p. 84, 170). Afora as pesquisas de opiniões, no âmbito do textos científicos também existem diferenças conceituais e do objeto, principalmente nos trabalhos empíricos. Nos debruçaremos sobre esses estudos e suas medidas quantitativas, mas antes discorreremos mais sobre o significado da palavra.

Nas linguagens informais (também chamadas de naturais) dos idiomas português e inglês, por exemplo, o construto utilidade/*utility* tem seu significado próprio: "qualidade ou caráter do que é útil; serventia" (dicionário Michaelis) e *"fitness for some purpose or worth to some end; something useful"* (Merriam-Webster). Mas na linguagem formal da Ciência Econômica, utilidade é uma medida de preferência, com semântica precisa e livre de contexto, amplamente utilizada na sua lógica formal (matemática). Em Economia e outras ciências, "credibilidade" é um construto sem definição formal (de aceitação ampla)[3] em suas linguagens formais, diferentemente da utilidade. É uma palavra utilizada no sentido "natural" do idioma: "qualidade do que é crível; confiabilidade" (Michaelis) e *"the quality of being believed or accepted as true, real, or honest"* (Merriam-Webster), cuja semântica é de grande expressividade, mas de baixa precisão. Forder (2004a), por exemplo, lista diversos significados da palavra quando utilizado o conceito da linguagem natural no mesmo contexto dado por Blinder (2000), e considerando apenas o *policymaker* como objeto para a credibilidade: dentre elas, a capacidade, a transparência, a honestidade e o compromisso com as promessas. Nessa linha, o construto informal de credibilidade é adequado para muitos propósitos em ciências, na extensão e versatilidade que o dicionário permite. Mas a afirmação de Fonseca (1991, p. 140) indica possíveis motivos dos mal-entendidos com a credibilidade (e outros construtos) na Economia: *"Lack of clarity and the involuntary misuse of language are the first obvious candidates to account for the pure (or 'trap-like') misunderstanding of a set of propositions"*.

Na literatura sobre a credibilidade na política monetária, um dos precursores do "problema da credibilidade", em continuação ao estudo do "problema da inconsistência temporal" de Kydland e Prescott (1977), foi o trabalho de Barro e Gordon (1983). Nele a credibilidade foi usada com um significado implícito, apontado por Forder (2004a) como o compromisso com as promessas de manter a inflação baixa apesar do problema da inconsistência temporal. O termo evoluiu e, com a versatilidade da linguagem natural, já assumiu o significado de diversos dos itens apontados por Forder (2004a), seja na interpretação dos agentes econômicas ou nos estudos acadêmicos — ver os *surveys* de Blinder (2000) e de Haan, Eijffinger e Waller (2005) e a discussão acadêmica adiante[4].

Anterior ao trabalho de Barro e Gordon (1983), a "hipótese da credibilidade" de Fellner (1976, 1979), descrita como semelhante à hipótese das expectativas racionais, propunha que *"firm and credible policies condition the public's expectations and lead to much more strongly peaked and widely shared personal probability distributions concerning future events"* (FELLNER, 1979, p. 168-169). E a credibilidade seria obtida à medida que as crenças sobre a política estão em conformidade com a política que está sendo realizada e os anúncios oficiais sobre sua conduta — uma definição circular. Destarte, na sua origem a credibilidade foi relacionada à probabilidades atribuídas pelos agentes às políticas.

Posteriormente, Backus e Driffill (1985), baseados no modelo reputacional de Kreps e Wilson (1982), formularam a credibilidade como o equilíbrio sequencial de um jogo repetido, definindo-a em termos da probabilidade de que o governo seja do tipo averso à inflação. Cukierman e Meltzer (1986b) definem a credibilidade como o valor absoluto da diferença entre os planos do *policymaker* e a crença do público sobre esses planos[5]. Quanto menor essa diferença, maior a "credibilidade da política monetária planejada". Entretanto, a medida de credibilidade no seu modelo é caracterizada pela velocidade em que o público é

[3] Na ciência atuarial, e na respectiva sub-área da Economia, o conceito de credibilidade é formal e de particular importância. Na chamada Teoria da Credibilidade, em uma abordagem típica, o prêmio do seguro para um indivíduo é calculado atribuindo um peso z (credibilidade; ou fator de credibilidade) para um particular conjunto de dados, digamos do indivíduo ou do grupo ao qual pertence, enquanto o complementar $1-z$ pondera o conjunto de dados *a priori*, mais amplo.

[4] Para maior aprofundamento, ver outros artigos clássicos de credibilidade (e de reputação; termo correlato muitas vezes usado como sinônimo) selecionados em Persson e Tabellini (1994). Forder (2004b) faz um resumo crítico destes e de outros trabalhos sobre a credibilidade. Uma revisão mais ampla é obtida em Persson e Tabellini (1990) e Cukierman (2003). Sobre a linguagem na ciência econômica, ver as reflexões em Mitchell (2016) e em Fonseca (1991).

[5] Haan, Eijffinger e Waller (2005) e outros autores concordam com essa definição.

convencido de que novas políticas são adotadas (*e.g.* uma política desinflacionária). Trabalhos como Ball (1995), Ireland (1995) e Nicolae e Nolan (2006) também utilizam a credibilidade de forma semelhante em modelos de equilíbrio geral, caracterizando-a pela velocidade de ajustamento.

Cukierman e Meltzer (1986a), em outro trabalho, definem duas medidas de credibilidade, agora para o "anúncio da política monetária" e não para os planos do *policymaker*. A "credibilidade média", definida como o negativo da diferença absoluta entre o anúncio e a crença do público; e a "credibilidade marginal", que mede o quanto a variação da meta anunciada afeta as expectativas. Faust e Svensson (2001, p. 373) usaram essa medida de credibilidade média e argumentaram preferir aplicar essa definição, que refere ao anúncio da política em vez dos planos do *policymaker*, pois, em princípio, o *policymaker* pode anunciar de forma crível uma política que não pretenda seguir. McCallum (1984, p. 106) concorda com a diferença do objeto: *"the credibility of a policy is to be distinguished from the credibility of the announcements pertaining to a particular period"*.

Outros modelos que estudam essas medidas desinflacionárias empregam a credibilidade de forma diversa, não diretamente relacionada à velocidade de ajustamento. Na maioria dos casos continuam sendo modelos novo-keynesianos que incorporam a teoria novo-clássica da credibilidade, comparando resultados de diferentes configurações: credibilidade perfeita, nula ou imperfeita. A literatura é extensa. Geralmente a credibilidade é relacionada a alguma variável ou parâmetro do modelo, que condiciona as expectativas e serve de *proxy* à credibilidade. Pode ser o peso/probabilidade, em uma combinação linear convexa, atribuído(a) à expectativa formulada diferentemente da correspondente às expectativas racionais (*e.g.* a de *adaptive learning*), como em Gibbs e Kulish (2017). Ou atribuído(a) a uma variável específica, relativa à expectativa, como em Huh e Lansing (2000), Bomfim e Rudebusch (2000) e Bonomo e Carvalho (2010).

2.1 Medidas empíricas

Até agora citamos a discussão teórica para a credibilidade, alguns estudos com simulações de valores ou de calibraram mediante alguma *proxy*. Mas há também os estudos empíricos, que testaram ou mensuraram a credibilidade na política monetária, relativa a alguma definição adotada ou construída.

Debortoli e Lakdawala (2016), por exemplo, acompanham as ideias de Kydland e Prescott (1977) e Barro e Gordon (1983) para usar o conceito de "credibilidade do banco central" como a habilidade deste em resistir à tentação de re-otimizar a política monetária. Os autores elaboram um modelo em que o comportamento do banco central segue um processo de mudança de regime de dois estados. Em cada período ele mantém a sua política prévia com probabilidade λ e passa a adotar um novo plano com probabilidade $1-\lambda$. Argumentam que a série temporal estimada da probabilidade $\lambda \in [0, 1]$ pode ser interpretada como uma medida de credibilidade do banco central.

Trabalhos como Schmidt-Hebbel et al. (2002) e Malikane e Mokoka (2012) realizaram testes indiretos em modelos macroeconométricos para identificar, de forma dicotômica, se os "anúncios de meta de inflação", elencados no estudo, foram críveis ou não. No primeiro foi usado um modelo VAR de variáveis macroeconômicas; no segundo, uma curva de Phillips modificada. Svensson (1993) também testou estatisticamente a credibilidade para alguns países. Mas seu objeto foi a meta de inflação (em formato de intervalo/banda), não o anúncio da meta. O autor construiu dois conceitos de credibilidade, cujos valores também são dicotômicos: a meta é crível ou não. N'Diaye e Laxton (2002) usaram dados semelhantes ao de Svensson (1993): eles calcularam a "credibilidade da política monetária" indiretamente, olhando para a taxa de juros nominal de longo-prazo. Já Neuenkirch e Tillmann (2014) defendem que a "credibilidade do banco central" reflete a sua performance nas inflações passadas. Ela é modelada como uma função linear do desvio absoluto entre a média das inflações passadas e a meta de inflação.

Partilhando das noções de Cukierman e Meltzer (1986b), há uma grande variedade de trabalhos que propõem uma medida de credibilidade a partir da diferença entre a expectativa de inflação, coletada em pesquisas de opinião (*surveys*), e a meta de inflação — chamaremos essa diferença de "hiato da inflação". Como essas coletas de expectativas são periódicas, digamos trimestralmente, possibilitam a construção de uma série temporal para a variável. A expectativa de inflação usada no cálculo geralmente é uma medida de tendência central, principalmente mediana e média, da amostra de expectativas dos agentes que informam suas previsões no *survey* para determinados horizontes. A meta de inflação também varia de acordo com o contexto empírico do estudo. Em geral, o horizonte da meta utilizado é de um ano e a meta é um intervalo, este último formado por um centro focal, denotado por π^*, e um raio de tolerância α, fazendo o intervalo $[\pi^*-\alpha, \pi^*+\alpha] = [\pi^*_{inf}, \pi^*_{sup}]$. Às vezes a meta intervalar não tem centro focal e é definida apenas pelos limites do intervalos; outras vezes a meta é pontual, *i.e.* α=0. Algumas aplicações têm a meta variando no tempo. Dentre esse grupo de trabalhos, Cecchetti e Krause (2002) propõem uma medida (um índice) de "credibilidade do banco central" (usada naquele estudo com o sinônimo de "credibilidade da política monetária") com uma meta pontual. Assim como em N'Diaye e Laxton (2002), a normalizam para o intervalo $[0, 1]$. Baseado em Cecchetti e Krause (2002), Mendonça (2007) propõe um índice de "credibilidade do regime monetário" de metas de inflação, igualmente normalizado para o intervalo $[0, 1]$, mas considerando uma meta intervalar. Posteriormente, Mendonça e Souza (2009) propoem uma nova medida semelhante, mas agora referida como "credibilidade da política monetária". Nesse ensejo, Dogan e Bozdemir (2014) criaram outros dois índices de "credibilidade do banco central". Em um deles usam a função perda quadrática, no outro a sua inversa: raiz quadrática. No mesmo artigo ainda propuseram outras três medidas de credibilidade, que ponderam distintamente valores passados da série construída a partir de uma modificação do índice.

A proposta dessas medidas que propõem índices de credibilidade é a de imputar uma função-perda à diferença citada por Cukierman e Meltzer (1986b), *i.e.* o hiato da inflação. Esses índices têm grandes vantagens em relação ao simples hiato. Com a função-perda eles normalizam essa diferença expectacional para o intervalo $[0, 1]$, assim o valor pode representar um peso ou uma probabilidade. Também possibilitam uma medida estável e comparável para aplicação em dados distintos, *e.g.* para economias com diferentes raios de tolerância (α) nas metas de inflação. E permitem dosar os pesos das diferenças à escolha do pesquisador, o que pode ser uma vantagem ou uma desvantagem — nos citados trabalhos, muitas dessas escolhas não foram justificadas. Na Figura 1 provemos uma visualização das funções-perda atribuídas pelos autores. De fato, há infinitas possibilidades para essas funções e índices de credibilidade. E conforme observado no gráfico, seus resultados podem ser bem distintos, mesmo referindo-se à mesma variável.

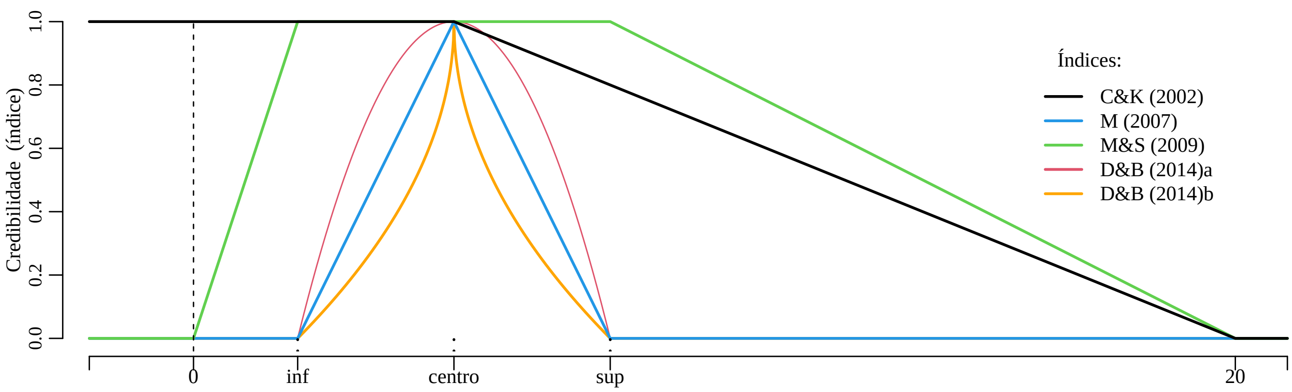

Figura 1: Funções-perda e índices de credibilidade

Nota: Nomeamos as curvas de acordo com os respectivos artigos que elaboraram os índices, referenciados com as iniciais dos autores e o ano. As curvas D&B (2014)a-b referem-se às funções-perda quadrática e raiz quadrática, respectivamente. No eixo inferior, das expectativas de inflação (em %), as marcas "inf", "centro" e "sup" referem-se aos valores π^*_{inf}, π^* e π^*_{sup} respectivamente. Para facilidade visual, consideramos π^*=5% e α=3p.p.

3 Organização do conceito

Nesta seção elaboramos uma organização do conceito e da medida de credibilidade, abrangendo não apenas a teoria monetária. Utilizamos a semântica natural da palavra, das línguas inglesa e portuguesa[6], no sentido usual — *i.e.* a condição de estar ou ser crível, acreditado; a qualidade daquilo em que se acredita. A partir dela, e de sua respectiva sintaxe, buscamos formalizá-la em um modelo simples que contemple a mais ampla gama de definições/medidas já empregadas nesse contexto.

[6] Semântica também comum a outras línguas, como o espanhol (*credibilidad*), italiano (*credibilità*) e francês (*crédibilité*).

Há duas partes envolvidas na credibilidade: a que acredita e a que é acreditada. A ação de acreditar é necessariamente realizada por um *agente*, provido de capacidade cognitiva — a parte que acredita[7]. E como há vários agentes que realizam a ação de acreditar, uma única "parte acreditada" pode possuir ao mesmo tempo várias credibilidades (condição de ser/estar acreditado), cada uma referente a um agente[8]. Quanto ao objeto da credibilidade, a parte acreditada, está relacionado a este o complemento verbal da palavra acreditar, que pode ser diverso: uma proposição, um agente, uma ideia, fenômeno etc. Podemos ter os significados de *existência* de algo; *eficácia* de um agente ou política; *ocorrência* de uma ação; *veracidade* de uma proposição; *veracidade* de um agente em emitir proposições, entre outros.

Assim, "acreditar no banco central", sem detalhamento ou contexto, pode ser o mesmo que acreditar na existência do banco, e/ou na sua eficácia, veracidade de suas proposições etc. Outrossim, não devemos considerar equivalentes os termos "credibilidade do banco central" e "credibilidade da política monetária", assim como não o fizemos para "inflação dos combustíveis" e "inflação dos alimentos". Afinal, "banco central" e "política monetária" não são o mesmo objeto: não aludem aos mesmos elementos característicos, tampouco são do mesmo tipo, pois um é agente e o outro não. O argumento estende-se para as credibilidades do "anúncio do banco central", "regime monetário", "meta de inflação" e outros.

3.1 Um único sentido e unidade de medida

De forma a empregar uma única medida abrangente e que satisfaça a semântica do conceito, é aplicado o sentido da veracidade para a credibilidade, em que um agente julga a condição de uma proposição ser verdadeira. Então, qualquer das interpretações citadas para a credibilidade pode ser exatamente expressa em uma proposição usando o sentido da veracidade. Se o sentido inicial era de credibilidade na eficácia de um agente, por exemplo, podemos ajustá-la para a credibilidade na veracidade da proposição de eficácia desse agente. A palavra "avaliação" será usada geralmente no sentido de avaliação de veracidade.

Quanto à veracidade, se a avaliação realizada pelo agente for dicotômica, então os valores *verdadeiro* (1) ou *falso* (0) das proposições na lógica clássica são potenciais candidatos para a mensuração da credibilidade. De fato, podemos usar no tratamento e na aplicação da credibilidade toda a estrutura do cálculo proposicional, cálculo de predicados e lógicas de ordem mais altas. Neste caso, quando a avaliação for dicotômica podemos definir a expressão usual "ter credibilidade" como a atribuição do valor verdadeiro à credibilidade; e "não ter credibilidade" como a atribuição do valor falso. Se as avaliações não forem dicotômicas e o agente julga proposições parcialmente verdadeiras, então uma possibilidade para a mensuração é usar a lógica *fuzzy*, em que as proposições assumem valores no intervalo $[0, 1]$, onde valores intermediários representam verdade/falsidade parcial. Mas na visão *fuzzy* a incerteza decorre da imprecisão dos conjuntos, não da aleatoriedade dos eventos envolvidos ou de outros motivos.

Na teoria da probabilidade sob a abordagem subjetiva, a incerteza pode decorrer de qualquer motivo, seja pela aleatoriedade da variável, imprecisão dos conjuntos e eventos, falta de informações etc. Nesse paradigma, a probabilidade é um grau de crença, ou um grau de incerteza/certeza, que também assume valores no intervalo $[0, 1]$, mas onde 0 descreve a crença na impossibilidade da ocorrência do evento e 1 a certeza dessa ocorrência. No presente contexto, respectivamente, a crença na impossibilidade da proposição ser verdadeira e a certeza de que é verdadeira. Nós assumimos essa interpretação de probabilidade, sob a genérica formalização axiomática de Kolmogorov[9], para usá-la como medida de credibilidade da proposição. Apesar de haver ainda outras opções para a mensuração da credibilidade[10], esta nos parece mais "natural", bem estabelecida e usual na Ciência Econômica, com grandes vantagens para sua integração com várias áreas dessa ciência.

[7] O agente pode ser um indivíduo ou um grupo deles. O agente que é uma instituição é a representação de um grupo de indivíduos, ou mesmo de um único indivíduo. Podemos ainda estender o conceito de agente para instrumentos automatizados.

[8] É possível haver um (ou mais de um) agente que representa o agregado de todos os agentes, bem como subgrupos deles.

[9] Nessa fundamentação teórica da probabilidade, a estrutura formal da credibilidade descrita adiante se faz adequada também para outros sistemas teóricos da probabilidade.

[10] Exemplos são as estruturas da Teoria da Evidência (ou Teoria de Dempster–Shafer, ou *Theory of Belief Functions*; ver os trabalhos clássicos em Yager e Liu (2007)) e a Teoria da Mensuração Conjunta (ver Luce e Tukey (1964)).

3.2 Estrutura formal da credibilidade

Nós habilitamos as proposições que serão objeto de avaliação para apenas dois tipos: a que iguala um termo a um valor específico de uma variável; e a proposição que afirma que o valor que torna verdadeira uma proposição do tipo anterior pertence a determinado conjunto. Apesar de a primeira poder ser aninhada na segunda, consideramos as duas situações para uma maior flexibilidade lexical nas formulações das proposições. Assim diminuímos a exigência de na linguagem natural formular proposições demasiado técnicas e pouco usuais. Entretanto, essa separação é virtual. O objeto de avaliação que estará associado à credibilidade (também chamado de objeto da credibilidade) é uma proposição (q) nos moldes descritos.

3.2.1 Proposições e crenças

Em termos genéricos, seja q_ω a proposição de que o termo $\mathcal{A}$, um objeto qualquer, é igual ao valor ω^* da variável ω cujo domínio é Ω. E seja q_A a proposição de que o valor $\widetilde{\omega}_\mathcal{A}$ pertence ao subconjunto $A^* \subset \Omega$, onde $\widetilde{\omega}_\mathcal{A}$ é o valor assumido por ω que torna verdadeira a proposição q_ω. Por sua vez, A^* é um valor específico da variável A, cujo o domínio é $\mathbb{A}_\Omega$. Em notação resumida,

$$q_\omega := (\mathcal{A} = \omega^*) \quad , \quad \omega^* \in \Omega \tag{1}$$

$$q_A := (\widetilde{\omega}_\mathcal{A} \in A^*) \, , \quad A^* \subset \Omega \tag{2}$$

O conjunto Ω é não-vazio e mensurável, e possui todos os possíveis valores que a variável ω pode assumir na avaliação da proposição (1), *i.e.* o domínio da variável ω. Então associado a Ω há um espaço mensurável $(\Omega, \mathbb{A}_\Omega)$, onde $\mathbb{A}_\Omega$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω, chamados de *eventos*. No sentido inverso, Ω é o conjunto que contém todos os elementos de todos os subconjuntos $A \in \mathbb{A}_\Omega$. Usaremos a σ-álgebra de Borel para conjuntos não-contáveis, que serão sempre sub-conjuntos do espaço euclidiano; para conjuntos contáveis, não necessariamente conjuntos numéricos e ordenados, a σ-álgebra será seu conjunto das partes.

Observação 1. Conforme as definições de q_ω, q_A e Ω, existe a proposição $(\mathcal{A} = \omega^*)$ se, e somente se, existe $(\widetilde{\omega}_\mathcal{A} \in \{\omega^*\})$.

Quanto ao termo $\mathcal{A}$, este tem que ser formulado tal que $(\mathcal{A} = \omega)$ seja verdadeira para apenas um valor de ω. E, para manter a coesão do modelo e satisfazer o exposto, fazemos as seguintes suposições.

Suposição 1. As proposições q_ω e q_A não são auto-contraditórias. Também, quaisquer dois elementos de Ω não são equivalentes entre si para fins de avaliação dessas proposições

Suposição 2. O avaliador é indiferente na avaliação quanto às proposições $(\mathcal{A} = \omega^*)$ e $(\widetilde{\omega}_\mathcal{A} \in \{\omega^*\})$.

Estabelecemos a seguinte definição para o contexto da credibilidade:

Definição 1 (*Alvo e foco*)**.** Se a proposição em (1) é avaliada por algum agente, denominamos $\mathcal{A}$ de *alvo* da credibilidade e ω^* de *foco* da credibilidade. Se for a proposição em (2), então A^* é o foco da credibilidade, com o mesmo alvo $\mathcal{A}$. O conjunto Ω é chamado de *domínio do foco*.

Também dizemos que $\mathcal{A}$ é alvo e ω^* (ou A^*) é o foco da avaliação e da crença do agente na proposição. E sendo a avaliação subjetiva, cabe ao agente avaliador decidir sobre quais os possíveis valores que o alvo $\mathcal{A}$ assume na avaliação, *i.e.* o domínio Ω da variável ω. No entanto, Ω deve ser mensurável[11]; e conforme a construção, deve ser não-vazio.

Suposição 3. Seja a proposição $q_A := (\widetilde{\omega}_\mathcal{A} \in A^*)$ em (2); e seja $\mathbb{A}_\Omega$ a σ-álgebra de Ω. Assumimos que, se um agente avalia q_A, então ele avalia $(\widetilde{\omega}_\mathcal{A} \in A)$ para todo $A \in \mathbb{A}_\Omega$ e atribui um único valor $\text{Б}(A)$ referente à cada uma dessas proposições avaliadas. Este valor é a *crença* do agente na proposição.

[11] De fato, essa é uma condição pouco exigente, pois não são usuais os conjuntos que são não-mensuráveis.

Para fazermos uma interpretação correta de $\text{Б}(A^*)$, é válido distingui-la do construto crença como condição/estado de quem acredita. $\text{Б}(A^*)$ é uma quantificação deste estado, não o próprio estado.

A Suposição 3 pode parecer restritiva demais para avaliações subjetivas, pois exige que o agente avalie $(\widetilde{\omega}_{\mathcal{A}} \in A)$ para toda combinação $A \in \mathbb{A}_\Omega$ de valores $\omega \in \Omega$. Mas a autonomia do agente avaliador em decidir Ω permite abarcar muitas situações, inclusive a que, no limite, resulta $\exists!\, \omega^* \in \Omega$[12]. Outrossim, não condicionamos o domínio do foco a ser numérico, tampouco ordenado; basta ser não-vazio e mensurável. Isso possibilita valores imprecisos e genéricos, como muito e pouco, alto e médio etc. A suposição também é uma premissa para que as avaliações sejam realizadas em termos relativos, comparando cada um dos focos ω^* com os demais valores $\omega \in \Omega$ em q^*_ω; também possibilitando a mensuração das avaliações (das proposições q) em termos proporcionais. Um corolário da Suposição 3, em combinação com a Suposição 2, é que a proposição $(\mathcal{A} = \omega)$ também será avaliada $\forall \omega \in \Omega$, ao menos indiretamente; e a crença $\text{Б}(\{\omega^*\})$ na proposição $(\widetilde{\omega}_{\mathcal{A}} \in \{\omega^*\})$ será a mesma para $(\mathcal{A} = \omega^*)$.

Devido às convenções já estabelecidas, adotamos a crença $\text{Б}(A^*) = 1$ quando o avaliador tem certeza que a respectiva proposição é verdadeira, e $\text{Б}(A^*) = 0$ quando tem certeza que é falsa. Uma implicação imediata é que $\text{Б}(\varnothing) = 0$ e $\text{Б}(\Omega) = 1$. Crenças intermediárias (que carecem de certeza quanto à veracidade) correspondem a combinações convexas daqueles valores, logo $\forall A(\text{Б}(A) \in [0, 1])$. Atendendo à exigência da Suposição 3, certamente há uma função $\text{Б} : \mathbb{A}_\Omega \to [0, 1]$ para representar essa atribuição de valores das crenças, relativas ao conjunto de proposições $\mathbb{P}_{\mathcal{A},\Omega}$, definido como $\mathbb{P}_{\mathcal{A},\Omega} := \big\{(\widetilde{\omega}_{\mathcal{A}} {\in} A) \,\big|\, (\widetilde{\omega}_{\mathcal{A}} {\in} A) \text{ proposicao como em (2)}\big\}$ e $\text{Б}(A^*)$ é a imagem de A^* nessa função[13]. Denominamos Б de *função crença* do agente, referente ao alvo $\mathcal{A}$, ou de *crença referente a* $\mathcal{A}$. A suposição a seguir resume e completa as condições suficientes de nossa intenção de mensuração.

Suposição 4. Assumimos que a crença $\text{Б}(A^*)$ do agente avaliador na proposição $(\widetilde{\omega}_{\mathcal{A}} \in A^*)$, como descrita na Suposição 3, é a imagem de A^* na função $\text{Б} : \mathbb{A}_\Omega \to [0, 1]$. Essa função é uma medida com as seguintes propriedades:

a) $\text{Б}(A^*) \geq 0$;

b) $\text{Б}(\Omega) = 1$; e

c) para toda coleção finita $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathbb{A}_\Omega$ de conjuntos disjuntos, e para toda coleção infinita enumerável $A_1, A_2, ... \in \mathbb{A}_\Omega$ de conjuntos disjuntos, temos respectivamente $\text{Б}\big(\bigcup_{k=1}^n A_k\big) = \sum_{k=1}^n \text{Б}(A_k)$ e $\text{Б}\big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\big) = \sum_{k=1}^\infty \text{Б}(A_k)$

A medida de crença Б, se interpretada na Teoria da Probabilidade, é uma medida de probabilidade e $(\Omega, \mathbb{A}_\Omega, \text{Б})$ é um espaço de probabilidade, pois $(\Omega, \mathbb{A}_\Omega)$ é um espaço mensurável e a função Б satisfaz aos axiomas de Kolmogorov, *i.e.* aos itens da Suposição 4. Diversas implicações, como condições de independência dos focos-evento, crenças (probabilidades) condicionais etc, podem ser derivadas da firmada teoria, bem como outras possibilidades ao modelo. Faremos intenso uso dessas possibilidades.

Observação 2. A função identidade $X(\omega) = \omega$, com $\omega \in \Omega$, pode ser considerada um *elemento aleatório* do espaço mensurável $(\Omega, \mathbb{A}_\Omega)$. Se $\Omega = \mathbb{R}$, então X é uma variável aleatória em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$, onde $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ é a σ-álgebra de Borel na reta.

Observação 3. Podemos induzir uma função crença/probabilidade para o elemento aleatório X, da observação anterior, fazendo $\text{Б}_X(X{=}\omega^*) = \text{Б}_X(X{\in}\{\omega^*\}) = \text{Б}(\{\omega^*\})$; ou apenas $\text{Б}(X{=}\omega^*)$ devido à equivalência. Também podemos generalizar para $\text{Б}(X{\in}A^*) = \text{Б}(A^*)$; e resumir para $f(\omega) = f_X(\omega) = \text{Б}(X{=}\omega)$, a função massa.

Observação 4. Se Ω for um conjunto estritamente e totalmente ordenado e $\leq$ é uma relação de ordem em Ω, então também podemos ter $\text{Б}(X{\leq}\omega^*) = \text{Б}(A^*{:=}\{\omega{\in}\Omega \,|\, \omega{\leq}\omega^*\})$. Neste caso, definimos a função

[12] Um exemplo para essa situação é quando o agente quer avaliar $\mathcal{A}$ baseado apenas na opinião $\mathbb{E}_0(\mathcal{A})$ de outro agente $i{=}0$. Ele dá total crédito à opinião $\mathbb{E}_0(\mathcal{A})$ e avalia a proposição $(\mathcal{A} = \mathbb{E}_0(\mathcal{A}))$, com $\Omega = \{\mathbb{E}_0(\mathcal{A})\}$, como certamente verdadeira.

[13] Poderíamos definir Б tendo $\mathbb{P}_{\mathcal{A},\Omega}$ como domínio, mas a primeira forma é mais simples.

de distribuição de X como $F_X(\omega) = \text{Б}(X{\leq}\omega)$. Em muitos casos também podemos definir uma função densidade $f_X(\omega) \geq 0$, tal que $F(\omega) = F_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

Se o valor $X(\widetilde{\omega}_{\mathcal{A}})$ será conhecido/observado em algum tempo futuro, então a função $f_X(\omega)$ massa ou densidade da crença é também chamada de *expectativa probabilística* para X; ou ainda, no caso da função densidade, de *expectativa em densidade*.

3.2.2 Credibilidade das proposições

Na subseção anterior descrevemos a crença do agente como seu estado resultante da avaliação de veracidade de uma proposição, relacionada a um valor que quantifica a sua intensidade. Nesta subseção descrevemos a credibilidade da proposição como o estado desta resultante da respectiva crença do agente; também quantificaremos sua intensidade.

Certamente a intensidade da credibilidade depende da intensidade da respectiva crença[14]. Se $\text{Б}(A^*) = 1$, então a proposição $(\widetilde{\omega}_{\mathcal{A}} \in A^*)$ é acreditada como verdadeira ao máximo, *i.e.* a proposição tem credibilidade máxima; se $\text{Б}(A^*) = 0$, credibilidade mínima; e parcial quando valores intermediários. Cabe agora representarmos essa intensidade numericamente. O mais apropriado é usarmos a mesma medida, já convencionada, bem estabelecida e associada à Б. Seja $\gamma(\text{Б}(A^*))$ o valor da credibilidade relacionada à crença $\text{Б}(A^*)$; então fazemos $\gamma(\text{Б}(A^*)) = \text{Б}(A^*)$.

Devido à Suposição 3 e à igualdade $\gamma(\text{Б}(A^*)) = \text{Б}(A^*)$, se há uma crença $\text{Б}(A^*)$ associada à $(\widetilde{\omega}_{\mathcal{A}} \in A^*)$, com $A^* \in \mathbb{A}_\Omega$, então também há $\forall A \in \mathbb{A}_\Omega$ uma, e apenas uma, credibilidade $\gamma(\text{Б}(A))$ relativa a $(\widetilde{\omega}_{\mathcal{A}} \in A)$, avaliadas pelo mesmo agente de $\text{Б}(A^*)$. A função identidade

$$\gamma : [0,1] \to [0,1]\,, \quad \gamma(\text{Б}(A^*)) = \text{Б}(A^*) \tag{3}$$

representa essa associação entre credibilidades e crenças. Logo, existe uma função $\Gamma : \mathbb{A}_\Omega \to [0,1]$, $\Gamma(A^*) = \gamma(\text{Б}(A^*))$ que representa a relação entre os eventos A e as respectivas credibilidades das proposições em $\mathbb{P}_{\mathcal{A},\Omega}$. Como anunciamos, a intensidade $\Gamma(A^*)$ da credibilidade de uma proposição é igual à intensidade da respectiva crença nessa proposição:

$$\Gamma(A) = \text{Б}(A)\,, \quad \forall A \in \mathbb{A}_\Omega \tag{4}$$

A partir de (4) e das observações 2 à 4, induzimos a função credibilidade $\Gamma(X{=}\omega^*) = \Gamma_X(X{=}\omega^*)$ para o elemento aleatório X; a função massa $f(\omega) = \Gamma(X{=}\omega)$; a função de distribuição $F(\omega) = \Gamma(X{\leq}\omega)$, para domínios do foco totalmente e estritamente ordenados, e a respectiva função densidade $f(\omega)$ se for possível.

Também argumentamos que uma proposição $q_A := (\widetilde{\omega}_{\mathcal{A}} \in A^*)$ pode ser avaliada por diversos agentes e, por conseguinte, pode estar associada a mais de uma crença e credibilidade — cada par crença-credibilidade relativo a um único agente. Então, para um conjunto $\mathcal{I}{=}\{1, ..., I\}$ de agentes que avaliam q_A, temos I crenças e credibilidades:

$$\text{Б}_i(A^*) = \text{Б}_i(A^*|\Omega_i)\,, \qquad i \in \mathcal{I} \quad \text{e} \quad A^* \in \mathbb{A}_{\Omega i} \tag{5}$$

$$\Gamma_i(A^*) = \Gamma_i(A^*|\Omega_i) = \text{Б}_i(A^*|\Omega_i)\,, \qquad i \in \mathcal{I} \quad \text{e} \quad A^* \in \mathbb{A}_{\Omega i} \tag{6}$$

onde Ω_i é o domínio do foco escolhido pelo agente $i \in \mathcal{I}$ para avaliar q_A, e $\mathbb{A}_{\Omega i}$ é a σ-álgebra correspondente à Ω_i. A^* é um evento admissível para todo agente i; e $\omega \in A^*$ implica que ω faz parte do domínio do foco para todo agente em $\mathcal{I}$. É factível termos $\bigcap_{\mathcal{I}} \Omega i = \varnothing$, mas nesse caso não existe uma proposição comum entre esses agentes, e cada proposição relativa ao alvo $\mathcal{A}$ terá, no universo dos agentes $\mathcal{I}$, apenas uma credibilidade associada.

Um caso especial e interessante é quando $\Omega i = \Omega$ para todo agente $i \in \mathcal{I}$. Nesse contexto, temos I funções crença e credibilidade para cada proposição em $\mathbb{P}_{\mathcal{A},\Omega}$:

[14] Aqui também é válido distinguir o construto credibilidade, o estado de quem é acreditado, da quantificação/intensidade deste estado. Especificaremos qual deles quando houver possibilidade de ambiguidade.

$$\text{Б}_i(A) = \text{Б}_i(A|\Omega)\,, \qquad i\in\mathcal{I} \quad \text{e} \quad A\in\mathbb{A}_\Omega \tag{7}$$
$$\Gamma_i(A) = \Gamma_i(A|\Omega) = \text{Б}_i(A|\Omega)\,, \qquad i\in\mathcal{I} \quad \text{e} \quad A\in\mathbb{A}_\Omega \tag{8}$$

Igualmente, a partir de (8) e das observações 2 à 4, para um dado conjunto $\mathbb{P}_{\mathcal{A},\Omega}$ e um conjunto $\mathcal{I}=\{1,...,I\}$ de avaliadores de $\mathbb{P}_{\mathcal{A},\Omega}$, induzimos as funções crença $\text{Б}_i(X{=}\omega^*)$ e credibilidade $\Gamma_i(X{=}\omega^*)$, com $\omega^*\in\Omega$, para o elemento aleatório X. Também a função massa $f_i(\omega)=\Gamma_i(X{=}\omega)=\text{Б}_i(X{=}\omega)$; a função de distribuição $F_i(\omega)=\Gamma_i(X{\leq}\omega)=\text{Б}_i(X{\leq}\omega)$, para domínios do foco totalmente e estritamente ordenados, e a respectiva função densidade $f_i(\omega)$ se for possível. O elemento aleatório X, definido no espaço mensurável $(\Omega,\mathbb{A}_\Omega)$, é o mesmo para todos os I agentes; mas como as respectivas funções de probabilidade (crença e credibilidade) são potencialmente distintas, os espaços de probabilidade $(\Omega,\mathbb{A}_\Omega,P_i)$ também o são, onde $P_i=\Gamma_i=\text{Б}_i$. Resumimos parte do exposto sobre a credibilidade na seguinte definição:

Definição 2 (*Credibilidade*)**.** Considere um conjunto de proposições $\mathbb{P}_{\mathcal{A},\Omega}$, com alvo $\mathcal{A}$ e domínio do foco Ω. Seja $\mathcal{I}=\{1,...,I\}$ o conjunto de agentes que avaliam, sob o mesmo domínio Ω, as proposições em $\mathbb{P}_{\mathcal{A},\Omega}$. Então existem I funções crenças Б_i, descritas em (7), e I funções Γ_i, descritas em (8) e denominadas *função credibilidade de* i. Cada função Γ_i representa a relação entre as proposições em $\mathbb{P}_{\mathcal{A},\Omega}$ (ou os eventos em $\mathbb{A}_\Omega$) e as intensidades com as quais são acreditadas como verdadeiras pelo avaliador i. O valor $\Gamma_i(A^*)$ é chamado de *credibilidade* da proposição $(\widetilde{\omega}_\mathcal{A}\in A^*)\in\mathbb{P}_{\mathcal{A},\Omega}$ referente ao avaliador i.

3.2.3 Agregação

Podemos agregar proposições, crenças e credibilidades; e por conseguinte, estabelecer crenças sobre proposições agregadas e credibilidades sobre crenças agregadas. Começamos com a agregação de proposições. Seja $\mathbb{P}$ um conjunto não-vazio de proposições que são possíveis objetos de credibilidade. Considere uma proposição cujo alvo $\mathcal{K}\mathbb{P}$ é uma qualidade/estado/condição qualquer de $\mathbb{P}$; proposição denotada por $q_k := (\mathcal{K}\mathbb{P}=k^*)$ e sua correlata por $q_K := (\widetilde{\omega}_{\mathcal{K}\mathbb{P}}\in K^*)$ definidas nos moldes de (1) e (2), respectivamente. Se $\mathbb{P}$ possui mais de um elemento, dizemos que q_k, assim como q_K, é uma *proposição agregada*, ou que representa uma *agregação de proposições*. Proposições que são objetos de credibilidade são avaliadas sempre quanto à sua veracidade; e veracidade é uma qualidade/condição. Mas se tivermos, por exemplo, $\{(\mathcal{A}{=}\omega^*)\}=\mathbb{P}$ e se $q_k := (\mathcal{K}\mathbb{P}=k^*)$ for avaliada com $\mathcal{K}\mathbb{P}$:= "importância de $\mathbb{P}$" e k^* := "muito importante", então virtualmente se está avaliando $q_\omega := (\mathcal{A}{=}\omega^*)$ quanto à sua importância, enquanto de fato, na definição do conceito aqui, avalia-se a veracidade de $\{q_\omega\}$ ser muito importante[15], *i.e.* a proposição q_k.

A partir do resultado de diversas avaliações, podemos agregar as respectivas crenças e credibilidades. Na primeira opção, uma das agregações mais usuais é a de utilizar a crença/expectativa de um agente representativo (médio, digamos) para o objeto. Porém, existem críticas epistemológicas ao agente representativo podem ser contornadas na segunda opção. Ao contrário da crença, a credibilidade não é um estado mental, mas a característica/condição de uma proposição; além disso, a credibilidade agregada tem resultado numérico identico à credibilidade da agregação das creças, quando aplicada a mesma função de agregação.

Na agregação de credibilidades, referentes a um conjunto $\mathcal{I}=\{1,...,I\}$ de agentes, o que se deseja é, a partir de uma I-upla de credibilidades,

$$\Pi(A^*\,|\,\mathcal{I}) = \big(\Gamma_1(A^*),\Gamma_2(A^*),...,\Gamma_I(A^*)\big)\in[0,1]^I \tag{9}$$

referentes a uma proposição q_A, associar um valor $\breve{\Gamma}(A^*\,|\,\mathcal{I})\in[0,1]$ representativo de $\Pi(A^*\,|\,\mathcal{I})$. E $\Pi(A^*\,|\,\mathcal{I})$ pode ser definida, a partir de (8), como a imagem de uma função Π multi-valorada. Um caso especial de agregação é quando todos os agentes de $\mathcal{I}$ avaliam q_A com o mesmo domínio do foco, digamos Ω, e existe um valor $\breve{\Gamma}(A^*\,|\,\mathcal{I},\Omega)$ para cada I-upla $\Pi(A^*\,|\,\mathcal{I},\Omega)$, $A^*\in\mathbb{A}_\Omega$, onde $\mathbb{A}_\Omega$ é a σ-álgebra de Ω. Nesta ocasião, temos uma função composta

$$\breve{\Gamma}:\mathbb{A}_\Omega\to[0,1]\,, \qquad \breve{\Gamma}:=(g\circ\Pi) \tag{10}$$

onde $g:\big\{\Pi(A^*\,|\,\mathcal{I})\in[0,1]^I\;\big|\;A^*\in\mathbb{A}_\Omega\big\}\to[0,1]$, representa essa relação, é Π é a função multi-valorada de imagem $\Pi(A^*\,|\,\mathcal{I},\Omega)$. Dado o exposto, procedemos à seguinte

[15] A proposição q_ω não precisa ser elemento de um conjunto como em $\{q_\omega\}=\mathbb{P}$ para ser avaliada "virtualmente" dessa forma. Poderíamos ter o alvo $\mathcal{K}q_\omega$:= "importância de q_ω" e a proposição $q_k := (\mathcal{K}q_\omega=k^*)$.

Definição 3 (*Credibilidade e crença agregadas*)**.** Denominamos a imagem $\breve{\Gamma}(A^* \,|\, \mathcal{I})$ na função (10), referente às credibilidades em (9), como a *credibilidade agregada de q_A relativa aos agentes $\mathcal{I}$* (ou agente representativo de $\mathcal{I}$). Se a agregação for realizada para uma I-upla de crenças em q_A, então a imagem $\breve{\text{Б}}(A^* \,|\, \mathcal{I})$ da função $\breve{\text{Б}}$, semelhante à (10), é denominada *crença agregada de q_A relativa aos agentes $\mathcal{I}$*. $\breve{\text{Б}}$ e $\breve{\Gamma}$ podem ser chamadas de *função crença agregada* e *função credibilidade agregada*, respectivamente.

Observação 5. As funções $\breve{\Gamma}$ e $\breve{\text{Б}}$ são também uma medida de probabilidade no espaço mensurável $(\Omega, \mathbb{A}_\Omega)$ e estão habilitadas às aplicações citadas nas observações 2 à 4.

A forma de agregação, *i.e.* a forma funcional de g, depende da escolha do pesquisador/observador, o agente agregador. E esta decisão é novamente subjetiva e sujeita às características citadas para as avaliações. Aspectos como custo de formulação de g e conhecimento podem influenciar, mas provavelmente o mais relevante na escolha da função é o objetivo da agregação, a finalidade do valor representativo. Funções média aritmética e ponderada as são usuais.

4 Estratégias empíricas

Nesta seção apresentamos duas estratégias empíricas para o cálculo da credibilidade de determinado foco de uma variável econômica (*e.g.* uma meta de política econômica). A aplicação requer dados de crenças dos agentes; e a distinção das estratégias ocorre pelo formato das observações disponíveis – especificamente, das previsões dos agentes para a variável. Abordamos uma estratégia para quando os dados de expectativas são pontuais (um único valor) e outra para quando são probabilísticas (valores da distribuição de probabilidades para um conjunto discreto).

4.1 Crenças: cálculo com dados de probabilidades

Consideremos que possuímos informações ricas sobre as previsões de um grupo de agentes para determinada variável em diversos horizontes à frente, com registros das massas de probabilidade atribuídas por estes agentes a um domínio discreto dessa variável[16]. Neste caso, supomos que o domínio é uma partição de um intervalo dos números reais; uma partição com finitos intervalos de mesmo comprimento[17]. De posse desses dados, podemos construir suas funções crença e respectivas credibilidades para qualquer foco, bem como agregações para estas. Alternativamente, se o pesquisador possuir dados mais ricos e os agentes informam suas densidades de probabilidade no formato de uma função, para um domínio contínuo da variável, as funções crença já estão dadas e já é possível avançar para as credibilidades[18]. Também supomos períodos de anos e trimestres, que podem ser facilmente transformados para outros horizontes temporais.

Seja $\mathcal{A}$ o alvo "valor da variável para o ano $y{+}h$" e $\mathbb{P}_{\mathcal{A},\Omega}$ o respectivo conjunto de proposições ($\mathcal{A} = \pi_{y+h}$), com $\pi_{y+h} \in \Omega \subset \mathbb{R}$ e Ω conexo. Para cada trimestre $t \in \mathcal{T}{=}\{1, ..., T\}$ existe um conjunto de agentes $\mathcal{I}_t{=}\{1, ..., I_t\}$ que avaliam as proposições em $\mathbb{P}_{\mathcal{A},\Omega}$, relativas à inflação de $y{+}h$; onde $h \in \{0, ..., H\}$ é o deslocamento do horizonte de previsão a partir do ano $y \in \mathcal{Y}{=}\{1, ..., Y\}$ do trimestre t. Cada agente $i \in \mathcal{I}_t$ forma sua crença $\text{Б}_{i,t,y+h}$ relativa a $\mathcal{A}$; com $\text{Б}_{i,t,y+h}$ representando a função crença do agente i em t e para os valores da inflação do ano $y{+}h$. Então para cada t, quando acrecido das funções crença, o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ forma I_t espaços de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \text{Б}_{i,t,y+h})$, onde $\mathcal{B}_\Omega$ é a σ-álgebra de Borel. E para cada um desses espaços de probabilidade fazemos corresponder uma variável aleatória $\mathit{\Pi}_{i,t,y+h}$, todas definidas como a identidade $\mathit{\Pi}_{i,t,y+h}(\pi_{y+h}) = \pi_{y+h}$.

[16] Este é o caso para algumas variáveis do Survey of Professional Forecasters (SPF), organizado pelo Federal Reserve Bank of Philadelphia (Estados Unidos). Utilizamos, no exercício adiante, dados de massa de probabilidades atribuídas pelos agentes previsores para o núcleo da inflação daquele país.

[17] O cálculo também pode ser facilmente estendido para quando o conjunto de intervalos é infinito e a partição é referente ao intervalo $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Igualmente é aplicável para outros conjuntos mensuráveis infinitos contáveis se for estabelecida uma relação de equivalência entre eles.

[18] Se não for o conjunto dos números reais, mas outro mensurável não-contável, também basta estabelecer uma relação de equivalência entre estes para poder utilizar naquele o desenvolvimento a seguir.

Considere $[a_j, b_j) \subset \Omega$ um dos J intervalos de comprimento Δ; e seja a variável aleatória $\mathit{\Pi}^o_{i,t,y+h}$ do espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \text{Б}_{i,t,y+h})$, tal que $\mathit{\Pi}^o_{i,t,y+h}(\pi_{y+h}) = j$ se $\pi_{y+h} \in [a_j, b_j)$, mas igual a zero caso contrário. Então temos a função crença/probabilidade $\text{Б}^o_{i,t,y+h}$ induzida em $\mathcal{J}$, definida como: $\text{Б}^o_{i,t,y+h}\big(\mathit{\Pi}^o_{i,t,y+h} = j\big) \equiv \text{Б}_{i,t,y+h}\big([a_j, b_j)\big)$

Nós conhecemos as probabilidades/crenças $\text{Б}^o_{i,t,y+h}\big(\mathit{\Pi}^o_{i,t,y+h}{=}j\big)$ atribuídas pelo agente i devido aos dados com os registros de massas de probabilidades para cada ponto j ou intervalo $[a_j, b_j)$. Mas somos ignorantes quanto às probabilidades $\text{Б}_{i,t,y+h}\big([a, b)\big)$ para todos os intervalos $[a, b) \in \mathcal{B}_\Omega$ — isto é, não conhecemos sua função densidade (ainda que subjetiva) para $\mathit{\Pi}_{i,t,y+h}$, apenas a sua função massa para $\mathit{\Pi}^o_{i,t,y+h}$. Nosso intento agora é inferir $\text{Б}_{i,t,y+h}$ a partir de $\text{Б}^o_{i,t,y+h}$, escolhendo dois formatos *ad hoc* para a fdp. No primeiro, empregado para as fdps individuais e do agente médio, dividimos uniformemente a massa de cada intervalo entre seus pontos — uma função constante por partes. Com o segundo formato, aqui calculado apenas para o agente representativo, construímos fdps com curvas suaves e diferenciáveis através de um método não-paramétrico.

4.1.1 Fdps uniformes por intervalos

Considere $p^j_{i,t,y+h} := \text{Б}^o_{i,t,y+h}\big(\mathit{\Pi}^o_{i,t,y+h}{=}j\big)$, ou apenas $p^j_{i,t}$ quando o contexto permitir. Sejam as funções $u^j : \Omega \to \{0,\ \frac{1}{\Delta}\}$ definidas por partes tais que $u^j(\pi_{y+h}) = \frac{1}{b_j - a_j}$ se $\pi_{y+h} \in [a_j, b_j)$ e igual a zero caso contrário, com $1/(b_j{-}a_j) \equiv \frac{1}{\Delta}$. Então a fdp constante por intervalos, do agente i, no trimestre t e para o valor da variável no ano $y{+}h$, é denotada por $f^u_{i,t,y+h}$ (ou apenas $f^u_{i,t}$) e definida por:

$$f^u_{i,t}(\pi_{y+h}) = \sum_{j \in \mathcal{J}} p^j_{i,t} \cdot u^j(\pi_{y+h}) \tag{11}$$

com $\int_{a_j}^{b_j} f^u_{i,t}(\pi_{y+h}) d\pi = \text{Б}_{i,t,y+h}\big([a_j, b_j)\big)$, onde $p^j_{i,t} \cdot u^j(\pi_{y+h})$ é a densidade de probabilidade comum à todo $\pi_{y+h} \in [a_j, b_j)$, com valor igual a $\frac{1}{\Delta} \cdot \text{Б}_{i,t,y+h}\big([a_j, b_j)\big)$.

Então $f^u_{i,t}$ é uma função $spline$: uma polinomial por partes de grau zero, com nós internos (pontos de quebra) igual aos limites inferiores dos últimos $J{-}1$ intervalos e cujas funções base u^j são ***B-splines*** cardinais de grau zero[19]. Os valores $p^j_{i,t}$ são os coeficientes da $spline$. Para o agente representativo médio, agregamos as crenças em probabilidades médias $\bar{p}^j_t$ definidas por $\bar{p}^j_t = \frac{1}{I_t} \sum_{i \in \mathcal{I}_t} p^j_{i,t}$. Então, pela definição do agente médio, sua fdp uniforme por intervalos, $\bar{f}^u_{t,y+h}$ ou $\bar{f}^u_t$, é dada pela *spline*:

$$\bar{f}^u_t(\pi_{y+h}) = \sum_{j \in \mathcal{J}} \bar{p}^j_t u^j(\pi_{y+h}) \tag{12}$$

4.1.2 Fdps suaves

Para construir a fdp suave do agente médio, $\bar{f}_t$, ao invés de posicionar uma função constante em cada intervalo, utilizamos outra função base, suave, simétrica, centrada no intervalo e estendendo-se para os dois intervalos vizinhos. Utilizamos ***B-splines*** cardinais de ordem três, para splines de $J{-}1$ nós internos. A função $\bar{f}$ é então definida como uma combinação linear das ***B-splines*** (aqui ocultamos os subscritos de tempo e horizonte por clareza notacional) $\bar{f}(\pi) = \sum_{k=1}^{J+2} c_k B_k(\pi)$, onde B_k é a k-ésima ***B-spline*** de ordem três e c_k é o respectivo coeficiente. Em notação matricial, $\bar{f}(\pi) = B(\pi)^\top \mathbf{c}$.

Podemos escolher os coeficientes c_k com o propósito de interpolar os valores de $\bar{f}^u$ correspondentes à mediana dos intervalos $[a_j, b_j)$, de forma que a função $\bar{f}$ seja igual à imagem da função $\bar{f}^u$ nestas medianas. Este propósito pode ser obtido minimizando a soma do quadrado dos erros de probabilidade (SSPE) nos intervalos. Contudo, há o inconveniente dessa solução apresentar funções demasiadamente oscilatórias/multimodais, inclusive com trechos negativos. Como argumentamos, os dados individuais sugerem que as probabilidades intervalares e as densidades tendem a ser unimodais, e quando se trabalha com as médias, essa tendência se torna ainda mais plausível. Nós decidimos então reduzir essa oscilação e

[19] As *B-splines* também são definidas polinomialmente por partes. São construídas de forma recursiva e unicamente descritas pelo seu grau (ou ordem) e nós. Para mais detalhes sobre essas funções, ver *e.g.* Boor (2001).

deixar as fdps mais próximas dessa monotonicidade, evitando também os valores negativos, mas assumido certa perda de ajuste das probabilidades intervalares.

Usualmente as *splines* de suavização, que não interpolam os pontos, ajustam-se aos dados restritas a uma limitação de sua curvatura ou inclinação, através de uma "penalização à aspereza". Principalmente em dados de maior variância, o objetivo geralmente é diminuir as oscilações tornando a curva "mais horizontal" e suave. A escolha de $\mathbf{c}$ é feita então através da minimização de uma função de penalidade que pondera a SSPE e uma medida de curvatura geral da função. Geralmente a integral do quadrado da segunda derivada: a curvatura total $\int_\Omega [\bar{f}''(\pi)]^2 d\pi$. Mas nosso objetivo não é diminuir as oscilações e curva mais horizontal; é o contrário. Logo escolhemos penalizar a falta de inclinação da função através da integral do quadrado do inverso da primeira derivada, denotada por $R_{\bar{f}}$. Em termos matriciais:

$$\int_\Omega [\bar{f}'(\pi)]^2 d\pi = \int_\Omega [\mathbf{c}^\top B'(\pi)]^2 d\pi = \mathbf{c}^\top \left[\int_\Omega B'(\pi) B'(\pi)^\top d\pi \right] \mathbf{c} = \mathbf{c}^\top \mathbf{D} \mathbf{c} \tag{13}$$

onde $\mathbf{c}$ é o vetor dos coeficientes, $B'(\pi)$ é o vetor de valores da derivada das funções B_k no ponto π e $\mathbf{D}$ é a matriz simétrica resultante da integral entre colchetes. Devido às propriedades das *B-splines* com nós internos distintos, as funções *spline* resultantes têm derivadas contínuas no interior do domínio — precisamente, derivadas de ordem até duas unidades a menos que a ordem da *spline*. Logo, $\bar{f}, B_k \in C^1$. Então, fazendo de $\tilde{\mathbf{D}}$ a matriz cujos elementos são iguais ao inverso dos elementos de $\mathbf{D}$, estes todos diferentes de zero devido à integral, temos $R_{\bar{f}}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}^\top \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{c}$. Nós adicionamos essa medida de aspereza $R_{\bar{f}}(\mathbf{c})$ à SSPE para estimar $\hat{\mathbf{c}}$:

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg\min_{\mathbf{c}} \ \mathrm{SSPE}(\mathbf{c}) + \lambda R_{\bar{f}}(\mathbf{c}) \tag{14}$$

$$= (\mathbf{B}^\top \mathbf{B} + \lambda \tilde{\mathbf{D}})^{-1} \, \mathbf{B}^\top \mathbf{x} \tag{15}$$

onde $\mathbf{x}$ é o vetor das J probabilidades $\bar{p}^j$, $\mathbf{B}$ é a matriz $J \times (J+2)$ dos valores das integrais de cada *B-spline* nos intervalos e $\lambda \in \mathbb{R}_+$ é o parâmetro de suavização, representando o *tradeoff* entre a suavidade e o ajuste. Ele determina a intensidade da penalidade: se $\lambda \to 0$, então $R_{\bar{f}}$ tende a ter pouca influência na escolha de $\mathbf{c}$; mas se λ é significativamente maior que zero, então inclinações $\bar{f}'(\pi)$ próximas de zero têm impacto relevante e, com a minimização desses valores, $\bar{f}$ tende a ser menos horizontal.

Os parâmetros λ da estimação (15) foram escolhidos separadamente para cada fdp, por meio de uma *generalized cross validation* adaptada (GCVa), também específica para essa aplicação. Nossa GCVa é uma modificação da medida GCV desenvolvida por Craven e Wahba (1978). Enquanto a original utiliza a SSE, nós empregamos a SSPE:

$$\mathrm{GCVa}(\lambda) = \frac{J^{-1}\ \mathrm{SSPE}(\lambda)}{\left[J^{-1}\ \mathrm{traco}\big(I - S(\lambda)\big)\right]^2} \tag{16}$$

$$\hat{\lambda} = \arg\min_{\lambda} \mathrm{GCVa}(\lambda) \tag{17}$$

onde $S(\lambda) = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\top \mathbf{B} + \lambda \mathbf{R})^{-1} \, \mathbf{B}^\top$ é o operador de projeção na estimação da fdp específica e I é a matriz identidade conformável. Para um dado λ, (15) tem apenas uma solução, que é obtida analiticamente, resultando na medida $\mathrm{SSPE}(\hat{\mathbf{c}}(\lambda))$ — portanto GCVa é função apenas de λ. O valor ótimo $\hat{\lambda}$ é obtido numericamente[20].

4.2 Crenças: cálculo com dados pontuais

Nesta seção os dados para inferir sobre as crenças do agente representativo são as previsões pontuais referidas no início da seção. Pela definição do agente representativo médio, sua expectativa probabilística para a variável (e respectiva distribuição de probabilidade) é a média das expectativas (distribuições)

[20] Como medida adicional, também condicionamos $\mathbf{c} \geq 0$ para diminuir as oscilações e evitar os valores negativos. Fizemos isso no mesmo algoritmo de força bruta da otimização numérica de λ. Estabelecemos o limite inferior $\lambda_0 = 0 \leq \lambda$ e utilizamos passos de iguais $10^{-6} = \lambda_s - \lambda_{s-1}$ na iteração. Em cada passo calculamos $\hat{\mathbf{c}}(\lambda_s)$, impomos $c_k = 0$ se $c_k < 0$ e depois calculamos $\mathrm{SSPE}(\hat{\mathbf{c}}(\lambda_s))$ e $S(\lambda_s)$ para obter $\mathrm{GCVa}(\lambda_s)$. Conforme (17), o λ_s ótimo é o que minimiza GCVa.

individuais. Nesta estratégia supomos que a previsão pontual informada pelo agente individual na pesquisa é a esperança baseada na sua distribuição de probabilidade subjetiva. Devido à nossa ignorância quanto à essas distribuições específicas dos agentes, supomos também, por simplicidade, que são todas iguais a uma distribuição paramétrica K conhecida. Uma distribuição simétrica, unimodal, diferenciável e de variância finita e positiva igual a σ^2, mas distinta entre os agentes apenas no parâmetro da média.

Seja $\bar{\pi}_{i,t+h}$ a expectativa pontual do agente i em t para a variável aleatória do trimestre $t{+}h$, denotada por $\mathit{\Pi}_{i,t+h}$, que assume valores $\pi_{t+h} \in \mathbb{R}$, com $h \in \{0, ..., H\}$[21]. Considere $K_{i,t+h}$ a fdp representativa da sua expectativa probabilística para $\mathit{\Pi}_{i,t+h}$, pertencente à família paramétrica K. Sua média é $\bar{\pi}_{i,t+h}$ e o desvio-padrão é σ; este último comum a todo agente i e todo horizonte $t{+}h$. Então as densidades médias $f_t(\pi_{t+h})$ do agente representativo médio são dadas por[22]: $f_t(\pi_{t+h}) = \frac{1}{I_t}\sum_{i=1}^{I_t} K_i(\pi_{t+h})$.

Defina a variável $\mathit{\Pi}^0_{i,t+h} = \mathit{\Pi}_{i,t+h} - \bar{\pi}_{i,t+h}$ de média zero. Seja K_0 sua fdp. Então $K_0(\pi_{t+h} - \bar{\pi}_{i,t+h}) = K_i(\pi_{t+h})$. Se também impormos o desvio-padrão unitário, temos $\frac{1}{\sigma}K_0\left(\frac{\pi_{t+h} - \bar{\pi}_{i,t+h}}{\sigma}\right) = K_i(\pi_{t+h})$[23]. Assim K_0 é padronizada e a decisão por σ é explícita. E $f_t(\pi_{t+h})$ pode ser reescrito como:

$$f_t(\pi_{t+h}) = \frac{1}{\sigma I_t} \sum_{i=1}^{I_t} K_0\left(\frac{\pi_{t+h} - \bar{\pi}_{i,t+h}}{\sigma}\right) \tag{18}$$

Logo, a inferência da expectativa probabilística do agente representativo através de (18) corresponde à estimação das densidades via *kernel density estimation* (KDE), usando os pontos $\{\bar{\pi}_{i,t+h}\}_{i\in\mathcal{I}_t}$. A função *kernel* é K_0 e σ é a *bandwidth*. A escolha pelo formato (família) da distribuição K, pressuposta comum a todos os agentes, e o correspondente *kernel* K_0, não é tão importante quanto a escolha pela dispersão da distribuição (σ), que por sua vez também serve de parâmetro de suavização na estimação das densidades (WAND; JONES, 1995).

Para buscar o comportamento unimodal e suave das fdps, evidenciado pelos dados, usamos o conservador "princípio da suavização máxima", descrito por Terrell (1990). Com ele escolhemos o limite superior dos *bandwidth* AMISE-ótimos, donominado por Wand e Jones (1995) de *oversmoothed bandwidth* (OS)[24]. Também, como argumentado por Terrell (1990), estimativas de densidade sub-suavizadas tendem a apresentar características espúrias, tais como assimetrias e múltiplas modas, que surgem apenas devido à aleatoriedade da amostra. O método ainda tem a vantagem de não ser dependente de *cross-validation*, por vezes arbitrária devido à escolha da técnica, também geralmente intensiva computacionalmente e sujeita a variações amostrais. Quanto ao *kernel*, fizemos a opção pelo Epanechnikov, que apresenta a maior eficiência dentre as funções, apesar de serem pequenas as diferenças de eficiência.

4.3 Credibilidade da meta de inflação nos EUA

Nesta aplicação empírica utilizamos as expectativas para o núcleo da inflação dos gastos de consumo pessoal (*Core Personal Consumption Expenditures* — CPCE) dos Estados Unidos. Nos propomos a calcular a credibilidade referente a meta de inflação implícita daquela economia, usando os dados do *Survey of Professional Forecasters* (SPF), gerenciado pelo *Federal Reserve Bank of Philadelphia*.

Os dados têm periodicidade trimestral e referem-se a previsões para a variação percentual do índice de preços CPCE, dessazonalizada, em taxa anualizada. Os dados do SPF para essas expectativas de inflação iniciam no primeiro trimestre de 2007 (2007Q1)[25] e neste exercício utilizamos a amostra até o trimestre

[21] Quando for o caso dos dados, também podem ser contruídas fdps para horizontes anuais $y{+}h$, denotadas por $f_{t,y+h}(\pi_{y+h})$.

[22] Para resumir a notação também usamos $f(\pi_{t+h})$ em vez de $f_{t,t+h}(\pi_{t+h})$; e $K_i(\pi_{t+h})$ em vez de $K_{i,t,t+h}(\pi_{t+h})$.

[23] As fdps são homogêneas de grau -1, portanto $K(u/\sigma) = \sigma{\cdot}K(u)$. A função desvio-padrão possui grau de homogeneidade igual a 1, então $\sigma{\cdot}dp(\mathit{\Pi}/\sigma) = dp(\mathit{\Pi})$. Se $dp(\mathit{\Pi}){=}\sigma$, temos $dp(\mathit{\Pi}/\sigma) = 1$.

[24] AMISE é o erro quadrático integrado médio assintótico, e varia de acordo com o valor do fator de escala de f_t (ou dos dados, quando na estimação) — ver Terrell (1990) para mais detalhes. Para a seleção do *oversmoothed bandwidth* empregamos o desvio-padrão como fator de escala, dois estágios para a estimação funcional e, no cálculo computacional, cerca de quatro mil pontos igualmente espaçados sobre os quais o *binning* é realizado para obter a aproximação funcional do *kernel*.

[25] Usamos a abreviação de 2007Q1 ou 07Q1 para nos referir ao trimestre 1 do ano de 2007, por exemplo.

2022Q2, totalizando 62 trimestres. A média desta amostra é de 33 respondentes por trimestre[26]; mínimo de 24 e máximo de 40.

Há previsões para inflações trimestrais, anuais e de períodos de cinco e de dez anos à frente. A previsão para o trimestre é relativo à variação percentual do índice deste período comparado com o anterior. A previsão para o ano é referente à variação percentual do índice do quarto trimestre deste ano, comparado com o índice do quarto trimestre do ano anterior — a variação percentual (anualizada) é semelhante para os alvos de cinco e de dez anos à frente.

Os dados com horizontes de cinco e dez anos à frente são para previsões pontuais. Os horizontes anuais das expectativa pontuais correspondem às previsões para o ano corrente e para os dois anos posteriores ao da pesquisa. E são cinco horizontes trimestrais para as previsões pontuais, correspondentes ao trimestre corrente e os quatro seguintes ao da pesquisa[27].

As previsões probabilísticas da SPF são para apenas dois horizontes: o ano corrente e o seguinte ao da pesquisa. As probabilidades são registradas pelo agente previsor em dez opções que representam intervalos de valores, com comprimento de Δ=0,5p.p.: oito intervalos entre 0 e 4 (aberto), mais os dois intervalos <0 e ≥ 4. Com os dois horizontes e os 62 trimestres de registro, temos um total de 4030 expectativas em probabilidades não nulas nesta amostra. Deste total, somente 24 expectativas concentram toda a probabilidade em apenas um destes intervalos. Em todas as previsões probabilísticas da amostra, exceto em $0{,}2\%$ delas (total de oito), as probabilidades foram não-decrescentes antes da moda (a opção de intervalo com a maior probabilidade) e não-crescentes após a moda — considerando as probabilidades das opções interiores (entre 0 e 4). Funções com essa característica são unimodais, portanto assumimos que o formato das fdps estimadas são unimodais. E ajustamos os intervalos-SPF para formarem uma partição e incluímos quatro intervalos conexos de comprimento $0{,}5$ em cada extremo, construindo o conjunto convexo $[-2{,}5; 6{,}5]$. A finalidade é repartir entre eles a massa de probabilidade dos intervalos-SPF de comprimento infinito <0 e ≥ 4[28].

Nós procedemos ao cálculo das credibilidades conforme o conceito proposto e através das estratégias empíricas expostas nas seções anteriores. Consideraremos, a título de exercício, um foco ao redor de 2%, para todos os horizontes. O valor de 2% é, desde 2012, o estabelecido pelo FOMC (*Federal Open Market Committee*) como o objetivo de longo-prazo para a inflação do CPCE[29]. Inicialmente vamos usar como foco o intervalo $[1{,}5; 2{,}5]$ (em %).

O Figura 2 exemplifica em três fdps o cálculo da credibilidade. No painel direito, a probabilidade 0,998 atribuída em 2007Q3 pelo agente representativo médio (da SPF; dados pontuais) ao intervalo $[1{,}5; 2{,}5]$ para a inflação de 2007. Este valor é o quanto o agente médio acreditava (na veracidade da proposição de) que a inflação resultaria dentro deste intervalo e, portanto, é a credibilidade dessa proposição referente a esse agente naquele período. No painel esquerdo a área 0,758 referente à curva vermelha (fdp suave do agente médio; dados em probabilidade) é a credibilidade, em 2016Q4 e referente ao agente médio, da proposição de que a inflação em 2016 resultaria no intervalo $[1{,}5; 2{,}5]$. Considerando a fdp uniforme por intervalos, a credibilidade foi 0,793; algo diferente devido às considerações expostas na subseção 4.1.2. Este último valor é perfeitamente correto (relativamente aos dados) e independe do formato inferido à fdp, pois o intervalo considerado, $[1{,}5; 2{,}5]$, coincide com os intervalos dos dados (opções SPF). Caso não coincidisse,

26 Considerando apenas as respostas não nulas para as previsões pontuais dos horizontes trimestrais da amostra.

27 Também são coletadas expectativas para o valor da inflação do trimestre anterior ao da pesquisa; valor por vezes recalculado posteriormente. Ignoramos essas expectativas.

28 Seja $P(\geq 4{,}0)$ a probabilidade registrada para ≥ 4 e $\delta = \frac{P(\geq 4{,}0)}{P(3{,}5\ \ 3{,}9)}$, então dividimos $P(\geq 4{,}0)$ entre os intervalos conforme segue. Se $\delta \leq 1$, então consideramos que $P\big([4{,}0; 4{,}5)\big) = P(\geq 4{,}0)$. Se $\delta \leq 1{,}34 \approx \sum_{i=1}^{3} 0{,}65^i$, então dividimos $P(\geq 4{,}0)$ entre os três intervalos ajustados contidos em $[4{,}0; 5{,}5)$ — cada um com no máximo 65% da probabilidade atribuída ao anterior. De forma semelhante, se $1{,}34 < \delta \leq 2{,}05 \approx \sum_{i=1}^{4} 0{,}75^i$, então dividimos $P(\geq 4{,}0)$ entre os quatro intervalos contidos em $[4{,}0; 6{,}0)$. Por fim, se $2{,}05 < \delta \leq 3{,}15 \approx \sum_{i=1}^{5} 0{,}85^i$, então dividimos $P(\geq 4{,}0)$ entre os cinco intervalos contidos em $[4{,}0; 6{,}5)$. Se $\delta > 3{,}15$ em algum dos extremos, descartamos a observação devido à elevada falta de informação. Fizemos essa divisão simetricamente para $P(< 0)$.

29 Este valor foi tornado público inicialmente com o *Monetary Policy Report to the Congress*, do *Board of Governors of the Federal Reserve System*, de fevereiro de 2012 — ver <www.federalreserve.gov>. Supomos, também a título de exercício, que essa meta é usada para todos os horizontes.

a credibilidade com a fdp suave poderia fornecer melhor estimativa, principalmente se o intervalo fosse pequeno. Enfim, dada a fdp (função crença; expectativa probabilística), é fácil conhecer a crença do agente para qualquer foco que se queira e a credibilidade da respectiva proposição.

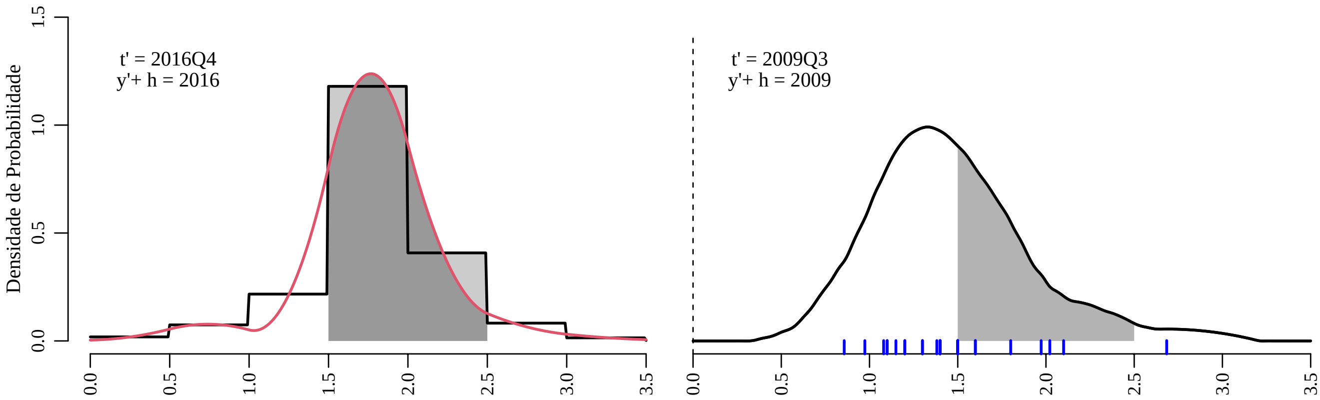

Figura 2: Densidades e credibilidade

Nota: No painel esquerdo as fdps $\bar{f}$ (vermelha) e $\bar{f}^u$ (preta) em t'=2016Q4 para a inflação de $y'+h$=2016 e as correspondentes áreas (probabilidades/credibilidades) referentes ao intervalo $[1{,}5; 2{,}5]$. No direito, a $f_{09Q3}(\pi_{2009})$ e sua área.

Para o foco que coincida com um dos intervalos das opções de registro na SPF, ou uma união destes, não há necessidade de inferência da fdp, pois a credibilidade é igual à probabilidade atribuída à opção, ou à soma delas no caso da união. Com a v.a. contínua (ou contínua por partes), a credibilidade com o foco em um ponto (ou conjunto contável de pontos) será sempre zero, inclusive a meta pontual de inflação do FOMC. Contudo, é pouco provável que este comitê estabeleça uma meta com probabilidade nula de ser atingida. Possivelmente ele não tenha como meta, de fato, um ponto de um *continuum*, mas considere algum arrendondamento para a variável, tornando-a discreta; ou considere uma meta intervalar, centrada em 2% e com uma banda de tolerância — arredondar é o mesmo que considerar intervalos da variável com o mesmo comprimento do arredondamento. O arredondamento e o intervalo da meta podem ser subjetivos, ou formalizados internamente, sem a divulgação. E com os agentes que avaliam a meta, é possível de ocorrer o mesmo: consideram um arredondamento ou meta intervalar subjetivamente. No presente exercício nós inferimos fdps para as expectativas e possibilitamos o cálculo para qualquer foco, mas apresentamos o resultado somente para a meta intervalar $[1{,}5; 2{,}5]$.

Na Figura 3 apresentamos as séries temporais de credibilidade para todos os horizontes. No painel superior mostramos as séries para a inflação anual de horizonte h=0, obtidas com os dados pontuais e em probabilidades. É possível verificar graficamente a grande correlação entre elas e a diferença de variância. A série calculada com os dados em probabilidades tem menor variância e picos e vales menos proeminentes, pois as fdps inferidas com estes dados apresentaram dispersões mais regulares. Muitas fdps de dados pontuais tiveram dispersões pequenas, enquanto outra grande quantidade apresentou dispersão alta, por isso a maior variância da série correspondente. Os maiores picos e vales ocorreram nos quartos trimestres, onde a incerteza (dispersão das densidades) sobre o resultado do ano corrente é bem menor. Este padrão sazonal ocorreu de forma significativa em quase todas as séries para inflação anual.

No painel central da figura, as séries de credibilidade com os dados pontuais para a inflação anual dos horizontes h=$1, 2$ e para a inflação média dos próximos cinco (h5) e dez (h10) anos à frente; além da série de horizonte h=1 calculada com os dados em probabilidades. A variância das séries nos horizontes deste painel é visivelmente menor que as séries para h=0. As credibilidades para o curto-prazo (h=$1, 2$) de dados pontuais seguiram trajetórias muito semelhantes, enquanto a série para h=1 de dados em probabilidades foi geralmente inferior à sua correspondente. As séries para o médio-prazo h5 e h10 também tiveram trajetórias idênticas. No painel inferior estão as séries de credibilidade para as inflações trimestrais, com horizontes h=$0, 1, 2, 3, 4$, calculadas a partir de dados pontuais. Novamente se observou a série para h=0 com maior variância. è provável as incertezas experimentadas nos trimestres finais do ano relativas à inflação do ano corrente sejam menores ainda que as relativas à inflação sobre o trimestre corrente, já que a primeira é uma média de valores, em sua maioria já conhecidos.

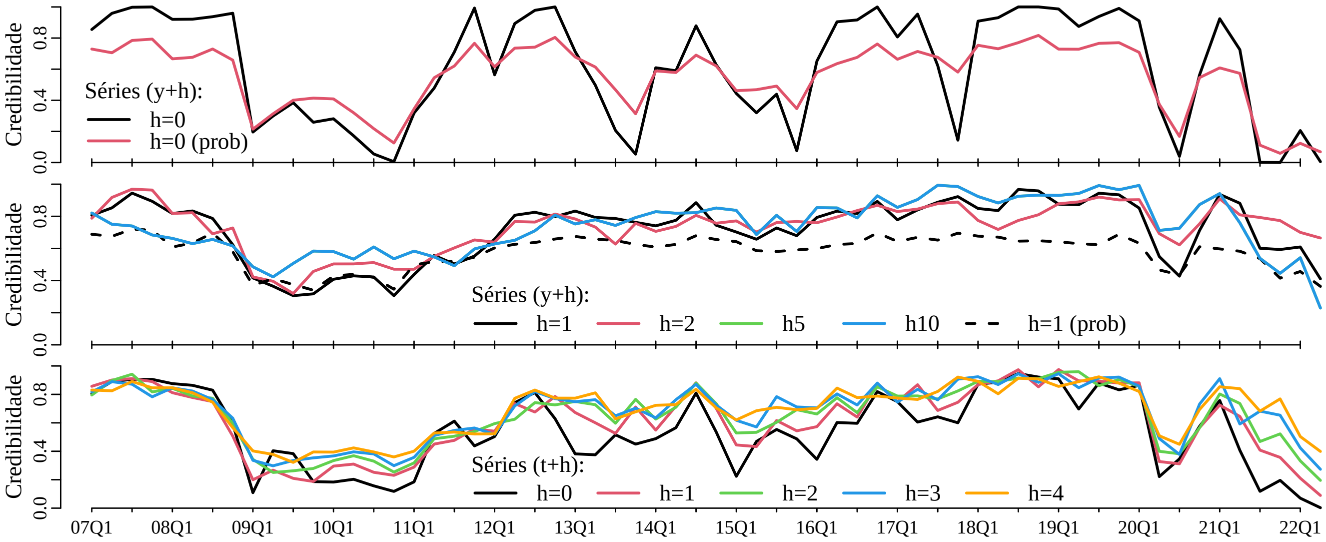

Figura 3: Credibilidades por horizontes e tipos de dados

Nota: No painel superior, as credibilidades com foco $[1{,}5; 2{,}5]$ para as inflações anuais no horizonte $h{=}0$, a partir dos dados pontuais e em probabilidades. No painel central, o mesmo foco, usando dados pontuais para a inflação anual dos horizontes $h{=}1, 2$ e para a inflação média (em taxa anualizada) dos próximos cinco (h5) e dez (h10) anos à frente; também a série de horizonte $h{=}1$ calculada com os dados em probabilidades. No inferior, o mesmo foco para as inflações trimestrais, para os horizontes $h{=}0, 1, 2, 3, 4$ e a partir de dados pontuais.

Podemos construir uma série temporal de credibilidades com o período-alvo fixo e h móvel. Assim, para a inflação do trimestre $t{+}h$ temos as previsões com origem em $...t{+}h{-}2, t{+}h{-}1, t{+}h{-}0$; e semelhante para a inflação anual. Esta série é útil ao pesquisador que quer examinar a evolução da credibilidade para uma inflação de período fixo, podendo fornecer *ex post* explicações sobre as causas do estado da natureza no período-alvo, ou *ex ante* previsões para este. Na Figura 4 mostramos estas séries de credibilidade referente às inflações anuais para os anos ímpares de 2009 à 2021. Como as expectativas são coletadas para até dois anos à frente, incluindo o ano corrente, temos 12 observações em cada curva. É possível identificar alguns padrões, como as abruptas mudanças nos trimestres $y'Q1$, que sugerem revisões mais profundas nas expectativas quando inicia o ano para o qual se faz a previsão.

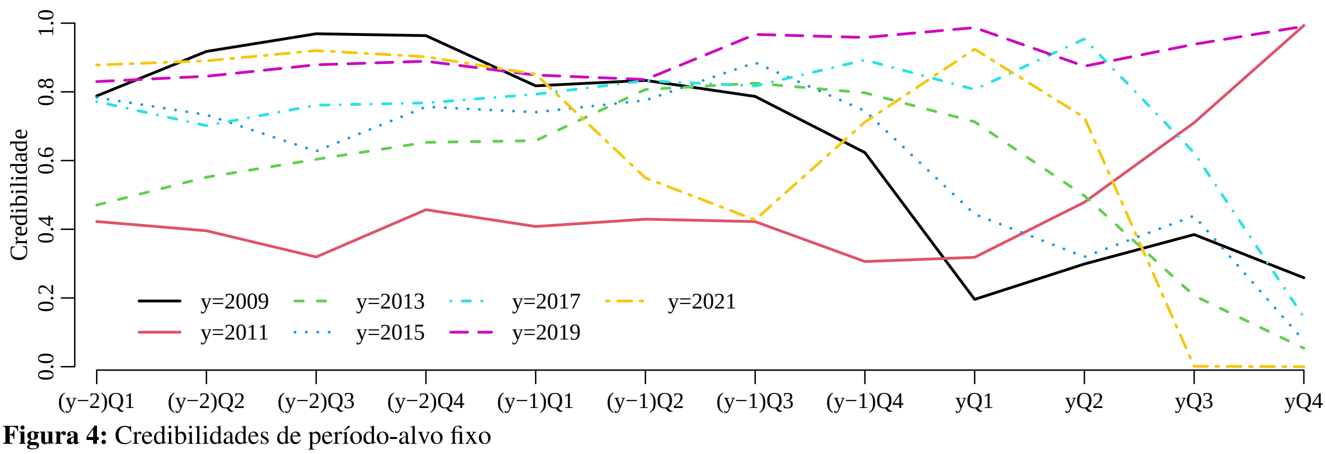

Figura 4: Credibilidades de período-alvo fixo

Nota: Nas curvas de credibilidade o período-alvo da inflação é y e o foco é $[1{,}5; 2{,}5]$. Os dados são de expectativas pontuais.

5 Considerações finais

Neste estudo elaboramos um conceito de credibilidade que considera diversas interpretações do construto na área monetária, tornando seu valor uma medida de probabilidade. Apresentamos duas estratégias empíricas para dois tipos de dados, fazendo uso de métodos não-paramétricos para a construção das crenças dos agentes. E realizamos uma aplicação empírica com os dados de expectativas de inflação do *Survey of Professional Forecasters* (SPF) gerenciado pelo FED/EUA.

Parte da divergência sobre a credibilidade, sua importância, medida e uso tem sido causada pela deficiência de sua definição e pela falta de consistência do seu objeto, seja no meio acadêmico ou profissional. A evolução do construto sob essa deficiência suscitou diversas ramificações interpretativas e diversas propostas de mensuração para estudos empíricos e teóricos específicos. As medidas referem à credibilidade do objeto junto a todos os agentes da economia, numa forma agregada que sequer especificava a amplitude da economia (se nacional ou regional, *e.g.*). Também, ou referem a um único período-alvo ou são intertemporais. Muitos índices foram propostos, cada qual utilizando uma função perda distinta e *ad hoc*, cujas possibilidades são infinitas.

Como proposta de organização do conceito, elaboramos uma interpretação e uma medida de credibilidade, que pode se estender para além da teoria monetária. Utilizamos a semântica natural da palavra e, a partir dela e de sua sintaxe construída, buscamos formalizá-la na teoria axiomática da probabilidade: uma forma simples que contempla a mais ampla gama de definições/medidas já empregadas nesse contexto. A interpretação é rica nas dimensões temporais e físicas: ilimitada nos período-alvo e nos agentes. Distingue a credibilidade relativamente aos agentes, potencialmente com crenças distintas, mas pode ser agregada para um agente representativo. Quanto ao foco da credibilidade, também é flexível, aninhando infinitas possibilidades.

Conceituamos a credibilidade como o estado de uma proposição, relacionada a crença de um agente na veracidade dessa proposição. A intensidade da crença, na medida de probabilidade, consiste a medida de credibilidade da proposição junto ao agente. As proposições são flexíveis e abarcam quaisquer das interpretações para as credibilidades já empregadas; mas devem ser configuradas para o sentido da veracidade, devem ter um alvo, um foco e um domínio do foco mensurável. A proposta permite agregar proposições, crenças e credibilidades; e por conseguinte, estabelecer crenças sobre proposições agregadas e credibilidades sobre crenças agregadas.

Na aplicação empírica para o conceito, utilizamos *splines* para construir, a partir de dados de expectativas probabilísticas, as funções crença (ou fdp) uniformes por partes e suaves dos agentes, para a proposição de que a inflação naquela economia será determinado valor. Para os dados de expectativas pontuais, empregamos *kernel density estimation*. Calculamos a credibilidade agregada (do grupo de agentes do SPF) para o foco da meta de inflação, que consideramos ser o intervalo $[1{,}5; 2{,}5]$, para diversos horizontes (trimestrais, anuais e plurianuais) à frente.

Verificamos que os dados de expectativas probabilísticas são muito mais ricos para a estimação das credibilidades, propiciando inclusive a identificação, e não a estimação, da real crença de agentes individuais, e as correspondentes credibilidades associadas, nas proposições sobre a inflação quando o foco é uma das opções da pesquisa. Documentamos a credibilidade, construindo as séries temporais para os diferentes horizontes, bem como as séries para períodos-alvo fixos. No entanto, não buscamos correlacionar as características e dinâmica da credibilidade mensurada com as demais variáveis econômicas daquele país, ou explicar a dinâmica observada. Este é um trabalho a ser realizado em outra oportunidade. No entanto, ainda assim comprovamos a utilidade do conceito e da medida propostos.

Referências

BACKUS, D.; DRIFFILL, J. Rational Expectations and Policy Credibility Following a Change in Regime. *The Review of Economic Studies*, v. 52, n. 2, p. 211, abr. 1985.

BALL, L. Disinflation with imperfect credibility. *Journal of Monetary Economics*, v. 35, n. 1, p. 5–23, fev. 1995.

BARRO, R. J.; GORDON, D. B. Rules, discretion and reputation in a model of monetary policy. *Journal of Monetary Economics*, v. 12, n. 1, p. 101–121, jan. 1983.

BLINDER, A. S. Central-Bank Credibility: Why Do We Care? How Do We Build It? *American Economic Review*, v. 90, n. 5, p. 1421–1431, dez. 2000.

BOMFIM, A. N.; RUDEBUSCH, G. D. Opportunistic and Deliberate Disinflation under Imperfect Credibility. *Journal of Money, Credit and Banking*, v. 32, n. 4, p. 707, nov. 2000.

BONOMO, M.; CARVALHO, C. Imperfectly Credible Disinflation under Endogenous Time-Dependent Pricing. *Journal of Money, Credit and Banking*, v. 42, n. 5, p. 799–831, ago. 2010.

BOOR, C. de. *A practical guide to splines*. Revised edition. New York: Springer, 2001.

CECCHETTI, S. G.; KRAUSE, S. Central bank structure, policy efficiency, and macroeconomic performance: exploring empirical relationships. *Review*, v. 84, 2002.

CRAVEN, P.; WAHBA, G. Smoothing noisy data with spline functions. *Numerische Mathematik*, v. 31, n. 4, p. 377–403, dez. 1978.

CUKIERMAN, A. *Central Bank Strategy, Credibility, and Independence: Theory and Evidence*. Cambridge, Mass.: The MIT Press, 2003.

CUKIERMAN, A.; MELTZER, A. H. The Credibility of Monetary Announcements. In: NEUMANN, M. (Ed.). *Monetary Policy and Uncertainty*. [S.l.]: Nomos Verlagsgesellschaf, 1986.

CUKIERMAN, A.; MELTZER, A. H. A Theory of Ambiguity, Credibility, and Inflation under Discretion and Asymmetric Information. *Econometrica*, v. 54, n. 5, p. 1099, set. 1986.

DEBORTOLI, D.; LAKDAWALA, A. How Credible Is the Federal Reserve? A Structural Estimation of Policy Re-Optimizations. *American Economic Journal: Macroeconomics*, v. 8, n. 3, p. 42–76, jul. 2016.

DOGAN, M. K.; BOZDEMIR, G. The Effects of Credibility on Interest Rates in Turkey. *Eurasian Journal of Business and Economics*, v. 7, n. 14, p. 71–90, nov. 2014.

FAUST, J.; SVENSSON, L. E. O. Transparency and Credibility: Monetary Policy With Unobservable Goals. *International Economic Review*, v. 42, n. 2, p. 369–397, 2001.

FELLNER, W. The Credibility Effect and Rational Expectations: Implications of the Gramlich Study. *Brookings Papers on Economic Activity*, v. 1979, n. 1, p. 167–189, 1979.

FELLNER, W. J. *Towards a reconstruction of macroeconomics: problems of theory and policy*. Washington: American Enterprise Institute for Public Policy Research, 1976.

FONSECA, E. G. d. On the misuse of language: Ordinary language, formalism and the false-security pitfall. In: *Beliefs in action: economic philosophy and social change*. Cambridge [England]; New York: Cambridge University Press, 1991.

FORDER, J. Credibility in Context: Do Central Bankers and Economists Interpret the Term Differently? *Econ Journal Watch*, v. 1, n. 3, p. 413–426, dez. 2004.

FORDER, J. The theory of credibility: confusions, limitations and dangers. In: *Neo-Liberal Economic Policy*. Cheltenham, UK; Northampton, USA: Edward Elgar Publishing, 2004.

GIBBS, C. G.; KULISH, M. Disinflations in a model of imperfectly anchored expectations. *European Economic Review*, v. 100, p. 157–174, nov. 2017.

HAAN, J. d.; EIJFFINGER, S. C. W.; WALLER, S. *The European Central Bank: credibility, transparency, and centralization*. Cambridge, Mass: MIT Press, 2005. (CESifo book series).

HAYO, B.; NEUENKIRCH, M. Central bank communication in the financial crisis: Evidence from a survey of financial market participants. *Journal of International Money and Finance*, v. 59, p. 166–181, dez. 2015.

HERZOG, T. N. *Introduction to credibility theory*. 4th ed. ed. Winsted, CT: ACTEX Publications, 2010.

HUH, C. G.; LANSING, K. J. Expectations, credibility, and disinflation in a small macroeconomic model. *Journal of Economics and Business*, v. 52, n. 1, p. 51–86, jan. 2000.

IRELAND, P. N. Optimal disinflationary paths. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 19, n. 8, p. 1429–1448, nov. 1995.

JOHNSON, T. J.; KAYE, B. K. Reasons to believe: Influence of credibility on motivations for using social networks. *Computers in Human Behavior*, v. 50, p. 544–555, set. 2015.

KLETTKE, B.; HALLFORD, D.; MELLOR, D. Perceptions of credibility of sexual abuse victims across generations. *International Journal of Law and Psychiatry*, v. 44, p. 91–97, jan. 2016.

KREPS, D. M.; WILSON, R. Reputation and imperfect information. *Journal of economic theory*, v. 27, n. 2, p. 253–279, 1982.

KYDLAND, F. E.; PRESCOTT, E. C. Rules Rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans. *Journal of Political Economy*, v. 85, n. 3, p. 473–491, 1977.

LEMOINE, M.; LINDé, J. Fiscal consolidation under imperfect credibility. *European Economic Review*, v. 88, p. 108–141, set. 2016.

LUCE, R. D.; TUKEY, J. W. Simultaneous conjoint measurement: A new type of fundamental measurement. *Journal of Mathematical Psychology*, v. 1, n. 1, p. 1–27, jan. 1964.

MALIKANE, C.; MOKOKA, T. Monetary policy credibility: A Phillips curve view. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, v. 52, n. 3, p. 266–271, ago. 2012.

MCCALLUM, B. T. *Credibility and Monetary Policy*. [S.l.], 1984.

MENDONçA, H. d. Towards credibility from inflation targeting: the Brazilian experience. *Applied Economics*, v. 39, n. 20, p. 2599–2615, 2007.

MENDONçA, H. F. d.; SOUZA, G. J. d. G. e. Inflation targeting credibility and reputation: The consequences for the interest rate. *Economic Modelling*, v. 26, n. 6, p. 1228–1238, nov. 2009.

MITCHELL, R. *The language of economics: socially constructed vocabularies and assumptions*. London: Palgrave Macmillan, 2016.

N'DIAYE, P. M. P.; LAXTON, D. *Monetary Policy Credibility and the Unemployment-Inflation Tradeoff; Some Evidence From 17 Industrial Countries*. [S.l.], 2002.

NEUENKIRCH, M.; TILLMANN, P. Inflation targeting, credibility, and non-linear Taylor rules. *Journal of International Money and Finance*, v. 41, p. 30–45, mar. 2014.

NICOLAE, A.; NOLAN, C. The Impact of Imperfect Credibility in a Transition to Price Stability. *Journal of Money, Credit and Banking*, v. 38, n. 1, p. 47–66, 2006.

PERSSON, T.; TABELLINI, G. E. *Macroeconomic policy, credibility and politics*. Chur, Switzerland ; New York, N.Y: Harwood Academic Publishers, 1990.

PERSSON, T.; TABELLINI, G. E. (Ed.). *Monetary and fiscal policy*. Cambridge, Mass: MIT Press, 1994.

RASKIN, D. C.; HONTS, C.; KIRCHER, J. (Ed.). *Credibility assessment: scientific research and applications*. Amsterdam: Academic Press, 2014.

SCHMIDT-HEBBEL, K. et al. Inflation Targeting in Brazil, Chile, and Mexico: Performance, Credibility, and the Exchange Rate. *Economía*, v. 2, n. 2, p. 31–89, 2002.

SVENSSON, L. E. *The simplest test of inflation target credibility*. Cambridge, USA, 1993.

TERRELL, G. R. The Maximal Smoothing Principle in Density Estimation. *Journal of the American Statistical Association*, v. 85, n. 410, p. 470–477, 1990.

WAND, M. P.; JONES, M. C. *Kernel Smoothing*. Boston: Springer US, 1995.

YAGER, R. R.; LIU, L. (Ed.). *Classic Works of the Dempster-Shafer Theory of Belief Functions*. Norwalk: Springer, 2007.